# Tema di Analisi I, $2^\circ$ modulo, $01/02/2010$

Luciano Battaia[(*)]

Università di Udine e Università di Trieste, Sede di Pordenone

**Esercizio 1.** Nello spazio riferito a un sistema ortonormale $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ sono date le rette[(1)]

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}, \quad s\colon \begin{cases} x + 4y + 2z - 16 = 0 \\ 2x + y + 4z - 18 = 0 \end{cases}.$$

Si chiede:

1. di provare che le due rette sono sghembe;
2. di trovare le coordinate dei punti $P \in r$ e $Q \in s$ tali che il segmento $\overline{PQ}$ realizzi la minima distanza tra $r$ ed $s$;
3. di trovare il piano $\pi$, passante per il punto medio $M$ di $\overline{PQ}$, parallelo sia ad $r$ che a $s$.

*Risoluzione.* Le due rette date si possono scrivere in equazione parametrica, per esempio come segue:

$$r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}, \quad s\colon \begin{cases} x = -2u \\ y = 2 \\ z = 4 + u \end{cases}.$$

Due vettori direttori delle rette sono (tra i tanti possibili): $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ e $\vec{v}_s = (-2, 0, 1)$. Quindi le due rette non sono parallele. Cercando l'intersezione tra le rette[(2)] si perviene al sistema di 3 equazioni nelle incognite $t$ e $u$ seguente:

$$\begin{cases} -2u = 2 + t \\ 2 = 2 + t \\ 4 + u = -t \end{cases},$$

che non ha soluzioni. Se ne conclude che le rette sono sghembe.

Per rispondere alla domanda 2 ci sono diverse strategie. Scegliamo innanzitutto quella più "geometrica", trovando il piano per $r$ e parallelo alle due rette, successivamente la proiezione $s'$ di $s$ su questo piano, il punto $P$ di intersezione tra $r$ ed $s'$ e infine la proiezione $Q$ di $P$ su $s$.

Il punto $P_0 = (2, 2, 0)$ appartiene ad $r$. Il piano $\pi_r$ per $r$ e parallelo ad $s$ è individuato dal vettore normale $\vec{n} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = (1, 1, 2)$ e dal punto $P_0$. L'equazione del piano è dunque:

$$1(x-2) + 1(y-2) + 2(z-0) = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 4 = 0$$

[*] http://www.batmath.it

[1] Questo esercizio era sostanzialmente identico nei quattro temi proposti.

[2] Attenzione a usare parametri diversi per le equazioni delle rette, quando si vogliono trovare le intersezioni. Per evitare equivoci, nel seguito della risoluzione useremo sempre parametri diversi, anche quando non si tratta di confrontare equazioni di rette diverse.

Il punto $Q_0 = (0, 2, 4)$ appartiene ad $s$. La retta $a$ per $Q_0$ e perpendicolare a $\pi_r$, cioè parallela al vettore $\vec{n}$, ha equazione

$$a\colon \begin{cases} x = v \\ y = 2 + v \\ z = 4 + 2v \end{cases} .$$

La proiezione $Q_1$ di $Q_0$ su $\pi_r$ si ottiene intersecando $a$ con $\pi_r$:

$$(v) + (2 + v) + 2(4 + 2v) - 4 = 0 \Rightarrow v = -1 \Rightarrow Q_1 = (-1, 1, 2) .$$

La retta $s'$ per $Q_1$ e parallela ad $s$, cioè la proiezione di $s$ su $\pi_r$ ha equazione

$$s'\colon \begin{cases} x = -1 - 2w \\ y = 1 \\ z = 2 + w \end{cases} .$$

Il punto $P$ si trova come intersezione tra $s'$ ed $r$:

$$\begin{cases} 2 + t = -1 - 2w \\ 2 + t = 1 \\ -t = 2 + w \end{cases} \Rightarrow t = -1 \wedge w = -1 \Rightarrow P = (1, 1, 1) .$$

La retta $b$ per $P$ e perpendicolare a $\pi_r$ ha equazione:

$$b\colon \begin{cases} x = 1 + m \\ y = 1 + m \\ z = 1 + 2m \end{cases} .$$

Il punto $Q$ di intersezione tra $b$ ed $s$ si trova ora facilmente: $Q = (2, 2, 3)$.

La risposta alla terza domanda, a questo punto, è elementare. Il punto medio $M$ è dato da

$$M = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right) .$$

Il piano richiesto passa per $M$ ed è ortogonale al vettore $\vec{n}$ già trovato:

$$1\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1\left(y - \frac{3}{2}\right) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow x + y + 2z - 7 = 0 .$$

Per determinare i punti $P$ e $Q$ si poteva anche usare una strategia risolutiva completamente diversa, basata sulla ricerca della minima distanza tra le due rette usando le derivate. Basta considerare due punti arbitrari, $R$ su $r$ (che dipenderà dal parametro $t$) e $S$ su $s$ (che dipenderà dal parametro $u$), calcolare la loro distanza, che risulterà funzione de di $t$ ed $u$, e cercare il minimo di questa funzione. Si ottiene:

$$\begin{aligned} d(R, S) = f(t, u) &= \sqrt{(2 + t + 2u)^2 + (2 + t - 2)^2 + (-t - 4 - u)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 + 5u^2 + 6tu + 12t + 16u + 20} . \end{aligned}$$

Uguagliando a zero il gradiente della funzione $f$ si trova:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{6t + 6u + 12}{2\sqrt{3t^2 + 5u^2 + 6tu + 12t + 16u + 20}} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{10u + 6t + 16}{2\sqrt{3t^2 + 5u^2 + 6tu + 12t + 16u + 20}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = -1 \end{cases} .$$

I valori trovati di $t$ e $u$ forniscono nuovamente i punti $P$ e $Q$ trovati prima.

**Esercizio 2.** Sia data la funzione $F(x)$ definita da

$$F(x) = \int_x^{x^2} t^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \,.$$

Si chiede:

1. di trovare $F(1)$ e $F'(1)$ senza calcolare l'integrale;
2. di calcolare esplicitamente $F(x)$ e $F'(x)$, eseguendo il calcolo dell'integrale.

Si ha $F(1) = 0$, perché gli estremi dell'integrale coincidono. Si ha poi

$$F(x) = \int_x^0 t^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = -\int_0^x t^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \,,$$

da cui

$$F'(x) = -x^2 \mathrm{e}^x + x^4 \mathrm{e}^{x^2} 2x \Rightarrow F'(1) = \mathrm{e}$$

Il calcolo delle primitive richiede due integrazioni per parti:

$$\int t^2 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t t^2 \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t t^2 - \int \mathrm{e}^t 2t \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t t^2 - 2t\mathrm{e}^t + \int 2\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = t^2 \mathrm{e}^t - 2t\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^t + c \,.$$

A questo punto il calcolo di $F(x)$ e $F'(x)$ è standard.

**Esercizio 3.** Sia data la funzione $F(x)$ definita da

$$F(x) = \int_x^{x^2} t^2 \sin t \, \mathrm{d}t \,.$$

Si chiede:

1. di trovare $F(1)$ e $F'(1)$ senza calcolare l'integrale;
2. di calcolare esplicitamente $F(x)$ e $F'(x)$, eseguendo il calcolo dell'integrale.

Si ha $F(1) = 0$, perché gli estremi dell'integrale coincidono. Si ha poi

$$F(x) = \int_x^0 t^2 \sin t \, \mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t^2 \sin t \, \mathrm{d}t = -\int_0^x t^2 \sin t \, \mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t^2 \sin t \, \mathrm{d}t \,,$$

da cui

$$F'(x) = -x^2 \sin x + x^4 \sin x^2 \, 2x \Rightarrow F'(1) = \sin 1$$

Il calcolo delle primitive richiede due integrazioni per parti:

$$\int t^2 \sin t \, \mathrm{d}t = \int (\sin t) t^2 \, \mathrm{d}t = -(\cos t)t^2 + \int (\cos t) 2t \, \mathrm{d}t =$$
$$= -(\cos t)t^2 + (\sin t)2t - \int 2 \sin t \, \mathrm{d}t = -(\cos t)t^2 + (\sin t)2t + 2\cos t + c \,.$$

A questo punto il calcolo di $F(x)$ e $F'(x)$ è standard.

**Esercizio 4.** Sia data la funzione $F(x)$ definita da

$$F(x) = \int_x^{x^2} t\mathrm{e}^{t^2} \, \mathrm{d}t \,.$$

Si chiede:

1. di trovare $F(1)$ e $F'(1)$ senza calcolare l'integrale;
2. di calcolare esplicitamente $F(x)$ e $F'(x)$, eseguendo il calcolo dell'integrale.

Si ha $F(1) = 0$, perché gli estremi dell'integrale coincidono. Si ha poi

$$F(x) = \int_x^0 t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

da cui

$$F'(x) = -x\mathrm{e}^{x^2} + x^2\mathrm{e}^{x^4}2x \Rightarrow F'(1) = \mathrm{e}$$

Il calcolo delle primitive è elementare:

$$\int t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 2t\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2} + c\,.$$

A questo punto il calcolo di $F(x)$ e $F'(x)$ è standard.

**Esercizio 5.** Sia data la funzione $F(x)$ definita da

$$F(x) = \int_x^{x^2} t\sin t^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Si chiede:

1. di trovare $F(1)$ e $F'(1)$ senza calcolare l'integrale;
2. di calcolare esplicitamente $F(x)$ e $F'(x)$, eseguendo il calcolo dell'integrale.

Si ha $F(1) = 0$, perché gli estremi dell'integrale coincidono. Si ha poi

$$F(x) = \int_x^0 t\sin t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t\sin t^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^x t\sin t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^2} t\sin t^2\,\mathrm{d}t\,,$$

da cui

$$F'(x) = -x\sin x^2 + x^2\sin x^4\,(2x) \Rightarrow F'(1) = \sin 1\,.$$

Il calcolo delle primitive è elementare:

$$\int t\sin t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int t\sin t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t^2 + c\,.$$

A questo punto il calcolo di $F(x)$ e $F'(x)$ è standard.

**Esercizio 6.** Sia dato, nel piano riferito al sistema cartesiano ortonormale $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (O;\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$, il luogo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ di equazione

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\colon\ F(x,y) = xy^3 + y + 1 = 0\,.$$

Si chiede:

1. di verificare che il punto $P_0 = (0,-1)$ appartiene al luogo;
2. di dire se esiste una funzione di una variabile, $\varphi(x)$, tale che $\varphi(0) = -1$ e che $F(x,\varphi(x)) = 0$, in tutto un opportuno intorno di $x_0 = 0$;
3. di calcolare, se possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di $\varphi(x)$ in $P_0 = (0,-1)$.

La verifica che il punto $P_0$ appartiene al luogo è banale. Si ha poi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,-1) = -1$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,-1) = 1 \neq 0$$

Quest'ultimo risultato, assieme alla continuità delle derivate parziali, consente di rispondere affermativamente alla domanda 2.

Per rispondere alla terza domanda basta osservare che $\varphi(0) = -1$, e che $\varphi'(0)$ si trova con il teorema di Dini:

$$\varphi'(0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)} = 1\,.$$

**Esercizio 7.** Sia dato, nel piano riferito al sistema cartesiano ortonormale $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$, il luogo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ di equazione

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\colon\; F(x,y) = x^2y^3 + y + 2 = 0\,.$$

Si chiede:

1. di verificare che il punto $P_0 = (0,-2)$ appartiene al luogo;
2. di dire se esiste una funzione di una variabile, $\varphi(x)$, tale che $\varphi(0) = -2$ e che $F(x,\varphi(x)) = 0$, in tutto un opportuno intorno di $x_0 = 0$;
3. di calcolare, se possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di $\varphi(x)$ in $P_0 = (0,-2)$.

La verifica che il punto $P_0$ appartiene al luogo è banale. Si ha poi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,-2) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,-2) = 1 \neq 0$$

Quest'ultimo risultato, assieme alla continuità delle derivate parziali, consente di rispondere affermativamente alla domanda 2.

Per rispondere alla terza domanda basta osservare che $\varphi(0) = -2$, e che $\varphi'(0)$ si trova con il teorema di Dini:

$$\varphi'(0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)} = 0\,.$$

**Esercizio 8.** Sia dato, nel piano riferito al sistema cartesiano ortonormale $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$, il luogo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ di equazione

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\colon\; F(x,y) = xy + y^3 - 8 = 0\,.$$

Si chiede:

1. di verificare che il punto $P_0 = (0,2)$ appartiene al luogo;
2. di dire se esiste una funzione di una variabile, $\varphi(x)$, tale che $\varphi(0) = 2$ e che $F(x,\varphi(x)) = 0$, in tutto un opportuno intorno di $x_0 = 0$;
3. di calcolare, se possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di $\varphi(x)$ in $P_0 = (0,2)$.

La verifica che il punto $P_0$ appartiene al luogo è banale. Si ha poi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(0,2) = 2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 12 \neq 0$$

Quest'ultimo risultato, assieme alla continuità delle derivate parziali, consente di rispondere affermativamente alla domanda 2.

Per rispondere alla terza domanda basta osservare che $\varphi(0) = -1$, e che $\varphi'(0)$ si trova con il teorema di Dini:

$$\varphi'(0) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)} = -\frac{1}{6}\,.$$

**Esercizio 9.** Sia dato, nel piano riferito al sistema cartesiano ortonormale $\boldsymbol{\mathcal{S}} = (O; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$, il luogo $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ di equazione

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\colon F(x, y) = x^3 + y + y^3 - 1 = 0\,.$$

Si chiede:

1. di verificare che il punto $P_0 = (0, -1)$ appartiene al luogo;
2. di dire se esiste una funzione di una variabile, $\varphi(x)$, tale che $\varphi(1) = 0$ e che $F(x, \varphi(x)) = 0$, in tutto un opportuno intorno di $x_0 = 1$;
3. di calcolare, se possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di $\varphi(x)$ in $P_0 = (1, 0)$.

La verifica che il punto $P_0$ appartiene al luogo è banale. Si ha poi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) = 3$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 1 \neq 0$$

Quest'ultimo risultato, assieme alla continuità delle derivate parziali, consente di rispondere affermativamente alla domanda 2.

Per rispondere alla terza domanda basta osservare che $\varphi(1) = 0$, e che $\varphi'(1)$ si trova con il teorema di Dini:

$$\varphi'(1) = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)} = -3\,.$$