# ARGOMENTI

**DI**

# MATEMATICA PER L'INGEGNERIA

**VOLUME 2°**

**Esercizi proposti**

Quando non diversamente precisato, nel seguito si intenderà sempre che nel piano sia stato introdotto un sistema cartesiano ortogonale monometrico $\mathcal{S} = \left(O;\ \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}\right)$ e nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico $\mathcal{S} = \left(O;\ \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\right)$. Inoltre le variabili e i parametri, quando non diversamente specificato, variano nel loro dominio naturale.

**1)** Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per $P_0(1, 0, 1)$ e parallelo ai vettori $\vec{\mathbf{u}} = (1, 1, -1)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (1, -1, 2)$.

**2)** Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per $P(2, 0, -1)$ e parallelo al piano coordinato $O_{\mathrm{XY}}$.

**3)** Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per il punto $P(2, 0, -1)$ e parallelo alle rette

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{X}-3}{2} = \dfrac{\mathrm{Z}+2}{3} \\ \mathrm{Y} = 1 \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} 4\mathrm{X} = \mathrm{Y}+2 \\ \mathrm{X} = \mathrm{Z}-1 \end{cases} \ .$$

**4)** Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano contenente la retta

$$\frac{\mathrm{X}-1}{2} = \frac{\mathrm{Y}-2}{6} = \frac{\mathrm{Z}+3}{-3},$$

e parallelo alla retta

$$\frac{\mathrm{X}-1}{4} = \frac{\mathrm{Y}+2}{3} = \mathrm{Z}\,.$$

**5)** Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per il punto $P(1, -2, 1)$ e parallelo al piano

$$\begin{cases} x = 1 + t - u \\ y = 2 + t + 3u \\ z = 2t + u \end{cases} \ .$$

**6)** Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per i punti $P_1(2, 1, 0)$, $P_2(0, -1, 2)$, $P_3(2, 1, -3)$.

**7)** Sono dati nello spazio i punti $P_1(1, 3, 4)$, $P_2(-2, 2, 3)$, $P_3(-2, , 4, 3)$ e il vettore $\vec{\mathbf{u}} = (3, 1, 1)$. determinare le equazioni della retta $s$ per $P_1$, $P_2$ e della retta $r$ per $P_3$ e di vettore direttore $\vec{\mathbf{u}}$. Determinare le equazioni della mediana della striscia individuata da $r$ ed $s$, dopo avere verificato che le due rette sono parallele. Determinare le equazioni della retta $s'$ simmetrica di $s$ rispetto a $r$.

**8)** Sono date le rette

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = -1 + u \\ y = 1 + u \\ z = -1 + 2u \end{cases} .$$

Verificare che le due rette sono complanari, determinare il loro punto di incidenza e l'equazione del piano che le contiene. Determinare le equazioni delle due bisettrici degli angoli da esse individuate (nel loro piano comune). Determinare le equazioni dei due piani che hanno distanza 1 dal piano delle due rette.

**9)** Siano dati il piano $\pi$ di equazione $2\mathrm{X} - 6\mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} - 3 = 0$ e il punto $P(2, 0, -1)$. Tra i piani per $P$ e ortogonali a $\pi$, trovare le equazioni di quelli formanti un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il piano $\pi'$ di equazione $2\mathrm{X} + 2\mathrm{Z} - 3 = 0$.

**10)** Sono dati i piani $\mathrm{X} + \mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} + 2 = 0$ e $\mathrm{X} + \mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} - 10 = 0$. Verificare che sono paralleli e determinare l'equazione del piano mediano della striscia da essi individuata. Trovare l'equazione del luogo dei punti aventi distanza $\sqrt{\frac{3}{2}}$ dal primo dei due piani dati.

**11)** Dati il piano $\pi$ di equazione $2\mathrm{X} - 3\mathrm{Y} + \mathrm{Z} - 1 = 0$ e il punto $P(3, -2, 3)$ determinare il punto $P'$ proiezione di $P$ su $\pi$ e il simmetrico $P''$ di $P$ rispetto a $\pi$.

**12)** Dati il piano $\pi$ di equazione $2\mathrm{X} - 3\mathrm{Y} + \mathrm{Z} - 1 = 0$, determinare le equazioni della retta proiezione ortogonale della retta

$$\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

su $\pi$.

**13)** Sia dato il punto $Q(3, -3, 1)$. Scrivere l'equazione del piano per $Q$ e parallelo alle rette di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{X} - \mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} + 1 = 0 \\ 2\mathrm{X} - \mathrm{Y} + 3\mathrm{Z} + 5 = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases} .$$

**14)** Siano dati i punti $Q(3, -3, 1)$ ed $R(2, -1, 3)$. Scrivere l'equazione del piano per $Q$, $R$ e parallelo alla retta di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{Y} + 1 \\ \mathrm{Z} = -2\mathrm{Y} \end{cases} .$$

**15**) Tra i piani aventi distanza 1 dall'origine, determinare le equazioni di quelli che contengono la retta

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} .$$

**16**) Tra i piani aventi distanza 1 dall'origine, determinare le equazioni di quelli paralleli al piano

$$2\text{X} - 3\text{Y} + 6\text{Z} - 5 = 0 .$$

**17**) Dati i punti $P(1, 0, 4)$ e $Q(-1, 4, 2)$, determinare l'equazione dell'asse del segmento $PQ$ appartenente al piano di equazione $3\text{X} + 2\text{Y} + \text{Z} - 7 = 0$.

**18**) Sia dato un tetraedro, le cui facce appartengono ai piani di equazione

$$\begin{array}{cc} 2\text{X} + 6\text{Y} + \text{Z} - 2 = 0 , & 2\text{X} - \text{Y} + \text{Z} - 2 = 0 \\ \text{X} - 4\text{Y} - 3\text{Z} + 6 = 0 , & \text{X} + 3\text{Y} - 3\text{Z} - 1 = 0 \end{array}$$

Determinare i vertici del tetraedro, le lunghezze degli spigoli, le aree dell facce, il volume; determinare poi le equazioni dei piani assiali degli spigoli verificando che questi piani appartengono a una stessa stella di piani (ovvero che hanno tutti un punto in comune).

**19**) Dati il punto $P(3, 3, 2)$ e la retta $r$

$$\begin{cases} \text{X} + \text{Y} - 3\text{Z} - 1 = 0 \\ \text{X} - \text{Y} - \text{Z} + 3 = 0 \end{cases} ,$$

scrivere le equazioni della retta $s$ per il punto $P$, complanare con $r$, e parallela al piano di equazione $2\text{X} - \text{Y} - 3\text{Z} - 2 = 0$.

**20**) Siano date le rette $r$ ed $s$ di equazioni, rispettivamente,

$$\begin{cases} \text{X} = \text{Y} + 1 \\ \text{Z} = -2\text{Y} + 2 \end{cases} , \qquad \begin{cases} \text{Y} = \text{X} \\ \text{Z} = -\text{X} + 3 . \end{cases}$$

Scrivere le equazioni della retta $p$, passante per $P(1, 0, 3)$ e incidente entrambe le rette $r$ es $s$.

**21**) Siano date le rette $r$ ed $s$ di equazioni, rispettivamente,

$$\begin{cases} \text{X} = \text{Y} + 1 \\ \text{Z} = -2\text{Y} + 2 \end{cases} , \qquad \begin{cases} \text{Y} = \text{X} \\ \text{Z} = -\text{X} + 3 . \end{cases}$$

Verificare che le rette sono sghembe, trovare la loro minima distanza e le equazioni dei due piani passanti per una delle due rette e paralleli all'altra. Determinare l'equazione della retta $p$ ortogonale comune alle due rette date.

**22**) Sia dato il punto $P(1, 1, -2)$. determinare le equazioni delle rette uscenti da $P$, incidenti la retta

$$\begin{cases} \mathrm{Y} = \mathrm{Z} \\ \mathrm{X} = 0 \end{cases},$$

e formanti con quest'ultima un angolo di $\dfrac{\pi}{6}$.

**23**) Data la curva

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases},$$

si chiede di determinare i suoi eventuali punti ove la retta tangente è perpendicolare al vettore $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (0, 1, 1)$, e di scrivere le equazioni delle rette tangenti in questi punti.

**24**) Scrivere l'equazione del piano tangente la superficie di equazione $\mathrm{Z} = \ln(2\mathrm{X}+\mathrm{Y})$ nel punto $P(-1, 3, 0)$.

**25**) Calcolare le derivate parziali e la derivata direzionale rispetto alla direzione orientata individuata dal vettore $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1)$, nell'origine, per la funzione data da

$$\mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Detto $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ il versore di $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, controllare se vale oppure no la formula

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \overrightarrow{\mathbf{v}}}(0, 0) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathrm{F})(0, 0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

giustificando il risultato.

**26**) Siano $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{XY} - 1$ e $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)$, con $\mathrm{F}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{XY} - e^{\mathrm{X}}$ e $\mathrm{F}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X}\sin(\mathrm{XY})$. Calcolare le derivate parziali della funzione $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ sia a partire dalla espressione esplicita, che utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte.

**27**) Si consideri la funzione data da

$$\mathrm{F}(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right), & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}.$$

Si calcolino le derivate parziali e le derivate lungo una generica direzione individuata dal versore $(l, m)$ in un punto arbitrario dell'asse $x$.

**28**) Siano date la funzione $\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^2\mathrm{Y} - \mathrm{X}$ e la curva

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 \\ z = t^3 - \sqrt{t} \end{cases} \quad , \quad t \in ]0, +\infty[$$

Si determini l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P(1, 1, 0)$. Si dimostri poi che la curva giace interamente sopra il grafico della funzione F e si verifichi che la tangente alla curva prima trovata giace interamente nel piano tangente al grafico della funzione nel punto $P$.

**29**) Si scriva l'equazione della sfera $\mathcal{S}$ di centro $C(1, 2, 1)$ e raggio 2. Si determini l'equazione del suo piano tangente $\alpha$ nel punto $P(2, 3, 1 + \sqrt{2})$. Si consideri poi la circonferenza intersezione tra la sfera $\mathcal{S}$ e il piano per $P$ parallelo al piano $O_{\mathrm{XY}}$. Si trovino analiticamente il centro e il raggio di questa circonferenza. Si trovino le equazioni parametriche della retta $s$ tangente a questa circonferenza nel punto $P$ e della retta perpendicolare a $s$ e appartenente al piano tangente $\alpha$.

**30**) Si consideri l'ellisse

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad , \quad t \in [0, 2\pi[\,.$$

Sia $P_0$ un suo generico punto, corrispondente al valore $t_0$ del parametro. Detti $F_1$ ed $F_2$ i due fuochi, si verifichi che la bisettrice dell'angolo $F_1\widehat{P_0}F_2$ è perpendicolare all'ellisse.

**31**) Sia data la funzione

$$\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{X}^2\mathrm{Y} + \mathrm{X}}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + 1}\,,$$

e il punto $P(1, 1)$ del suo dominio. Scrivere l'equazione della linea di livello

$$\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{F}(1, 1)\,.$$

Tenendo conto della proprietà del vettore gradiente, scrivere l'equazione della retta tangente a questa curva di livello (nel piano $O_{\mathrm{XY}}$) nel punto $P$. Scrivere poi l'equazione della retta tangente alla stessa curva di livello tracciata sul grafico della funzione F.

**32**) Riconsiderata la funzione dell'esercizio **31**), si determinino, nel punto $Q(0, 1)$, le derivate rispetto a una generica direzione orientata per $Q$. Si determini poi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in corrispondenza al punto $Q$ e l'equazione della retta perpendicolare al piano tangente e passante per $(0, 1, \mathrm{F}(0, 1))$.

**33**) Riconsiderata ancora la funzione dell'esercizio **31**), e la curva

$$\begin{cases} x = \mathrm{f}_1(t) = 3\sqrt{t} \\ y = \mathrm{f}_2(t) = t^2 \end{cases} \quad , \quad t \in [1, 2]\,,$$

si calcoli la derivata della funzione composta $\mathrm{F}(\mathrm{f}_1(t), \mathrm{f}_2(t))$, sia in modo diretto, che usando la regola di derivazione delle funzioni composte.

**34**) Sia data la funzione $F(x, y) = x^2 + x \sin y$. Calcolare la derivata direzionale nel punto $P_0(1, \pi/2)$, secondo la direzione orientata individuata dal vettore $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (3, 4)$. Dire se esiste, ed eventualmente determinarla, una direzione orientata $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \overrightarrow{\mathbf{w}}}(1, \pi/2) = 0 .$$

**35**) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni seguenti, nel punto indicato.

(a) $F(x, y) = e^x + y, \quad (x_0, y_0) = (1, 3)$

(b) $F(x, y) = yx^2 + y^2, \quad (x_0, y_0) = (1, -1)$

(c) $F(x, y) = \sin x - y, \quad (x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$

(d) $F(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 3, \quad (x_0, y_0) = (1, -1)$

**36**) Siano dati la funzione $F(x, y) = x^2 + 4y^2$ e il punto $P_0(1, 0)$. Tracciare la curva di livello $F(1, 0)$, scrivere il gradiente della funzione nel punto $P_0$ e verificare che il gradiente risulta perpendicolare alla curva di livello prima tracciata, nel punto $P_0$.

**37**) Sia data la curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t < 2\pi .$$

Calcolare sia direttamente, sia usando la regola di derivazione delle funzioni composte, la derivata di $F(\gamma(t))$, dove $F(x, y) = x^2 + 4y^2$.

**38**) Siano $F(x, y) = x^2y + 3x$ e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Calcolare il gradiente della funzione $\varphi(F(x, y))$ nel punto $(-1, 1)$ sapendo che $\varphi'(-2) = 5$.

**39**) Siano $F(x, y) = x^2y + 3x$ e $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Calcolare la derivata di $F\big(x(t), y(t)\big)$ in 0, sapendo che $\gamma(0) = (-1, 1)$ e $\gamma'(0) = (2, -3)$.

**40**) Determinare gli estremi relativi e i punti di sella delle seguenti funzioni:

(a) $F(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$

(b) $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

(c) $F(x, y) = \sin y(e^{-x} + e^x)$

(d) $F(x, y) = \log(x + 2y) - \frac{1}{4}xy$

(e) $F(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

**41**) Dire se l'origine è un punto di estremo relativo per la funzione

$$F(x, y) = x^2y^3$$

**42**) Dire se l'origine è un punto di estremo relativo per la funzione

$$F(x, y) = x^2y - 2xy^2$$

**43**) Sia data la funzione

$$\mathrm{F}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Supposto di aver provato che è continua, si stabilisca

(a) se ha le derivate parziali nell'origine;

(b) se ha le derivate lungo ogni direzione nell'origine;

(c) se è differenziabile nell'origine.

**44**) Si calcoli la derivata della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

**45**) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 4, di punto iniziale 3, della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_3^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

**46**) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 3, di punto iniziale 0 (polinomio di Mac Laurin), della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_0^x \left( \int_0^t e^{-s^2}\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$$

**47**) Si calcoli

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x-1}$$

**48**) Si calcoli la funzione derivata seconda della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$$

**49**) Si calcoli la funzione derivata della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_{x^2}^1 te^{t^3}\,\mathrm{d}t$$

**50**) Sia data la funzione $F(x, y)$ di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ di componenti

$$\begin{cases} f_1(x, y) = xy - e^x \\ f_2(x, y) = x\sin(xy) \end{cases},$$

e sia $G(x, y) = xy - 1$.

- Si calcoli esplicitamente la funzione composta $H = G \circ F$.
- Si calcolino esplicitamente le derivate parziali di H, a partire dalla sua espressione trovata sopra.
- Si calcolino le derivate parziali di H usando il teorema di derivazione delle funzioni composte e si confronti il risultato con quello del punto precedente.

**51**) Stesse domande dell'esercizio **50**), opportunamente adattate, per le funzioni

$$F(t) = \begin{cases} f_1(t) = t + 2 \\ f_2(t) = t^2 + t \\ f_3(t) = t^3 - t^2 \end{cases}$$

e

$$G(x, y) = xy - 2z\,.$$

**52**) Stesse domande dell'esercizio **50**), opportunamente adattate, per le funzioni

$$F(x, y) = x^2 + 2y\,,$$

e

$$G(t) = \begin{cases} g_1(t) = te^t \\ g_2(t) = \sin(2t) \end{cases}.$$

**53**) Si trovino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per le seguenti funzioni

(a) $F(x, y) = x - x^2 - y^2$

(b) $F(x, y) = xy(x - 1)$

(c) $F(x, y) = x(y - 1) - x^2 y$

(d) $F(x, y) = x(x - y)e^{y-x}$

(e) $F(x, y) = \cos(x + y) + \cos(x - y)$

**54**) Sviluppare in formula di Taylor, di punto iniziale $(0, 0)$, fino al secondo ordine, le funzioni

(a) $F(x, y) = xe^{xy}$

(b) $F(x, y) = \sin x \cos(xy)$

(c) $F(x, y) = \log \dfrac{1 + x}{1 + y}$

**55**) Sia data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2+1} \\ z(t) = t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Si dica se si tratta di una curva regolare o no.

(b) Si trovi l'equazione della retta $s$ tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$.

(c) Si trovi l'equazione del piano $\pi$ perpendicolare alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$.

(d) Si trovino gli angoli formati dal piano normale con i piani coordinati.

(e) Si trovino le equazioni dei due piani a distanza 1 dal piano normale precedentemente trovato.

(f) Sia $r$ la retta intersezione tra $\pi$ e il piano $O_{\mathrm{XY}}$; si trovi la minima distanza tra $s$ ed $r$.

**56**) Si consideri la funzione data da

$$\mathrm{f}(x) = \int_1^x \left( \int_t^{2t} \cos(2u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t\,.$$

Senza calcolare gli integrali si trovi

(a) il dominio di f;

(b) $\mathrm{f}'(0)$;

(c) $\mathrm{f}''(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom(f)}$.

Successivamente si ritrovino gli stessi risultati calcolando esplicitamente gli integrali.

**57**) Si consideri la funzione data da

$$\mathrm{f}(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Senza calcolare l'integrale si trovi

(a) il dominio di f;

(b) $\mathrm{f}'(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom(f)}$;

(c) $\mathrm{f}''(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom(f)}$.

Successivamente si ritrovino gli stessi risultati calcolando esplicitamente l'integrale.

**58**) Si trovi l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

nel suo intero dominio.

**59**) Data la funzione

$$f(x) = \int_x^{2x} t\sqrt{3+t}\,dt\,,$$

se ne scriva il polinomio di Mac-Laurin, fino all'ordine 2.

**60**) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x^x(1 + \log x)\,dx$$

ricordando che $(x \log x)' = 1 + \log x$.

**61**) Si determini, sull'intervallo $]1, +\infty[$, quella primitiva di

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2-1)}$$

che ha limite $\pi$ per $x \to +\infty$.

**62**) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx\,,$$

utilizzando la sostituzione $x^3 = t$.

**63**) Sia f la funzione data da

$$f(x) = \int_0^{2x} \log(\cos t)\,dt\,.$$

(a) Si determini il dominio di f.

(b) Si scriva il polinomio di Mac Laurin di f, do ordine 3.

**64**) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx\,.$$

**65**) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x^4} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t}\,.$$

**66**) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{x \int_0^{x^2} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t}\,.$$

**67**) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)e^{-|x|}\,\mathrm{d}x\,.$$

**68**) Si dica se la funzione data da

$$f(x) = x - \int_1^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

è crescente o decrescente.

**69**) Si calcoli il seguente integrale definito

$$\int_{-5}^{5} x + |x| + |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x$$

**70**) Si trovi l'insieme di tutte le primite della funzione

$$\mathrm{f(X)} = \left|\mathrm{X}^2 - 1\right|\,.$$

**71**) Si trovi l'insieme di tutte le primite della funzione

$$\mathrm{f(X)} = \frac{1}{|x|}$$

in tutto il suo dominio.