9 Polinomi di Taylor - Convessità

9.1 Derivate successive

Se una funzione è derivabile in un insieme A, come già osservato possiamo considerare la funzione derivata $f' \colon A \to \mathbb{R}$ e possiamo chiederci se questa funzione è a sua volta derivabile (magari in un sottoinsieme di A). Se si, diremo la nuova funzione che così si viene a costruire *derivata seconda* e così via fin quando è possibile. Le funzioni via via ottenute si chiamano *derivate successive* e si indicano con i simboli

$$f'', f''', f^{iv}, \dots, f^{(n)}.$$

Naturalmente l'esistenza della derivata seconda richiede come condizione necessaria che la derivata prima sia continua, e così via per le successive. Può comunque succedere che una funzione sia derivabile, ma che la sua derivata non sia continua, oppure che sia continua ma che non sia ulteriormente derivabile e lo stesso per le derivate successive. A questo proposito si dà la seguente definizione.

Definizione 9.1. *Una funzione si dice* di classe C^n *se è derivabile fino alla derivata n-esima e quest'ultima è continua (naturalmente sono continue, in quanto derivabili, anche le precedenti). Se la funzione è semplicemente continua si dice di classe C^0.*

9.2 Approssimante lineare e approssimazioni polinomiali

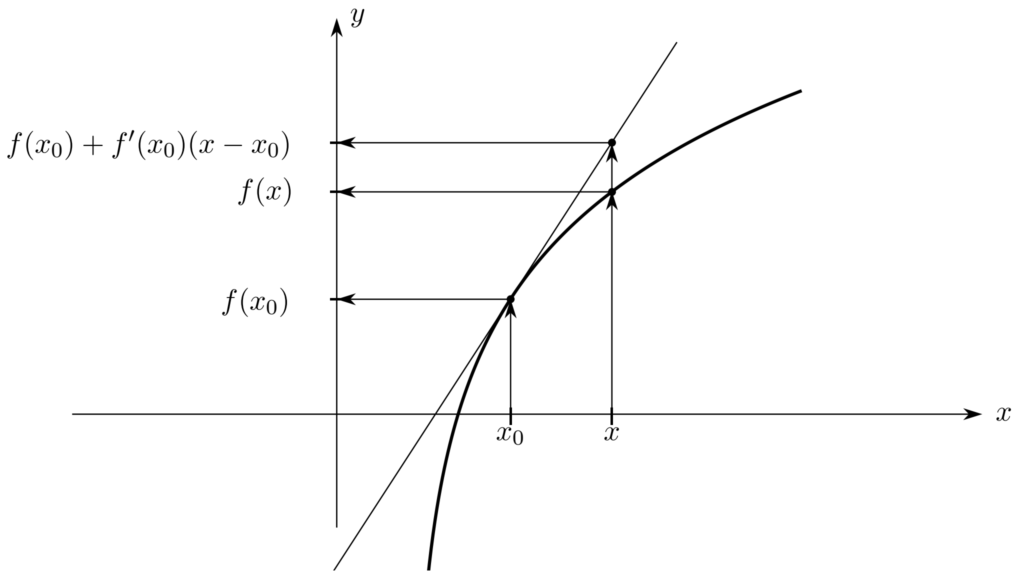
Come conseguenza del teorema 6.8 nella pagina 77 sappiamo che se una funzione è derivabile in un punto x_0 allora esiste una funzione $\omega(h)$ tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\omega(h)\,, \quad \text{con} \quad \lim_{h \to 0} \omega(h) = 0\,.$$

Se scriviamo $x - x_0$ al posto di h otteniamo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\omega(x - x_0)\,, \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0\,. \tag{9.1}$$

Usando il linguaggio degli infinitesimi possiamo dire che $\omega(x - x_0)$ è infinitesima in x_0 e che $(x - x_0)\omega(x - x_0)$ è infinitesima di ordine superiore a $x - x_0$ in x_0. Se teniamo conto che $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, possiamo rileggere la formula (9.1) come segue: *se una funzione è derivabile in un punto x_0, allora i valori della funzione differiscono dai valori calcolati sulla retta tangente per un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$.* È questa lettura che ci permette di affermare che *una funzione può essere approssimata dalla sua retta tangente*, naturalmente per punti x "vicini" al punto di tangenza. Ed è sempre questa lettura che ci consente di chiamare *approssimante lineare* la retta tangente al grafico di una funzione in un dato punto. Si veda la figura che segue per maggiore chiarezza.



La domanda che sorge spontanea ora è: è possibile trovare approssimazioni "migliori" della funzione f, sempre nell'intorno di x_0, e considerando solo funzioni semplici come i polinomi? La risposta è affermativa in molti casi e porta alla considerazione dei polinomi di Taylor.

Per capire il modo con il quale si costruiscono i polinomi approssimanti di grado successivo al primo, partiamo dalla considerazione di una funzione polinomiale, per esempio di quarto grado, e analizziamo la situazione nei pressi di 0.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Calcoliamo il polinomio e le sue derivate successive in 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 && \Rightarrow \quad f(0) = a_0 = 0!a_0\,;\\
f'(x) &= 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 && \Rightarrow \quad f'(0) = a_1 = 1!a_1\,;\\
f''(x) &= 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 && \Rightarrow \quad f''(0) = 2a_2 = 2!a_2\,;\\
f'''(x) &= 24a_4x + 6a_3 && \Rightarrow \quad f'''(0) = 6a_3 = 3!a_3\\
f^{iv}(x) &= 24a_4 && \Rightarrow \quad f^{iv}(0) = 24a_4 = 4!a_4\,.
\end{aligned}$$

Naturalmente tutte le altre derivate sono nulle. Non è difficile concludere (per induzione) che se il polinomio avesse grado n si otterrebbe

$$f^{(p)}(0) = p!a_p \quad \forall p \le n\,, \quad f^{(q)}(x) \equiv 0 \quad \forall q > n\,,$$

ovvero

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\,, \quad \forall p \le n\,.$$

Se invece di prendere il punto 0 si prende un punto diverso, si procede in una maniera sostanzialmente analoga, anche se con calcoli un po' più complessi. Ragioniamo su un esempio concreto per semplicità. Sia $f(x) = 2x^3 + x$ e $x_0 = 1$. Vogliamo scrivere il polinomio nella forma

$$f(x) = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0\,.$$

Si può procedere in diversi modi. È molto istruttivo il metodo delle divisioni successive. Si divide $2x^3 + x$ per $x - 1$ ottenendo $2x^2 + 2x + 3$ come quoziente e 3 come resto. Si ha allora

$$2x^3 + x = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3) + 3\,.$$

Si procede ancora dividendo il quoziente $2x^2 + 2x + 3$ sempre per $x - 1$, ottenendo $2x + 4$ come quoziente e 7 come resto e quindi

$$2x^2 + 2x + 3 = (x - 1)(2x + 4) + 7\,.$$

Infine dividendo $2x + 4$ per $x - 1$ si ottiene 2 come quoziente e 6 come resto, ovvero

$$2x + 4 = 2(x - 1) + 6\,.$$

Procedendo a ritroso con le sostituzioni si può ottenere la seguente scrittura del polinomio dato:

$$2x^3 + x = 2(x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 + 7(x - 1) + 3 = a_3(x - 1)^3 + a_2(x - 1)^2 + a_1(x - 1) + a_0\,.$$

A questo punto, procedendo esattamente come prima, si trova che

$$a_3 = \frac{f'''(1)}{3!}\,, \quad a_2 = \frac{f''(1)}{2!}\,, \quad a_1 = \frac{f'(1)}{1!}\,, \quad a_0 = \frac{f(1)}{0!}\,.$$

9.3 Polinomio di Taylor di una funzione

La considerazione fatta sopra relativamente ai polinomi ci suggerisce di cercare condizioni affinchè la formula 9.1 nella pagina 102 possa essere migliorata sostituendo l'approssimante lineare $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ con un polinomio approssimante di grado più elevato e del tipo:

$$\frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

e in modo tale che la funzione differisca da questo polinomio per una quantità del tipo

$$\frac{\omega(x - x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n\,, \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0\,.$$

Il polinomio sopra considerato, costruibile solo per funzioni che siano derivabili n volte nel punto x_0, si chiama *Polinomio di Taylor*[1] *di ordine n della funzione f relativo al punto x_0* e si indica con T_{n,x_0}, cioè si pone

$$(9.2) \quad T_{n,x_0}(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Il seguente teorema fornisce delle condizioni sufficienti affinché il polinomio T_{n,x_0} goda delle proprietà richieste.

[1] Su alcuni testi si usa il termine *Polinomio di Taylor* quando si considera un punto x_0 qualunquu, *Polinomio di MacLaurin* quando il punto x_0 coincide con lo zero. I nomi sono legati ai matematici inglesi Brook Taylor (1685 – 1731) e Colin Maclaurin (1698 – 1746) che li introdussero. Noi useremo solo il primo nome.

Teorema 9.2 (Formula di Taylor-Peano)**.** *Sia f una funzione definita in un intervallo $I =]a,b[$ e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che per ogni $x \in I$ esista la derivata $(n-1)$-esima di f, e che in x_0 esista anche la derivata di ordine n. In queste ipotesi esiste una funzione $\omega(x-x_0)$ tale che per ogni $x \in I$ si abbia*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{\omega(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \textit{con} \quad \lim_{x\to x_0} \omega(x-x_0) = 0\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di provare che

$$\lim_{x\to x_0} n!\,\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,,$$

o, il che è la stessa cosa, che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,.$$

Poiché si ha

$$\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} =$$
$$= \frac{f(x) - \left[\dfrac{f(x_0)}{0!} + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}\right]}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,,$$

basterà provare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left[\dfrac{f(x_0)}{0!} + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}\right]}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,.$$

Se $n = 1$ la cosa è ovvia per definizione di derivata. Se $n > 1$ al limite del primo membro è possibile applicare il teorema di l'Hôpital (forma $0/0$) e si perviene al calcolo del limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \left[\dfrac{f'(x_0)}{1!} + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)}\right]}{n(x-x_0)^{n-1}}\,.$$

A questo limite si può ancora applicare il teorema di l'Hôpital, e così via fino a calcolare $n-1$ derivate, dopo di che si giunge al calcolo del limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)}\,,$$

ma questo limite è proprio

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

per definizione di derivata n-esima. □

Il risultato del teorema appena dimostrato si può riassumere nella seguente formula:

$$(9.3)\quad f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\omega(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

L'ultimo addendo del secondo membro, che misura "l'errore" che si commette se si approssima la funzione con il polinomio di Taylor, si chiama anche *termine complementare* o *resto* e la formula stessa prende il nome di *Formula di Taylor di punto iniziale* x_0 *e di ordine* n*, con il termine complementare di Peano*.

Il termine complemementare nell'equazione (9.3) è il prodotto tra $(x-x_0)^n$ e un infinitesimo per $x\to x_0$, dunque è un infinitesimo di ordine superiore a n rispetto al campione $x-x_0$.

Questo risultato è di grande importanza applicativa nei campi più svariati, ma è da osservare che sul termine complementare non abbiamo nessuna informazione, se non che tende a 0, al tendere di x a x_0, più velocemente di $(x-x_0)^n$: nulla sappiamo dei valori che questo termine assume in punti diversi da x_0 stesso. Si ricordi sempre che *infinitesimo* è una quantità che tende a zero al tendere di x a x_0, ma questo non fornisce alcuna informazione sui valori dell'infinitesimo stesso al di fuori di x_0.

Proponiamo un esempio di applicazione di questa formula al calcolo dei limiti.

Esempio. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\,.$$

Siccome questo limite è calcolabile facilmente anche con la regola di l'Hôpital, si può controllare per questa via la bontà del risultato che otterremo.

Usiamo la formula di Taylor-Peano di punto iniziale 0 per la funzione seno del terzo ordine. Si ha, facilmente,

$$f(x)=\sin x\,,\quad f'(x)=\cos x\,,\quad f''(x)=-\sin x\,,\quad f'''(x)=-\cos x\,,$$

da cui

$$f(0)=0\,,\quad f'(0)=1\,,\quad f''(0)=0\,,\quad f''(0)=-1\,.$$

Da qui si trova

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\omega(x)\frac{x^3}{3!}\,.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^3}{3!}-\omega(x)\frac{x^3}{3!}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-\omega(x)\frac{x^3}{3!}}{x^3}\,.$$

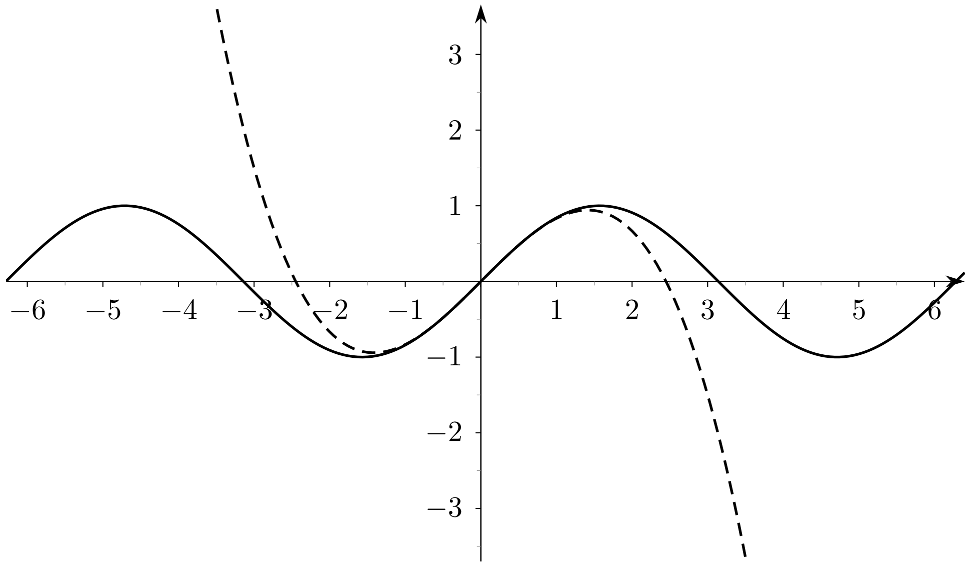
Il principio di sostituzione degli infinitesimi ci garantisce che possiamo trascurare il secondo addendo del numeratore e a questo punto il limite vale banalmente $1/6$.

Si noti come, per calcolare questo limite, abbiamo usato *esclusivamente* la proprietà che ω è una funzione infinitesima per $x\to 0$, mentre non ci siamo in alcun modo preoccupati di conoscere i valori di ω al di fuori di 0.

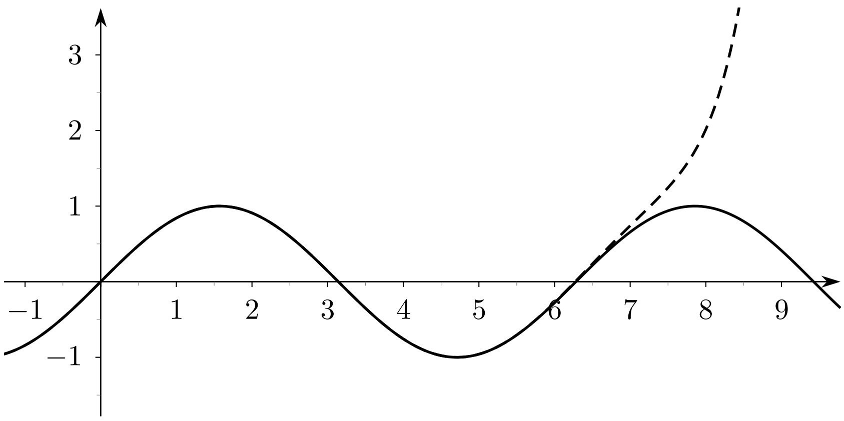
L'esempio proposto mostra anche che, per la funzione $\sin x$, il polinomio di Taylor di ordine 3 e punto iniziale 0 è il seguente

$$T_{3,0}(x)=x-\frac{x^3}{3!}\,.$$

È molto istruttivo confrontare il grafico della funzione $\sin(x)$ e di $T_{3,0}(x)$, per verificare che cosa significa che il polinomio approssima la funzione. I grafici sono riportati nella figura che segue: in continuo il grafico di $\sin x$, in tratteggio quello di $T_{3,0}(x)$.



Nella figura che segue proponiamo anche il grafico della funzione $\sin(x)$ e di $T_{17,0}(x)$: poiché la funzione $\sin x$ è periodica, è chiaro che il polinomio $T_{17,0}(x)$, che approssima ottimamente la funzione $\sin x$ nel tratto $[0, 2\pi]$, può essere utilizzato vantaggiosamente per calcoli relativi alla funzione seno. Se poi si tiene conto che, in realtà, basterebbe conoscere solo i valori della funzione seno nel tratto $[0, \pi/2]$, si vede subito che basterebbe considerare polinomi ancora più semplici, e già il polinomio di ordine 3 comincia ad essere soddisfacente.



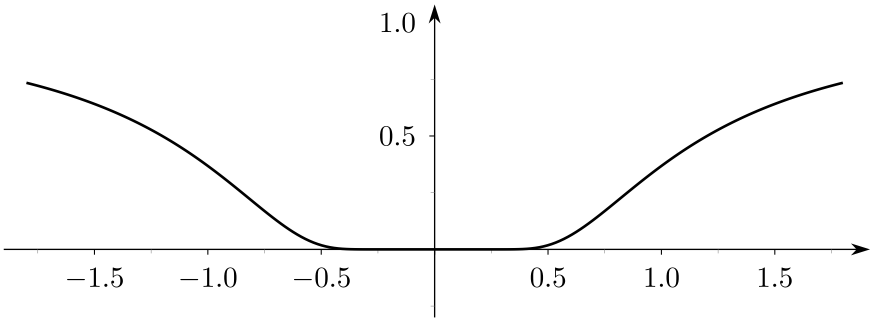
Per le applicazioni è comunque molto importante poter valutare il massimo errore che si commette nel sostituire a una data funzione un suo polinomio di Taylor e, purtroppo, la formula di Taylor-Peano non è di alcun aiuto in questo. Considereremo fra poco una nuova formula che ci permetterà di fare valutazioni sufficientemente precise per molti scopi.

Prima di procedere oltre vogliamo però mettere in guarda il lettore: il comportamento "decente" che ha la funzione seno non è la regola. Un esempio classico è molto importante è il seguente.

Esempio. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

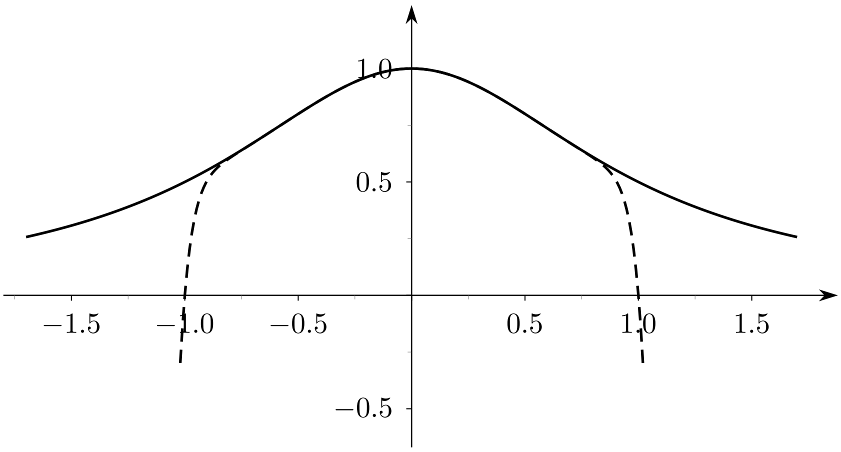
Si può provare (con un po' di pazienza!) che la funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e che tutte le derivate, di qualsiasi ordine, sono nulle nell'origine. Se ne deduce che il polinomio di Taylor di ordine qualsiasi, di punto iniziale 0, è sempre il polinomio identicamente nullo ed è evidente che il polinomio identicamente nullo *non* costituisce una buona approssimazione "globale" della funzione. Il grafico che segue mostra solo che l'approssimazione è "ad occhio" accettabile nei pressi dell'origine (il polinomio di Taylor non è rappresentato in quanto coincide con l'asse x).



Anche in casi decisamente più semplici, comunque, si verificano situazioni in cui i polinomi di Taylor, seppure con ordini molto alti, costituiscono approssimazioni che non possono essere estese ad intervalli arbitrari del dominio. Il grafico che segue si riferisce alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(con linea continua) e al suo polinomio di Taylor (in tratteggio) di ordine 22 nell'origine.



Per quanto si aumenti l'ordine, il polinomio non riesce a fornire un'approssimazione accettabile fuori dall'intervallo $[-1, 1]$. Come utile esercizio si può provare che il polinomio di Taylor di ordine 8 e di punto iniziale 0 della funzione appena considerata è

$$T_{8,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 .$$

E veniamo ora all'annunciato teorema, che proponiamo senza dimostrazione, che permette di fare delle valutazioni sull'ordine di grandezza dell'errore che si commette approssimando una funzione con un suo polinomio di Taylor.

Teorema 9.3 (Formula di Taylor-Lagrange)**.** *Sia f una funzione definita in un intervallo $I =]a, b[$ e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che per ogni $x \in I$ esista la derivata di ordine n continua e che almeno in tutti i punti di $I \setminus \{x_0\}$ esista anche la derivata di ordine $n+1$ di f. Allora esiste almeno un punto c compreso tra x_0 e x o tra x e x_0 tale che per ogni $x \in I$ si abbia*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} .$$

Nelle ipotesi del teorema si può scrivere la seguente formula

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} , \tag{9.4}$$

che prende il nome di *Formula di Taylor di punto iniziale x_0 e di ordine n, con il termine complementare di Lagrange*.

Se $n = 0$ la formula si riduce al Teorema di Lagrange, in quanto diventa

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}(x - x_0) , \quad \text{ovvero} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) .$$

Mostriamo un esempio di come si possa usare questa formula per calcoli approssimati, comprendendo una valutazione del grado di approssimazione, cosa che è estremamente importante nelle applicazioni.

Esempio. Si calcoli $\sin 1$, utuilizzando il polinomio di Taylor di ordine 5 della funzione seno, di punto iniziale 0, e valutando l'errore massimo che si commette con questa approssimazione.

Teniamo conto che la funzione seno e tutte le sue derivate pari sono nulle nell'origine, mentre le derivate disperi valgono alternativamente 1 e -1. Otteniamo facilmente, con c numero compreso tra 0 e 1,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\cos c}{7!}x^7 ,$$

dove abbiamo preferito proseguire con le derivate fino alla $7^a pa$, considerato che la derivata sesta in 0 si annulla. Avremo dunque

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{\cos c}{7!} .$$

Anche se non abbiamo informazioni sul valore di c, possiamo però sicuramente affermare che $|\cos c| \leq 1$, e che quindi l'errore che si commette trascurando il termine complementare è, in modulo, inferiore a $1/7!$. Quindi

$$\sin 1 \simeq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}$$

con un errore minore di $1/5040$. Si può anche fare una verifica sommaria, con una calcolatrice tascabile, di quanto affermato:

$$\frac{101}{120} = 0.841\overline{6} , \quad \sin 1 = 0.84147098480789650665\ldots$$

L'esempio appena considerato prova che la formula di Taylor-Lagrange riesce a fornire valutazioni corrette sul grado di approssimazione del polinomio di Taylor, quando sia possibile stimare il massimo valore che raggiunge il modulo della derivata $n+1$-esima della funzione in esame, nell'intervallo tra x_0 e x (oppure tra x e x_0. Questo succede per tutte le funzioni elementari di uso comune.

Proponiamo a questo punto una lista dei polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari, di punto iniziale 0, invitando il lettore a ricavarli come utile esercizio. In alcuni casi, a fianco è indicato anche il modulo dell'errore che si commette approssimando la funzione con il polinomio indicato. Naturalmente c è un punto compreso tra 0 e x, o tra x e 0.

$\sin x$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\,,$	$\dfrac{\lvert x\rvert^{2n+1}}{(2n+1)!}\lvert\cos c\rvert$
$\cos x$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\,,$	$\dfrac{\lvert x\rvert^{2n+2}}{(2n+2)!}\lvert\cos c\rvert$
e^x	$1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\,,$	$\dfrac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^c$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\,,$	$\dfrac{\lvert x\rvert^{n+1}}{(n+1)}\,\dfrac{1}{(1+c)^{n+1}}$
$\operatorname{tg} x$	$x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{7x^7}{315}$	
$\operatorname{arctg} x$	$x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$	

9.4 Concavità e convessità in un intervallo

Definizione 9.4 (Insieme convesso)**.** *Un sottoinsieme (di* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$*) si dice* convesso *se ogni volta che contiene due punti, contiene anche il segmento che li unisce.*

Gli unici sottoinsiemi convessi della retta sono gli intervalli. Gli angoli convessi (non superiori all'angolo piatto) sono insiemi convessi del piano, un cerchio è un insieme convesso del piano,. . .

Definizione 9.5. *Se* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *è una funzione , si chiama* sopragrafico *di* f *l'insieme dei punti* $P(x, y)$ *del piano tali che*

$$x \in I, \quad y \geq f(x)\,.$$

ovvero l'insieme dei punti che "stanno sopra" al grafico di f*. Analoga la definizione di* sottografico*.*

Definizione 9.6. *Una funzione* $f\colon I \to \mathbb{R}$*, dove* I *è un intervallo, si dice* convessa *se il suo sopragrafico è convesso,* concava *se il suo sottografico è convesso.*

Al posto di funzione convessa si può anche usare l'espressione "funzione che volge la concavità verso l'alto", al posto di funzione concava quella di "funzione che volge la concavità verso il basso".

La condizione di convessità in un intervallo è una condizione molto restrittiva per una funzione. Si può per esempio dimostrare che una funzione convessa in un intervallo *aperto*[2] è sempre continua nell'intervallo e addirittura ammette derivata sinistra e destra in ogni punto dell'intervallo con la derivata sinistra minore o uguale alla derivata destra. Noi qui ci limiteremo a considerare condizioni sufficienti per la convessità. Premettiamo a questo fatto la seguente osservazione.

Osservazione 9.7. Per verificare la convessità di una funzione è sufficiente dimostrare che il segmento che congiunge due punti qualunque del suo grafico sta tutto nel sopragrafico della funzione. Questo si può esprimere come segue. Se x_1 e x_2 sono due punti qualunque del dominio I (un intervallo) della funzione, la retta che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha equazione

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

Dunque la condizione di convessità si scrive come segue:

$$\forall x \in]x_1\,,\,x_2[,\ f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,. \tag{9.5}$$

Se la disuguaglianza precedente vale in senso stretto la funzione si dice *strettamente convessa.*

Teorema 9.8. *Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in I. Se è $f''(x) \geq 0$ in ogni punto interno di I, allora la funzione è convessa in I; se $f''(x) \leq 0$ in ogni punto interno di I, allora la funzione è concava in I.*

Dimostrazione. Per provare la convessità dobbiamo provare la (9.5), se $x_1 < x < x_2$, ovvero che

$$\big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)(x - x_1) \leq 0\,.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned}
\big(f(x)-f(x_1)\big)(x_2 - x_1) &- \big(f(x_2) - f(x_1)\big)(x - x_1) = \\
&= \big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x + x - x_1) - \big(f(x_2) - f(x) + f(x) - f(x_1)\big)(x - x_1) = \\
&= \big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x) + \big(f(x) - f(x_1)\big)(x - x_1) \\
&\qquad - \big(f(x_2) - f(x)\big)(x - x_1) - \big(f(x) - f(x_1)\big)(x - x_1) = \\
&= \big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x) - \big(f(x_2) - f(x)\big)(x - x_1)\,.
\end{aligned}$$

In base al teorema di Lagrange abbiamo

$$f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)\,, \quad f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)\,, \quad \text{con } c_1 < c_2\,.$$

Ne segue che l'ultimo membro dell'uguaglianza precedente diventa

$$f'(c_1)(x - x_1)(x_2 - x) - f'(c_2)(x_2 - x)(x - x_1) = \big(f'(c_1) - f'(c_2)\big)(x - x_1)(x_2 - x)\,.$$

[2] Attenzione: se l'intervallo è chiuso una funzione convessa può non essere continua; basta considerare ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x = \pm 1 \\ |x|\,, & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}\,.$$

Poichè la funzione f' è a sua volta derivabile, possiamo concludere, applicando Lagrange alla funzione f' nell'intervallo $[c_1\,,\,c_2]$, che

$$f'(c_1) - f'(c_2) = f''(c)(c_1 - c_2)\,.$$

Sostituendo concludiamo che si ha

$$\big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)(x - x_1) = f''(c)(c_1 - c_2)(x - x_1)(x_2 - x)\,.$$

Poiché i fattori dell'ultimo membro sono, nell'ordine, positivo (per ipotesi), negativo (perché $c_1 < c_2$), positivo (perché $x > x_1$), positivo (perché $x < x_2$), ne segue che il prodotto è negativo. Questo conclude la dimostrazione. □

9.5 Proprietà locali del secondo ordine (cenni). Flessi

Nello studio delle proprietà locali di una funzione abbiamo confrontato i valori della funzione in un intorno di un punto con il valore nel punto. Supponiamo ora che la funzione sia derivabile in un punto x_0 ed eseguiamo un confronto tra i valori della funzione in un intorno di x_0 e i valori calcolati sulla retta tangente in x_0. Si danno a questo proposito le seguenti definizioni.

Definizione 9.9. *Sia f una funzione definita in un intervallo I, derivabile in un punto x_0 di I. La funzione si dice* (localmente) convessa [(localmente) concava] *in x_0 se esiste un intorno U_{x_0} tale che in ogni suo punto si abbia*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \big[f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big]\,.$$

Se le disuguaglianze valgono in senso stretto (ovviamente per $x \neq x_0$) allora la funzione si dice strettamente convessa o concava.

Definizione 9.10. *Sia f una funzione definita in un intervallo I, derivabile in un punto x_0 di I. Se esiste un intorno U_{x_0} tale che*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x < x_0 \text{ e } f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x > x_0$$

oppure

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x < x_0 \text{ e } f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x > x_0$$

allora il punto x_0 si dice di flesso *per la funzione f.*

È facile provare che se una funzione è derivabile e convessa in un intervallo è (localmente) convessa in ogni punto dell'intervallo. Può però succedere che una funzione sia convessa in un punto, senza esserlo in un intorno del punto, come vedremo su esempi.

È poi evidente che se un punto x_0 interno a I, dove la funzione è derivabile, è estremo comune di due intervalli in uno dei quali la funzione è convessa e nell'altro concava, o viceversa, allora x_0 è di flesso.

Per la convessità locale vale il seguente teorema.

Teorema 9.11. *Se una funzione è due volte derivabile in un intervallo I e x_0 è un punto interno di I, allora*

1. *se* $f''(x_0) > 0$ *la funzione è convessa in* x_0*;*
2. *se* $f''(x_0) < 0$ *la funzione è concava in* x_0*;*
3. *se* x_0 *è di flesso,* $f''(x_0) = 0$*.*

Dimostrazione. Proviamo la prima proprietà usando la formula di Taylor-Peano.

$$f(x) - \big(f(x) + f'(x_0)(x - x_0)\big) = \left(\frac{f''(x_0) + \omega(x - x_0)}{2!}\right)(x - x_0)^2 .$$

Poiché

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x_0) + \omega(x - x_0)}{2!} = \frac{f''(x_0)}{2!} > 0 ,$$

per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno U_{x_0} in cui, tranne in x_0, tutta la quantità

$$\frac{f''(x_0) + \omega(x - x_0)}{2!}$$

è maggiore di zero. Questo basta per concludere. □

9.6 Condizioni sufficienti per massimi, minimi, flessi (cenni)

Concludiamo questo capitolo con l'enunciato di due teoremi che forniscono condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi, minimi, flessi, mediante la conoscenza delle derivate di una funzione in un punto.

Teorema 9.12. *Sia* f *una funzione definita in un intervallo aperto* I*, e sia* x_0 *un punto di* I *dove*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 , \quad \textit{mentre} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 .$$

Allora

- *se* n *è pari la funzione ha in* x_0 *un massimo (se* $f^{(n)}(x_0) < 0$*), un minimo (se* $f^{(n)}(x_0) > 0$*);*
- *se* n *è dispari la funzione è crescente in* x_0 *(se* $f^{(n)}(x_0) > 0$*), decrescente (se* $f^{(n)}(x_0) < 0$*).*

Teorema 9.13. *Sia* f *una funzione definita in un intervallo aperto* I*, e sia* x_0 *un punto di* I *dove*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 , \quad \textit{mentre} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 .$$

Allora

- *se* n *è pari la funzione è in* x_0 *concava (se* $f^{(n)}(x_0) < 0$*), convessa (se* $f^{(n)}(x_0) > 0$*);*
- *se* n *è dispari la funzione ha un flesso in* x_0*.*