12 Numeri complessi

12.1 Definizioni. Forma algebrica

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali. Vogliamo introdurre su questo insieme una struttura molto simile a quella dell'insieme dei numeri reali, definendo un'operazione di somma e prodotto con le stesse proprietà presenti in $\mathbb{R}$. Otterremo un insieme di elementi che potranno ancora essere chiamati numeri e su cui si potrà operare con algoritmi quasi identici a quelli visti nei reali. Rimarrà, è bene precisarlo subito, una importante e radicale differenza: *non* introdurremo in questo insieme le proprietà dell'*ordine* e quindi tutte quelle da esse derivanti.

Definizione 12.1. *Diremo* insieme dei numeri complessi *l'insieme*

$$\mathbb{C} = \{\, (a, b) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \,\} ,$$

dove si siano introdotte le operazioni seguenti:

1. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$*;*
2. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$*.*

È molto facile verificare che le operazioni così definite in $\mathbb{C}$ soddisfano tutte le proprietà considerate negli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ dei reali (vedi la pagina 19). In particolare segnaliamo che

- l'elemento neutro della somma è $(0, 0)$;
- l'elemento neutro del prodotto è $(1, 0)$;
- l'opposto di (a, b) è $(-a, -b)$;
- il reciproco di un elemento non nullo (a, b) di $\mathbb{C}$ è dato da

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2} , \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) .$$

Per ricavare esplicitamente l'espressione del reciproco di un elemento non nullo si può procedere come segue.

Dato $(a, b) \neq (0, 0)$ si deve trovare un (x, y) tale che $(a, b)(x, y) = (1, 0)$. Si ha, tenendo conto della definizione di prodotto sopra data,

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx) .$$

Da qui si deduce che deve essere

$$\begin{cases} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{cases} ,$$

da cui si ottiene subito l'espressione sopra riportata.

Dunque possiamo affermare che anche l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un *corpo commutativo* o *campo*, esattamente come il corpo dei reali. Si ha

$$(0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)\,,$$

e inoltre

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0)\,.$$

Quest'ultima scrittura è particolarmente significativa per le considerazioni che seguono. Il sottoinsieme A di $\mathbb{C}$ costituito dalle coppie del tipo $(a,0)$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto, cioè sommando o moltiplicando tra di loro elementi di A si ottengono ancora elementi di A. Questo sottoinsieme può essere considerato una "copia" dell'insieme dei $\mathbb{R}$ dei reali: in termini formali la corrispondenza tra A ed $\mathbb{R}$ che a ogni coppia $(a,0)$ faccia corrispondere il reale a è una corrispondenza biunivoca che conserva le operazioni, ovvero è un isomorfismo. Questo ci consente di "identificare" le coppie del tipo $(a,0)$ con i corrispondenti numeri reali, cosa che faremo sistematicamente, indicando addirittura l'insieme A con $\mathbb{R}$ e scrivendo la formula precedente nella seguente forma

$$(a,b) = a + (0,1)b\,.$$

Questa osservazione ci consente di pensare a $\mathbb{C}$ come a un *ampliamento* di $\mathbb{R}$, cioè di scrivere

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\,.$$

Con questo insieme di numeri si conclude, per quanto ci riguarda, la vicenda dell'ampliamento dell'insieme dei naturali: in quest'ultimo insieme di numeri sono in effetti possibili tutte le operazioni che interessano l'analisi.

La coppia $(0,1)$ gioca un ruolo speciale nell'insieme dei complessi e prende il nome di *unità immaginaria*. Il suo uso continuo consiglia l'introduzione di uno speciale simbolo per rappresentarla: si pone, per definizione,

$$\mathrm{i} \overset{\text{def}}{=} (0,1)\,,$$

e, in virtù dell'identificazione precedente tra A ed $\mathbb{R}$ si scrive

$$\mathrm{i}^2 = -1\,. \tag{12.1}$$

Con questa definizione ogni numero complesso si può scrivere nella forma, detta *forma algebrica*, seguente:

$$(a,b) = a + \mathrm{i}b\,,\quad \text{oppure}\quad (a,b) = a + b\mathrm{i}\,. \tag{12.2}$$

Questa scrittura è particolarmente significativa perchè consente di eseguire tutte le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ esattamente come in $\mathbb{R}$ e trattando i come "una lettera" con la sola aggiunta della proprietà espressa dall'equazione (12.1).

Esempio. Per calcolare il reciproco di un numero complesso, anziché usare la formula soprascritta si può procedere come segue.

$$\frac{1}{(2,3)} = \frac{1}{2+3\mathrm{i}} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{2-3i}{13} = \left(\frac{2}{13}, \frac{-3}{13}\right)\,.$$

Come già annunciato non si introduce nell'insieme dei complessi una relazione d'ordine, e il motivo è da ricercarsi nel fatto che una relazione d'ordine in $\mathbb{C}$ *non* può godere delle proprietà di compatibilità con la somma e con il prodotto che abbiamo visto in occasione dell'introduzione dell'insieme dei reali (vedi la pagina 19 e le seguenti). Se infatti una tal relazione d'ordine esistesse, ne conseguirebbe che il quadrato di un qualunque numero deve essere positivo. Poichè però $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$, dovrebbero essere positivi sia 1 che il suo opposto, e la cosa è impossibile se devono valere le citate proprietà dell'ordine.

Definizione 12.2. *Dato il numero complesso*

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b\,,$$

il numero a si chiama parte reale *mentre il numero reale b si chiama* coefficiente della parte immaginaria *del numero complesso dato.*

Si usano i seguenti simboli:

$$a = \operatorname{Re} z\,, \quad b = \operatorname{Im} z\,.$$

Definizione 12.3 (Coniugato)**.** *Dato il numero complesso*

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b\,,$$

il numero complesso

$$\overline{z} = (a, -b) = a - \mathrm{i}b\,,$$

si chiama coniugato *o complesso coniugato di z.*

Definizione 12.4. *Dato il numero complesso*

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b\,,$$

il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si chiama modulo *del numero complesso z e si indica usualmente con ϱ:*

$$\varrho = |z|\,.$$

Costituisce un semplice esercizio la verifica delle seguenti proprietà.

- $\overline{(\overline{z})} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- $|\operatorname{Re} z| \le |z|$.

– $|\mathrm{Im}\, z| \le |z|$.
– $|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

Osservazione 12.5. Si presti particolare attenzione al fatto che

$$z^2 \neq |z|^2 .$$

Infatti, se $z = a + \mathrm{i}b$, si ha

$$z^2 = (a + \mathrm{i}b)^2 = a^2 + 2\mathrm{i}ab + \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 - b^2 + \mathrm{i}(2ab)\,, \quad \text{mentre} \quad |z|^2 = a^2 + b^2 .$$

È però ancora vero, come nei reali, che

$$\left|z^2\right| = |z|^2 .$$

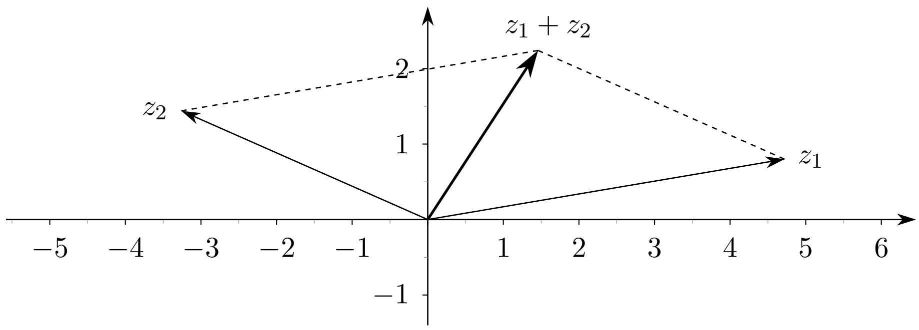
Infatti

$$\left|z^2\right| = \left|a^2 - b^2 + \mathrm{i}(2ab)\right| = \sqrt{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = a^2 + b^2 = |z|^2 .$$

12.2 Il piano di Argand-Gauss

Poichè i mattoni su cui è costruito il corpo dei numeri complessi sono le coppie di reali, è naturale rappresentarli nel piano in cui si sia stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Sull'asse delle ascisse riporteremo la parte reale, su quella delle ordinate il coefficiente della parte immaginaria dei numeri complessi. Per questo motivo gli assi sono chiamati anche *asse reale* e *asse immaginario*[1].

In questa rappresentazione la somma di due numeri complessi si può fare esattamente con la regola del parallelogramma, come somma di vettori che collegano l'origine con il punto che rappresenta ciascun numero complesso.



In questa rappresentazione inoltre il modulo di un complesso è semplicemente dato dalla distanza dello stesso dall'origine, il coniugato di un complesso dal simmetrico dello stesso rispetto all'asse reale.

Questa rappresentazione diventa però particolarmente significativa e utile quando si tratta del prodotto di numeri complessi, come vedremo tra poco.

[1] L'idea di una tale rappresentazione risale a Caspar Wessel (1745-1818) e a Jean Robert Argand (1768-1822). Fu definitivamente perfezionata da Carl Friedrich Gauss. Per questo il piano in cui si rappresentano i complessi si chiama di Gauss o di Argand-Gauss.

12.3 Forma trigonometrica

Considerato il numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ e il punto P rappresentativo dello stesso nel piano di Gauss, possiamo osservare che il punto P è individuato dalla sua distanza dall'origine (cioè dal modulo di z) e, se tale distanza è maggior di zero, dall'angolo ϑ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP, nell'ordine, pur di limitarsi a considerare un intervallo opportuno di variabilità per tale angolo, per esempio $[0, 2\pi[$, come di solito faremo noi, o $]-\pi, \pi]$ come in altre convenzioni.

È evidente che l'angolo ϑ, con le limitazioni indicate, è individuato, se $\varrho > 0$ dall'essere

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin\vartheta = \frac{b}{\varrho}.$$

Il numero complesso z, con $\varrho > 0$, si potrà anche scrivere

$$z = a + \mathrm{i}b = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta).$$

Viceversa, dati due numeri reali $\varrho \geq 0$ e ϑ, essi individuano univocamente il numero complesso $z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, ed è evidente che due coppie diverse (ϱ_1, ϑ_1) e (ϱ_2, ϑ_2), con $\varrho_1 > 0$ e $\varrho_2 > 0$ individuano lo stesso numero complesso z se e solo se $\varrho_1 = \varrho_2$ e $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$.

Dunque si può pensare ai numeri complessi anche come alle coppie (ϱ, ϑ), con $\varrho \geq 0$. Questo tipo di rappresentazione dei complessi si chiama *forma trigonometrica* o *forma polare* e si usa una delle due notazioni seguenti per indicare una coppia di questo tipo associata a un complesso $z = a + \mathrm{i}b$:

$$[\varrho, \vartheta], \quad (\varrho; \vartheta).$$

La notazione con le parentesi quadre è molto diffusa, ma ha lo svantaggio di poter essere confusa con la notazione usata per gli intervalli. La notazione con le parentesi tonde e il punto e virgola al posto della virgola è molto meno diffusa, ma è utilizzata in molti software di calcolo simbolico o grafico. Noi utilizzeremo la seconda.

Il numero ϑ è detto *anomalia* o *argomento* del numero complesso z. Se $\varrho = 0$ l'argomento non risulta definito e si può assegnare a esso un qualunque valore. Il valore di ϑ compreso nell'intervallo di variabilità scelto si chiama anche argomento principale del numero complesso.

Naturalmente il passaggio dalla forma algebrica a quella polare è regolato dall'uguaglianza

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b = (\varrho; \vartheta) = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta).$$

Il primo grande vantaggio della forma polare è dato dalla nuova forma che assume il prodotto di due complessi.

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (\varrho_1; \vartheta_1) \cdot (\varrho_1; \vartheta_2) &= \varrho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\varrho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = \\ &= \varrho_1\varrho_2\big((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)\big) = \\ &= \varrho_1\varrho_2\big(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\big), \end{aligned}$$

ovvero

$$(\varrho_1; \vartheta_1) \cdot (\varrho_2; \vartheta_2) = (\varrho_1\varrho_2\,;\ \vartheta_1 + \vartheta_2). \tag{12.3}$$

Analogamente si prova

$$\frac{(\varrho_1;\vartheta_1)}{(\varrho_2;\vartheta_2)} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,;\,\vartheta_1-\vartheta_2\right). \tag{12.4}$$

Come conseguenza della formula del prodotto si ha, per induzione su n, che

$$z^n = (a+\mathrm{i}b)^n = (\varrho;\vartheta)^n = (\varrho^n\,;\,n\vartheta) = \varrho^n(\cos n\vartheta + \mathrm{i}\sin n\vartheta)\,, \tag{12.5}$$

formula nota con il nome di *Formula di Moivre* o *Formula di de Moivre.*

L'espressione del prodotto di due complessi con la forma polare evidenzia una straordinaria e importante proprietà del prodotto tra due complessi e delle loro rappresentazioni vettoriali nel piano di Gauss: dati due numeri

$$z_1 = (\varrho_1;\vartheta_1)\,,\quad \text{e} \quad z_2 = (\varrho_2;\vartheta_2)\,,$$

moltiplicare z_1 per z_2 equivale a "dilatare" il vettore rappresentante di z_1 del fattore ϱ_2 e a ruotare lo stesso vettore di un angolo ϑ_2. In particolare moltiplicare un complesso $z=(\varrho;\vartheta)$ per un complesso di modulo 1, $u=(1;\varphi)$ equivale a ruotare il vettore rappresentante del complesso z di un angolo φ.

12.4 Radici nei complessi

Occupiamoci ora del problema che ha dato storicamente origine agli studi sui numeri complessi, ovvero il problema dell'estrazione di radice.

In $\mathbb{R}$, come sappiamo, dato un numero a e un naturale $n>1$, l'equazione

$$x^n = a$$

ha

- un'unica soluzione se n è dispari, per qualunque valore di a;
- solo la soluzione 0 per n pari, se $a=0$;
- due soluzioni opposte per n pari, se $a>0$;
- nessuna soluzione per n pari, se $a<0$.

Fissiamo ora un complesso z e, per ogni naturale $n>1$, consideriamo l'equazione, in w,

$$w^n = z\,. \tag{12.6}$$

Sia $z=(\varrho;\vartheta)$ ed esprimiamo anche l'incognita w della (12.6) in forma polare: $w=(\sigma;\varphi)$, con σ e φ da determinare (se esistono!). Poiché

$$w^n = (\sigma^n;n\varphi)\,,$$

dovrà aversi

$$\begin{cases} \sigma^n = \varrho \\ n\varphi = \vartheta + 2k\pi \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \sigma = \sqrt[n]{\varrho} \\ \varphi = \dfrac{\vartheta+2k\pi}{n} \end{cases}.$$

È chiaro che, degli infiniti valori di φ forniti da questa formula, solo n corrisponderanno a numeri complessi distinti, per esempio quelli corrispondenti ai valori di k compresi tra 0 e $n-1$. Possiamo dunque concludere con il seguente importantissimo risultato.

Ogni numero complesso ha esattamente n radici n-esime distinte.

Alcuni usano indicare con $\sqrt[n]{z}$ l'insieme di tutte queste radici, ma riteniamo la notazione abbastanza infelice. È infatti di solito opportuno indicare con un simbolo un solo numero[(2)]. Non useremo quindi questo tipo di notazione e, dato un complesso $z = (\varrho; \vartheta)$, considereremo l'insieme delle sue radici n-esime scrivendo

$$\{ w_k \} = \left\{ \left(\sqrt[n]{\varrho}\, ; \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \,\middle|\, k = 0,\, 1,\, \dots,\, n-1 \right\}.$$

Si noti che tutte queste radici n-esime hanno lo stesso modulo, cioè nel piano di Gauss stanno su una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\varrho}$. Inoltre esse sono situate nei vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella stessa circonferenza e avente un vertice nel punto individuato dall'angolo ϑ/n.

Nel caso particolare del numero 1, le n radici n-esime sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e avente un vertice nel punto $(1, 0)$.

Esempio. Dalla considerazione geometrica precedente si deduce subito che le 4 radici quarte di 1 sono:

$$1,\ \mathrm{i},\ -1,\ -i\,.$$

Analogamente le 8 radici ottave di 1 sono

$$1,\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{i},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\mathrm{i},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Il risultato fondamentale di tutta la costruzione dei numeri complessi è costituito dal seguente teorema dovuto a Gauss (sempre lui!).

Teorema 12.6 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio di grado n nel campo complesso ammette almeno una radice.*

La dimostrazione di questo teorema esula dagli scopi di questo corso. Interessa comunque sottolineare che, come conseguenza dello stesso, se si conteggiano le radici con la loro molteplicità, si conclude che ogni polinomio ha esattamente tante radici, in $\mathbb{C}$, quant'è il suo grado. Il risultato è abbastanza sorprendente se si tiene conto che non è possibile (teorema di Ruffini-Abel) trovare una formula risolutiva generale (del tipo di quella valida per i polinomi di grado 2) per determinare le radici dei polinomi di grado superiore al quarto.

12.5 Successioni e serie nei complessi. Cenni

L'estensione del concetto di successione ai complessi non presenta alcuna difficoltà: basterà soltanto prendere $\mathbb{C}$ anziché $\mathbb{R}$ come codominio della successione. Ricordiamo poi la definizione di successione convergente in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > \overline{n} \text{ si abbia } |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

[2]Per esempio nell'insieme dei reali si conviene che

$$\sqrt{4} = +2\,,$$

mentre se si vuole considerare l'equazione $x^2 = 4$ si dice che l'insieme delle soluzioni è $\{ -2,\, 2 \}$.

Poiché anche in $\mathbb{C}$ abbiamo introdotto il modulo di un complesso, la definizione può essere estesa senza alcuna modifica anche alle successioni di complessi.

Scriveremo pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > \overline{n} \text{ si abbia } |z_n - l| < \varepsilon\,, \tag{12.7}$$

e chiameremo una successione con questa proprietà *convergente* a l. Se questo non succede diremo semplicemente che la successione *non converge*.

Si noti che non ha senso considerare, per le successioni complesse, una rappresentazione grafica come quella considerata per le successioni reali, in quanto i valori immagine di una successione sono rappresentabili come punti di un piano e non su una retta. Si noti altresì che la scrittura $|z_n - l| < \varepsilon$ implica che tutti i termini della successione successivi a $\overline{n}$ stanno all'interno di un disco del piano di Gauss di centro $l = \operatorname{Re} l + \mathrm{i} \operatorname{Im} l$ e raggio ε.

Esempio. Rappresentare, nel piano complesso, le immagini della successione

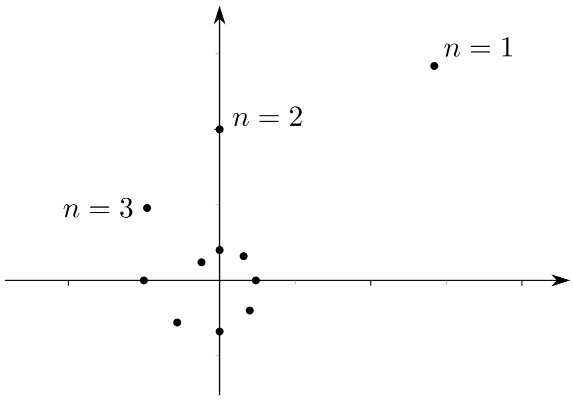
$$z_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

e "verificare" graficamente che la successione ha per limite 0.

Cominciamo con l'osservare che

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(1\,;\,\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(1\,;\,n\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad z_n = \left(\frac{1}{n}\,;\,n\frac{\pi}{4}\right).$$

La rappresentazione grafica richiesta è ora immediata.



La figura mostra subito che il limite della successione è 0, cioè $(0,0) = 0 + \mathrm{i}\,0$.

È immediato che una successione $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ di complessi converge a un complesso l se e solo se x_n converge a $\operatorname{Re} l$ e y_n converge a $\operatorname{Im} l$. Dunque nello studiare le successioni di complessi ci si può limitare a separare la parte reale dal coefficiente della parte immaginaria e studiare le due successioni reali così ottenute. Tecnicamente il problema può essere complesso, perché non è detto che sia facile separare la parte reale da quella immaginaria, ma problemi di questo tipo esulano dal contesto di questo corso.

Una volta introdotto il concetto di successione nei complessi si può anche parlare di serie a termini complessi, anche qui senza alcuna modifica rispetto al caso delle serie a termini reali: come conseguenza di quanto osservato sulle successioni, basterà tenere conto che una serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + \mathrm{i} y_n)$$

potrà convergere a una somma s se e solo se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \operatorname{Re} s \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \operatorname{Im} s \,,$$

e questo ci consentirà di continuare a operare su serie a termini reali.

È molto importante il seguente teorema, che estende l'analogo per le serie a termini reali (vedi il teorema 10.18 nella pagina 126).

Teorema 12.7. *Se una serie a termini complessi converge assolutamente, allora converge.*

Dimostrazione. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + \mathrm{i} y_n)$$

converge assolutamente, significa che converge la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} \,.$$

Ne segue che convergono anche le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n| \,,$$

che sono minoranti della precedente. Ma allora convergono anche le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

e quindi la serie data. □

Naturalmente si potranno introdurre anche le serie di funzioni nel campo complesso e in particolare le serie di potenze, a cui siamo soprattutto interessati.

L'unica modifica che si dovrà fare rispetto all'analogo concetto sulle serie di potenze nel campo reale è relativa all'insieme di convergenza che sarà un cerchio, anziché un intervallo: una serie di potenze centrata in z_0, converge sempre assolutamente all'interno di un cerchio di centro z_0 e di raggio r, detto raggio di convergenza; nulla si può dire in generale sui punti della circonferenza che è bordo di questo cerchio. La cosa non richiede alcuna nuova dimostrazione, in quanto nella dimostrazione del Lemma di Abel (teorema 11.2 nella pagina 129) abbiamo usato solo la serie dei moduli, e le proprietà del modulo in $\mathbb{C}$ sono le stesse che si hanno in $\mathbb{R}$.

Consideriamo un esempio un po' complesso, in cui sono coinvolti tutti i ragionamenti proposti.

Esempio. Si consideri la successione

$$z_n = \frac{\mathrm{i}^n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\mathrm{i}^{2n}\sqrt{n+1}}{n}\,.$$

Si studi prima la convergenza della successione e poi quella della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\,.$$

Cominciamo con l'osservare che solo i termini con n dispari hanno parte immaginaria, in quanto

$$\mathrm{i}^{2n} = (\mathrm{i}^2)^n = (-1)^n;$$

converrà pertanto separare i termini pari da quelli dispari.

$$\begin{aligned}
z_{2n} &= \frac{\mathrm{i}^{2n}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)+\mathrm{i}^{4n}\sqrt{2n+1}}{2n} = \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)+\sqrt{2n+1}}{2n}\,;\\
z_{2n-1} &= \frac{\mathrm{i}^{2n-1}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}\right)+\mathrm{i}^{4n-2}\sqrt{2n}}{2n-1} =\\
&= \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{i}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}\right)-\sqrt{2n}}{2n-1}\,,
\end{aligned}$$

ove abbiamo tenuto conto dei seguenti fatti.

$$\mathrm{i}^{2n-1} = \frac{\mathrm{i}^{2n}}{\mathrm{i}} = (-1)^n(-\mathrm{i}) = (-1)^{n+1}\mathrm{i}\,,\quad \mathrm{i}^{4n-2} = \frac{\mathrm{i}^{4n}}{\mathrm{i}^2} = \frac{1}{-1} = -1\,.$$

I seguenti limiti sono abbastanza standard.

$$\lim_n \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)}{2n} = \lim_n \frac{(-1)^n}{2n\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}\right)} = 0$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n+1}}{2n} = 0$$

$$\lim_n \frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}\right)}{2n-1} = \cdots = 0$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} = 0$$

Questi limiti ci permettono di concludere facilmente che la successione tende a 0.
Occupiamoci ora della serie proposta. Si può osservare quanto segue.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{i}^n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}{n}\,.$$

La prima serie è una serie a termini reali a cui si può applicare il criterio di Leibniz e converge, la seconda è una serie assolutamente convergente in quanto il valore assoluto del suo termine generale è

$$\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}{n}=\frac{1}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)},$$

che è infinitesimo di ordine $3/2$. La serie dunque, in quanto somma di due serie convergenti, converge.

Anche se non è richiesto dal testo si può controllare che la serie non è assolutamente convergente, prendendo (con un po' di attenzione!) i moduli.

12.6 Le funzioni elementari nei complessi. Cenni

Riconsideriamo i seguenti sviluppi in serie di potenze delle funzioni esponenziale, seno e coseno.

- $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

Poiché si tratta di serie di potenze convergenti su tutto $\mathbb{R}$, se le consideriamo nel campo complesso otterremo delle serie convergenti in tutto $\mathbb{C}$. Alle funzioni somma di queste serie si danno gli stessi nomi delle funzioni nel campo reale. Precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 12.8. *Si definiscono nel campo complesso le seguenti funzioni.*

- *Esponenziale:* $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$
- *Seno:* $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{C}.$
- *Coseno:* $\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{C}.$

Vale il seguente teorema, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

Teorema 12.9. *Per ogni z, $w \in \mathbb{C}$ si ha*

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w \,. \tag{12.8}$$

Proviamo invece il seguente teorema.

Teorema 12.10 (Formule di Eulero)**.** *Si ha*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z\,, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z\,,$$

e, di conseguenza,

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\,, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2i}\,.$$

Dimostrazione. Da

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = 1 + \frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}z)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}z)^6}{6!} + \cdots$$

e

$$\mathrm{i}\sin z = \mathrm{i}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = (\mathrm{i}z) + \frac{(\mathrm{i}z)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}z)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}z)^7}{7!} + \cdots$$

si ottiene subito l'uguaglianza richiesta per somma delle due serie. La seconda formula si prova in modo analogo. Le ultime due si ricavano per somma e sottrazione. □

Come conseguenza importante di queste formule e del teorema precedente si ha che, se $z = x + iy$,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,,$$

che non è altro che la forma trigonometrica del numero complesso e^z.

Poiché x e y sono numeri reali, questa formula riporta il problema dell'esponenziale complesso a una combinazione di esponenziali e funzioni trigonometriche reali.

Inoltre, se $z = z + \mathrm{i}y$ è un reale qualsiasi, e ne esaminiamo la forma trigonometrica

$$z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)\,,$$

possiamo concludere che il numero stesso si può scrivere nella forma

$$z = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\,,$$

detta *forma esponenziale* del numero complesso. Questa forma è particolarmente utile in molte applicazioni.

Proviamo anche il seguente teorema.

Teorema 12.11. *L'esponenziale complesso è una funzione periodica di periodo* $2\pi\mathrm{i}$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice conseguenza delle proprietà appena viste.

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = \mathrm{e}^z\,.$$ □

Si potrebbe anche introdurre la funzione logaritmo naturale nei complessi, con procedimenti simili a quelli usati nei reali, ma la cosa è un po' delicata ed esula dagli scopi di questo corso. Analoghe difficoltà per la definizione di potenza con base ed esponente complesso, che si potrebbe definire a partire dalle funzioni logaritmo ed esponenziali.

Concludiamo questa sommaria introduzione alle funzioni elementari nel campo complesso con la formula seguente.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = 1\,,$$

di solito scritta nella forma

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0\,.$$

In un sola formula sono comprese tutte e sole le cinque costanti più importanti della matematica.