

1 Insiemi

Scopo di questo capitolo è principalmente quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso per gli sviluppi futuri del corso, anche richiamando brevemente concetti che in buona parte dovrebbero essere noti dagli studi precedenti.

In questo capitolo utilizzeremo, specie negli esempi, l'insieme dei numeri reali, le cui proprietà essenziali dovrebbero essere note dalla scuola media superiore. L'insieme dei numeri reali sarà comunque oggetto di studio nei capitoli successivi.

1.1 Alcuni simboli logici di uso comune

Senza alcuna pretesa di completezza, proponiamo un elenco di alcuni simboli logici di uso comune in matematica. In questo paragrafo \mathcal{P} e \mathcal{Q} rappresentano due proposizioni.

Connettivi

I connettivi (come “o” ed “e”) collegano tra di loro due proposizioni, oppure (come “non”) si applicano a una sola proposizione; quelli che più ci interesseranno sono:

- \vee , “vel”, oppure “o”: $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, altrimenti è falsa;
- \wedge , “et”, oppure “e”: $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ è vera se tutte due le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa;
- *non*, negazione: $\text{non}\mathcal{P}$ è vera, se \mathcal{P} è falsa;
- \Rightarrow , “implica”: $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ è falsa solo quando \mathcal{P} è vera e \mathcal{Q} è falsa, in particolare da una proposizione falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- \Leftrightarrow , “se e solo se”, “condizione necessaria e sufficiente”: $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ è vera se \mathcal{P} e \mathcal{Q} sono entrambe vere o entrambe false.

Dimostrare un teorema significa dimostrare la verità di $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, dove \mathcal{P} è detta *ipotesi* e \mathcal{Q} *tesi*.

Quantificatori

I quantificatori sono

- \forall , quantificatore universale: “per ogni”;
- \exists , quantificatore esistenziale: “esiste (almeno) un”;
- $\exists!$, quantificatore esistenziale: “esiste uno e uno solo”.

Per chiarire il significato e l'uso dei quantificatori utilizziamo alcuni esempi in cui compaiono numeri reali.

- $\exists x$ tale che $x^2 \geq 2$: è vera;
- $\exists x$ tale che $x^2 \geq -2$: è vera;
- $\exists x$ tale che $x^2 \leq -2$: è falsa;
- $\exists x$ tale che $x^2 \leq 0$: è vera;

- $\exists x$ tale che $x^2 < 0$: è falsa;
- $\forall x x^2 \geq 0$: è vera;
- $\forall x x^2 > 0$: è falsa;
- $\forall x x^2 \geq -5$: è vera.

Nel caso di uso contemporaneo di più quantificatori si deve prestare particolare attenzione all'ordine con cui sono scritti. Un esempio chiarirà il senso di questa affermazione.

Consideriamo il *predicato*⁽¹⁾ $\mathcal{P}(x, y) = "x \text{ è uno studente in grado di risolvere il problema } y"$. Allora

$$\forall y \exists x \text{ tale che } \mathcal{P}(x, y)$$

significa: "qualunque sia il problema y c'è uno studente in grado di risolverlo". Invece

$$\exists x \forall y \text{ tale che } \mathcal{P}(x, y)$$

significa: "c'è uno studente in grado di risolvere qualsiasi problema". Evidentemente si tratta di due proposizioni radicalmente diverse.

1.2 Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo "un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*", ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire "un insieme è un insieme". Abituamente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: A, B, \dots

La scrittura

$$(1.1) \quad x \in A$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge " x appartiene ad A ". La 1.1 si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della 1.1 si scrive

$$(1.2) \quad x \notin A,$$

che si legge, naturalmente, " x non appartiene ad A ". La 1.2 si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando i simboli logici sopra introdotti,

$$(1.3) \quad A = B \Leftrightarrow (\forall x x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con \emptyset , privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi, per esempio $A = \{ 0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone} \}$.

¹Anche se esula un po' dagli scopi di questo breve capitolo introduttivo, ricordiamo che *predicato* è una espressione logica contenente delle variabili, che può diventare una proposizione (vera o falsa) a seconda dei valori che si assegnano alle variabili.

2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A = \{ x \mid x \text{ è un numero naturale pari} \}$. La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{ 3, 6, 9, 12, \dots \}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{ 2, 3, \dots \}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

Occorre poi prestare ancora più attenzione alle rappresentazioni intensive. Esse non presentano problemi quando si usano per assegnare sottoinsiemi di un insieme noto, possono invece produrre gravi difficoltà logiche in altri casi, come mostra il famoso *Paradosso del barbiere*: se il barbiere è definito come colui che fa la barba a chi non se la fa da solo, non è possibile stabilire se il barbiere si faccia o no la barba.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P , dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15\,485\,863 \in P$, e per verificare che $2^{43\,112\,609} - 1 \in P$ (uno dei più grandi primi conosciuti alla data del 20 settembre 2008, con ben 12\,978\,189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B , se ogni elemento di A è anche elemento di B , diremo che A è un *sottoinsieme* di B , o che è *contenuto* in B , o anche che B è un *soprainsieme* di A , o che *contiene* A , e scriveremo

$$(1.4) \quad A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A.$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$(1.5) \quad A \subset B, \text{ oppure } B \supset A$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A, \forall A$. Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{ a \} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli \in e \subseteq (o \subset): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con $\mathcal{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{ a, b \}$, allora

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, A \}.$$

Usando l'insieme delle parti si possono costruire, "sul vuoto", insiemi molto complessi. Si vedano gli esempi che seguono.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\emptyset) &= \{ \emptyset \} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}\end{aligned}$$

Mentre l'insieme vuoto non ha elementi, gli insiemi qui sopra proposti hanno, nell'ordine, 1, 2, 4 elementi.

1.3 Operazioni tra insiemi

Definizione 1.1. *Dati due insiemi A e B , si chiama loro unione, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A , a B o a entrambi.*

$$(1.6) \quad A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} .$$

Esempio. Se $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 2, 3, 4 \}$, allora $A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$.

Definizione 1.2. *Dati due insiemi A e B , si chiama loro intersezione, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B .*

$$(1.7) \quad A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} .$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{ 2, 3 \}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi.

Saremo anche interessati a considerare *famiglie di insiemi*: se a ogni elemento di un dato insieme $\mathcal{A} \neq \emptyset$ corrisponde un insieme A , la famiglia di insiemi sarà denotata con

$$\{ A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A} \} .$$

Quando non si darà adito a equivoci potremo anche denotare una famiglia di insiemi semplicemente con $\{ A_\alpha \}$, senza precisare l'insieme \mathcal{A} di variabilità degli indici. In molte situazioni l'insieme \mathcal{A} sarà l'insieme dei numeri naturali o un suo sottoinsieme. Per le unioni di tutti gli insiemi di una famiglia useremo scritte del tipo

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \quad , \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \quad , \quad \bigcup_{n=0}^{10} A_n \quad , \quad \bigcup_{n \in \{1, 2, \dots, k\}} A_n \quad , \quad \text{ecc.},$$

e analoghe per le intersezioni. Potremo anche usare notazioni abbreviate come

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

se l'insieme di variabilità degli indici è chiaro dal contesto.

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione.

$$\begin{aligned} A \cup A &= A; & A \cap A &= A; \\ A \cup B &= B \cup A; & A \cap B &= B \cap A; \\ A \cup \emptyset &= A; & A \cap \emptyset &= \emptyset; \\ A \cup B &\supseteq A; & A \cap B &\subseteq A; \\ A \cup B &= A \Leftrightarrow A \supseteq B; & A \cap B &= A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$(1.8) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Definizione 1.3. *Dati due insiemi A e B , si chiama loro differenza, e si indica con $A \setminus B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B .*

$$(1.9) \quad A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}.$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A \setminus B = \{ 0, 1 \}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si chiama anche *complementare di B rispetto ad A* e si indica con $\mathbb{C}_A B$, o semplicemente con $\mathbb{C}B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi: questo evita di avere problemi tipo quelli del paradosso del barbiere. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Assumiamo⁽²⁾ anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con (x, y) , dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y :

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{ a, b \} = \{ b, a \} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a).$$

Definizione 1.4. *Dati due insiemi A e B si chiama loro prodotto cartesiano, o semplicemente prodotto, l'insieme, indicato con $A \times B$, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B :*

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{ (a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \}.$$

È una conseguenza immediata della definizione che $A \times B \neq B \times A$. Nel caso particolare che $A = B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A \times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte si scriverà A^n in luogo di $A \times A \times \dots \times A$.

²Si potrebbe anche definire una coppia ordinata ponendo

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x, \{ x, y \} \}.$$

Definizione 1.5. Se A è un insieme non vuoto, una famiglia $\{A_\alpha\}$ di sottoinsiemi di A si dirà una partizione o ripartizione di A se:

1. $A_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha$;
2. $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, se $\alpha \neq \beta$;
3. $\bigcup_{\alpha} A_\alpha = A$.

Gli elementi della famiglia si diranno anche *classi*.

Esempi. – Sia A l'insieme dei punti di un piano e r una retta dello stesso piano. La famiglia di tutte le rette parallele a r costituisce una ripartizione di A .

– Sia \mathbb{Z} l'insieme degli interi: la famiglia di insiemi $\{Z^-, \{0\}, Z^+\}$ costituisce una ripartizione di \mathbb{Z} .

– Sia A l'insieme di tutte le rette di un piano e \mathcal{A} l'insieme di tutte le rette del fascio avente centro in un punto O qualsiasi. Considerato l'insieme

$$A_\alpha = \{r \mid r \text{ è una retta parallela a una retta } r_\alpha \text{ di } \mathcal{A}\},$$

la famiglia $\{A_\alpha\}$ è una ripartizione di A .

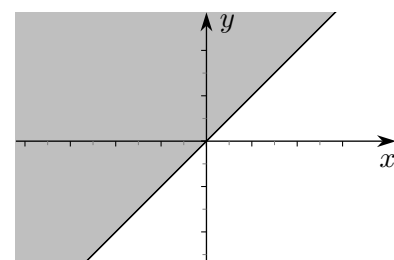
– Sia \mathbb{N}^+ l'insieme dei naturali positivi e consideriamo i sottoinsiemi $A =$ insieme dei pari, $B =$ insieme dei primi, $C =$ insieme dei dispari non primi. Allora la famiglia $\{A, B, C\}$ non costituisce una ripartizione di \mathbb{N}^+ , in quanto l'unione degli elementi della famiglia riproduce \mathbb{N}^+ , ma l'intersezione a due a due non è vuota perché $2 \in A \wedge 2 \in B$.

1.4 Relazioni binarie

Definizione 1.6. Siano A e B insiemi non vuoti. Chiamiamo relazione (binaria) tra A e B un qualunque sottoinsieme, \mathcal{R} , del prodotto cartesiano $A \times B$. Se $A = B$ la relazione è detta relazione in A .

Se \mathcal{R} è una relazione e $(a, b) \in \mathcal{R}$, scriveremo $a\mathcal{R}b$ e diremo che a è in relazione con b . Trattandosi di un insieme, la relazione potrà essere data sia specificando l'insieme che assegnando una proprietà caratteristica che individui gli elementi della relazione, cioè le coppie (a, b) tali che a sia in relazione con b .

Esempio. La relazione “ \leq ” è una relazione in \mathbb{R} , cioè è un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Trattandosi di un sottoinsieme del piano, usando un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (monometrico) potremo costruirne una semplice rappresentazione grafica.



Esempio. “Essere divisibile” è una relazione in \mathbb{N} : $(4, 2)$ sta nella relazione (4 è divisibile per 2), $(4, 3)$ non sta nella relazione. La relazione “divide” è esattamente la simmetrica di questa: in questo caso è $(2, 4)$ che sta nella relazione (2 divide 4).

Proprietà delle relazioni

Le relazioni su un insieme A possono godere di alcune proprietà: ne elenchiamo le più significative.

Proprietà riflessiva $\forall x \in A \ x \mathcal{R}x$, ovvero “ogni elemento è in relazione con se stesso”. Un esempio è fornito dalla relazione di parallelismo tra le rette dello spazio: $r \parallel r$ è vera per ogni retta r .

Proprietà simmetrica $\forall x, y \in A \ x \mathcal{R}y \Rightarrow y \mathcal{R}x$, ovvero “se x è in relazione con y , anche y è in relazione con x ”. Un esempio è ancora fornito dalla relazione di parallelismo prima citata: se $r \parallel s$, allora $s \parallel r$.

Proprietà antisimmetrica $\forall x, y \in A \ x \mathcal{R}y \wedge y \mathcal{R}x \Rightarrow x = y$, ovvero “se x è in relazione con y e y è in relazione con x , x e y sono uguali. Un esempio è fornito dalla relazione \leq : se $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Proprietà asimmetrica $\forall x, y \in A \ x \mathcal{R}y \Rightarrow y \not\mathcal{R}x$, ovvero “se x è in relazione con y , y non può essere in relazione con x ”. Un esempio è fornito dalla relazione $<$: se $x < y$ non può essere $y < x$.

Proprietà transitiva $\forall x, y, z \in A \ x \mathcal{R}y \wedge y \mathcal{R}z \Rightarrow x \mathcal{R}z$, ovvero se x è in relazione con y e y è in relazione con z , allora x è in relazione con z . Esempi sono forniti dalle relazioni di parallelismo, \leq e $<$ prima citate.

Relazioni di equivalenza

Un primo tipo di relazioni molto importante nelle applicazioni è quello delle relazioni di euqivalenza.

Definizione 1.7. *Sia A un insieme non vuoto e \mathcal{R} una relazione in A . \mathcal{R} è detta una relazione di equivalenza se gode delle proprietà*

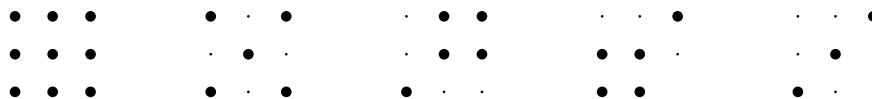
- *riflessiva,*
- *simmetrica,*
- *transitiva.*

Esempio. La relazione di parallelismo tra rette dello spazio è di equivalenza.

Esempio. Se A è un insieme di 3 elementi, possiamo rappresentare nel piano il prodotto cartesiano $A \times A = A^2$ con una griglia di 9 punti, come segue:



Le relazioni di equivalenza possibili in questo caso sono rappresentate graficamente con le seguenti 5 figure, dove gli elementi delle relazioni (cioè dei sottoinsiemi di A^2) sono evidenziati dalle maggiori dimensioni dei punti.



Se in un insieme A è definita una relazione di equivalenza \mathcal{R} è possibile costruire una speciale famiglia di sottoinsiemi di A : per ogni $x \in A$ si definisce

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in A \mid x \mathcal{R}y \}.$$

Non è difficile provare (e lo si lascia per esercizio) che la famiglia delle classi di equivalenza costituisce una partizione di A stesso. Questa famiglia prende il nome di *insieme quoziente*

di A rispetto alla relazione di equivalenza \mathcal{R} . In molte situazioni queste classi di equivalenza prendono nomi speciali, come risulta dagli esempi che seguono.

- Esempi.*
- Nell'insieme delle rette dello spazio dove si è introdotta la relazione di parallelismo, le classi di equivalenza prendono il nome di *direzioni*.
 - Nell'insieme dei piani dello spazio dove si è introdotta la relazione di parallelismo, le classi di equivalenza prendono il nome di *giaciture*.
 - Nell'insieme delle coppie di numeri interi, con il secondo elemento diverso da zero (insieme delle frazioni), si può definire una relazione di equivalenza ponendo $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ (è la usuale relazione di equivalenza tra frazioni). In questo caso le classi di equivalenza sono i *numeri razionali*.
 - Se nell'insieme dei segmenti dello spazio consideriamo la relazione di congruenza, le classi di equivalenza sono le *lunghezze* dei segmenti.
 - Se nell'insieme dei segmenti orientati consideriamo la relazione, detta di equipollenza, che considera equivalenti due segmenti orientati che siano congruenti e abbiano stessa direzione e stesso verso, le classi di equivalenza si chiamano *vettori*.

Spesso le relazioni d'ordine sono indicate con il simbolo \sim .

Relazioni d'ordine

Un secondo tipo di relazioni importante per le applicazioni che ne faremo è quello delle relazioni d'ordine.

Definizione 1.8. *Sia A un insieme non vuoto e \mathcal{R} una relazione in A . \mathcal{R} è detta una relazione d'ordine se gode delle proprietà*

- *riflessiva,*
- *antisimmetrica,*
- *transitiva.*

Esempi.

- Se $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme delle parti di un insieme A , la relazione \subseteq è una relazione d'ordine.

- Negli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} la relazione \leq è d'ordine.

Si presti attenzione al fatto che la relazione $<$ negli insiemi numerici citati non è d'ordine nel senso ora definito: essa gode della proprietà *antiriflessiva* (nessun elemento è in relazione con se stesso), *asimmetrica* e *transitiva*. Tuttavia è sempre possibile passare dalla relazione \leq alla relazione $<$ ponendo $a < b$ se e solo se $a \leq b \wedge a \neq b$. Il passaggio è ovviamente possibile anche in senso inverso. In un certo senso queste due relazioni sono equivalenti, cioè forniscono lo stesso tipo di informazione relativamente all'insieme su cui sono definite. È più che altro una questione di convenzioni scegliere l'una o l'altra.

Le relazioni d'ordine sono di solito indicate con simboli del tipo \preceq : la scrittura $a \preceq b$ si legge *a precede b* o anche *b segue a*. In una relazione d'ordine indicata con \preceq , per indicare che *b segue a* si scrive anche $b \succ a$.

È evidente che se A è un insieme ordinato con la relazione \preceq , ogni suo sottoinsieme è ancora ordinato con la stessa relazione "ristretta" al sottoinsieme. Useremo continuamente questo fatto.

Una relazione d'ordine si dice *totale* se dati due elementi a e b , accade sempre che $a \preceq b \vee b \preceq a$: in altri termini una relazione d'ordine è totale se due elementi qualunque sono sempre confrontabili.

- Esempi.* – Se A è un insieme con un solo elemento, la relazione \subseteq in $\mathcal{P}(A)$ è d'ordine totale.
- Se A è un insieme con più di un elemento, la relazione \subseteq in $\mathcal{P}(A)$ non è d'ordine totale. Per esempio se $A = \{a, b\}$ si ha $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ed è chiaro che $\{a\}$ non è contenuto né contiene $\{b\}$.
 - La relazione \leq negli insiemi numerici sopra citati è d'ordine totale.

Una relazione d'ordine che non sia d'ordine totale si dice d'ordine *parziale*.

Definizione 1.9. *Sia A un insieme ordinato con la relazione \preceq . Se esiste un elemento $m \in A$ tale che $m \preceq x \forall x \in A$, allora m si dice il minimo di A . Analogamente se esiste un elemento $M \in A$ tale che $x \preceq M \forall x \in A$, allora M si dice il massimo di A .*

L'articolo determinativo usato sia davanti al minimo che al massimo è giustificato dal seguente teorema che ne garantisce l'unicità.

Teorema 1.10. *Se un insieme ordinato ha minimo e/o massimo, essi sono unici.*

Dimostrazione. Se m_1 ed m_2 sono due minimi si deve avere

$$(m_1 \preceq m_2) \wedge (m_2 \preceq m_1),$$

da cui $m_1 = m_2$, per la proprietà antisimmetrica. Analogo discorso per il massimo. □

- Esempi.* – Nell'insieme delle parti di un dato insieme A , l'insieme vuoto è sempre il minimo e l'insieme A stesso è sempre il massimo rispetto alla relazione di inclusione tra insiemi \subseteq .
- L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} ha lo zero come minimo e non ha massimo, rispetto all'ordine usuale.
 - L'insieme degli interi non ha né massimo né minimo rispetto all'ordine usuale.

Come mostrano gli esempi appena considerati un insieme può tranquillamente non avere massimo e/o minimo. Per questo motivo si “inventa” un surrogato del massimo e del minimo che gioca un ruolo simile, ma ovviamente non identico. Purtroppo nemmeno questo surrogato esiste sempre, come vedremo.

Definizione 1.11. *Sia A un insieme ordinato con la relazione \preceq e B un sottoinsieme di A (eventualmente coincidente con A stesso). Se esiste un elemento $l \in A$ tale che $l \preceq x \forall x \in B$, l si dice un minorante o una limitazione inferiore per B .*

Analogamente se esiste un elemento $L \in A$ tale che $x \preceq L \forall x \in B$, L si dice un maggiorante o una limitazione superiore per B .

Un sottoinsieme B che abbia maggioranti si dice superiormente limitato, uno che abbia minoranti si dice inferiormente limitato. Se il sottoinsieme ha sia maggioranti che minoranti si dice semplicemente limitato.

È ovvio, considerando il caso $B = A$, che l'insieme A stesso può avere come maggioranti solo l'eventuale massimo e come minoranti solo l'eventuale minimo.

Per un generico sottoinsieme B possiamo considerare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti (che potrebbero anche essere vuoti). Ha interesse sapere se questi due insiemi hanno, oppure no, minimo (il primo) e massimo (il secondo).

Definizione 1.12. Sia A un insieme ordinato con la relazione \preceq e B un sottoinsieme di A . Se l'insieme dei maggioranti di B ha un minimo, esso si chiama l'estremo superiore di B e si indica con $\sup B$; se l'insieme dei minoranti ha un massimo esso si chiama l'estremo inferiore di B e si indica con $\inf B$.

Come già fatto con il massimo e il minimo si può osservare che non ci può essere più di un estremo superiore (o inferiore).

Esempi. – Sia $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 4\}$. Allora $\sup B = 2$ e $\inf B = -2$.
 – Sia $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 < 2)\}$. Allora $\inf B$ non può esistere perché B non è inferiormente limitato, e non esiste nemmeno $\sup B$, nonostante B abbia ovviamente dei maggioranti. L'esistenza di sottoinsiemi dei razionali che, pur essendo superiormente limitati, non hanno estremo superiore è, come vedremo, un grave "handicap" dell'insieme dei razionali, ed è per questo che si è costretti a introdurre l'insieme dei reali, dove le cose vanno in maniera completamente diversa.

1.5 Funzioni o applicazioni

Tra tutte le possibili relazioni tra due insiemi A e B , hanno particolare interesse le funzioni o applicazioni, le cui caratteristiche ci apprestiamo a esaminare.

Definizione 1.13. Una relazione f tra due insiemi non vuoti A e B si dice una funzione (o mappa o applicazione) se

$$(1.10) \quad \forall x \in A \exists! y \in B \mid (x, y) \in f.$$

L'insieme A si dice dominio, l'insieme B codominio e usualmente si scrive $y = f(x)$ in luogo di $(x, y) \in f$. L'elemento x si dice la variabile (indipendente) ed $f(x)$ il valore di f in x .

In sostanza la caratteristica delle funzioni è che ad ogni x di A deve corrispondere un unico y di B che sia in relazione con x : si esprime quest'ultimo fatto dicendo che la corrispondenza è univoca.

L'unico valore $y \in B$ che è in relazione con un dato $x \in A$ si chiama anche immagine di x tramite f .

Usando un linguaggio un po' meno rigoroso, ma significativo, si può dire che una funzione è una legge che associa ad ogni x di un insieme A detto dominio un unico elemento y di un insieme B detto codominio. È molto importante tenere presente che per assegnare una funzione occorre assegnare tre oggetti: l'insieme A , la "legge" f e l'insieme B .

Notazioni

La notazione più comune per rappresentare una funzione è la seguente

$$(1.11) \quad \begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

notazione che può anche essere scritta su una sola riga per semplicità⁽³⁾:

$$f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x).$$

Purtroppo si tratta di una notazione non semplice e non facilmente maneggiabile. In molti casi si usano notazioni abbreviate o semplificate. Per esempio per indicare la funzione definita nell'insieme dei reali e che fa corrispondere a ogni reale x il seno di x si dovrebbe scrivere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x.$$

In molti casi si scrive invece semplicemente “la funzione $x \mapsto \sin x$ ” (sottintendendo il dominio e il codominio) o, ancora più spesso, “la funzione $f(x) = \sin x$ ”. È indispensabile tenere conto, particolarmente nel secondo caso, che si tratta solo di una scrittura compatta: in realtà $\sin x$ non è la funzione, ma solo il valore che la funzione assume in corrispondenza del valore x della variabile, cioè l'immagine di x tramite la funzione. In un caso come questo, comunque, è facile, nella scrittura $f(x) = \sin x$, individuare il nome della funzione (“la funzione seno o \sin ”); la cosa diventa molto più difficile in scritture del tipo $f(x) = x^2$, in cui è difficile enucleare il nome esplicito della funzione (che potrebbe essere chiamata funzione “elevamento al quadrato”). Questi problemi sono molto importanti per esempio nella stesura di un codice per un linguaggio di programmazione.

In pratica, in particolare nel caso delle funzioni che hanno come dominio un insieme numerico, il simbolo $f(x)$ rappresenta il complesso delle operazioni da eseguire sulla variabile x per ottenere il corrispondente valore $f(x)$. Anzi in situazioni come queste (che saranno quelle di nostro interesse in questo corso) assegneremo abitualmente proprio solo il complesso di regole $f(x)$, sottintendendo che il codominio sia l'insieme numerico che stiamo trattando (di solito l'insieme dei reali) e che il dominio sia il massimo sottoinsieme dello stesso insieme numerico in cui le regole stesse sono applicabili. Avranno dunque senso problemi del tipo: “Si calcoli il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ”, la cui soluzione è costituita dell'insieme $[-1, 1]$.

Segnaliamo che in molti testi si riserva il nome di *funzione* solo ad applicazioni in cui il codominio sia un insieme numerico.

Nel caso in cui il dominio di una funzione f sia costituito dall'insieme \mathbb{N} o da un suo sottoinsieme (quasi sempre infinito), si usa più spesso il nome *successione* e al posto di $f(n)$ si usa sempre la notazione f_n (a_n se, come è tradizione in questi casi, si usano le lettere a, b, \dots al posto di f, g, \dots per denominare le funzioni). In questi casi inoltre la funzione stessa (la successione) si indica con la scrittura $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, o anche semplicemente $(a_n)_n$.

Se è data una funzione $f: A \rightarrow B$, l'insieme di tutti gli $f(x)$ al variare di x in A si chiama *immagine* della funzione f o, a volte, *immagini* di A tramite f e si indica con $f(A)$:

$$(1.12) \quad f(A) = \{ f(x) \in B \mid x \in A \} = \{ y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y \}.$$

Analogamente se $A' \subseteq A$, si può considerare l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di A' : questo insieme si indica con $f(A')$ e si chiama *immagini* di A' tramite f .

³Si può anche usare una notazione ancora più compatta

$$A \xrightarrow{f} B$$

Si presti particolare attenzione al fatto che, nella scrittura $f(A')$, f non rappresenta più una funzione da A a B , ma da $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(B)$. Questo doppio uso dello stesso simbolo non genera, di solito, alcuna ambiguità, basta tenere conto del tipo di variabile che compare all'interno delle parentesi: se è un elemento di A , allora si tratta della funzione $f: A \rightarrow B$, se si tratta di un sottoinsieme di A allora si tratta della funzione $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$.

Se $f(A)$ è costituito da un unico elemento di B , allora la funzione si dice *costante*.

Si tenga ben presente che, in generale, $f(A) \subsetneq B$, ed è per questo che abbiamo usato due nomi diversi per B e per $f(A)$ ⁽⁴⁾.

Se B' è un sottoinsieme di B (eventualmente coincidente con B stesso), ha interesse considerare l'insieme (che potrebbe anche essere vuoto) degli $x \in A$ che hanno per immagine uno degli elementi di B' : questo insieme si indica con $f^{-1}(B')$ e si chiama *controimmagine* o *immagine inversa* di B' tramite f . È chiaro che $f^{-1}(B) = A$.

Purtroppo la scrittura usata non è delle più felici, in quanto, per analogia con $f(A')$ usata prima, potrebbe far venire il sospetto che f^{-1} possa essere una funzione da B in A , cosa che è vera solo in particolari casi, come vedremo tra poco. È invece vero che f^{-1} è una funzione da $\mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A)$, in perfetta simmetria con la funzione f tra $\mathcal{P}(A)$ a $\mathcal{P}(B)$.

Nelle applicazioni interessano funzioni con alcune speciali proprietà, come risulta dalle seguenti definizioni.

Definizione 1.14. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice *suriettiva* se $f(A) = B$.

Ciò equivale a dire che ogni elemento y di B è immagine di *almeno un* x di A .

Esempi. – La funzione $f(x) = x^2$ di \mathbb{R} in \mathbb{R} non è suriettiva, in quanto per esempio il valore $y = -1$ non è immagine di alcun x del dominio.

– La funzione $f(x) = x^3$, sempre di \mathbb{R} in \mathbb{R} , è invece suriettiva.

Definizione 1.15. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice *iniettiva* se $f^{-1}(\{y\})$ è costituito al più da un elemento di A .

Ciò equivale a dire se $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero che elementi distinti del dominio hanno sempre immagini diverse, o ancora che ogni y di B è immagine di *al più un* elemento di A .

Dei due esempi citati sopra la prima funzione non è iniettiva, la seconda lo è.

Definizione 1.16. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice *biiettiva* o *biunivoca* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Ciò equivale a dire che ogni $y \in B$ è immagine di *esattamente un* x di A .

È opportuno riportare in uno schema il senso di tutte e tre le definizioni date, per consentire facili e utili confronti.

- Funzione suriettiva: ogni y di B è immagine di *almeno un* x di A .
- Funzione iniettiva: ogni y di B è immagine di *al più un* x di A .
- Funzione biiettiva: ogni $y \in B$ è immagine di *esattamente un* x di A ,

Definizione 1.17. Se $f: A \rightarrow B$ è una funzione e $A' \subseteq A$, l'applicazione che a ogni elemento x di A' associa l'elemento $f(x)$ di B si dice una *restrizione di f ad A'* , e si indica con $f|_{A'}$, o a volte anche con f stesso se non sono possibili ambiguità.

⁴Alcuni, pochi, testi usano nomi leggermente diversi dai nostri. Precisamente chiamano *codominio* l'insieme $f(A)$ e, genericamente, *insieme di arrivo* l'insieme B .

Avremo spesso bisogno di considerare restrizioni di funzioni, molte volte per ottenere funzioni iniettive a partire da funzioni che non lo sono. Per esempio la funzione $f(x) = x^2$ di \mathbb{R} in \mathbb{R} non è iniettiva, ma se ne considero la restrizione ai reali maggiori o uguali a zero, quest'ultima è iniettiva.

A volte considereremo anche *restrizioni sul codominio*, in particolare saremo interessati a considerare la restrizione del codominio all'immagine: questo ci consentirà di passare da una funzione non suriettiva a un'altra che invece è suriettiva.

Definizione 1.18. *Sia ora $A' \subseteq A$ e supponiamo di avere una funzione $f: A' \rightarrow B$. Chiameremo prolungamento di f a A ogni funzione di A in B che, ristretta ad A' , coincida con f .*

Si noti come di restrizioni di una funzione a un dato sottoinsieme del dominio ce ne sia una sola, mentre di prolungamenti di una funzione a un soprainsieme del dominio ce ne possano anche essere infiniti.

Esempio. Sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia data la funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$. La funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq 0 \\ 3, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è un prolungamento di f a tutto \mathbb{R} .

L'importanza delle funzioni biettive discende dalla seguente definizione.

Definizione 1.19. *Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biettiva. Allora è possibile considerare una funzione, che si indica con f^{-1} e si chiama funzione inversa da B in A , ponendo, per ogni y di B ,*

$$(1.13) \quad f^{-1}(y) = \text{all'unico } x \text{ di } A \text{ tale che } f(x) = y.$$

Si presti particolare attenzione al fatto, già segnalato, che la scrittura $f^{-1}(B')$ ha senso per ogni funzione, se $B' \subseteq B$, mentre la scrittura $f^{-1}(y)$ ha senso *solo ed esclusivamente* per le funzioni biettive (e non si confonda quest'ultima scrittura con la $f^{-1}(\{y\})$, che ha sempre senso).

In molte situazioni, avendo a che fare con funzioni non iniettive né suriettive (e dunque non invertibili), considereremo opportune restrizioni (sia sul dominio che sul codominio) per ottenere funzioni biunivoche. Un esempio di enorme importanza è quello della funzione $f(x) = x^2$, che non è né iniettiva né suriettiva. Se si opera una restrizione, sia sul dominio che sul codominio, ai reali maggiori o uguali a zero, si ottiene una funzione biunivoca, e dunque invertibile: la sua inversa si chiama funzione *radice quadrata*. Dunque la funzione radice quadrata è l'inversa di una speciale restrizione della funzione elevamento al quadrato.

Definizione 1.20. *Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due funzioni. Allora ha senso considerare la funzione, indicata con $g \circ f$, e detta funzione composta di f e g , definita come segue:*

$$g \circ f: A \rightarrow C, x \mapsto g(f(x)).$$

Si noti che, ai fini della costruzione della composta, quello che conta è che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g : eventuali valori del codominio dei f che non sono immagine di alcun valore del dominio di f non intervengono nella definizione.

Esempio. Si consideri la funzione, di \mathbb{R} in \mathbb{R} , $f(x) = x^2 + 2$ e la funzione di $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in \mathbb{R} , $g(t) = \sqrt{t}$. Allora ha senso considerare la funzione composta $g \circ f$ data da $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, anche se il codominio di f non è uguale al dominio di g : l'immagine di f è costituita solo dai reali maggiori o uguali a 2, e questo è un sottoinsieme del dominio di g .

Esempio. Si considerino le due funzioni, di \mathbb{R} in \mathbb{R} , definite da $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$. Allora la funzione $f \circ g$ è la funzione data dalla regola $f \circ g(x) = (\sin x)^2$; la funzione $g \circ f$ è invece data dalla regola $g \circ f(x) = \sin(x^2)$. Come si vede si tratta di due funzioni completamente diverse.

Questo esempio prova che, in generale, $f \circ g \neq g \circ f$ (supposto naturalmente che abbia senso considerare entrambe le composizioni). È invece vero che l'operazione di composizione tra funzioni gode della proprietà associativa:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Definizione 1.21. Dato un insieme A , chiameremo identità in A , e la indicheremo con id_A la funzione definita da

$$\text{id}_A(x) = x, \forall x \in A.$$

Proprietà di immediata dimostrazione della funzione id sono le seguenti: se $f: A \rightarrow B$ è una funzione, allora

$$f = \text{id}_B \circ f = f \circ \text{id}_A.$$

È immediato (e lo si lascia per esercizio) provare che se $f: A \rightarrow B$ è una funzione invertibile allora

$$(1.14) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_A \quad , \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_B .$$

Anzi, si potrebbe definire come inversa di una funzione f quella funzione g , se esiste, che gode delle due proprietà

$$g \circ f = \text{id}_A \quad , \quad f \circ g = \text{id}_B .$$

Se si adotta questa definizione si può provare facilmente poi che l'inversa, se esiste, è unica. Supponendo infatti che una funzione f abbia due inverse g_1 e g_2 si ha:

$$g_1 = \text{id}_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ \text{id}_B = g_2 .$$

Poiché una funzione è una particolare relazione, in base alla nostra definizione essa è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Tuttavia abitualmente a questo sottoinsieme si dà un nome speciale, precisamente quello di *grafico*.

Definizione 1.22. Data una funzione $f: A \rightarrow B$, l'insieme

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

si chiama *grafico della funzione f* .

Nel caso particolare di funzioni in cui A e B sono sottoinsiemi di \mathbb{R} , questo insieme può essere rappresentato nel piano dove si sia introdotto un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) e, nelle situazioni più comuni che a noi capiterà di considerare, sarà costituito da uno o più rami di una curva, nel senso intuitivo del termine. La condizione di univocità che distingue le funzioni dalle generiche relazioni si può allora tradurre in una semplice proprietà grafica: una retta "verticale" può intersecare il grafico in al più un punto.