Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

27 novembre 2008

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

Formula di Taylor

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

Se una funzione è derivabile in un insieme A possiamo considerare la funzione derivata $f'\colon A \to \mathbb{R}$ e possiamo chiederci se questa funzione è a sua volta derivabile (magari in un sottoinsieme di A).

Se si, diremo la nuova funzione che così si viene a costruire *derivata seconda* e così via fin quando è possibile.

$$f'',\ f''',\ f^{iv},\ \dots,\ f^{(n)}\,.$$

Definizione. *Una funzione si dice* di classe C^n *se è derivabile fino alla derivata n-esima e quest'ultima è continua (naturalmente sono continue, in quanto derivabili, anche le precedenti). Se la funzione è semplicemente continua si dice di classe C^0.*

Approssimante lineare

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

Se una funzione è derivabile in un punto x_0 allora esiste una funzione $\omega(h)$ tale che

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+h\omega(h)\,,\quad \text{con} \quad \lim_{h\to 0}\omega(h)=0\,.$$

Se scriviamo $x-x_0$ al posto di h otteniamo

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\omega(x-x_0)$$

con

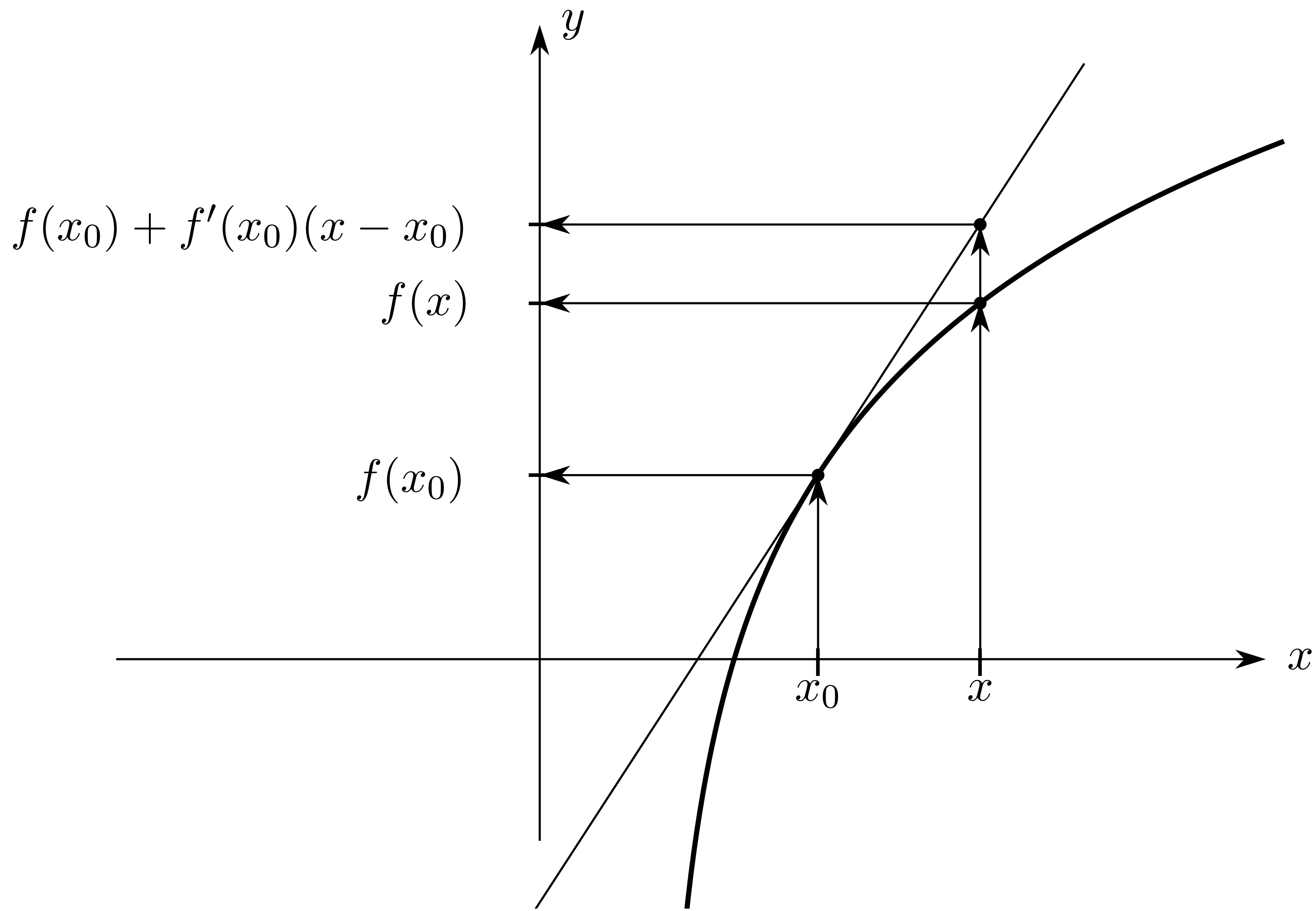
$$\lim_{x\to x_0}\omega(x-x_0)=0\,,$$

ovvero

$(x-x_0)\omega(x-x_0)$ è infinitesima di ordine sup. a $x-x_0$ in x_0.

Approssimante lineare-2

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio



Approssimazioni migliori?

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

È possibile trovare approssimazioni "migliori" della funzione f, sempre nell'intorno di x_0, e considerando solo funzioni semplici come i polinomi?

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \,.$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 && \Rightarrow && f(0) = a_0 = 0!a_0\,;\\
f'(x) &= 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 && \Rightarrow && f'(0) = a_1 = 1!a_1\,;\\
f''(x) &= 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 && \Rightarrow && f''(0) = 2a_2 = 2!a_2\,;\\
f'''(x) &= 24a_4x + 6a_3 && \Rightarrow && f'''(0) = 6a_3 = 3!a_3\\
f^{iv}(x) &= 24a_4 && \Rightarrow && f^{iv}(0) = 24a_4 = 4!a_4\,.
\end{aligned}$$

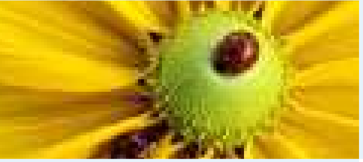
$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\,, \qquad \forall p \leq n\,.$$

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

$$f(x) = 2x^3 + x \text{ e } x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} 2x^3 + x &= 2(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 7(x-1) + 3 = \\ &= a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0 \,. \end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{f'''(1)}{3!}\,, \quad a_2 = \frac{f''(1)}{2!}\,, \quad a_1 = \frac{f'(1)}{1!}\,, \quad a_0 = \frac{f(1)}{0!}\,.$$



Polinomio di Taylor

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

Cerchiamo un polinomio approssimante del tipo

$$\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

detto

$$T_{n,x_0}(x)\,,$$

che differisca dalla funzione per

$$\frac{\omega(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,\quad \text{con} \quad \lim_{x\to x_0}\omega(x-x_0)=0\,.$$

Taylor-Peano

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

Teorema (Formula di Taylor-Peano). *Sia f una funzione definita in un intervallo $I =]a,b[$ e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che per ogni $x \in I$ esista la derivata $(n-1)$-esima di f, e che in x_0 esista anche la derivata di ordine n. In queste ipotesi esiste una funzione $\omega(x-x_0)$ tale che per ogni $x \in I$ si abbia*

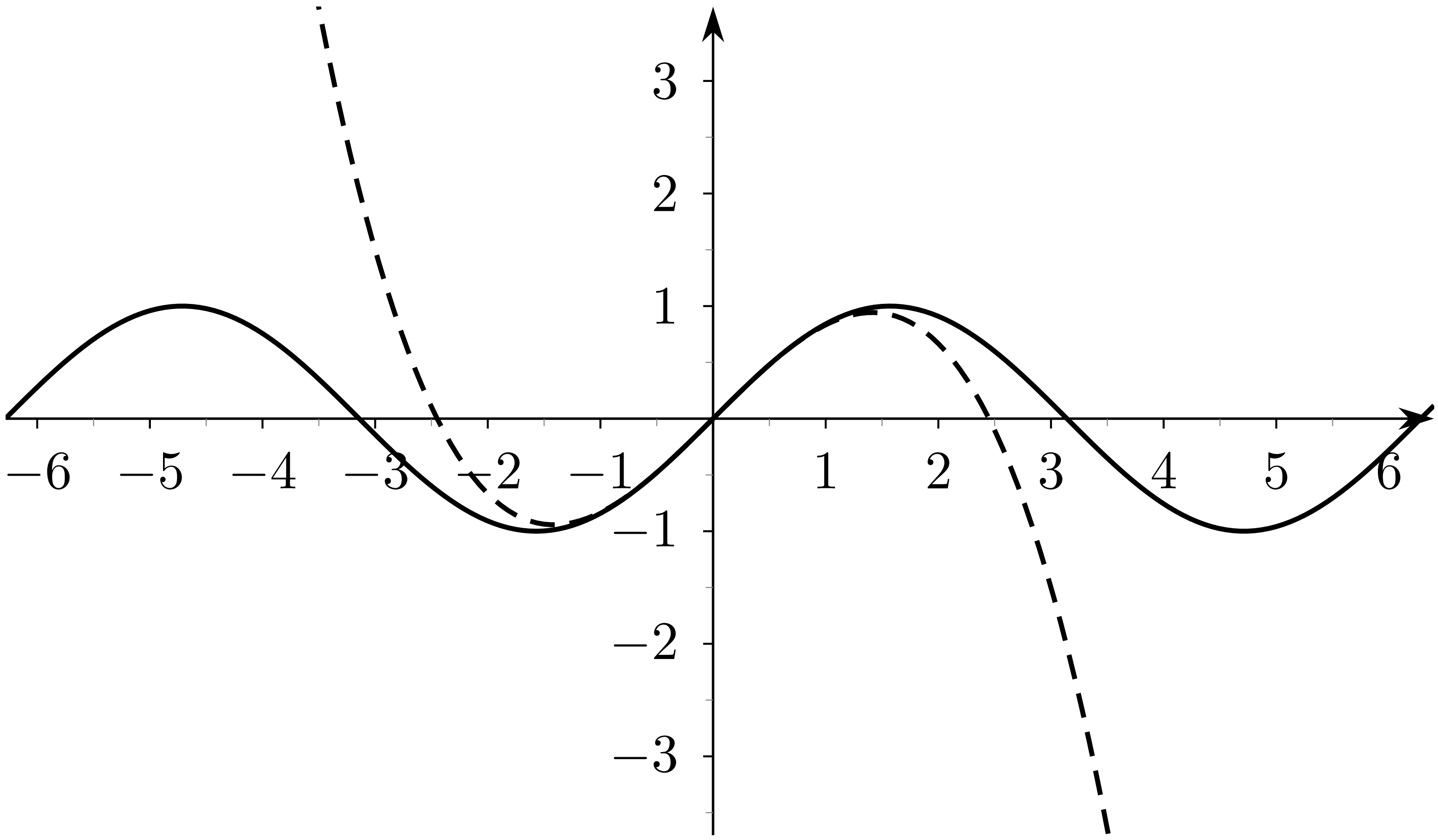
$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{\omega(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \textit{con} \quad \lim_{x \to x_0} \omega(x-x_0) = 0\,.$$

Dunque

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{\omega(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

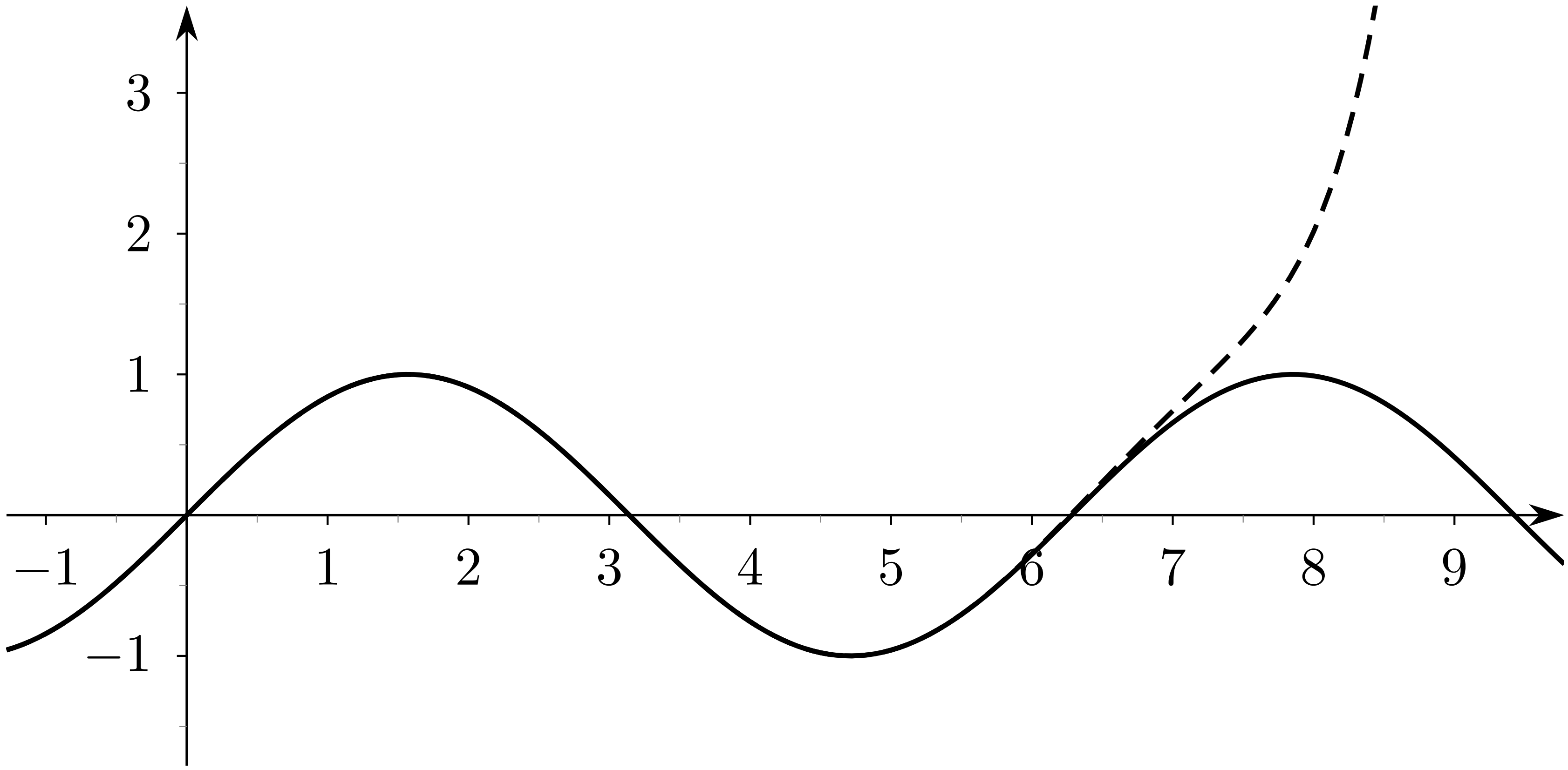
Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

$\sin x$ e $T_{3,0}(x)$



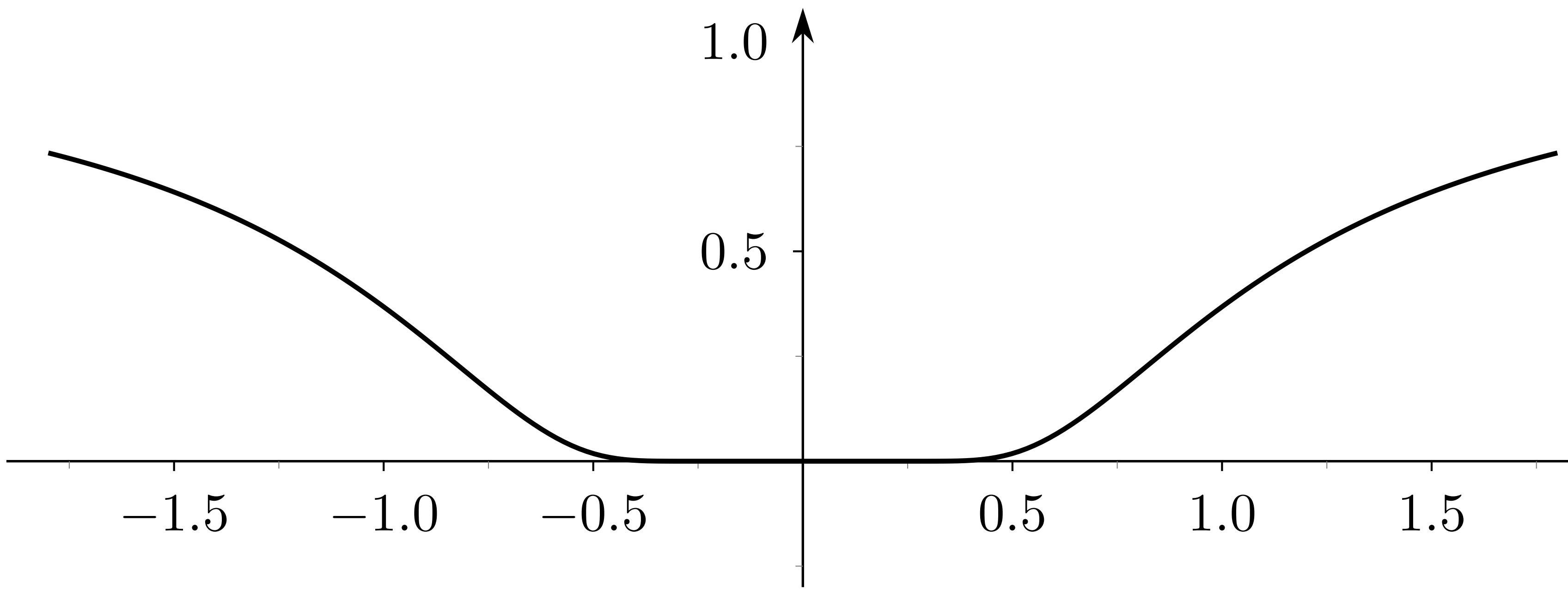
Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

$\sin x$ e $T_{17,0}(x)$



Esempio - 2

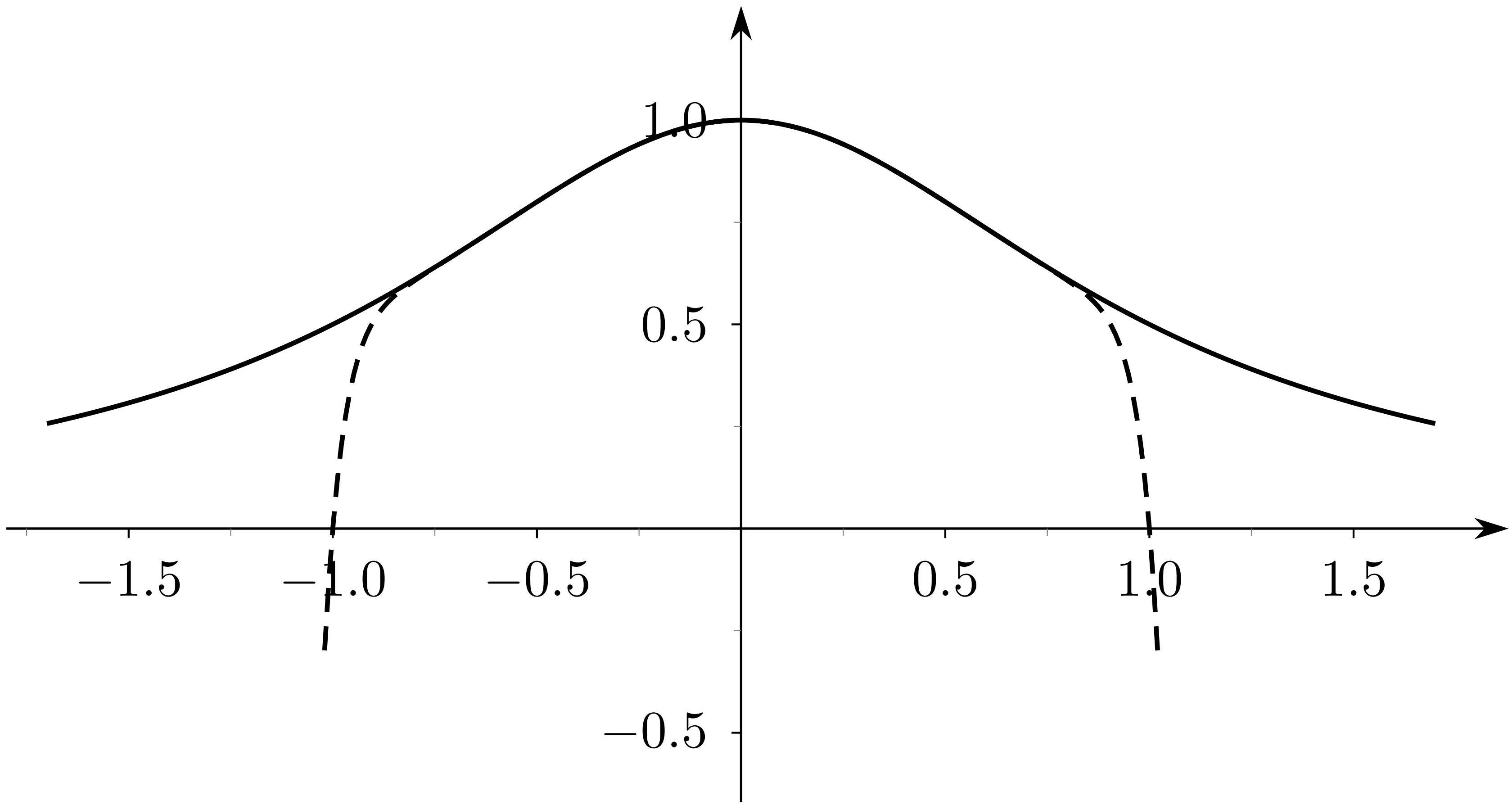
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

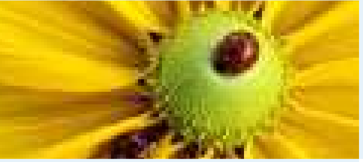


Esempio - 3

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$





Taylor-Lagrange

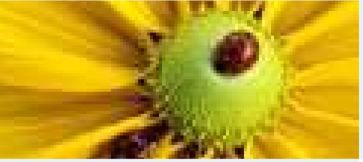
Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

Teorema (Formula di Taylor-Lagrange). *Sia f una funzione definita in un intervallo $I =]a, b[$ e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che per ogni $x \in I$ esista la derivata di ordine n continua e che almeno in tutti i punti di $I \setminus \{x_0\}$ esista anche la derivata di ordine $n+1$ di f. Allora esiste almeno un punto c compreso tra x_0 e x o tra x e x_0 tale che per ogni $x \in I$ si abbia*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Nelle ipotesi del teorema si può scrivere la seguente formula

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n}$$



Esempio

Formula di Taylor
Der.successive
Appross.lineare
Appross.lineare-2
Appr. migliori?
Appr. migliori?-2
Taylor
Taylor-Peano
Esempio - 1
Esempio - 1bis
Esempio - 2
Esempio - 3
Taylor-Lagrange
Esempio

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\cos c}{7!}x^7 .$$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{\cos c}{7!} .$$

Quindi

$$\sin 1 \simeq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} ,$$

con un errore minore di $\frac{1}{5040}$.

Controllo:

$$\frac{101}{120} = 0.841\overline{6} , \quad \sin 1 = 0.8414709848078965066\ldots$$