Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

16 ottobre 2008

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

L'introduzione dei numeri reali si può fare in diversi modi. Seguiremo la strada cosiddetta della presentazione assiomatica, che è basata sul seguente teorema di isoformismo, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

Teorema. *Esiste ed è unico (a meno di isomorfismi)*[1] *un insieme* $\mathbb{R}$ *verificante gli assiomi* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ *seguenti.*

L'esistenza si prova "costruendo" operativamente $\mathbb{R}$ (in un modo che sarà indicato sommariamente nel seguito), l'unicità richiede un'apposita dimostrazione.

[1] Non possiamo qui spiegare esattamente il significato dell'espressione "a meno di isomorfismi". Ci limitiamo a fornire una spiegazione intuitiva usando un esempio preso da un contesto noto. L'insieme dei numeri razionali può essere introdotto sia come insieme delle frazioni, con un'opportuna relazione di equivalenza, sia come insieme degli allineamenti decimali finiti o periodici: si tratta di due insiemi diversi, ma "isomorfi" nel senso che possono essere messi in corrispondenza biunivoca e che le operazioni possono essere eseguite indifferentemente su uno o sull'altro. Si tratta, come si può ben comprendere, di una situazione molto comune.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

È definita in $\mathbb{R}$ un'operazione, detta *addizione* e denominata $+$, che gode delle seguenti proprietà:

1. **commutativa**: $a + b = b + a$ per ogni $a,\ b \in \mathbb{R}$;
2. **associativa**: $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$;
3. **esistenza dell'elemento neutro**: esiste un elemento, denotato con 0 e detto *zero*, tale che $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (e si dimostra che è unico);
4. **esistenza dell'opposto**: per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con $-a$ e detto *opposto* di a, tale che $a + (-a) = 0$ (anche per questo si dimostra che è unico).

Queste proprietà sono godute anche dall'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi e dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali; le prime 3 anche dall'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali. Un qualunque insieme su cui sia definita un'operazione che verifica questo assioma si chiama un *gruppo commutativo*.

Assioma $\mathcal{A}_2$ (prodotto)

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

È definita in $\mathbb{R}$ un'operazione, detta *moltiplicazione* e denominata $\cdot$, che gode delle seguenti proprietà:

1. **commutativa**: $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni $a,\ b \in \mathbb{R}$;
2. **associativa**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ per ogni $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$;
3. **esistenza dell'elemento neutro**: esiste un elemento, denotato con 1 e detto *unità*, tale che $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (e si dimostra che è unico);
4. **esistenza del reciproco**: per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con a^{-1} e detto *reciproco* od *opposto* di a, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ (anche per questo si dimostra che è unico);
5. **distribuitiva**: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ per ogni $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

Le proprietà degli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sono godute anche dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali; per quello degli interi manca la 4^{a} dell'assioma $\mathcal{A}_2$. Un qualunque insieme su cui siano definite due operazioni verificanti gli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ si chiama un *corpo commutativo* o anche un *campo*.

Come è a tutti noto, questa operazione si indica anche per semplice giustapposizione dei due simboli a e b, quando non sono possibili equivoci: ab sta al posto di $a \cdot b$. Si può usare anche, particolarmente nel caso di elementi di $\mathbb{R}$ indicati con cifre, il simbolo $\times$: in genere si preferisce la scrittura 2×3 alla $2 \cdot 3$, mentre è assolutamente da evitare la $2\,3$ che può portare a ovvi equivoci.

Assioma $\mathcal{A}_3$ (ordinamento)

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

È definita in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine totale, indicata con il simbolo $\leq$ che si legge "minore o uguale", che gode delle seguenti proprietà:

1. **compatibilità con la somma**: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ per ogni $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$;
2. **compatibilità con il prodotto**: $(a \leq b \wedge 0 \leq c) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ per ogni $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ (con $0 \leq c$).

Un insieme verificante gli assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ si dice un *corpo commutativo ordinato*.
L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con le usuali operazioni e l'usuale ordine è un esempio di corpo commutativo ordinato.
La scrittura $a \leq b$ si legge anche "b è maggiore o uguale ad a" e si può scrivere anche $b \geq a$.La scrittura $a < b$ significa che $a \leq b \wedge a \neq b$ e si legge "a è strettamente minore di b".

Tutte queste proprietà, come già osservato, sono godute anche dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Il vero assioma che introduce una caratteristica innovativa dell'insieme dei reali è l'assioma di completezza che segue.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b, \text{ per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B,$$

cioè che sia maggiore o uguale di tutti gli elementi di A e minore o uguale di tutti gli elementi di B. L'elemento c si chiama *elemento separatore* ed è unico nel caso che $A \cup B = \mathbb{R}$.

Per provare che $\mathbb{Q}$ non gode di quest'ultima proprietà è sufficiente considerare i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ così definiti:

$$A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \,\} \cup \left\{\, x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x > 0 \land x^2 < 2 \,\right\},$$
$$B = \left\{\, x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x \geq 0 \land x^2 \geq 2 \,\right\}.$$

L'elemento separatore di questi due insiemi non può esistere perchè altrimenti dovrebbe essere tale che $x^2 = 2$ e abbiamo già provato che questa equazione non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

L'esistenza di un insieme che goda delle proprietà espresse negli assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ si può provare operativamente costruendone uno che le verifichi. Ci sono diversi modi per farlo e vogliamo qui soltanto fare un brevissimo accenno a uno dei possibili, precisamente quello delle *sezioni di Dedekind*.

Definizione. *Una sezione di $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme A di $\mathbb{Q}$ tale che*

1. $A \neq \emptyset \wedge A \neq \mathbb{Q}$;
2. *se $s \in A$, ogni $r < s$ appartiene ancora ad A;*
3. *A non ha massimo.*

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

È evidente che non è affatto agevole maneggiare l'insieme delle sezioni di $\mathbb{Q}$, e questo è una riprova del fatto che l'ampliamento numerico da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ è decisamente più complesso che non i precedenti ampliamenti.
Solo a titolo d'esempio mostriamo come si potrebbe definire, nell'insieme delle sezioni di $\mathbb{Q}$, l'operazione di addizione.

Date due sezioni A e B di $\mathbb{Q}$, la sezione somma è quella definita da

$$C = A + B = \{\, a + b \mid a \in A \wedge b \in B \,\}\,.$$

Naturalmente a questo punto bisognerebbe provare che valgono tutte le proprietà della somma indicate nell'assioma $\mathcal{A}_1$ ...

Decimali - Razionali e irrazionali

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

Per le applicazioni è assai importante il fatto che i numeri reali possono essere rappresentati come allineamenti decimali, questa volta anche di tipo qualunque, cioè finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici. Sarebbe anche possibile introdurre operativamente i numeri reali come allineamenti decimali anziché con le sezioni come qui accennato, ma le difficoltà tecniche sarebbero ancora maggiori: si pensi per esempio alla difficoltà che nascerebbero nel definire una somma (o peggio ancora un prodotto) di due allineamenti decimali illimitati.

L'insieme $\mathbb{R}$ è da intendersi come un ampliamento di $\mathbb{Q}$: questo significa che possiamo ritenere l'insieme $\mathbb{Q}$ stesso come un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'insieme dei numeri reali non razionali, cioè l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ prende il nome di insieme degli *irrazionali*: sulla base di quanto detto $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Non esiste una notazione specifica universalmente adottata per l'insieme degli irrazionali e il motivo è da ricercarsi nel fatto che l'insieme degli irrazionali non gode di nessuna delle proprietà richieste a un insieme numerico; per esempio la somma o il prodotto di irrazionali può tranquillamente essere razionale.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

Dagli assiomi si deducono ulteriori proprietà dell'insieme dei numeri reali. Alcune di queste le abbiamo già citate enunciando gli assiomi, per esempio l'unicità di 0 e 1. Altre proprietà comprendono la definizione di sottrazione, le leggi di semplificazione della somma e del prodotto, la legge di annullamento del prodotto, ecc. Segnaliamo, senza dimostrarlo, il seguente teorema.

Teorema (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè dati due numeri reali a e b qualunque, con $a < b$, esiste sempre un numero razionale r che sia compreso tra a e b, cioè tale che $a < r < b$.*

Vale anche il teorema analogo del precedente per gli irrazionali.

Teorema (Densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè dati due numeri reali a e b qualunque, con $a < b$, esiste sempre un numero irrazionale j che sia compreso tra a e b, cioè tale che $a < j < b$.*

Questi due teoremi possono essere enunciati dicendo che un qualsiasi intervallo aperto $]a, b[$ di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

Conseguenza quasi immediata e straordinariamente importante dell'assioma di completezza è il teorema di esistenza e unicità dell'estremo superiore di un qualsiasi sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

Teorema. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato. Allora esiste ed è unico l'estremo superiore di A.*

Analogo discorso vale ovviamente per l'estremo inferiore degli insiemi non vuoti e inferiormente limitati.

Se un insieme A non è superiormente limitato si pone $\sup(A) = +\infty$, se non è inferiormente limitato si pone $\inf(A) = -\infty$. Con queste definizioni possiamo dire che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ha sia estremo superiore che inferiore.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

Valgono i seguenti due teoremi che caratterizzano l'estremo superiore e inferiore di un insieme.

Teorema. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, superiormente limitato. Allora $\sup(A) = L$ se e solo se*

1. $\forall a \in A,\ a \leq L$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ *esiste* $a \in A$ *tale che* $a > L - \varepsilon$.

Teorema. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, inferiormente limitato. Allora $\inf(A) = l$ se e solo se*

1. $\forall a \in A,\ l \leq a$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ *esiste* $a \in A$ *tale che* $a < l + \varepsilon$.

I reali
Assioma $\mathcal{A}_1$
Assioma $\mathcal{A}_2$
Assioma $\mathcal{A}_3$
Assioma $\mathcal{A}_4$
Sezioni
Sezioni -2
Decimali
Altre propr.
Sup e inf
Sup e inf - 2
Cardinalità

1. Insiemi in corrispondenza biunivoca.
2. Insiemi numerabili.
3. Numerabilità di $\mathbb{Q}$.
4. Non numerabilità di $\mathbb{R}$.