Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

13 novembre 2008

Derivate

Derivata della funzione composta e inversa

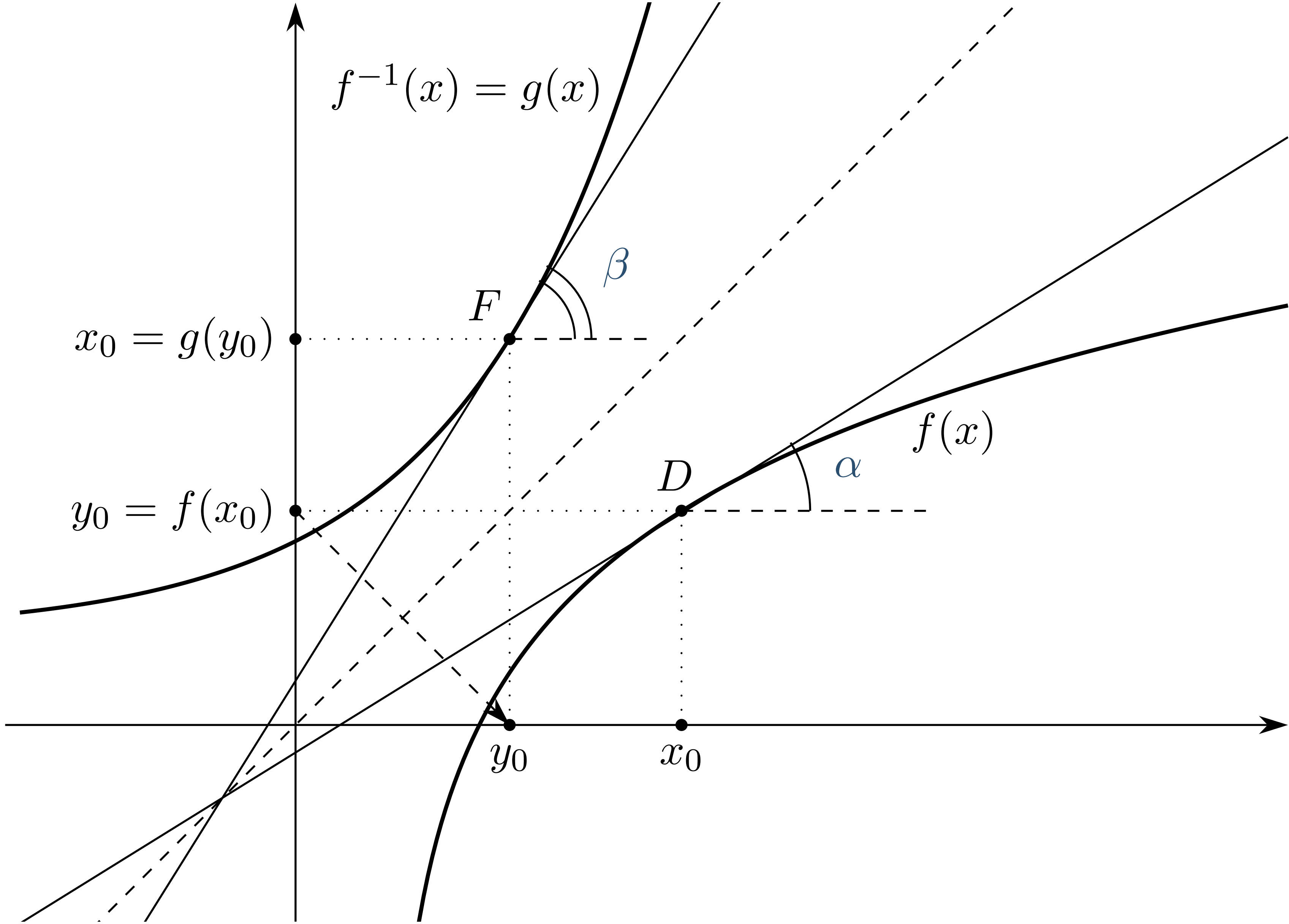
Teorema. *Siano f e g due funzioni tali che abbia senso considerare la composta $f \circ g$. Se la funzione g è derivabile in x_0 e la funzione f è derivabile in $t_0 = g(x_0)$, allora la funzione composta è derivable in x_0 e si ha*

$$\mathrm{D}(f \circ g)(x_0) = f'(t_0)g'(x_0)\,.$$

Teorema (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione strettamente monotona definita in un intervallo e sia g la sua inversa. Se f è derivabile in un punto x_0 con derivata non nulla, posto $y_0 = f(x_0)$, la funzione inversa è derivabile in y_0 e si ha*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Derivata della funzione inversa - 2



Funzioni elementari - 1

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}\,, \quad n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,, \quad \begin{cases} x \neq 0, & \text{se } n \text{ dispari;} \\ x > 0, & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

$$f(x) = \arcsin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in]-1,1[.$$

$$f(x) = \arccos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in]-1,1[.$$

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \operatorname{arcctg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funzioni elementari - 2

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ (= \exp(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \ (= \exp(x)) \,.$$

$$\mathrm{D}\big(a^x\big) = \mathrm{D}\big(\mathrm{e}^{x \ln a}\big) = \mathrm{e}^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a \,.$$

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \,.$$

$$\mathrm{D}\big(\log_a x\big) = \mathrm{D}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{\ln a}\ \ln x\right) = \frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a} \,.$$

Funzioni iperboliche

Derivate
❖ Composta-Inv.
❖ Inversa
❖ Elementari-1
❖ Elementari-2
❖ Iperboliche
❖ Iperb.grafici
❖ Iperb.derivate

seno iperbolico: $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$;

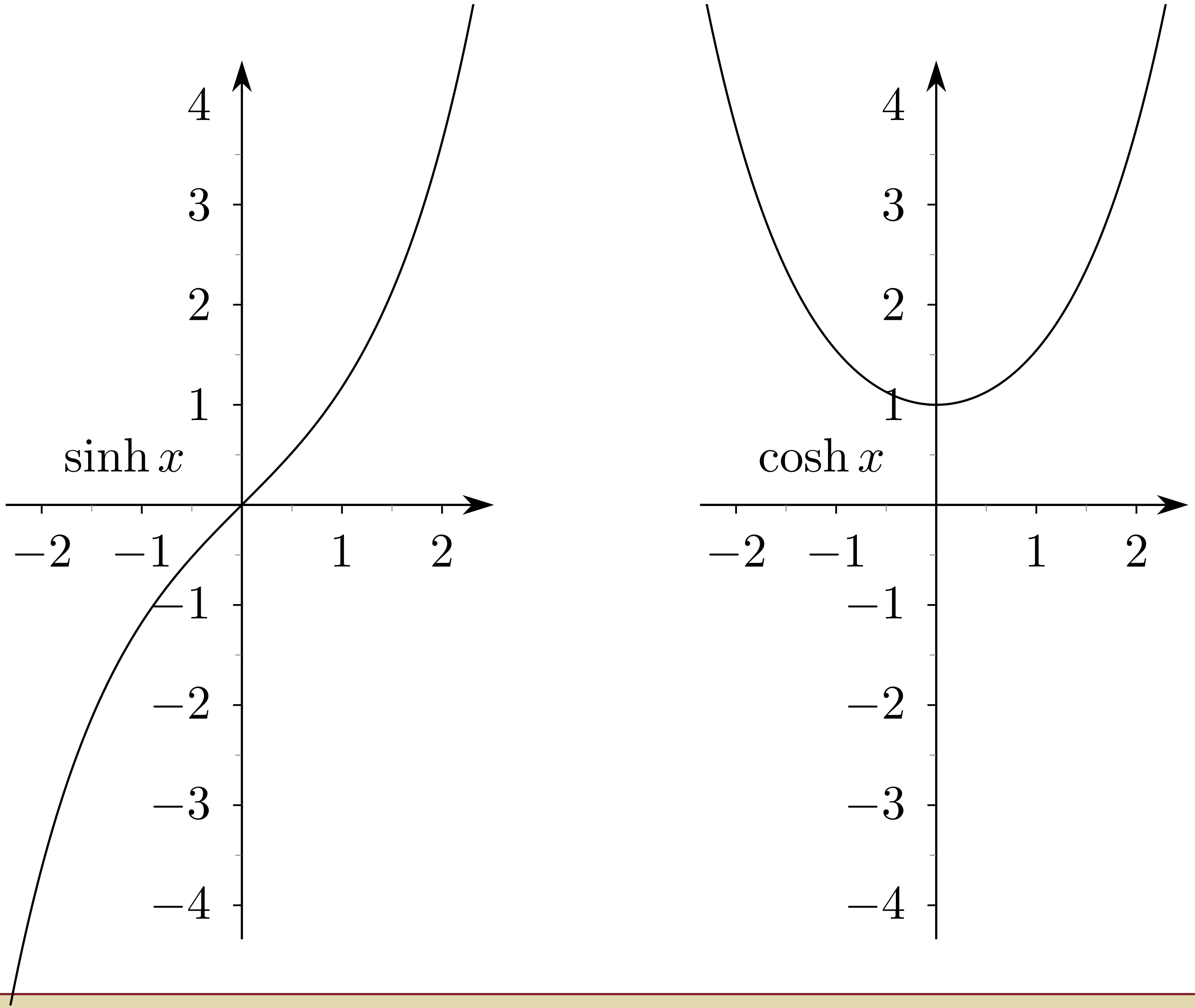
coseno iperbolico: $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$;

tangente iperbolica: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$;

cotangente iperbolica: $\operatorname{ctgh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$ $\qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Funzioni iperboliche - grafici



Iperboliche - derivate - inverse

$$\mathrm{D}(\cosh x) = \sinh x$$
$$\mathrm{D}(\sinh x) = \cosh x$$
$$\mathrm{D}(\operatorname{tgh} x) = 1 - \operatorname{tgh}^2 x$$
$$\mathrm{D}(\operatorname{ctgh} x) = 1 - \operatorname{ctgh}^2 x$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \operatorname{settsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,.$$
$$\operatorname{arccosh} x = \operatorname{settcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

$$\mathrm{D}(\operatorname{arcsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,$$
$$\mathrm{D}(\operatorname{arccosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$