Università degli Studi di Udine - Sede di Pordenone Facoltà di Ingegneria

Esercizi

di Matematica 1 - I Modulo

Luciano Battaia

Versione provvisoria aggiornata al 15 gennaio 2009

Indice

Premessa

Questo testo contiene sostanzialmente la raccolta degli esercizi di Matematica I - 1° modulo svolti o proposti nell'anno accademico 2008/2009 presso la sede di Pordenone dell'Università degli studi di Udine.

La raccolta ha essenzialmente la struttura di un *diario delle lezioni* e pertanto non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità.

Per le questione teoriche trattate si fa riferimento al parallelo testo di teoria. Anche per quanto riguarda le notazioni e convenzioni utilizzate, che si è cercato di mantenere il più standard possibile, si fa riferimento alle apposite indicazioni fornite nel testo di teoria.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo batmath@gmail.com.

1 Insiemi

Esercizio 1.1. *Siano A e B due insiemi. Provare che*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset\,.$$

Esercizio 1.2. *Siano A e B due insiemi. Provare che*

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \quad , \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B\,.$$

(Queste formule sono dette Formule di de Morgan*).*

Esercizio 1.3. *Siano A e B due insiemi. Mostrare che*

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B\,.$$

Esercizio 1.4. *Siano A e B due insiemi. L'insieme*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

si chiama differenza simmetrica di A e B. *Provare che*

1. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
3. $A \triangle B = A \setminus (A \cap B)$

Esercizio 1.5. *Siano A e B due insiemi. Dimostrare le formule seguenti*

1. $\complement A \triangle \complement C = A \triangle B\,;$
2. $\complement() A \triangle B = \complement A \triangle B = A \triangle \complement B\,.$

Esercizio 1.6. *Usando solo l'insieme vuoto e l'insieme delle parti costruire un insieme che abbia 5 elementi.*

Esercizio 1.7. *Dire quali fra le seguenti scritture sono corrette.*

1. $a \in \{\, a \,\}$
2. $a \subseteq \{\, a \,\}$
3. $a = \{\, a \,\}$
4. $a \subseteq \{\, a, \{\, a \,\}\,\}$
5. $\{\, a \,\} \subseteq \{\, a, \{\, a \,\}\,\}$
6. $\{\,\{\, a \,\}\,\} \subseteq \{\, a, \{\, a \,\}\,\}$

Esercizio 1.8. *Siano A, B, C tre insiemi. Provare che*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Esercizio 1.9. *Si considerino gli insiemi*

$$A_i = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq i \} , \quad i \in \mathbb{N}$$

(ovvero gli insiemi dei naturali maggiori o uguali a 0, 1, . . . *).*

Dimostrare che

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = \emptyset \, .$$

Esercizio 1.10. *Trovare i seguenti insiemi.*

1. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [1 - 1/n \, , \, 1 + 1/n]$
2. $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [1 - 1/n \, , \, 1 + 1/n]$
3. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0 \, , \, 1 - 1/n]$
4. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0 \, , \, 1 - 1/n^2]$

Esercizio 1.11. *Trovare una possibile rappresentazione nel piano cartesiano per gli insiemi seguenti.*

1. $\mathbb{R} \times \{a\}$
2. $\{a\} \times \mathbb{R}$
3. $[a, b] \times [c, d]$

(a, b, c, d sono numeri reali con $a \leq b$ e $c \leq d$).

Esercizio 1.12. *Siano A, B, C tre insiemi. Provare che, in generale,*

$$A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C) \, .$$

Esercizio 1.13. *Sia E un insieme. Esiste un sottoinsieme A di E tale che $A \in \mathscr{P}(E)$ e $A \subseteq \mathscr{P}(E)$?*

Esercizio 1.14. *Siano A, B, C tre insiemi, con $A \neq \emptyset$. Provare che*

$$A \times B = A \times C \Rightarrow B = C \, .$$

Esercizio 1.15. *Se $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$ e $B = [0, 1]$, come si può rappresentare in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio l'insieme*

$$A \times B \, ?$$

Esercizio 1.16. *Rappresentare in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano l'insieme*

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < 1 \wedge |y| < 1 \right\} .$$

Esercizio 1.17. *Siano A, B, C tre insiemi. Provare che*

$$(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C \, .$$

Esercizio 1.18. *Se A e B sono due insiemi, provare che*

1. $A \cap B = \complement(\complement A \cup \complement B)$;
2. $A \cup B = \complement(\complement A \cap \complement B)$;
3. $A \setminus B = A \cap \complement B = \complement(\complement A \cup B)$.

Esercizio 1.19. *Siano A e B due insiemi. Mostrare che A e B sono disgiunti se e solo se $\complement A \cup \complement B = U$ (U è l'insieme universo).*

Esercizio 1.20. *Se A e B sono insiemi non vuoti, mostrare che*

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B\,.$$

Esercizio 1.21. *Siano A e B due insiemi. Mostrare che*

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)\,.$$

Mostrare su un esempio che, invece, generalmente

$$\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)\,.$$

Esercizio 1.22. *Si consideri la relazione, nell'insieme dei numeri reali,*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2\,.$$

Si provi che la relazione non è d'ordine. Quale delle proprietà delle relazioni d'ordine viene a mancare?

Esercizio 1.23. *Siano E e F due insiemi, $f\colon E \to F$. Provare che*

– $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \subseteq B) \Rightarrow (f(A) \subseteq f(B))$; *provare poi con un esempio che non è necessariamente vero il viceversa, cioè se $f(A) \subseteq f(B)$ non è detto che $A \subseteq B$;*
– $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
– $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
– $\forall A, B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
– $\forall A \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Esercizio 1.24. *Siano A e B due insiemi. Si considerino le funzioni*

$$p_1\colon A \times B \to A,\ p_1(a,b) = a \quad e \quad p_2\colon A \times B \to B,\ p_2(a,b) = b\,,$$

dette rispettivamente prima e seconda proiezione *sono suriettive.*

Esercizio 1.25. *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Dimostrare che*

– *se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva;*
– *se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva.*

Esercizio 1.26. *L'applicazione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x$ è iniettiva? suriettiva? biiettiva?*

Esercizio 1.27. *Può accadere che in un insieme ordinato il massimo coincida con il minimo?*

2 Numeri reali

Esercizio 2.1. *Provare, mediante esempi, che la somma e il prodotto di due numeri irrazionali possono essere razionali.*

Esercizio 2.2. *Dimostrare che* $\sqrt{3}+\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.3. *Dimostrare che* $(\sqrt[3]{2})^2\notin\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.4. *Dimostrare che se* a *e* b *sono due razionali positivi tali che* $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, *allora anche* $\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.5. *Provare mediante un esempio che se* a *e* b *sono due razionali positivi tali che* $\sqrt{ab}\in\mathbb{Q}$ *non è detto che* $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.6. *Dimostrare che* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.7. *Dimostrare che* $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\notin\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.8. *Dimostrare che*

$$a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\notin\mathbb{Q}\,.$$

Risoluzione. Se a fosse razionale si dovrebbe avere

$$a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{m}{n}\,,$$

con m ed n che possiamo supporre primi fra di loro. Ma allora

$$3n^2=5m^2.$$

Dunque n deve essere divisibile per 5 ed m per 3: $n=5p$, $m=3q$. Ne segue

$$3\cdot 5^2p^2=5\cdot 3^2q^2\,,$$

cioè

$$5p^2=3q^2\,.$$

Esattamente come prima possiamo concludere che p deve essere divisibile per 3 e q per 5: $p=3h$, $q=5k$. Infine abbiamo

$$n=5p=5\cdot 3h,\quad m=3q=3\cdot 5k\,.$$

Questo comporta che m ed n hanno almeno il fattore 15 in comune, contro l'ipotesi che fossero primi tra di loro. $\square$

Esercizio 2.9. *Come è noto, dato un numero reale x si chiama* valore assoluto *o* modulo *di x il numero $|x|$ così definito:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si verifichino le seguenti proprietà del valore assoluto (a e b sono numeri reali qualunque):

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0$ *se e solo se* $a = 0$;
- $|a| = |-a|$;
- $|ab| = |a|\,|b|$;
- $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$;
- $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ $(b > 0)$;
- $|a| > b \Leftrightarrow (a < -b) \vee (a > b)$ $(b > 0$.

Esercizio 2.10. *Del seguente insieme A si trovino i punti di accumulazione e di frontiera; si dica se è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.*

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 2.11. *Si indichi con A l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:*

$$\sqrt{|2x + 1| - 1} \geq x - 3\,.$$

Si determinino i punti di accumulazione, di frontiera, interni di A; si dica se A è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 2.12. *Si indichi con A l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:*

$$x^3 - x^2 \geq 0\,.$$

Si determinino i punti di accumulazione, di frontiera, interni, isolati di A; si dica se A è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 2.13. *Si dimostri che un punto x_0 è di accumulazione per un insieme A se e solo se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0 stesso.*

Risoluzione. Se x_0 è di accumulazione per A allora in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A e dunque ne cadrà almeno uno diverso da x_0 stesso.

Supponiamo viceversa che in ogni intorno di x_0 cada almeno un punto di A diverso da x_0 stesso e proviamo che x_0 è di accumulazione per A. Per far questo supponiamo per assurdo che x_0 *non* sia di accumulazione per A: allora esiste almeno un intorno di x_0 nel quale non cade un numero infinito di punti di A, ovvero o non ne cade nessuno, o un numero finito. Che non ne cada nessuno è da escludere perchè, per ipotesi, ne cade almeno uno diverso da x_0; se ne cadesse un numero finito indichiamo con x_1 quello più vicino a x_0, ma diverso da x_0. Indichiamo con x_1' il simmetrico di x_1 rispetto a x_0. Allora nell'intorno $]x_1', x_1[$ (oppure $]x_1, x_1'[$) non cade alcun punto di A diverso da x_0, ma questo è contro l'ipotesi. □

Esercizio 2.14. *Si dica chi è l'insieme dei punti di accumulazione per l'insieme $\mathbb{Q}$. E l'insieme dei punti di frontiera? E l'interno di $\mathbb{Q}$? E l'insieme dei punti esterni?*

3 Alcune funzioni elementari

Esercizio 3.1. *Date due funzioni* $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *si provi che*

$$(f \vee g)(x) = \frac{1}{2}\big[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big]\,,$$
$$(f \wedge g)(x) = \frac{1}{2}\big[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big]\,.$$

Esercizio 3.2. *Siano f e g due funzioni entrambi crescenti o decrescenti. Si dimostri che allora la funzione composta $f \circ g$ è crescente.*

Esercizio 3.3. *Siano f e g due funzioni entrambi crescenti [decrescenti]. Si dimostri che allora $f + g$ è crescente [decrescente]. Si provi invece su un esempio che il prodotto $f \cdot g$ può non essere crescente [decrescente].*

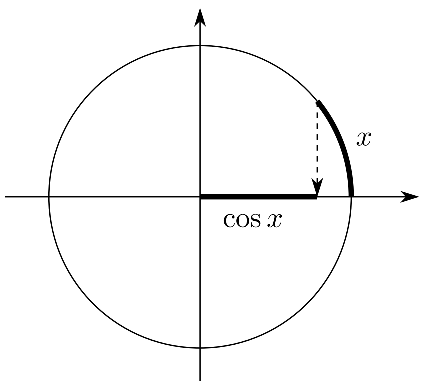
Esercizio 3.4. *Siano f e g due funzioni entrambi crescenti e positive. Si provi che allora $f \cdot g$ è crescente. Che cosa si può dire del prodotto $f \cdot g$ se sono entrambi crescenti e negative?*

Esercizio 3.5. *Si trovi il dominio delle seguenti funzioni.*

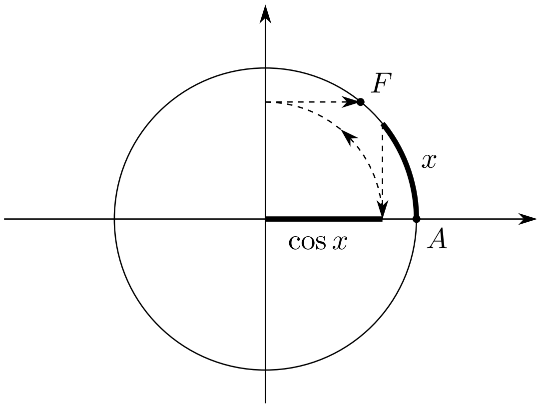
1. $\log_2(x^2 - 1) + \log_5(x + 2)$.
2. $\operatorname{arctg}(\arcsin(x))$.
3. $\log_2(\arcsin(x))$.
4. $\log_3 |\operatorname{arctg}(x)|$.
5. $\log_x x$.
6. $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$.

Esercizio 3.6. *Si tracci il grafico della funzione* $f(x) = \arcsin(cos(x)$.

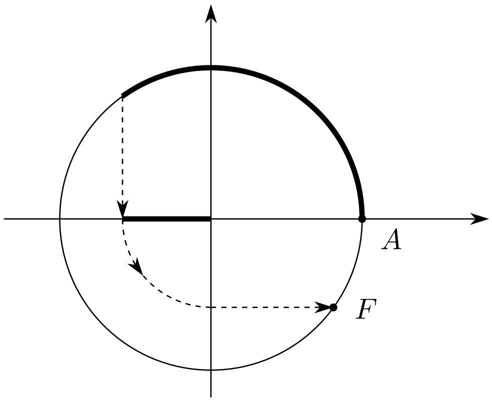
Risoluzione. Si comincia con l'osservare che la funzione ha come dominio naturale tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica di periodo 2π. Si tratta inoltre di una funzione pari (perché tale è il coseno): basterà quindi studiarla in un intervallo ampio π. Scegliamo il tratto $[0, \pi]$ e cominciamo con $[0, \pi/2]$. Per tracciare il grafico possiamo ragionare in maniera elementare usando la circonferenza goniometrica. A partire dall'arco x dobbiamo costruire il coseno di x (individuando un punto sull'asse delle ascisse).



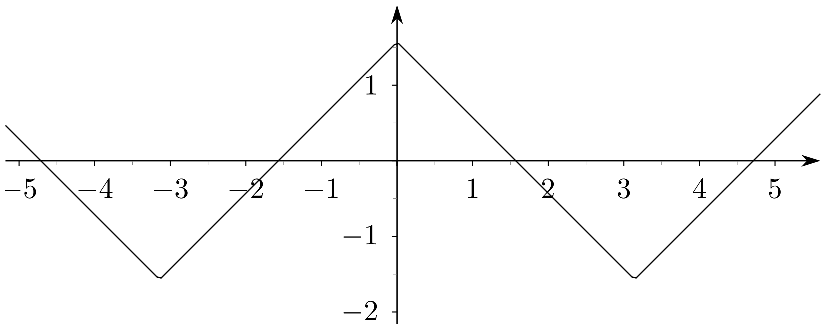
Ottenuto $\cos x$ lo riportiamo sull'asse delle ordinate, e infine troviamo l'arcseno.



L'arco $\widehat{AF}$ ottenuto corrisponde al valore cercato di $\arcsin(\cos(x))$. È altresì immediato dalla costruzione precedente che $x + \arcsin(\cos(x)) = \pi/2$, ovvero che $\arcsin(\cos(x)) = \pi/2 - x$. A questo punto il grafico, su questo intervallo, è immediato. Si prova nello stesso modo che la cosa risulta valida anche nell'intervallo $[\pi/2\,, \pi]$. Riportiamo solo il grafico senza alcun commento.



Il grafico richiesto è allora il seguente.



□

Esercizio 3.7. *Si tracci il grafico della funzione* $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.

Risoluzione. È come chiedersi: qual è la somma di due angoli che si scambiano il seno con il coseno? È ovvio che la risposta è $\pi/2$, naturalmente nell'intervallo $[-1, 1]$ dove le funzioni sono definite. □

Esercizio 3.8. *Verificare che, per ogni naturale n, si ha*

$$\log_a b = \log_{a^n} b^n \, .$$

Esercizio 3.9. *Verificare che*

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1 \, ,$$

precisando anche quali sono le condizioni da imporre sui numeri a, b e c.

Esercizio 3.10. *Verificare che, per ogni b positivo,*

$$\log_a b = \log_{\sqrt{a}} + \log_{\frac{1}{a}} b \, .$$

Esercizio 3.11. *Verificare, per induzione, che*

$$|sin(nx)| \leq n \, |sinx| \, , \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risoluzione.

1. Per $n = 0$ si ha $0 \leq 0$ che è vera.
2. Vediamo ora il secondo passo induttivo.
   - *Hp*: $|sin(nx)| \leq n \, |sinx|$
   - *Th*: $|sin((n+1)x)| \leq (n+1) \, |sinx|$

   Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned} |sin((n+1)x)| &= |\sin(nx + x)| = |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| \leq \\ &\leq |\sin(nx)| \, |\cos x| + |\cos(nx)| \, |\sin x| \overset{(*_1)}{\leq} |\sin(nx)| + |\sin x| \leq \\ &\overset{(*_2)}{\leq} n \, |\sin x| + |\sin x| = (n+1) \, |\sin x| \, . \end{aligned}$$

   Nel passaggio $(*_1)$ abbiamo usato il fatto che $|\cos x| \leq 1$ e $|\cos(nx)| \leq 1$; nel passaggio $(*_2)$ abbiamo usato l'ipotesi induttiva.

□

Esercizio 3.12. *Per quali $x \in \mathbb{R}$ sono valide le seguenti uguaglianze?*

1. $\log_a (2x-3)^{12} = 3 \log_a (2x-3)^4$ *;*
2. $\log_a (2x-3)^{12} = 4 \log_a (2x-3)^3$ *;*
3. $\log_a (2x-3)^{12} = 12 \log_a (2x-3)$ *.*

Esercizio 3.13. *Si trovi il dominio naturale delle seguenti funzioni.*

1. $f(x) = \log_a |x|$.
2. $f(x) = \log_a (x^2 + 1)$.
3. $f(x) = \log_a \left(\frac{x}{x-1} \right)$.
4. $f(x) = \log_a \sqrt{x^2 - x}$.

5. $f(x) = \sqrt{\log_2 x}$.
6. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$.
7. $f(x) = a^{x-1}$.
8. $f(x) = a^{\sqrt{2-x}}$.
9. $f(x) = \log(x-1)^2$.
10. $f(x) = 2\log(x-1)$.

Esercizio 3.14. *Si trovi il periodo delle seguenti funzioni (k è un reale maggiore di zero).*

1. $f(x) = \sin(kx)$.
2. $f(x) = \cos(kx)$.
3. $f(x) = \mathrm{tg}(kx)$.

Esercizio 3.15. *Si dica se le seguenti funzioni sono periodiche e in caso affermativo si calcoli, se c'è, il minimo periodo.*

1. $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$.
2. $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{3}x)$.
3. $f(x) = x \sin x$.
4. $f(x) = x + \sin x$.

Esercizio 3.16. *Se due funzioni f e g sono periodiche con minimo periodo T, che cosa si può dire riguardo alla periodicità delle funzioni*

1. $f + g$,
2. $f \cdot g$,
3. $|f|$?

Esercizio 3.17. *Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\sin(\mathrm{arctg}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Esercizio 3.18. *Esprimere* $\sin(\arcsin(a) + \arcsin(b))$ *in maniera che non compaiano le funzioni trigonometriche o le loro inverse.*

Esercizio 3.19. *Utilizzando i grafici delle funzioni elementari studiate, tracciare i grafici sommari delle funzioni seguenti.*

1. $f(x) = 2 + \sin x$.
2. $f(x) = \mathrm{sgn}(\sin x)$ (sgn *è la funzione "segno").*
3. $f(x) = \sin|x|$.
4. $f(x) = \min\{\sin x, \cos x\}$.
5. $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$.
6. $f(x) = \sin x - |\sin x|$.

4 Limiti e continuità per le funzioni reali di variabile reale

Esercizio 4.1. *Verificare, in base alla definizione di limite, la validità delle seguenti scritture di limite.*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$

2. $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Esercizio 4.2. *Calcolare i seguenti limiti.*

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x+2}.$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}.$

3. $\lim_{x\to -1} \frac{x^n+1}{x+1}$, $n \in \mathbb{N}.$

4. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right).$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}.$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}.$

7. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}.$

Esercizio 4.3. *Calcolare i seguenti limiti.*

1. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to}$.

Esercizio 4.4. *Trovare gli eventuali punti in cui le seguenti funzioni non sono continue.*

1. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$. *La funzione* sgn *è la funzione, di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, *definita da*
$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & \text{se } x<0;\\ \ \ 0, & \text{se } x=0;\\ \ \ 1, & \text{se } x>0.\end{cases}.$$

2. $f(x)=|\operatorname{sgn}(x)|$.

3. $f(x)=x\operatorname{sgn}(x)$.

4. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{se } x<0;\\ \sin x, & \text{se } x\geq 0.\end{cases}.$

5. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{se } x<\pi/4;\\ \cos x, & \text{se } x\geq \pi/4.\end{cases}.$

6. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{se } x<\pi/2;\\ \cos x, & \text{se } x\geq \pi/2.\end{cases}.$

7. $f(x)=\operatorname{sgn}(x^2)$.

8. $f(x)=\operatorname{sgn}\big((x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)\big)$, $n\in\mathbb{N}$, $n>0$.

9. $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin(x))$.

10. $f(x)=\operatorname{sgn}(2+\sin(x))$.

Esercizio 4.5. *Trovare, se esistono, i valori dei reali* a *e* b *affinché la funzione*
$$f(x)=\begin{cases}2x+a, & \text{se } x\leq 1;\\ ax+b, & \text{se } 1<x<2;\\ x^2, & \text{se } x\geq 2.\end{cases}$$
sia continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.6. *Trovare, se esistono, i valori dei reali* a, b *e* c *affinché la funzione*
$$f(x)=\begin{cases}a\sin x+b, & \text{se } x<0;\\ 3cx+2b-1, & \text{se } 0\leq x\leq 1;\\ cx^2+2, & \text{se } x>1.\end{cases}$$
sia continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.7. *Trovare gli eventuali punti in cui la funzione seguente è continua.*
$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{se } x\in\mathbb{Q};\\ -x, & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

5 Limiti notevoli. Proprietà delle funzioni continue

Esercizio 5.1. *Usando i limiti notevoli si calcolino i seguenti limiti.*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^x$, *ove α è un reale qualunque.*

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$.

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x+3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$, *ove α è un reale qualunque.*

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}-\mathrm{e}^{\beta x}}{x}$, *ove α e β sono due reali qualunque.*

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{1-\cos x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$.

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$. *(Osservare che $1+\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+1)$).*

16. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - \ln x - x^{25}}{x^3}$.

17. $\lim_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x$.

18. $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Esercizio 5.2. *Si porti un esempio di funzione definita in un intervallo chiuso e limitato, che assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo, ma che non si annulla mai.*

Esercizio 5.3. *Si porti un esempio di funzione definita in un intervallo, discontinua in almeno un punto dell'intervallo, che assume massimo e minimo nell'intervallo e anche tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

Esercizio 5.4. *Dire se le seguenti equazioni hanno o no almeno una soluzione in $\mathbb{R}$.*

1. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
2. $x^5 + x\sqrt{3} + 1 = 0$.
3. $x + \ln x = 0$.
4. $x + \mathrm{e}^x = 0$.

6 Derivate per funzioni reali di variabile reale

Esercizio 6.1. *Calcolare, usando la definizione, la derivata delle seguenti funzioni in un punto generico* x_0 *del dominio naturale.*

1. $f(x) = x^2 + x - 1$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Esercizio 6.2. *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione delle funzioni elementari e l'algebra delle derivate, senza preoccuparsi dell'eventuale presenza di punti di non derivabilità.*

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
2. $f(x) = (\mathrm{e}^{-x})^2$.
3. $f(x) = \ln(x + \sin x)$.
4. $f(x) = (\sin x)\sqrt{x^2 + x}$.
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{\ln x + \mathrm{e}^{3x}}$.
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$.
7. $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$.
8. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.
9. $f(x) = \mathrm{e}^{\arcsin x}$.
10. $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + x^2 + x\sin x\right)$.
11. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.
12. $f(x) = \cos^5 x$.

13. $f(x) = \cos(x^5)$.
14. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
15. $f(x) = 2^{x^2}$.
16. $f(x) = \log_5 \dfrac{x}{\sin x}$.
17. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.
18. $f(x) = \arcsin^2 x$.
19. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.
20. $f(x) = \sin(x + \cos x)$.

Esercizio 6.3. *Dimostrare che la funzione $f(x) = x\,|x|$ è ovunque derivabile, nonostante sia il prodotto tra una funzione derivabile e una non derivabile.*

Esercizio 6.4. *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni, nel punto indicato.*

1. $f(x) = \sin x\,, \quad x_0 = \dfrac{5}{4}\pi$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
3. $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)\,, \quad x_0 = \dfrac{3}{4}\pi$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \quad x_0 = 1$.

Esercizio 6.5. *Trovare, se esistono, i punti nei quali le seguenti coppie di funzioni hanno la stessa derivata.*

1. $f(x) = \sqrt{x} + \cos 1\,, \quad g(x) = 2x - 3 + \ln \pi$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x} + \pi^{\mathrm{e}}\,, \quad g(x) = \sin x + \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^{\pi}$.
3. $f(x) = x^3 + x^4 + \pi\,, \quad g(x) = 2x^3 - \sqrt{2}$.

Esercizio 6.6. *Dire se esiste qualche punto dove la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è derivabile.

In quali punti è derivabile la funzione valore assoluto della precedente?

Esercizio 6.7. *Mostrare che le due curve di equazione* $y = 3x^2$ *e* $y = 2x^3+1$ *sono tangenti nel punto* $(1,3)$.

Esercizio 6.8. *Tenendo presente la regola di derivazione delle funzioni radice n-esima, ricavare la regola di derivazione delle funzioni potenza con esponente razionale*

$$f(x) = x^{m/n}.$$

Esercizio 6.9. *Dimostrare, usando la definizione, che*

$$f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1} \quad n \in \mathbb{N}^+,\, x \neq 0.$$

Esercizio 6.10. *Usando opportunamente la regola per la derivata della funzione esponenziale e della funzione composta, ricavare la regola per la derivata di*

1. $f(x) = x^\alpha, \quad x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)}$.

Esercizio 6.11. *È data la funzione*

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}).$$

1. *Trovarne il dominio naturale.*
2. *Dimostrare che la funzione è dispari.*
3. *Dimostrare che* $f|_{[0,+\infty[}$ *è crescente.*
4. *Utilizzando anche il punto* 5 *concludere che anche* f *è crescente.*
5. *Calcolare la derivata di* f *e verificare che è strettamente positiva.*
6. *Calcolare esplicitamente* $g = f^{-1}$.
7. *Calcolare la derivata di* g *sia direttamente utilizzando l'espressione trovata al punto* 6, *sia usando la regola di derivazione delle funzioni inverse, verificando la coincidenza dei risultati.*

Esercizio 6.12. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione ovunque derivabile e tale che* $f'(x_0) = 0$ *in ogni punto* x_0 *dove* $f(x_0) = 0$. *Provare allora che* $|f|$ *è una funzione ovunque derivabile. Si noti che la funzione* $f(x) = x$ *costituisce un esempio dell'essenzialità dell'ipotesi che sia* $f'(x_0) = 0$ *in ogni punto* x_0 *dove* $f(x_0) = 0$*: in effetti la funzione* $|x|$, *come è noto, non è derivabile nell'origine, cioè dove* f *si annulla senza che si annulli la sua derivata prima.*

Esercizio 6.13. *Dire per quali valori di* a, $b \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x-1} + a, & \text{se } x < 1 \\ bx^2 + 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Se si considera un punto $x_0 \neq 1$, in un opportuno intorno di x_0 la funzione coincide o con la $\mathrm{e}^{x-1} + a$, o con la $bx^2 + 1$; queste ultime due sono funzioni continue e derivabili, per cui non ci sono problemi per la contintuità e derivabilità nemmeno di f (si ricordi che la continuità e la derivabilità di una funzione sono solo *proprietà locali*). Esaminiamo ora il punto $x_0 = 1$, cominciando a preoccuparci della continuità (se non fosse continua la funzione non potrebbe nemmeno essere derivabile).

Si ha:

1. $f(1) = b + 1$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\mathrm{e}^{x-1} + a\right) = 1 + a$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(bx^2 + 1\right) = b + 1\,.$

Dunque se $1 + a = b + 1$, ovvero $a = b$ il limite esiste ed è uguale al valore della funzione in $x_0 = 1$, ovvero la funzione è continua.

Preoccupiamoci ora della derivabilità. Non avendo, a questo punto, a disposizione alcun teorema (in particolare il teorema sul limite della derivata) usiamo il rapporto incrementale. Dovremo calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}\,.$$

Naturalmente potremo tenere conto che deve essere $a = b$, e ci converrà calcolare separatamente il limite destro e quello sinistro. Per quello sinistro abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(\mathrm{e}^{x-1} + a) - (1 + b)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\mathrm{e}^{x-1} + a) - (1 + a)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{e}^{x-1} - 1}{x - 1} = 1\,.$$

Per quello destro abbiamo invece

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(bx^2 + 1) - (b + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(ax^2 + 1) - (a + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2 - a}{x - 1} \lim_{x\to 1^+} a(x + 1) = 2a\,.$$

La funzione sarà quindi continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a = b = 1/2$. □

Esercizio 6.14. *Dire per quali valori di* a, $b \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \leq 1 \\ ax + b, & se\ x > 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile per ogni x.

Esercizio 6.15. *Delle seguenti funzioni dire se sono continue, nel caso siano continue se sono derivabili, nel caso siano derivabili se la funzione derivata è continua.*

1. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}\,.$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}\,.$

3. $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$.

Esercizio 6.16. *Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a + 1, & se\ x \leq 0 \\ 3x^2 + 4, & se\ x > 0 \end{cases}$$

risulta continua? Per tali valori la funzione risulta derivabile?

Esercizio 6.17. *Si dimostri che la funzione $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = x^2 + e^x$$

è invertibile e, detta g l'inversa, si calcoli $g'(1 + e)$.

Esercizio 6.18. *Si dimostri che la funzione $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \arcsin x + \sin x$$

è invertibile e, detta g l'inversa, si calcoli $g'(0)$.

7 Proprietà locali - Funzioni derivabili in un intervallo

Esercizio 7.1. *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \operatorname{sgn}(\arcsin(x))$ *e dedurne se nel punto* $x_0 = 0$ *la funzione è crescente o decrescente oppure se ha un massimo o minimo relativo.*

Esercizio 7.2. *Tracciare il grafico della funzione* $f(x) = \operatorname{sgn}(\arccos(x))$ *e dedurne se nel punto* $x_0 = 1$ *la funzione è crescente o decrescente oppure se ha un massimo o minimo relativo.*

Esercizio 7.3. *Dopo aver trovato il dominio naturale, trovare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni.*

1. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x}$.
2. $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + 3x - \pi$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln(-x)$.
4. $f(x) = \mathrm{e}^x + 3x - 1$.
5. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} + 3)$.
6. $f(x) = x + \sin x$.
7. $f(x) = 2x + \dfrac{\sin x}{x} + \mathrm{e}$.
8. $f(x) = x + \sqrt{x}$.
9. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{x}$.
10. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x}$.

Esercizio 7.4. *Dire se esiste una funzione* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*, derivabile e tale che*

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f'(x) < 2,\ \forall x \in [0,1]\,.$$

Esercizio 7.5. *Calcolare la derivata di* $f(x) = \arcsin x + \arccos x$*. Che cosa si può dedurre della funzione* $f(x)$*?*

Esercizio 7.6. *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}\,.$$

Che cosa si può dedurre della funzione $f(x)$?

Esercizio 7.7. *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Che cosa si può dedurre della funzione $f(x)$?

Esercizio 7.8. *Per le seguenti funzioni verificare se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, trovare tutti i punti "c" di cui tratta il teorema.*

1. $f(x) = x^8 + x^6 + \pi\,, \quad I = [-1, 1]$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}\,, \quad I = [1, 2]$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,, \quad I = [-1, 1]$.
4. $f(x) = \sqrt{x}\,, \quad I = [1, 3]$.

Esercizio 7.9. *Calcolare, applicando opportunamente la regola di l'Hôpital, i seguenti limiti (gli ultimi tre limiti potrebbero anche essere calcolati, più velocemente, con tecniche elementari o basate sui limiti notevoli: per esercizio si può fare il calcolo anche in questo secondo modo, per un utile confronto).*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^x}{x-\sin x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\ln(x+1)$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(1+\mathrm{e}^{-x})^x$.

Esercizio 7.10. *Verificare che l'applicazione delle regola di l'Hôpital al seguente limite porta in un vicolo cieco. Calcolare poi il limite per altra via.*

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(2^x+3^x)}{x}\,.$$

Esercizio 7.11. *Applicare la regola di l'Hôpital al seguente limite*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}\,,$$

constatando che si finisce in un vicolo cieco. Riapplicare la regola scrivendo la funzione nella forma

$$\frac{1/x}{\mathrm{e}^{1/x}},$$

constatando che si raggiunge subito il risultato.

Calcolare lo stesso limite anche operando la sostituzione $1/x = t$ e usando poi i limiti notevoli.

Esercizio 7.12. *Utilizzando il teorema sul limite della derivata, verificare che le seguenti funzioni sono derivabili in $x_0 = 0$, dopo averne provato la continuità.*

1. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \le 0 \\ \sin x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \le 0 \\ \cos x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$

3. $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \ne 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$

Esercizio 7.13. *Verificare che la seguente funzione è derivabile in $x_0 = 0$, ma che il teorema sul limite della derivata non è applicabile.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \ne 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 7.14. *Discutere, al variare del parametro α, la continuità e derivabilità della seguente funzione*

$$\begin{cases} |x|^\alpha \ln |x|, & \text{se } x \ne 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 7.15. *Dire per quali a, b, $c \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } -1 < x < 1 \\ \ln |x|, & \text{se } x \le -1 \lor x \ge 1 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.16. *Dire per quali a, $b \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$\begin{cases} a^2 \sin x + b^2 \cos x, & \text{se } x < 0 \\ \ln(x+2), & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

8 Infiniti e infinitesimi

Esercizio 8.1. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + \operatorname{tg}^2 x + x}{\sqrt{x} + \sin x + x^2 + \operatorname{tg}^3 x}\,.$$

Esercizio 8.2. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^2 - \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 x + (\mathrm{e}^x - 1)^3}\,.$$

Esercizio 8.3. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - {}^{x}/_{2} + x^3}{\operatorname{tg} x - 1 + \cos x}\,.$$

Esercizio 8.4. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \mathrm{e}^x + \ln x + \sin x}{x^4 + 2\mathrm{e}^x + 1 - \cos x}\,.$$

Esercizio 8.5. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^5 + x + \sin x}{x^2 - \ln x^7 + 5x}\,.$$

Esercizio 8.6. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in $+\infty$ e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a ${}^1/_x$.*

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3}\,.$$

Esercizio 8.7. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in $+\infty$ e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a ${}^1/_x$.*

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,.$$

Esercizio 8.8. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in $+\infty$ e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a ${}^1/_x$.*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Esercizio 8.9. *Verificare che la seguente funzione è infinita in $+\infty$ e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a x.*

$$f(x) = x^2 \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)\,.$$

Esercizio 8.10. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x^2(2 + \sin^2 x)\,.$$

Esercizio 8.11. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x^4\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\,.$$

Esercizio 8.12. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(1+x)}\,.$$

Esercizio 8.13. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+1}{x-3}}\,.$$

Esercizio 8.14. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $\ln x$.

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)\,.$$

Esercizio 8.15. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* 0 *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = \frac{x^4 + \sin^3 x}{\ln x}\,.$$

Esercizio 8.16. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* 0 *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $\sqrt{|\sin x|}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin^3 x}{x + \sqrt{x}}\,.$$

9 Polinomi di Taylor - Convessità

Esercizio 9.1. *Calcolare il polinomio di Taylor dell'ordine indicato, relativo al punto* 0*, per le seguenti funzioni.*

- $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$, *ordine* 3.
- $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$, *ordine* 4.
- $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, *ordine* 4.

Esercizio 9.2. *Calcolare il polinomio di Taylor di ordine n di*

- $f(x) = \mathrm{e}^x$, *relativo al punto* 1*;*
- $f(x) = \ln x$, *relativo al punto* 2*;*
- $f(x) = \sin x$, *relativo al punto* $\pi/4$.

Esercizio 9.3. *Dire quali tra le seguenti funzioni sono convesse in* $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \mathrm{e}^{x+5}$;
- $f(x) = \begin{cases} x\ln|x|, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$;
- $f(x) = x^4 + x^2$.

Esercizio 9.4. *Delle seguenti funzioni determinare gli intervalli ove sono convesse, concave e i punti di flesso.*

- $f(x) = x^3 - x^2 + x$;
- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2+1}$;
- $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$.

Esercizio 9.5. *Calcolare i seguenti limiti, facendo uso opportuno della formula di Taylor delle funzioni elementari.*

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\ln(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$;
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^5}{3\operatorname{arctg} x - 3x + x^3}$;
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{e}^x - 2 - 2x - x^2}{\sin^3 x}$.

Esercizio 9.6. *Utilizzando gli sviluppi di taylor delle funzioni elementari, trovare i polinomi di Taylor di ordine* 5 *delle seguenti funzioni, senza calcolarne le derivate successive.*

- $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$;
- $f(x) = \sin(x^2 + x)$;
- $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

9.1 Esercizi sui grafici delle funzioni reali

Esercizio 9.7. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\sin\frac{1}{x}\,.$$

Determinare gli asintoti della funzione. Dire se esiste un intorno destro di 0 *dove la funzione è monotona. Dire se esiste un intorno di* $+\infty$ *dove la funzione è monotona.*

Esercizio 9.8. *Con un opportuno confronto di grafici dire se la seguente equazione ha o no soluzioni:*

$$\sin(\pi x) = x\,.$$

Esercizio 9.9. *Utilizzando un opportuno grafico, trovare il numero e il segno delle radici della seguente equazione:*

$$x^3 - 5x + \pi = 0\,.$$

Esercizio 9.10. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^6 \sin\dfrac{1}{x}, & \textit{se } x \neq 0 \\ 0, & \textit{se } x = 0 \end{cases}\,.$$

Si provi che $f''(0) = 0$. *Si dica se la funzione è convessa, concava, oppure ha un flesso nel punto* 0.

Esercizio 9.11. *Della funzione*

$$f(x) = x^{\frac{x+1}{x+2}}$$

si determini il dominio naturale, la derivata prima e i limiti della derivata prima per $x \to 0^+$ *e per* $x \to +\infty$.

Esercizio 9.12. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x) = \ln x - \mathrm{e}^x$$

non si annulla mai.

Esercizio 9.13. *Si tracci un grafico sommario delle seguenti funzioni, nel loro dominio naturale.*

- $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

- $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.
- $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
- $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
- $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

10 Successioni e serie numeriche

Esercizio 10.1 (Criterio dell'ordine)**.** *Dimostrare che se il termine generale di una serie a termini positivi è infinitesimo di ordine ≤ 1 rispetto al campione $1/n$ allora la serie diverge, se invece esiste $\alpha > 1$ tale che il termine generale sia maggiore o uguale ad α, allora la serie converge.*

Risoluzione. Si tratta di una semplice applicazione del teorema relativo alla serie armonica generalizzata e del criterio del confronto. Se infatti la serie di termine generale a_n è infinitesima di ordine 1 rispetto a $1/n$, significa che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n} = l > 0, \quad (l \in \mathbb{R}).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ tale che $l - \varepsilon > 0$, si ha, da un certo $\overline{n}$ in poi,

$$\frac{a_n}{1/n} > l - \varepsilon,$$

ovvero

$$a_n > (l - \varepsilon)\frac{1}{n}.$$

Questo significa che la serie è maggiorante della serie armonica e dunque diverge. Se poi l'ordine di infinitesimo è minore di 1, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n} = +\infty,$$

e, fissato $k > 0$, da un certo $\overline{n}$ in poi si ha

$$a_n > k\,\frac{1}{n},$$

dal che si trae la stessa conclusione di prima.

Se invece esiste α tale che la serie sia infinitesima di ordine maggiore o uguale ad α, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = l \geq 0, \quad (l \in \mathbb{R}).$$

Ma allora fissato $\varepsilon > 0$ si ha, da un certo $\overline{n}$ in poi,

$$a_n < (l + \varepsilon)\frac{1}{n^\alpha},$$

ovvero la serie è una minorante, a termini positivi, di una serie armonica generalizzata convergente, dunque converge.

Si tenga ben presente che, nella seconda parte, *non è sufficiente* che l'ordine sia maggiore di 1, rispetto a $1/n$, perché altrimenti potrei solo concludere che la serie è una minorante della serie armonica e questo non fornisce alcuna informazione. Si può per esempio provare (ma ora non abbiamo strumenti sufficienti per farlo) che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

diverge, nonostante sia infinitesima di ordine superiore a 1, rispetto a a $1/n$. Sostanzialmente, con un linguaggio intuitivo, si può dire che una serie a termini positivi converge se il termine generale è "sufficientemente infinitesimo", altrimenti diverge. □

Esercizio 10.2. *Calcolare i seguenti limiti.*

1. $\lim \dfrac{n^2 - \sin n}{n^2 + \cos n}$.
2. $\lim \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.
3. $\lim \dfrac{e^n}{n!}$.

Esercizio 10.3. *Stabilire il carattere delle seguenti serie.*

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$ *(applicare il criterio della radice).*
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2}$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+\operatorname{arctg} n}{n^2+n+2}$.

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n+1}$.

Esercizio 10.4. *Stabilire il carattere delle seguenti serie, valutando anche la convergenza assoluta.*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos(n\pi)$.

11 Serie di potenze

Esercizio 11.1. *Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze di* $\ln(1+x)$ *trovare quello di* $\ln(1-x)$ *e, successivamente, quello di*

$$\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Risoluzione. Lo sviluppo di $\ln(1+x)$ è dato da

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,,\quad -1<x\le 1\,.$$

Scrivendo $-x$ al posto di x si ottiene

$$\begin{aligned}\ln(1-x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n x^n}{n}=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\frac{x^n}{n}\,,\quad -1\le x<1\,.\end{aligned}$$

Si ha poi

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\frac{x^n}{n}=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)\frac{x^n}{n}\,.\end{aligned}$$

In quest'ultima somma tutti i termini con n pari si annullano, perché $(-1)^{n-1}+1=0$; rimangono solo i termini dispari, con coefficiente 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)\frac{x^n}{n}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$

dove dovremo tenere conto delle limitazioni

$$-1<x<1\,,$$

in quanto devono valere contemporaneamente i due sviluppi precedenti.

Dunque

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\quad -1<x<1\,.$$

□

Esercizio 11.2. *Utilizzando il risultato dell'esercizio 11.1 trovare una serie che abbia per somma $ln(5)$.*

Risoluzione. Notiamo intanto che la cosa non si può dedurre dalla serie di $\ln(1+x)$, in quanto x può essere solo compreso tra -1 e 1.

Cerchiamo allora se esiste un x tale che $-1 < x < 1$ e che

$$\frac{1+x}{1-x} = 5\,.$$

Basterà per questo che $1+x = 5-5x$ ovvero $x = {}^{2}\!/_{3}$. Dunque

$$\ln 5 = \ln \frac{1+{}^{2}\!/_{3}}{1-{}^{2}\!/_{3}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}\,.$$

Si noti come lo stesso procedimento consenta di determinare una serie che abbia per somma il logaritmo naturale di un numero reale positivo a qualunque. Se infatti $a > 0$, si ha

$$\frac{1+x}{1-x} = a \quad \Leftrightarrow \quad 1+x = a-ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a-1}{a+1}\,,$$

e l'ultima frazione è compresa tra -1 e 1, per cui si potràa applicare lo sviluppo precedente.

Un'osservazione abbastanza interessante dal punto di vista applicativo sullo sviluppo oggetto dell'esercizio 11.1 e sull'applicazione che ne è stata fatta in questo esercizio.

La serie che abbiamo ottenuto permette il calcolo approssimato del logaritmo di un qualunque numero reale positivo, ma non è questo il suo solo vantaggio: si tratta di una serie che "converge abbastanza rapidamente", nel senso che si ottengono approssimazioni buone con un numero relativamente limitato di addendi. Anche se non possiamo entrare nei dettagli di questo problema, possiamo usare un software di calcolo simbolico, come Mathematica, per verificare questo fatto.

Per questo consideriamo il problema di calcolare $\ln 2$, utilizzando lo sviluppo di $\ln(1+x)$, dove basterà porre $x = 1$ ottenendo la ben nota serie armonica a segno alterno e, successivamente, usando lo sviluppo trovato nell'esercizio 11.1 dove basterà porre $x = {}^{1}\!/_{3}$; useremo in entrambi i casi i primi 20 addendi soltanto.

Otteniamo nel primo caso

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{19}}{19} - \frac{x^{20}}{20}\,,$$

da cui

$$\ln 2 \approx \frac{155685007}{232792560} \approx 0.6687714032\,.$$

Nel secondo caso invece

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots + \frac{2x^{19}}{19}$$

da cui

$$\ln 2 \approx \frac{1302374561632216}{1878929321474205} \approx 0.6931471805\,.$$

Il valore di $\ln 2$ con dieci cifre decimali esatte, sempre fornito da Mathematica è

$$\ln 2 \approx 0.6931471806\,,$$

e si può valutare subito quanto sia più affidabile il risultato fornito nel secondo caso, rispetto al primo. □

Esercizio 11.3. *Trovare lo sviluppo in serie di Taylor, relativo a $x_0 = 0$, della funzione*

$$f(x) = \ln \sqrt{1+x^2}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$f(x) = \ln \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\,.$$

□

Esercizio 11.4. *Trovare lo sviluppo in serie di Taylor, relativo a $x_0 = 0$, della funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x-3}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\mathrm{e}^{2x-3} = \mathrm{e}^{-3}\cdot\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3x)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{+\infty}3^n\,\frac{x^n}{n!}\,.$$

□

Esercizio 11.5. *Trovare lo sviluppo in serie di Taylor, relativo a $x_0 = 0$, della funzione*

$$f(x) = \sin x \cos x$$

Risoluzione. Si ha

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\,\sin(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dots$$

□

Esercizio 11.6. *Se*

$$f(x) = x^5\left(\mathrm{e}^{x^3} - \sin(x^2)\right)\,,$$

quanto vale $f^{(11)}(0)$?

Risoluzione. Lo sviluppo di Taylor di f, relativo al punto 0, sarà del tipo:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(11)}(0)}{11!}x^{11} + \dots\,,$$

per cui, se troviamo questo sviluppo, basterà moltiplicare il coefficiente di x^{11} per 11! per avere la derivata richiesta.

Si ha:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\,,$$

da cui

$$\mathrm{e}^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} + \dots$$

Analogamente

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

da cui

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

Allora

$$x^5\left(e^{x^3} - \sin(x^2)\right) = x^5\left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} - x^2 + \frac{x^6}{3!} + \dots\right) = x^5 - x^7 + x^8 + \frac{2}{3}x^{11} + \dots,$$

dove abbiamo operato ricordando che queste serie sono assolutamente convergenti e quindi i riordini dei termini non portano problemi.

Se ne deduce che

$$f^{(11)}(0) = \frac{2}{3}\,11! = 26\,611\,200\,. \qquad \square$$

Per chi avesse dei dubbi sulla bontà del risultato ottenuto, riportiamo in dettaglio la derivata 11ª della funzione data, ottenuta con un paziente e delicato calcolo manuale[1], e invitando a ripetere il calcolo.

$$\begin{aligned}
&39600x\Big(30240e^{x^3}x^2 + 136080e^{x^3}x^5 + 119070e^{x^3}x^8 + 30618e^{x^3}x^{11} + \\
&\quad +2187e^{x^3}x^{14} - 3360x^3\cos(x^2) + 128x^7\cos(x^2) - 1680x\sin(x^2) + 1344x^5\sin(x^2)\Big) + \\
&+ 55440\Big(360e^{x^3} + 9720e^{x^3}x^3 + 17820e^{x^3}x^6 + 7290e^{x^3}x^9 + 729e^{x^3}x^{12} + \\
&\quad +120\cos(x^2) - 480x^4\cos(x^2) - 720x^2\sin(x^2) + 64x^6\sin(x^2)\Big) + \\
&+ 1100x^3\Big(60480e^{x^3} + 3265920e^{x^3}x^3 + 11838960e^{x^3}x^6 + 11022480e^{x^3}x^9 + \\
&\quad +3674160e^{x^3}x^{12} + 472392e^{x^3}x^{15} + 19683e^{x^3}x^{18} - 30240x\cos(x^2) + \\
&\quad +48384x^5\cos(x^2) - 512x^9\cos(x^2) + 80640x^3\sin(x^2) - 9216x^7\sin(x^2)\Big) + \\
&+ 9900x^2\Big(60480e^{x^3}x + 771120e^{x^3}x^4 + 1360800e^{x^3}x^7 + 694008e^{x^3}x^{10} + \\
&\quad +122472e^{x^3}x^{13} + 6561e^{x^3}x^{16} - 13440x^2\cos(x^2) + 3584x^6\cos(x^2) + \\
&\quad -1680\sin(x^2) + 13440x^4\sin(x^2) - 256x^8\sin(x^2)\Big) + \\
&+ x^5\Big(19958400e^{x^3}x + 434095200e^{x^3}x^4 + 1320248160e^{x^3}x^7 + 1252888560e^{x^3}x^{10} + \\
&\quad +484989120e^{x^3}x^{13} + 84440070e^{x^3}x^{16} + 6495390e^{x^3}x^{19} + 177147e^{x^3}x^{22} + \\
&\quad +2217600x^3\cos(x^2) - 506880x^7\cos(x^2) + 2048x^{11}\cos(x^2) + \\
&\quad +665280x\sin(x^2) - 1774080x^5\sin(x^2) + 56320x^9\sin(x^2)\Big) + \\
&+ 55x^4\Big(9979200e^{x^3}x^2 + 80831520e^{x^3}x^5 + 134719200e^{x^3}x^8 + 77157360e^{x^3}x^{11} + \\
&\quad +18108360e^{x^3}x^{14} + 1771470e^{x^3}x^{17} + 59049e^{x^3}x^{20} - 30240\cos(x^2) +
\end{aligned}$$

[1] Naturalmente stiamo scherzando: il risultato è stato ottenuto con Mathematica e qui riportato quasi con un copia e incolla! È abbastanza interessante controllare, sempre con Mathematica, che una volta ottenuta la derivata 11ª, il valore fornito per $x = 0$ è esattamente quello calcolato sopra.

$$+403200x^4\cos(x^2) - 23040x^8\cos(x^2) + 302400x^2\sin(x^2) +$$
$$-161280x^6\sin(x^2) + 1024x^{10}\sin(x^2)\big) \ .$$

12 Numeri complessi

Esercizio 12.1. *Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso*

$$\frac{\mathrm{i}-1}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$-1+\mathrm{i}=(-1,1)=\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)\,,\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}=(1,-\sqrt{3})=\left(2\,;\,\frac{5\pi}{3}\right)\,.$$

Quindi

$$\frac{\mathrm{i}-1}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(2\,;\,\frac{5\pi}{3}\right)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{11\pi}{12}\right)\,.$$

□

Esercizio 12.2. *Scrivere in forma trigonometrica i numeri complessi*

1. $\dfrac{3-3\mathrm{i}}{2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}\,.$
2. $\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,.$
3. $-\pi\mathrm{i}\,.$

Esercizio 12.3. *Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso*

$$z=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$z=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\left(3\,;\,-\frac{\pi}{7}\right)\,.$$

Si presti particolare attenzione al fatto che se

$$z=a+\mathrm{i}b=(\varrho\,;\,\vartheta)\,,$$

allora $z=\varrho(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)$, mentre nell'esercizio appena risolto compariva il segno meno tra $\cos\vartheta$ e $\mathrm{i}\sin\vartheta$. □

Esercizio 12.4. *Scrivere in forma algebrica il numero*

$$(1+\mathrm{i})^{387}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$1 + \mathrm{i} = (1, 1) = \left(\sqrt{2}\,;\, \frac{\pi}{4}\right) .$$

Allora

$$(1 + \mathrm{i})^{387} = \left(\sqrt{2}\,;\, \frac{\pi}{4}\right)^{387} = \left((\sqrt{2})^{387}\,;\, \frac{387\pi}{4}\right) .$$

Poiché

$$\frac{387\pi}{4} = \frac{387}{8}\, 2\pi = 48 \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{4} ,$$

si ha

$$(1 + \mathrm{i})^{387} = \left((\sqrt{2})^{387}\,;\, \frac{387\pi}{4}\right) = \left((\sqrt{2})^{387}\,;\, \frac{3\pi}{4}\right) = 2^{193}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= 2^{193}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{193}(-1 + \mathrm{i}) .$$

□

Esercizio 12.5. *Scrivere in forma algebrica il numero*

$$\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{43} .$$

Esercizio 12.6.

1. *Scrivere in forma algebrica le radici terze di* i.
2. *Scrivere in forma algebrica le radici seste di* -1.
3. *Scrivere in forma algebrica le radici terze di* 8.
4. *Scrivere in forma algebrica le radici quarte di* $(1 + \mathrm{i})^2$.

Esercizio 12.7. *Risolvere le seguenti equazioni scrivendo le soluzioni in forma algebrica e usando, se del caso, anche le formule di bisezione per trovare le funzioni trigonometriche richieste.*

1. $\mathrm{i}z^2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}z - 9 = 0$.
2. $z^2 + 2z + 6\mathrm{i} - 7 = 0$.
3. $2z^2 + \sqrt{2}(1 - i)z + 1 = 0$.

Esercizio 12.8. *Rappresentare nel piano di Gauss i numeri complessi che soddisfano la seguente relazione.*

$$|z + 2\mathrm{i}| < 3 .$$

Risoluzione. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, la disuguaglianza precedente si può scrivere come segue:

$$|z + 2\mathrm{i}| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad |x + \mathrm{i}y + 2\mathrm{i}| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y + 2)^2 < 9 .$$

La soluzione è dunque costituita da tutti i punti del piano di Gauss interni al cerchio di centro $(0, -2)$ e raggio 3. □

Esercizio 12.9. *Rappresentare nel piano di Gauss i numeri complessi che soddisfano la seguente relazione.*

1. $\left|\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right| < 1\,.$

2. $\left|\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-2}\right| \leq 1\,.$

Esercizio 12.10. *Trovare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{1+4^n}\,.$$

Risoluzione. Si applica il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z-i|\,\frac{1+4^n}{1+4^{n+1}} \to \frac{|z-i|}{4}\,.$$

Dunque la serie converge se $|z-i| < 4$. □

Indice analitico