Università degli Studi di Udine - Sede di Pordenone Facoltà di Ingegneria

Esercizi

di Matematica 1 - I Modulo

Esercizi di riepilogo - Temi d'esame

Luciano Battaia

Versione provvisoria aggiornata al 8 gennaio 2009

Esercizi riepilogativi - Temi d'esame

Esercizio 1. *Verificare che la funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}(\mathrm{e}^x - 1)}$$

è infinitesima per $x \to 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione

$$g(x) = \sqrt[3]{\sin x}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}(\mathrm{e}^x - 1)} \frac{\sqrt{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4} + \sqrt{3}}{\sqrt{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4} + \sqrt{3}} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4 - 3}{(\mathrm{e}^x - 1)} \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4} + \sqrt{3})}\,.\end{aligned}$$

Analizziamo solo la prima frazione, in quanto la seconda ha per limite $1/6$ e operiamo con la regola di l'Hôpital, anche se si potrebbe procedere con i limiti notevoli.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4 - 3}{(\mathrm{e}^x - 1)} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{-6\cos x \sin x + 6x - 4x^3}{\mathrm{e}^x} = 0\,.$$

La funzione è dunque infinitesima e possiamo cercare di calcolarne l'ordine rispetto al campione dato. Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x}} = 1\,,$$

per cui sarà la stessa cosa calcolare l'ordine rispetto a $\sqrt[3]{x}$. Per eseguire il calcolo ripetiamo la razionalizzazione già fatta e operiamo solo sulla frazione

$$\frac{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4 - 3}{(\mathrm{e}^x - 1)}\,.$$

Spesso conviene, anche in esercizi simili, valutare l'ordine rispetto al "campione standard" x dei vari infinitesimi che compaiono, in quanto in molti casi questi ordini sono legati al calcolo di limiti notevoli. Cominciamo dal numeratore e calcoliamone l'ordine rispetto a x, applicando la regola di l'Hôpital.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x + 3x^2 - x^4 - 3}{x^\alpha} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{-6\cos x \sin x + 6x - 4x^3}{\alpha x^{\alpha-1}} \overset{(H)}{\Leftarrow} \\ &\lim_{x\to 0} \frac{6\sin^2 x - 6\cos^2 x + 6 - 12x^2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{12(\sin^2 x - x^2)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{12(\sin x - x)(\sin x + x)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}\,.\end{aligned}$$

Il numeratore di quest'ultima frazione è un infinitesimo di ordine 4, per cui tale deve essere anche il denominatore: se ne deduce che $\alpha = 6$. Poiché il denominatore è palesemente un infinitesimo di ordine 1, sempre rispetto a x, la funzione è di ordine 5.

A questo punto la conclusione è immediata.

$$\frac{f(x)}{|\sqrt[3]{x}|^\alpha} = \frac{f(x)}{x^5}\,\frac{x^5}{|\sqrt[3]{x}|^\alpha}\,.$$

Poiché il primo fattore ha limite finito e non nullo, occorre che lo stesso succeda per il secondo limite, ma questo è possibile solo se $\alpha = 15$. □

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-\left|x^2-x-2\right|}\,,$$

determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione g data da

$$\begin{cases} f(x), & \textit{se } x \leq 2 \\ -f(x), & \textit{se } x > 2 \end{cases}.$$

Risoluzione. Cominciamo a valutare il termine $\left|x^2 - x - 2\right|$. Si ha

$$\left|x^2 - x - 2\right| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \\ -x^2 + x + 2, & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \end{cases},$$

da cui

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2+2x+2}, & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \\ \mathrm{e}^{x^2-2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

La determinazione degli estremi locali di f ci permetterà di decidere subito sugli estremi locali di g. Lavoriamo dunque sulla funzione f e cominciamo a calcolare la derivata nei punti diversi da -1, 2.

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2+2x+2}(-2x+2), & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \\ \mathrm{e}^{x^2-2}(2x), & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}.$$

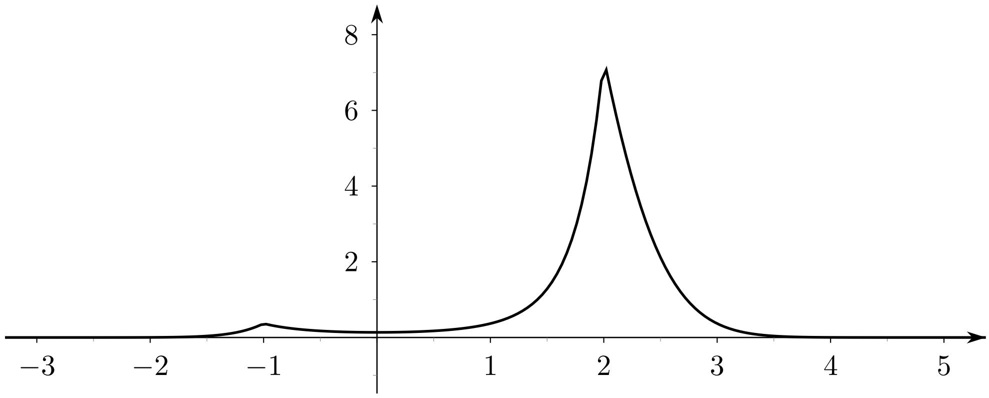
La funzione ha dunque derivata positiva per $x < -1 \vee 0 < x < 2$, derivata negativa per $-1 < x < 0 \vee x > 2$. Tenendo conto della continuità, avrà un massimo locale in -1 e in 2, un minimo locale in 0.

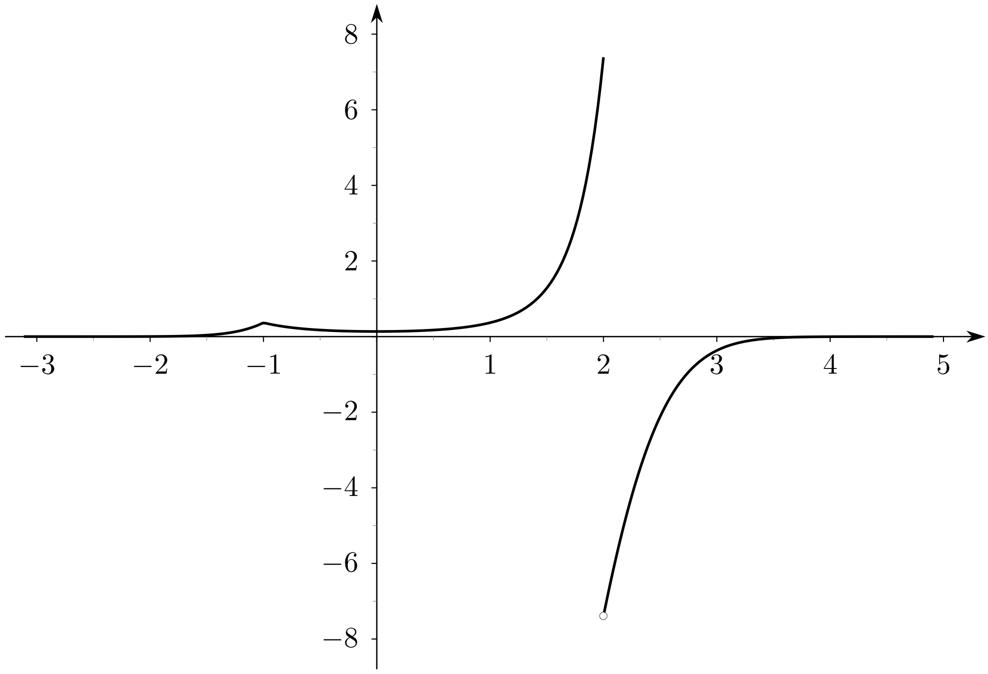
Passando alla funzione g possiamo subito concludere che nulla cambia per quanto riguarda i punti di estremo. Notiamo che la funzione h data da

$$\begin{cases} f(x), & \text{se } x < 2 \\ -f(x), & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

avrebbe invece un minimo locale in 2 (che sarebbe anche minimo assoluto).

Per completezza proponiamo anche i grafici delle funzioni f e g, da cui risultano evidenti le conclusioni che abbiamo indicato.





□

Esercizio 3. *Trovare quante e quali soluzioni reali ha l'equazione*

$$x^2+1=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\,.$$

Risoluzione. I due membri dell'equazione sono entrambi definiti solo se $x>0$: è qui che dobbiamo cercare le soluzioni. Conviene tracciare un grafico, sia pur sommario, delle due funzioni a primo e secondo membro. Al primo membro non ci sono problemi, in quanto la funzione ha come grafico una parabola. Per il secondo membro osserviamo intento che si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty\,.$$

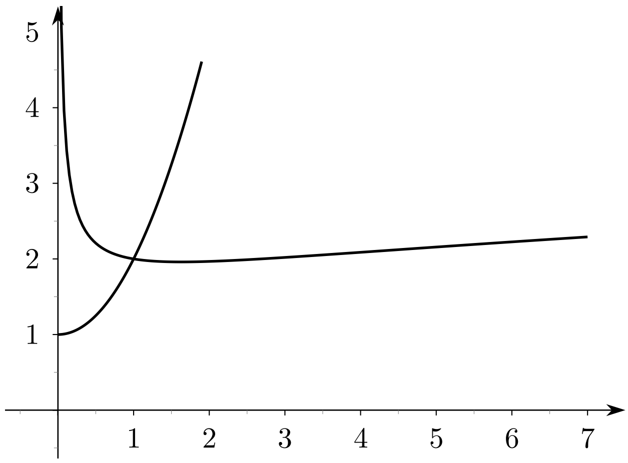
Si ha poi

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)=\frac{2\sqrt{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}}{6\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Questa derivata è positiva se

$$2\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^3} > 3\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow 2^6x^9 > 3^6x^4 \Rightarrow x^5 > \left(\frac{3}{2}\right)^6 \Rightarrow x > \frac{3}{2}\sqrt[5]{\frac{3}{2}}\,.$$

Da qui si può dedurre il grafico sommario che segue.



Tenendo anche conto del fatto che x^2+1 è infinito di ordine superiore a $\sqrt[3]{x}$, per $x \to +\infty$, si conclude che l'unica intersezione tra i due grafici (e quindi l'unica soluzione dell'equazione proposta) è quella visibile nella figura e corrispondente al valore $x = 1$. □

Esercizio 4. *Della funzione*

$$f(x) = \sin x + a\cos x + bx^3$$

si costruisca il polinomio di Taylor $T_{0,3}(x)$ del terzo ordine nell'intorno di 0. Esistono valori di a e b tali che questo polinomio abbia $x = 1$ come radice (o zero) doppia?

Risoluzione. Si ha intanto $f(0) = a$. La funzione è poi infinitamente derivabile. Calcoliamone le prime 3 derivate.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - a\sin x + 3bx^2 &\Rightarrow\quad & f'(0) = 1\,;\\ f''(x) &= -\sin x - a\cos x + 6bx &\Rightarrow\quad & f''(0) = -a\,;\\ f'''(x) &= -\cos x + a\sin x + 6b &\Rightarrow\quad & f'''(0) = -1 + 6b\,. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor richiesto è quindi

$$T_{0,3}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = a + x - \frac{a}{2}x^2 + \frac{6b-1}{6}x^3\,.$$

Affinché il polinomio abbia $x = 1$ come radice doppia deve essere

$$T_{0,3}(1) = 0, \quad T'_{0,3}(1) = 0, \quad T''_{0,3}(1) \neq 0\,.$$

Si ha

$$T_{0,3}(1) = a + 1 - \frac{a}{2} + \frac{6b-1}{6} = \frac{a}{2} + b + \frac{5}{6}\,,$$

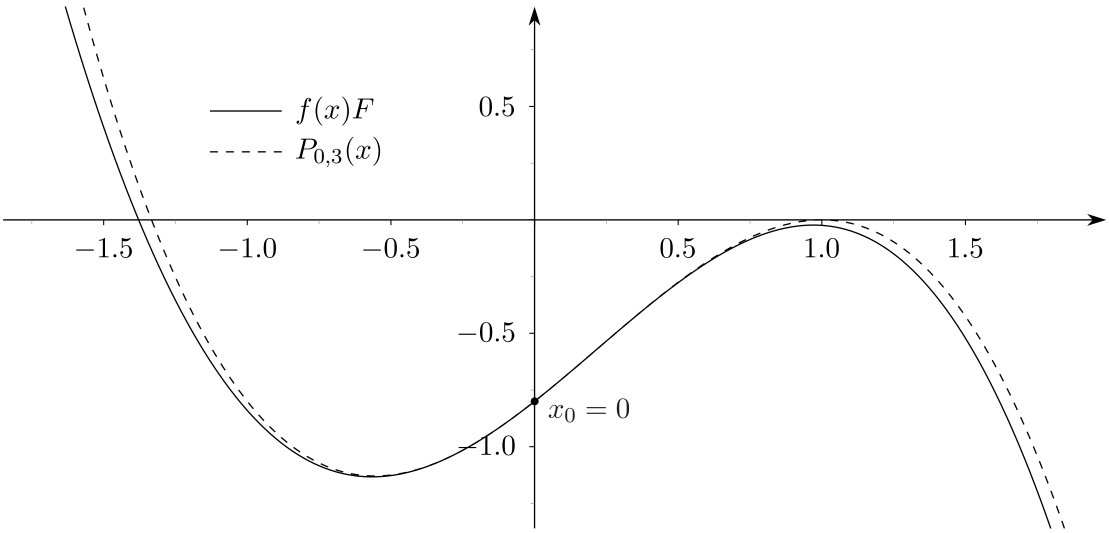
$$T'_{0,3}(x) = 1 - ax + \frac{6b-1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad T'_{0,3}(1) = -a + 3b + \frac{1}{2}\,,$$
$$T''_{0,3}(x) = -a + (6b-1)x \quad \Rightarrow \quad T''_{0,3}(1) = -a + 6b - 1\,.$$

Uguagliando a zero il valore del polinomio e della sua derivata prima si ottiene un sistema lineare di due equazioni in due incognite, che ha la seguente soluzione

$$a = -\frac{4}{5}\,, \quad b = -\frac{13}{30}\,.$$

Si verifica poi subito che per questi valori non si annulla la derivata seconda del polinomio: i valori trovati soddisfano dunque le condizioni del problema.

Per completezza proponiamo anche il grafico della funzione data e del polinomio di Taylor in corrispondenza dei valori trovati di a e b.



Il grafico rende evidente la bontà dell'approssimazione polinomiale, nei pressi dell'origine.

□

Esercizio 5. *Determinare per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ è infinitesima in 0 la funzione*

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + x + \lambda - 1)\,.$$

Per il valore trovato di λ calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x - (2/3)\,x^3}{x^4 \operatorname{tg} x + 2x^5}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \operatorname{arctg}(\lambda - 1)\,;$$

ne segue che deve essere $\lambda = 1$ e quindi $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + x)$.

Esaminiamo ora il problema del calcolo del limite. Esso potrebbe essere calcolato in maniera abbastanza agevole usando la formula di Taylor-Peano, tuttavia preferiamo lavorare utilizzando tecniche più elementari. Il denominatore della frazione proposta si può scrivere come

$$x^5\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}+2\right),$$

e ricordando che ${}^{\operatorname{tg} x}\!/_x$ ha limite 1 per $x \to 0$, si conclude che il limite richiesto può essere scritto più convenientemente nella forma

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x-(2/3)\,x^3}{x^5}\,\frac{1}{\operatorname{tg} x/x+2}\,.$$

A questo punto si può calcolare separatamente il limite del primo fattore, in quanto il secondo tende a $1/3$. Per il primo si può applicare la regola di l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x-(2/3)\,x^3}{x^5}\overset{H}{\Longleftarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x^2+1}{1+(x^3+x)^2}-1-2x^2}{5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+1-1-x^6-2x^4-x^2-2x^2-2x^8-4x^6-2x^4}{\big(1+(x^3+x)^2\big)5x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^4-5x^6-2x^8}{\big(1+(x^3+x)^2\big)5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-4-5x-2x^4}{\big(1+(x^3+x)^2\big)5}=-\frac{4}{5}\,.$$

Il limite richiesto vale allora

$$-\frac{4}{15}\,.$$

□

Esercizio 6. *Studiare la monotonia della funzione*

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x|\,\sqrt{|x|}}{x-1}\,.$$

Risoluzione. La funzione è definita in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ e, tenendo anche conto della definizione di valore assoluto, può essere convenientemente riscritta come

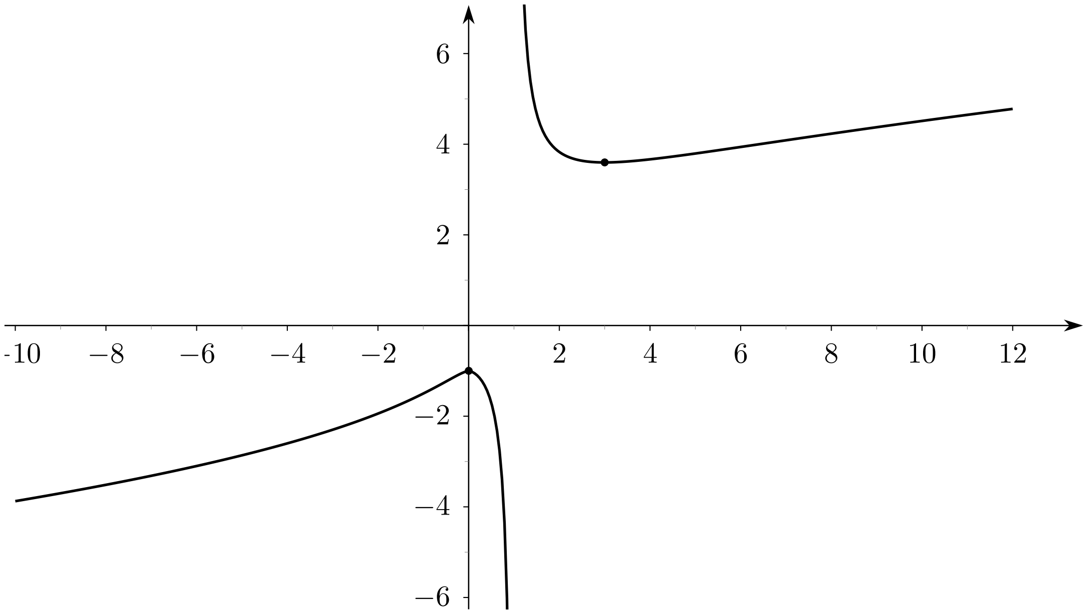
$$f(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{(-x)\sqrt{(-x)}}{x-1}, & \text{se } x<0\\[2mm] -1+\dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } 0\le x<1\\[2mm] 1+\dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } x>1\end{cases}\,.$$

La funzione è continua nel suo dominio e sicuramente derivabile per $x \neq 0$. Calcoliamone la derivata, naturalmente per $x \neq 0$.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2(-x+3)}{2(x-1)^2\sqrt{(-x)^3}}, & \text{se } x<0\\[2mm] \dfrac{x^2(x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{(-x)^3}}, & \text{se } 0<x<1\vee x>1\end{cases}\,.$$

Si deduce facilmente che la funzione cresce per $x < 0$ e per $x > 3$, decresce per $0 < x < 1$ e per $1 < x < 3$. Per la continuità di f nel suo dominio si può anche concludere che ha un massimo relativo in 0 e un minimo relativo in 3. Non ha né massimo né minimo assoluto perché il limite per $x \to 1$ è $-\infty$ da sinistra e $+\infty$ da destra.

Per completezza proponiamo un grafico sommario della funzione, dove si può confrontare la correttezza dei risultati indicati.



□

Esercizio 7. *Utilizzando gli sviluppi di Taylor-Peano elementari, e senza calcolare le derivate successive, calcolare il polinomio di Taylor, di punto iniziale* 0 *e di grado minore o uguale a* 3*, della funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}.$$

Risoluzione. Lo sviluppo di Taylor-Peano di e^x, di punto iniziale 0, è

$$(*) \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\,\omega_1(x)\,,$$

mentre quello di $\sin x$ è

$$(*_1) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\omega_2(x)\,.$$

Naturalmente dobbiamo tenere conto del fatto che le due funzioni infinitesime che compaiono nei due sviluppi sono diverse. Ci siamo limitati per ora a scrivere gli sviluppi di ordine 3, riservandoci comunque di proseguire, se del caso.

Per calcolare lo sviluppo di $\mathrm{e}^{\sin x}$ potremo sostituire l'espressione $(*_1)$ di $\sin x$ nella formula $(*)$. Nel fare i conti potremo trascurare tutte le quantità di grado superiore al terzo: siamo infatti sicuri che il polinomio di Taylor richiesto esiste, perché tutte le condizioni di regolarità sono soddisfatte, e lo sviluppo richiesto avrà la forma che segue.

$$\mathrm{e}^{\sin x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\,\omega(x)\,.$$

Potremo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= e^{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_2(x)} = \\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_2(x)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_2(x)\right)^2+ \\
&\qquad +\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_2(x)\right)^3+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_1(x)\right)^3\omega_1(x) = \\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+\dots\right)+\frac{1}{6}\left(x^3\dots\right)+\dots = \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\omega(x)\,.
\end{aligned}$$

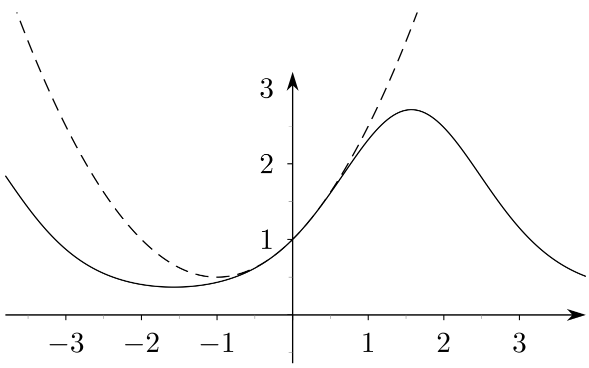
I calcoli eseguiti rendono palese che non occorre prendere, come punti di partenza, sviluppi di ordine più elevato, in quanto i termini che si otterrebbero sarebbero tutti di grado superiore al terzo. Il polinomio richiesto sarà dunque

$$T_{3,0}(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}\,.$$

Si può controllare la correttezza del risultato facendo direttamente le derivate della funzione data.

Con un po' di esercizio si potrebbe riuscire a scrivere sviluppi di Taylor anche abbastanza complessi, ma occorre prestare la massima attenzione a "manipolare" correttamente le funzioni $\omega(x)$ che compaiono nei diversi sviluppi.

La figura che segue mostra i grafici della funzione data (tratto continuo) e del polinomio trovato(in tratteggio).



□

Esercizio 8. *Utilizzando gli sviluppi di Taylor elementari, e senza calcolare le derivate successive, calcolare il polinomio di Taylor, di punto iniziale* 0 *e di grado minore o uguale a* 2*, della funzione*

$$f(x) = e^{\cos x}\,.$$

Risoluzione. Si può seguire sostanzialmente quanto fatto nella risoluzione dell'esercizio 7, ma bisogna prestare particolare attenzione ai termini che possono essere trascurati nel calcolare lo sviluppo "composto" tra quello dell'esponenziale e quello del coseno.

Lo sviluppo di Taylor di e^x, di punto iniziale 0, è

$$(*) \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\,\omega_1(x)\,,$$

mentre quello di $\cos x$ è

$$(*_1) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\,.$$

Naturalmente dobbiamo tenere conto del fatto che le due funzioni infinitesime che compaiono nei due sviluppi sono diverse. Ci siamo, per ora, limitati a scrivere sviluppi di ordine 2, riservandoci comunque di procedere con ordini successivi, se del caso.

Procedendo come nell'esercizio 7, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)} = \\
&= 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2 \omega_1(x) = \\
&= 1 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 - x^2 + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \dots\right)\omega_1(x)\,.
\end{aligned}$$

Il calcolo rende evidente che il primo addendo dello sviluppo di $\cos x$, che vale 1, non potrà mai essere trascurato, nemmeno se procediamo oltre con l'ordine dello sviluppo. Seguiamo allora una strategia leggermente diversa.

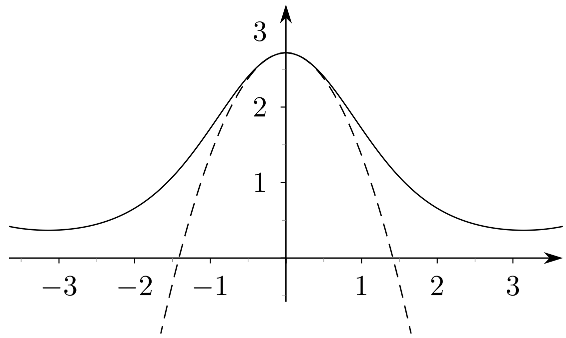
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)} = \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)} \\
&= \mathrm{e}\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2 \omega_1(x)\right] = \\
&= \mathrm{e}\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(\dots\right)\omega_1(x)\right]\,.
\end{aligned}$$

Da qui si può concludere che il polinomio richiesto è il seguente

$$T_{2,0}(x) = e - \frac{e}{2}\,x^2\,.$$

Naturalmente si può fare un controllo calcolando le derivate successive della funzione data.

La figura che segue mostra i grafici della funzione data (tratto continuo) e del polinomio trovato(in tratteggio).



□

Esercizio 9. *Calcolare il*

$$\lim a_n$$

essendo a_n la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}, \quad \textit{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

Risoluzione. Se la successione ha limite, esso deve essere $+\infty$ (perché è fatta tutta da termini positivi) oppure deve soddisfare all'equazione

$$(*) \qquad l = \sqrt{5 + l},$$

che si ottiene passando al limite nella definizione della successione e tenendo conto della continuità della funzione radice. Poichè si verifica subito che $a_2 > a_1$, controlliamo se la successione è sempre crescente (questo ci assicurerà dell'esistenza del limite). Occorrerà verificare se $a_n > a_{n-1}$.

$$a_n \geq a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5 + a_{n-1}} \geq a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 5 + a_{n-1} \geq (a_{n-1})^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \leq a_{n-1} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

La prima delle ultime due disuguaglianze è vera perché la successione è a termini positivi. proviamo la seconda, per induzione. Intanto si ha

$$a_1 = \sqrt{5} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

Supponiamo allora che

$$a_n \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{e proviamo che} \quad a_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2}.$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5 + a_n} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 5 + a_n \leq \frac{1 + 21 + 2\sqrt{21}}{4} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 10 + a_n \leq 11 + \sqrt{21} \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq 1 + \sqrt{21},$$

e quest'ultima disuguaglianza è vera per l'ipotesi induttiva. Questo prova non solo che la successione è crescente, ma anche che è superiormente limitata, dunque ha un limite finito.

Possiamo dunque usare l'equazione $(*)$, da cui concludiamo

$$l = \sqrt{5+l} \quad \Rightarrow \quad l^2 - l - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1+\sqrt{21}}{2}\,,$$

a causa della positività di l.

Il metodo seguito in questo esercizio è standard nelle successioni definite per ricorrenza. Si noti come in questo esempio (e la stessa cosa succede in altri analoghi) la difficoltà non consista tanto nel calcolare il limite, quanto nel provarne l'esistenza. □

Esercizio 10. *Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ è infinitesima, per $x \to 0^+$ la funzione*

$$f(x) = \ln(x^4 - 2x^2 + \lambda + 5)$$

e, in questo caso, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) + x^4 + 2x^2$ (rispetto al campione "standard" x).

Risoluzione. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(\lambda + 5)\,,$$

la funzione sarà infinitesima solo se $\lambda = -4$. Per calcolare l'ordine richiesto dovremo allora trovare, se esiste, un $\alpha > 0$ tale che il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4 + 2x^2}{x^\alpha}$$

esista, *finito* e *diverso da* 0.

Si osservi che il numeratore è la somma di tre infinitesimi, due di ordine 2 (rispetto al solito campione) e un odi ordine 4: questo ci impedisce di usare il principio di sostituzione degli infinitesimi. Potremmo infatti raggruppare i tre infinitesimi in due gruppi, in uno dei seguenti modi:

1. primo: $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4$, secondo: $2x^2$;
2. primo: $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + 2x^2$, secondo: x^4;
3. primo: $\ln(x^4 - 2x^2 + 1)$, secondo: $2x^2 + x^4$.

Osserviamo che $\ln(x^4 - 2x^2 + 1)$ è di ordine 2 (la prova è immediata, applicando per esempio l'Hôpital); $2x^2$ e x^4 sono ovviamente di ordine 2 e 4 rispettivamente. Dunque $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4$ è di ordine 2, e quindi nel primo casi non si può trascurare nulla; $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + 2x^2$ è di ordine superiore a 2 (in quanto somma di infinitesimi dello stesso ordine) e dunque nel secondo caso non si può trascurare nulla; $2x^2 + x^4$ è di ordine 2, e dunque nemmeno nel terzo caso si può trascurare nulla.

Di solito la regola di l'Hôpital va lasciata come "ultima spiaggia" nel calcolo di un limite; tuttavia quando compare la funzione logaritmo spesso l'uso della regola semplifica il problema, perché la derivata del logaritmo è particolarmente semplice. Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4 + 2x^2}{x^\alpha} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 1} + 4x^3 + 4x}{\alpha x^{\alpha - 1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4x^3 - 4x + 4x^7 + 4x^5 - 8x^5 - 8x^3 + 4x^3 + 4x}{x^4 - 2x^2 + 1}}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\alpha(x^4 - 2x^2 + 1)} \frac{-x^5 + x^7}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\alpha(x^4 - 2x^2 + 1)} \frac{-x^5}{x^{\alpha-1}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il principio di sostituzione degli infinitesimi, trascurando l'infinitesimo di ordine 7 rispetto a quell odi ordine 5. Si noti altresì che abbiamo isolato, nel limite, il primo fattore che ha per limite $4/\alpha$, e dunque non ha alcuna influenza in relazione al problema in discussione (non tende né a 0 né a ∞). A questo punto è ovvio che $\alpha - 1$ deve essere 5 se vogliamo che il limite sia finito, dunque $\alpha = 6$.

Il problema si poteva anche risolvere usando opportunamente la formula di Taylor per la funzione $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6}\,\omega(x)\,.$$

Da qui si ottiene, con procedimenti simili a quelli visti nell'esercizio 7, e tralasciando tutti i termini che hanno ordine maggiore di 6,

$$\begin{aligned}
\ln(1 + x^4 - 2x^2) &= x^4 - 2x^2 - \frac{(x^4 - 2x^2)^2}{2} + \frac{(x^4 - 2x^2)^3}{3} + \frac{(x^4 - 2x^2)^3}{3}\,\omega(x) = \\
&= x^4 - 2x^2 - \frac{1}{2}\left(4x^4 - 4x^6 + \dots\right) + \frac{1}{3}\left(-8x^6 + \dots\right) + \dots = \\
&= -2x^2 - x^4 - \frac{2}{3}\,x^6 + \dots
\end{aligned}$$

Da qui si vede subito che il numeratore è un infinitesimo di ordine 6.

La tecnica di costruire "sviluppi di Taylor composti" è molto efficiente, ma richiede un uso attento per evitare errori madornali. □

Esercizio 11. *Studiare la monotonia della funzione*

$$f(x) = \frac{\left|x\sqrt{|x|}\right|}{x-1}\,.$$

Risoluzione. La funzione è chiaramente definita e continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e può essere scritta nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\sqrt{-x}}{x-1}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } 0 \le x < 1 \lor x > 1 \end{cases}.$$

Calcoliamone la derivata. Per $x \ne 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-x}(3-x)}{2(x-1)^2}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}(x-3)}{2(x-1)^2}, & \text{se } 0 < x < 1 \lor x > 1 \end{cases}.$$

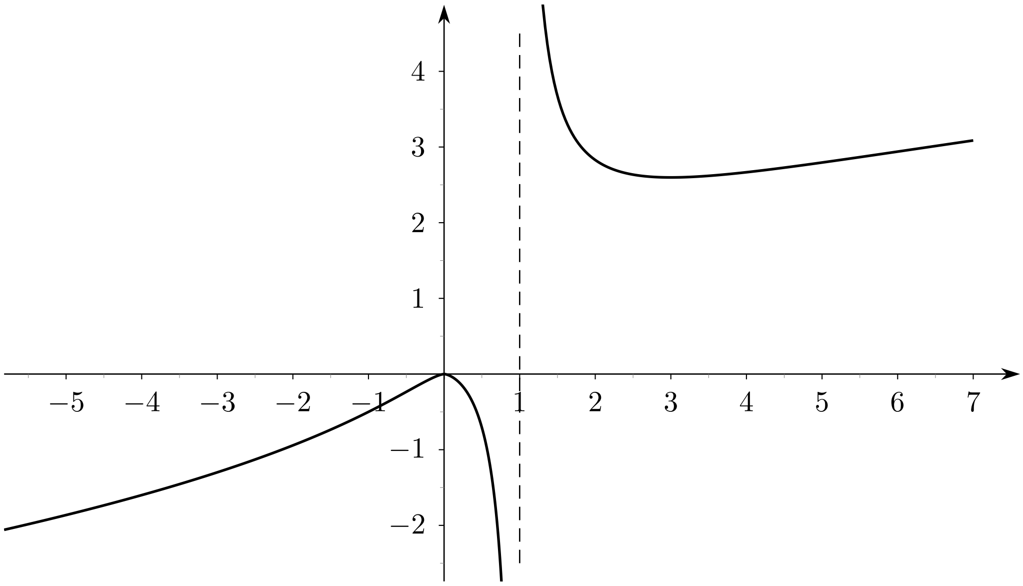
Anche se non ha importanza per quanto riguarda la monotonia, osserviamo che la funzione é derivabile con derivata nulla in 0, in quanto, essendo continua, si può applicare il teorema sul limite della derivata e questo limite vale 0.

La derivata trovata ci permette subito di concludere che la funzione

- cresce nell'intervallo $]-\infty, 0]$;
- decresce nell'intervallo $[0, 1[$;
- decresce nell'intervallo $]1, 3]$;
- cresce nell'intervallo $[3, +\infty[$.

Possiamo ulteriormente osservare, anche se non richiesto dal testo, che la funzione ha come unico asintoto, verticale, la retta $x = 1$, che ha limite $-\infty$ a $-\infty$ e $+\infty$ a $+\infty$. La funzione non ha massimo né minimo assoluto, mentre ha un massimo relativo in 0 (di valore 0) e un minimo relativo in 3, di valore $3\sqrt{3}/2$.

La figura seguente mostra il grafico della funzione in esame.



□

Esercizio 12. *Verificare che la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

è decrescente nell'intervallo $[1, +\infty[$ *e determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n\, 2^{\sin\frac{1}{n}}}{n^2+1}.$$

La serie è assolutamente convergente?

Risoluzione. Poiché la derivata della funzione $f(x)$ vale

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

si deduce subito che la funzione stessa è decrescente in $[1, +\infty[$. Anche la funzione

$$2^{\sin \frac{1}{x}}$$

è decrescente nell'intervallo $[1, +\infty[$, perché tale è la funzione $\sin {}^1\!/_x$. Dunque il modulo del termine generale della serie data si può vedere come la restrizione a $\mathbb{N}^+$ della funzione

$$(*) \qquad \frac{x}{x^2+1} \, 2^{\sin \frac{1}{x}}$$

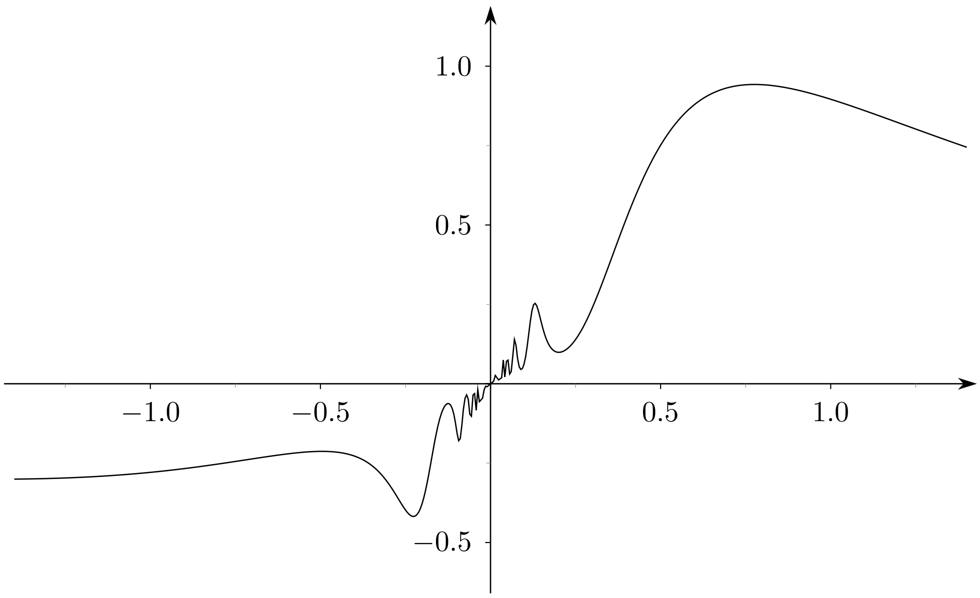
che risulta essere decrescente in $[1, +\infty[$ in quanto prodotto di due funzioni decrescenti e positive. Il termine generale è chiaramente infinitesimo, dunque la serie è a segno alterno, monotona in valore assoluto e infinitesima e quindi converge per il criterio di Leibniz. La serie dei valori assoluti non può convergere perché ha il termine generale che è infinitesimo di ordine 1 rispetto a ${}^1\!/_n$, in quanto prodotto di

$$\frac{n}{n^2+1} \quad \text{e} \quad 2^{\sin \frac{1}{n}}$$

di cui la prima è infinitesima di ordine 1, mentre la seconda ha limite 1.

È interessante osservare che la funzione $(*)$, se prolungata per continuità ponendo $f(0) = 0$, fornisce un esempio di funzione derivabile in tutto il suo dominio, con derivata positiva (precisamente 1) nell'origine e quindi crescente localmente nell'origine, ma non crescente in nessun intorno dell'origine. Inoltre la derivata prima non è limitata in un intorno dell'origine.

La figura seguente ne illustra un grafico sommario.



□

Esercizio 13. *Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2 \ln x + 2}{\ln^2 x - 1} \right)^n ?$$

Risoluzione. Si tratta di una serie geometrica, che risulterà convergente se la ragione è, in modulo, minore di 1. Dovremo quindi risolvere la disequazione

$$\left|\frac{2\ln x+2}{\ln^2 x-1}\right|<1\,.$$

Osserviamo intanto che dovrà essere $x\in]0,\mathrm{e}[\cup]\mathrm{e},+\infty[$. Dopodiché abbiamo

$$\left|\frac{2\ln x+2}{\ln^2 x-1}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{2}{\ln x-1}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<\frac{2}{\ln x-1}<1\,.$$

La risoluzione delle due disequazioni è immediata è porge

$$x\in\ \left]0,\mathrm{e}^{-1}\right[\cup\left]\mathrm{e}^3,+\infty\right[\ .$$

□

Esercizio 14.

1. *Trovare lo sviluppo di Taylor-Peano in* 0*, fino al quarto ordine, di*

$$\sqrt{1-x}$$

e dedurne quello di

$$\sqrt{1-x^3}$$

almeno fino al sesto ordine.

2. *Trovare lo sviluppo di Taylor-Peano in* 0*, fino al quarto ordine, di*

$$(1+x)^x\,,$$

utilizzando gli sviluppi delle funzioni elementari.

3. *Servendosi dei risultati ottenuti nei due punti precedenti calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1-x^3}-x^2}{\sin^2(x^2)}\,.$$

Risoluzione. Calcoliamo le derivate fino al quarto ordine di $f(x)=\sqrt{1-x}$, valutandole nel punto 0.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{1-x} & f(0)&=1\\
f'(x)&=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} & f'(0)&=-\frac{1}{2}\\
f''(x)&=-\frac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}} & f''(0)&=-\frac{1}{4}\\
f'''(x)&=-\frac{3}{8\sqrt{(1-x)^5}} & f'''(0)&=-\frac{3}{8}\\
f^{iv}(x)&=-\frac{15}{16\sqrt{(1-x)^7}} & f^{iv}(0)&=-\frac{15}{16}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= 1-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}\,\frac{x^3}{6}-\frac{15}{16}\,\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{24}\omega_1(x)=\\ &=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{124}+\frac{x^4}{24}\omega_1(x)\end{aligned}$$

Ne segue

$$\sqrt{1-x^3}=1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^6}{6!}\omega_2(x)\,.$$

Si noti che abbiamo scritto lo sviluppo di Taylor-Peano di una funzione, relativo al punto 0, nella forma

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+\frac{\omega(x-x_0)}{n!}x^n\,,$$

ma avremmo potuto tranquillamente scrivere anche

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+\omega_1(x-x_0)\,x^n\,,$$

in quanto l'unica cosa che ci interessa è il fatto che ω sia infinitesima e le due scritture del resto differiscono solo per un fattore costante che non influisce sul fatto che ω sia infinitesima. Lo sviluppo precedente avrebbe anche potuto essere scritto come segue

$$\sqrt{1-x^3}=1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}+x^6\omega_2(x)\,,$$

senza cambiamenti di sostanza.

Per quanto riguarda il secondo quesito, osserviamo che

$$(1+x)^x=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\,.$$

Allora, tenendo anche conto di quanto appena osservato,

$$x\ln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\,\omega_3(x)\right)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+x^4\,\omega_3(x)\,.$$

Ragionando come già fatto altre volte (vedi ad esempio l'esercizio 7), troviamo poi facilmente che

$$\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}=1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+x^4\omega_4(x)\,.$$

Passiamo al calcolo del limite, osservando preventivamente che si può scrivere quanto segue.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1-x^3}-x^2}{\sin^2(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1-x^3}-x^2}{x^4}\,\frac{x^4}{\sin^2(x^2)}\,.$$

Poiché il secondo fattore tende a 1, calcoliamo solo il limite del primo, utilizzando gli sviluppi appena ottenuti e "tralasciando" gli infinitesimi di ordine superiore.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1-x^3}-x^2}{x^4}=\\ &\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{5x^4}{6}+\dots\right)-\left(1-\dfrac{x^3}{2}+\dots\right)-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{5x^4}{6}}{x^4}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Concludiamo questo esercizio con qualche ulteriore osservazione.

Lo sviluppo di Taylor della funzione $\sqrt{1-x}$ che abbiamo ricavato sopra, fa parte in realtà di un tipo di sviluppo più generale, precisamente quello di

$$(1+x)^\alpha$$

che non abbiamo trattato nella parte teorica, e che comunque si può trovare in qualunque testo di analisi.

Segnaliamo anche che l'applicazione della regola di l'Hôpital per il calcolo di questo limite porta a lunghi e noiosi calcoli, e quindi è da evitare.

È anche interessante osservare che un qualunque software di calcolo simbolico (per esempio Mathematica) è in grado di calcolare questo limite in una frazione di secondo: lo scopo di un esercizio come questo è quindi soprattutto quello di impratichirsi con il significato e l'uso degli sviluppi di Taylor e del principio di sostituzione degli infinitesimi. □

Esercizio 15. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2|x|-3}{x-1}} .$$

Risoluzione. Si tratta di una serie armonica generalizzata, che converge se e solo se l'esponente di $1/n$ è maggiore di 1.

$$\frac{2\,|x|-3}{x-1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,|x|-x-2}{x-1} > 0\,.$$

Risolviamo l'ultima disequazione distinguendo le due possibilità per il valore assoluto di x.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1}, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{-3x-2}{x-1}, & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

La prima disequazione risulta verificata per

$$0 \leq x < 1 \vee x > 2\,;$$

la seconda per

$$-\frac{2}{3} < x < 0\,.$$

Dunque le soluzioni del problema sono date dall'insieme seguente

$$\left]-\frac{2}{3}\,,\,1\right[\cup \left]2, +\infty\right[\,.$$

□

Esercizio 16. *Si determinino il dominio (naturale) e gli asintoti obliqui eventuali della funzione*

$$f(x) = |x| + \arccos\frac{1-2x^4}{1+4x^4} - 2\,.$$

Risoluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$: l'argomento dell'arccoseno è banalmente compreso tra -1 e 1. Poiché inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arccos\frac{1-2x^4}{1+4x^4} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\,,$$

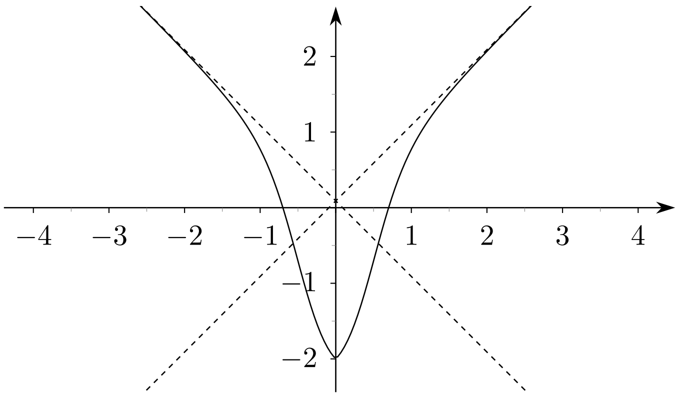
se ne deduce che la funzione data è asintotica a

$$|x| + \frac{2\pi}{3} - 2\,,$$

ovvero che ha come asintoti le due rette

$$y = \pm x + \frac{2\pi}{3} - 2\,.$$

La figura seguente illustra il grafico della funzione proposta e dei suoi due asintoti.



□

Esercizio 17. *Calcolare, usando solo la definizione di serie, la somma della serie seguente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!} - \frac{2}{(n+1)!}\right)\,.$$

Ritrovare lo stesso risultato usando poi opportunamente la serie esponenziale e le proprietà algebriche delle serie.

Risoluzione. Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{2}{1!} - \frac{2}{2!}\,;\\
s_2 &= \frac{2}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{2}{2!} - \frac{2}{3!} = \frac{2}{1!} - \frac{2}{3!}\,;\\
&\dots\\
s_n &= \frac{2}{2!} - \frac{2}{2!} + \dots + \frac{2}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} = \frac{2}{1!} - \frac{2}{(n+1)!}\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!} - \frac{2}{(n+1)!}\right) = 2\,.$$

Consideriamo ora la serie esponenziale, calcolata in corrispondenza di $x = 1$.

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,,$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1\,,$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 2\,.$$

Ne deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n!} - \frac{2}{(n+1)!} \right) = 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) = 2\left[(\mathrm{e} - 1) - (\mathrm{e} - 2) \right] = 2$$

ovvero lo stesso risultato precedentemente ottenuto. □

Esercizio 18. *Della funzione*

$$f(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{-x+1}{2}} + 2$$

calcolare $\sup f$*,* $\inf f$*, e precisare se si tratta oppure no di massimo e minimo.*

Risoluzione. Il dominio della funzione è $[0, +\infty[$. Si ha poi

$$f(0) = 2\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\ :$$

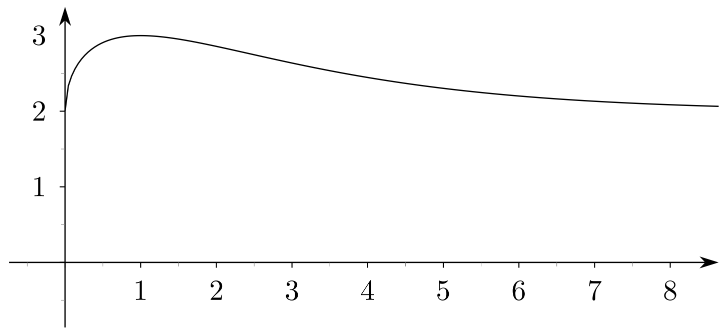
si tenga presente che si può scrivere la funzione, a parte il termine additivo 2, come rapporto di 2 infiniti, e che l'esponenziale è di ordine superiore alle potenze. Tenendo conto che la funzione non può essere minore di 2, si deduce subito che 2 è il minimo assoluto.

Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{-x+1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\frac{-x+1}{2}} (1 - x)\,.$$

La derivata è dunque positiva prima di 1 e negativa oltre 1 e, in corrispondenza di 1 la funzione assume il suo massimo assoluto, che vale 3.

La figura qui di seguito illustra il grafico di questa funzione.



□

Esercizio 19. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+n^2}{n!}\,.$$

Risoluzione. È la tipica serie a cui conviene, almeno in prima battuta, applicare il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)+(n+1)^2}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n+n^2} = \cdots = 0\,.$$

Quindi la serie converge. □

Esercizio 20. *Si dica quante soluzioni ha l'equazione*

$$-x^2 = \ln\left|\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\right|\,,$$

nell'intervallo

$$\left]-\frac{1}{2},\,1\right[\,.$$

Risoluzione. Riducendo allo stesso denominatore all'interno del logaritmo e cambiando di segno, l'equazione si può riscrivere nella forma

$$x^2 = \ln\left|\frac{(1-x)(1+2x)}{3x}\right|\,.$$

Conviene tracciare un grafico sommario delle funzioni a primo e a secondo membro. A primo membro si ha una parabola, mentre a secondo membro, denotando con f la funzione, possiamo procedere ai calcoli essenziali.

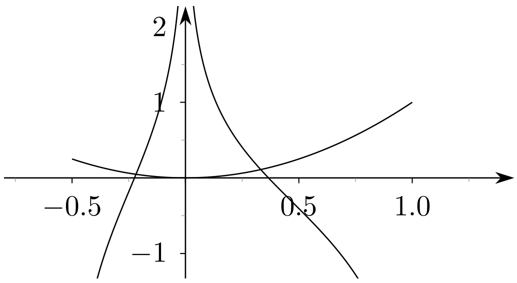
$$\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty\,,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty\,.$$

Procediamo ora al calcolo della derivata. Si ha, dopo facili calcoli,

$$f'(x) = \frac{-2x^2-1}{(1-x)(1+2x)x}\,.$$

Se ne deduce che la funzione è crescente per $x<0$, decrescente per $x>0$. Tenendo conto delle proprietà della funzione a primo membro, si può concludere che l'equazione proposta ha due soluzioni, una negativa e una positiva.

La figura seguente illustra il grafico delle funzioni presenti nei due membri.



□

Esercizio 21. *Dire per quali valori di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la successione*

$$a_n = \frac{(n^2 + \ln n)^\lambda}{n^4 + 5\sqrt{n}}$$

è infinitesima.

Risoluzione. Il denominatore della frazione è un infinito, se $\lambda < 0$ il numeratore è infinitesimo, se $\lambda = 0$ il numeratore vale costantemente 1. Dunque se $\lambda \leq 0$ la successione è sicuramente infinitesima. Esaminiamo il caso $\lambda > 0$. Ci troviamo allora con il rapporto di due infiniti. Se ne calcoliamo l'ordine rispetto all'infinitesimo campione n, otteniamo 2λ al numeratore e 4 al denominatore. La successione sarà dunque infinitesima solo se $2\lambda < 4$ ovvero $\lambda < 2$. □

Esercizio 22. *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n + 5\ln n + 7}{2^n - n^3 + \sqrt{n}}\,.$$

Risoluzione.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n + 5\ln n + 7}{2^n - n^3 + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{2^n} = \cdots = +\infty\,.$$ □

Esercizio 23. *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x\to0} \ln \frac{\operatorname{arctg}(\sin x) - \operatorname{arctg}(x^3)}{x \operatorname{arctg}(1 + \sin x)}\,.$$

Risoluzione. Occupiamoci dell'argomento della funzione logaritmo. Il fattore $\operatorname{arctg}(1 + \sin x)$ tende a $\pi/4$ quindi non crea alcun problema nel calcolo. Il numeratore è la somma di due infinitesimi, di ordine rispettivamente 1 e 3 rispetto a x. Potremo trascurare quello di ordine 3 e otteniamo

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Dunque

$$\lim_{x\to0} \ln \frac{\operatorname{arctg}(\sin x) - \operatorname{arctg}(x^3)}{x \operatorname{arctg}(1 + \sin x)} = \ln \frac{4}{\pi}\,.$$

□

Esercizio 24. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{|x|+1}}\,.$$

Si determinino $\inf(f)$, $\sup(f)$, *gli eventuali punti di non derivabilità e gli eventuali punti di flesso.*

Risoluzione. La funzione è pari. Basta considerarla per gli $x \geq 0$. Si ha quanto segue.

- $f(0) = \mathrm{e}\,.$

– $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

– $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x+1}}}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$.

– $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x+1}}}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}\left(\sqrt[3]{x+1}-2\right)$.

Se ne deduce subito che la funzione

– ha un minimo nell'origine, di valore e;
– ha estremo superiore $+\infty$;
– non è derivabile nell'origine, dove le due derivate destra e sinistra valgono $\pm \mathrm{e}/3$;
– ha flessi nei punti di ascissa ± 7.

$\square$

Esercizio 25. *Per i vari valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ calcolare l'ordine dell'infinitesimo per $x \to 0$*

$$3\sin^2 x - 3x^2 + \lambda x^4$$

rispetto all'infinitesimo campione x.

Risoluzione. Gli infinitesimi $3\sin^2 x$ e $3x^2$ sono dello stesso ordine (2), quindi la loro somma ha ordine maggiore o uguale a 2. Calcoliamo quest'ordine. Si può osservare che

$$3\sin^2 x - 3x^2 = 3(\sin x + x)(\sin x - x) \ :$$

si è così ottenuto il prodotto di due infinitesimi di ordine 1 e 3 rispettivamente, per cui l'infinitesimo ha ordine 4 e non sarà possibile trascurare alcunché con il principio di sostituzione degli infinitesimi. Ovviamente se $\lambda = 0$ l'infinitesimo proposto è di ordine 4, se $\lambda \neq 0$ è di ordine maggiore o uguale a 4 e possiamo procedere in vari modi. Applichiamo la formula di Taylor-Peano alla funzione seno e otteniamo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\omega(x).$$

Dunque

$$\begin{aligned}3(\sin x - x)(\sin x + x) &= 3\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\omega(x)\right)\left(2x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\omega(x)\right) = \\ &= 3\left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^6}{60} + x^6\omega_1(x)\right) = -x^4 + \frac{2}{15}x^6 + x^6\omega_2(x).\end{aligned}$$

Questo ci permette di concludere subito che se $\lambda = 1$ l'infinitesimo è di ordine 6, altrimenti è di ordine 4.

Tenendo conto di queste conclusioni possiamo osservare che l'uso "indiscriminato" della regola di l'Hôpital avrebbe richiesto ben 6 derivazioni. $\square$

Esercizio 26. *Qual è l'equazione della retta tangente al grafico della funzione*

$$f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x + 1$$

nel suo punto $P(0,1)$?

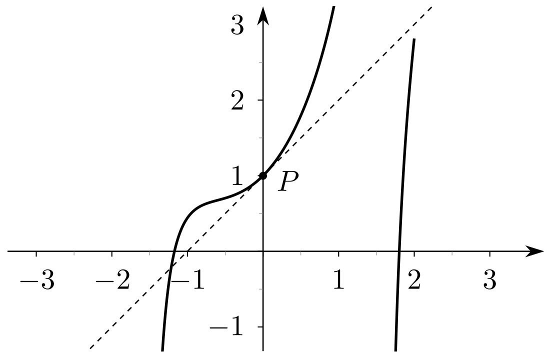
Il grafico di f si trova sopra o sotto tale retta nell'intorno del punto P?

Risoluzione.

$$f'(x) = 2x + 1\,\mathrm{tg}^2\,x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1 \text{ (retta tangente)}.$$

$$f''(x) = 2 + 2\,\mathrm{tg}\,x(1 + \mathrm{tg}^2\,x) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad f \text{ è localmente convessa}.$$

Grafico sommario nei pressi dell'origine.



□

Esercizio 27. *Trovare il dominio della funzione*

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2+1}\right).$$

Esiste qualche $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty?$$

Ci sono asintoti al grafico di f? La f è ovunque crescente nel dominio?

Esercizio 28. *Distinguendo i casi $a \le 0$ e $a > 0$ si calcoli il*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(2\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-x}\right) - x.$$

Esercizio 29. *Determinare per quali valori di a, $b \in \mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{ax+b}$$

ha un estremo relativo nel punto $A\,(3/2\,,\,27/4)$; successivamente tracciarne un grafico sommario.

Esercizio 30. *Trovare il dominio naturale della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\,.$$

Trovare poi l'ordine dell'infinitesimo $f(x)$, per $x \to 0$, rispetto a x.

Esercizio 31. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3+1}+n}\,.$$

Risoluzione. Si tratta di un esercizio standard che proponiamo per mostrare il tipo di ragionamenti che si possono usare in situazioni come questa.

Una delle strategie più comuni per decidere se una serie (a termini positivi) è convergente o divergente è quella di valutare l'ordine di infinitesimo del suo termine generale rispetto al campione $1/n$, strategia che si basa sostanzialmente sulle proprietà della serie armonica generalizzata. Precisamente sappiamo che una serie (a termini positivi) converge se il suo termine generale è un infinitesimo di ordine $\alpha \geq 1$ o di ordine maggiore o uguale a $\beta > 1$, non converge se è un infinitesimo di ordine minore o uguale a 1. Attenzione: per la convergenza *non* è sufficiente che l'infinitesimo sia di ordine maggiore di 1; per esempio la serie di termine generale $1/n\ln n$ è infinitesima di ordine maggiore di 1, ma non converge.

Per applicare con profitto questo criterio occorre saper valutare con una certa sicurezza l'ordine di infinitesimo (rispetto al campione standard $1/n$) almeno in situazioni semplici. Per questo ricordiamo, con un linguaggio volutamente semplificato al massimo, alcune proprietà legate agli ordini di infinito o infinitesimo. Il lettore farà bene a dimostrarle per esercizio. Nell'elenco delle proprietà intendiamo che i campioni per infiniti e infinitesimi siano uno il reciproco dell'altro[(1)].

- Il reciproco di un infinito di ordine α è un infinitesimo di ordine α e, viceversa, il reciproco di un infinitesimo di ordine α è un infinito di ordine α.
- La somma di
  - *due* infiniti di ordine diverso ha l'ordine del maggiore;
  - *due* infinitesimi di ordine diverso ha l'ordine del minore.
- La somma di due infiniti o infinitesimi dello stesso ordine va trattata con estrema cautela. Precisamente:
  - la somma di due infiniti dello stesso ordine può anche non essere infinita e, nel caso sia infinita, ha ordine minore o uguale all'ordine comune;
  - la somma di due infinitesimi dello stesso ordine ha ordine maggiore o uguale all'ordine comune.
- Il prodotto di due infiniti o infinitesimi ha ordine uguale alla somma degli ordini.
- Il quoziente di due infiniti o infinitesimi dello stesso ordine non è infinito né infinitesimo.
- Il quoziente di due infiniti di ordine α e β diversi
  - è un infinito di ordine $\alpha-\beta$ se $\alpha > \beta$;
  - è un infinitesimo di ordine $\beta-\alpha$ se $\alpha < \beta$.
- Il quoziente di due infinitesimi di ordine α e β diversi
  - è un infinitesimo di ordine $\alpha-\beta$ se $\alpha > \beta$;
  - è un infinito di ordine $\beta-\alpha$ se $\alpha < \beta$.
- Il prodotto tra un infinito di ordine α e un infinitesimo di ordine β
  - è un infinito di ordine $\alpha-\beta$ se $\alpha > \beta$;
  - è un infinitesimo di ordine $\beta-\alpha$ se $\alpha < \beta$;

[1] Nel caso delle serie, a cui siamo qui interessati, n per gli infiniti e $1/n$ per gli infinitesimi.

– nè infinito né infinitesimo se $\alpha = \beta$.

Alcune situazioni frequenti (i campioni sono quelli standard già citati).

– e^n è un infinito di ordine maggiore di α, per ogni α, e quindi e^{-n} è un infinitesimo di ordine maggiore di α, per ogni α.
– $\ln n$ è un infinito di ordine minore di α, per ogni α, e quindi $1/\ln n$ è un infinitesimo di minore di α, per ogni α.
– $\sin(1/n)$, $\mathrm{tg}(1/n)$, $\mathrm{arctg}(1/n)$ sono infinitesimi di ordine 1.
– Con la sostituzione si $1/n$ al posto di x, l'uso della formula di Taylor-Peano, di punto iniziale 0, aiuta a valutare l'ordine di infinitesimo in alcuni casi comuni. Per esempio, essendo

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^3 \omega x\,,$$

si deduce che $\sin x - x$ è infinitesima di ordine 3 (per $x \to 0$ e rispetto al campione standard x). Ne segue che

$$\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

è infinitesima di ordine 3 e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

è una serie, a termini tutti negativi, convergente.

Ritornando all'esercizio proposto, si può ora concludere facilmente che il termine generale della serie è un rapporto di due infiniti, di ordine $1/2$ e $3/2$, quindi è un infinitesimo di ordine 1, per cui non converge. □

Esercizio 32. *Sapendo che*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}\,.$$

Risoluzione. Si può decomporre il termine generale della serie in fratti semplici:

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2}\,.$$

Si ha poi

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2} = \frac{An^2 + 2An + A + Bn^2 + Bn + Cn}{n(n+1)^2}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}\,.$$

Quindi

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

Calcoliamo le somme parziali:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \\
s_2 &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) \\
s_3 &= \cdots = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) \\
&\dots \\
s_n &= \cdots = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\lim_n s_n = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}\,.$$

□

Esercizio 33. *Data la funzione*

$$f_a(x) = \sqrt{x^2 + ax + 1} + x\,,$$

si determini $a \in \mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione abbia un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, passante per il punto $P(1,1)$. Si dica poi per quali a la funzione risulta convessa. Per i valori di a per cui la funzione non risulta convessa, che cosa si può dire riguardo alla convessità?

Risoluzione. La funzione ha, banalmente, limite $+\infty$ a $+\infty$. Dopichè:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2\,,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} = \frac{a}{2}\,.$$

La funzione ha dunque, per ogni a, per asintoto la retta

$$y = 2x + \frac{a}{2}\,,$$

e l'asintoto passerà per il punto $(1,1)$ se $a = -2$.

Per rispondere alla seconda parte cominciamo a calcolare la derivata seconda della funzione, nei punti in cui ciò e possibile (cioè dove il radicando della radice quadrata non si annulla).

$$f_a'(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax + 1}} + 1\,, \quad f_a''(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2 + ax + 1})^2}\frac{4 - a^2}{2\sqrt{x^2 + ax + 1}}\,.$$

Se ne deduce che la derivata seconda è strettamente positiva se $-2 < a < 2$ e, per questi valori di a la funzione ha come dominio $\mathbb{R}$, che è un intervallo, ed è sempre derivabile. Se $a = \pm 2$ la funzione si semplifica, rispettivamente, in

$$f_2(x) = |x+1| + x = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -1, & \text{se } x < -1 \end{cases},$$

$$f_{-2}(x) = |x-1| + x = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Si tratta in entrambi i casi di funzioni convesse, prive di derivate in corrispondenza di -1 e 1 rispettivamente: il grafico è sempre costituito da due semirette con origine nel punto di ascissa -1 e 1 rispettivamente.

Per i valori di a esterni all'intervallo $[-2, 2]$ la derivata seconda (dove esiste) risulta negativa e inoltre, dette $x_1 < x_2$ le radici (che risultano distinte) del polinomio $x^2 + ax + 1$, la funzione ha come dominio

$$]-\infty\,, x_1[\,\cup\,]x_2\,, +\infty[\,,$$

e quindi risulta concava in ciascuno dei due sottointervalli del dominio. □

Esercizio 34. *Data la funzione*

$$f_{a,b}(x) = 2\,\mathrm{arctg}\, x - ax^2 + bx + 1\,,$$

si determini il polinomio di Taylor del 3° ordine relativo a $f_{a,b}$. Detto $P_{a,b}$ tale polinomio si determini, se possibile, la coppia (a, b) in modo che $P_{a,b}$ abbia 1 come zero doppio.

Risoluzione. Si potrebbe procedere con le derivate successive di della funzione f; possiamo però anche usare il polinomio già noto relativo alla funzione $\mathrm{arctg}(x)$.

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\omega(x)\,, \quad \Rightarrow 2\,\mathrm{arctg}(x) = 2x - \frac{2x^3}{3} + x^3\omega_1(x)\,.$$

Da qui si deduce che il polinomio richiesto per la funzione $f_{a,b}$ è il seguente:

$$P_{a,b}(x) = 1 + (2+b)x - ax^2 - \frac{2x^3}{3}\,.$$

Affinchè questo polinomio abbia 1 come radice doppia deve essere $P_{a,b}(1) = P'_{a,b}(1) = 0$. Si ha

$$P'_{a,b}(x) = 2 + b - 2ax - 2x^2\,.$$

Dunque

$$P_{a,b}(1) = 1 + (2+b) - a - \frac{2}{3} \quad P'_{a,b}(1) = 2 + b - 2a - 2\,,$$

da cui

$$\begin{cases} 1 + (2+b) - a - \dfrac{2}{3} = 0 \\ 2 + b - 2a - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a, b) = \left(-\frac{7}{3}\,, -\frac{14}{3}\right)\,.$$

□

Esercizio 35. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)!}$$

è convergente e successivamente calcolarne la somma confrontandola opportunamente con la serie esponenziale.

Risoluzione. La convergenza segue subito dal criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mathrm{e}^n}{n!} \frac{(n-1)!}{\mathrm{e}^{n-1}} = \frac{\mathrm{e}}{n} \to 0\,.$$

La serie esponenziale è:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

La serie proposta nel problema è:

$$1 + \frac{e}{1!} + \frac{e^2}{2!} + \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} + \dots$$

Ne segue facilmente che si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}\,.$$

□

Esercizio 36. *Calcolare il*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\left(\frac{2-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \exp\left(\frac{\ln\dfrac{2-\cos x}{1+x}}{\operatorname{tg} x}\right) = \exp\left(\frac{\ln(2-\cos x)}{\operatorname{tg} x} - \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}\right)\,.$$

Calcoliamo il limite dei due addendi dell'esponente (argomento di exp).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{x} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0\,,$$

perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{x} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2-\cos x} = 0\,.$$

Si poteva anche fare quest'ultimo limite solo con i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+(1-\cos x))}{1-\cos x} \frac{1-\cos x}{x^2} x = 1 \times \frac{1}{2} \times 0 = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 \times 1 = 1\,.$$

Si conclude che il limite proposto vale

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

□

Esercizio 37. *Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{n} + n^k\right) \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\,.$$

Risoluzione. Cominciamo con l'osservare che la serie è a termini positivi e che

$$1 - \cos\frac{1}{n}$$

è un infinitesimo di ordine 2[2], mentre $\sqrt[3]{n}$ è un infinito di ordine $1/3$. Il termine n^k è:

- un infinitesimo, se $k < 0$;
- vale 1 se $k = 0$;
- un infinito di ordine k, se $k > 0$.

Si può concludere come segue.

- Se $k \le 1/3$, il fattore $\sqrt[3]{n} + n^k$ è un infinito di ordine $1/3$ e dunque il termine generale è un infinitesimo di ordine $2 - 1/3 = 5/3$ e la serie converge.
- Se $1/3 < k < 2$, il fattore $\sqrt[3]{n} + n^k$ è un infinito di ordine k e dunque il termine generale è un infinitesimo di ordine $2 - k$. Pertanto la serie converge se $2 - k > 1$, ovvero $k < 1$, diverge se $2 - k \le 1$, ovvero $k \ge 1$.
- Se $k \ge 2$ il termine generale non è infinitesimo, quindi la serie diverge.

□

Esercizio 38. *Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)\,.$$

Esercizio 39. *Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^k + \sqrt{n}\right) \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)\,.$$

Esercizio 40. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \textit{se } x \ne 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \textit{se } x = 0 \end{cases}\,,$$

dimostrare che f è derivabile in 0 e calcolare $f'(0)$.

[2] Come più volte ricordato, se non si precisa il campione di infinitesimi, si intende che esso sia quello "naturale", in questo caso $1/n$.

Risoluzione. Intanto la funzione è continua (il limite coinvolto è un limite notevole). Poi si può aplicare la definizione di derivata:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos x}{x^2}-\dfrac{1}{2}}{x}=\cdots=0\,,$$

risultato che si può ottenere, per esempio, con la regola di l'Hôpital, o con gli sviluppi di Taylor.

Vista la continuità della funzione si sarebbe anche potuto procedere con il teorema sul limite della derivata, prestando però attenzione al fatto che quel teorema fornisce solo una condizione sufficiente: se il limite della derivata esiste finito, allora la funzione è derivabile e la derivata coincide con il limite della derivata, altrimenti il teorema non funziona. □

Esercizio 41. *Usando opportunamente la serie geometrica e la sua derivata, calcolare, per* $|x|<1$*,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\,.$$

Risoluzione. La serie geometrica, convergente per $|x|<1$, è:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots$$

La sua serie derivata è quindi (con lo stesso raggio di convergenza):

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots$$

Per la serie proposta dal problema si ha dunque quanto segue:

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=x(1+2x+3x^2+4x^3+\dots)=\frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

□

Esercizio 42. *Detta* $f(x)$ *la somma della serie geometrica (*$|x|<1$*)*

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\,,$$

si trovi lo sviluppo in serie di $f'(x)+xf''(x)$ *e si usi questo sviluppo per trovare la somma della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\,;$$

e

$$xf''(x)=x\,\frac{2}{(1-x)^3}=x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-1}\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3} &= f'(x)+xf''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1}= \\ &= 1+\sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-1}+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1}=1+\sum_{n=2}^{+\infty} n^2x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}\,.\end{aligned}$$

A questo punto il calcolo della somma della serie numerica proposta dal testo è immediata, in quanto corrisponde allo sviluppo che abbiamo appena calcolato, valutato per $x = 1/2$ (valore che è interno all'intervallo di convergenza). Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2\,\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=12\,.$$

□

Esercizio 43. *Se $z = x + \mathrm{i}y$ è un numero complesso, risolvere l'equazione*

$$z^2+(1+2\mathrm{i})z+\mathrm{i}+y=0\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$x^2+2x\mathrm{i}y-y^2+x+\mathrm{i}y+2\mathrm{i}x-2y+i-y=0\,,$$

da cui

$$\begin{cases} x^2-y^2+x-y=0 \\ 2xy+y+2x+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+1)=0 \\ 2xy+y+2x+1=0\end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} z_1=-1-\mathrm{i} \\ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ z_3=-\mathrm{i}\end{cases}$$

□

Esercizio 44. *Verificare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}+|\sin n|}{n^4+n}$$

è convergente.

Esercizio 45. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,.$$

Esercizio 46. *Sviluppare con la formula di Taylor, con centro in* 0 *e fino al terzo ordine, la funzione*

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

Utilizzare lo sviluppo ottenuto per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x} - \mathrm{e}}{x \sin x}.$$

Risoluzione. Si ha

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\omega(t),$$

da cui

$$\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \ln\left[1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right] =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + \dots\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \dots\right) + \dots = x - \frac{x^3}{6} + x^3\omega_1(x).$$

Si ha poi

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x} - \mathrm{e} = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x}\right) - \mathrm{e} =$$
$$= \mathrm{e}\left(\exp\left(\frac{\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{x} - 1\right) - 1\right) =$$
$$= \mathrm{e}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{6} + x^2\omega_1(x)\right) - 1\right).$$

Ne segue che il limite richiesto si può calcolare come segue.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x} - \mathrm{e}}{x \sin x} =$$
$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}\, \frac{\left(\exp\left(-\dfrac{x^2}{6} + x^2\omega_1(x)\right) - 1\right)}{-\dfrac{x^2}{6} + x^2\omega_1(x)}\, \frac{-\dfrac{x^2}{6} + x^2\omega_1(x)}{x^2}\, \frac{x}{\sin x} = \mathrm{e} \times 1 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times 1 = -\frac{\mathrm{e}}{6}$$

□

Esercizio 47. *Calcolare l'estremo superiore della funzione*

$$f(x) = \frac{x+2}{x+4}\cos^4 x,$$

nell'intervallo $[0, +\infty[$.

Risoluzione. Si può osservare che nell'intervallo $[0, +\infty[$ la funzione

$$g(x) = \frac{x+2}{x+4}$$

è sempre positiva e tende, crescendo, a 1. La funzione $h(x) = \cos^4 x$ è ovviamente compresa tra 0 e 1 e dunque anche la funzione f è compresa tra 0 e 1. Inoltre la restrizione di f ai punti dove h vale 1 (cioè dove il coseno vale 1 o -1) coincide con la funzione g ristretta allo stesso insieme. Questo basta per concludere che l'estremo superiore della funzione richiesta è 1 (che non è massimo assoluto). □

Esercizio 48. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{2n+4} - 2\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n} \right) .$$

Risoluzione. Scriviamo per esteso la somma s_n (ridotta n-esima), incolonnando i termini.

$$\begin{array}{cccc}
s_n = & \sqrt{6} & \boxed{-2\sqrt{4}} & +\boxed{\sqrt{2}} \\
 & +\sqrt{8} & -2\sqrt{6} & +\boxed{\sqrt{4}} \\
 & +\sqrt{10} & -2\sqrt{8} & +\sqrt{6} \\
 & +\sqrt{12} & -2\sqrt{10} & +\sqrt{8} \\
 & \dots & & \\
 & +\sqrt{2n-2} & -2\sqrt{2n-4} & +\sqrt{2n-6} \\
 & +\sqrt{2n} & -2\sqrt{2n-2} & +\sqrt{2n-4} \\
 & \boxed{+\sqrt{2n+2}} & -2\sqrt{2n} & +\sqrt{2n-2} \\
 & \boxed{+\sqrt{2n+4}} & \boxed{-2\sqrt{2n+2}} & +\sqrt{2n}
\end{array}$$

Si può constatare facilmente che "sopravvivono" solo i termini riquadrati, da cui si ottiene

$$s_n = \sqrt{2} - \sqrt{4} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2n-2} \to \sqrt{2} - 2 ,$$

che è la somma richiesta. □

Esercizio 49. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} \right) .$$

Esercizio 50. *Applicare le formule dei radicali doppi per determinare in quale intervallo di $\mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x) = \sqrt{3x + \sqrt{6x-1}} + \sqrt{3x - \sqrt{6x-1}}$$

è costante.

Esercizio 51. *Calcolare*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-n}\,.$$

Risoluzione. Si tratta di una serie geometrica di ragione $-1/e$. □

Esercizio 52. *Determinare il raggio R di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Discutere la convergenza della serie per $x=\pm R$. Detta f la somma della serie di potenze, calcolare, in $]-R,R[$, $f'(x)$ e dedurne successivamente il valore di f sempre in $]-R,R[$.

Risoluzione. Si può applicare il criterio del rapporto.

$$\lim_n = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\,\frac{2n+1}{x^{2n+1}} = \cdots = x^2\,.$$

La serie converge allora se $x^2<1$, ovvero $-1<x<1$. Il raggio di convergenza è 1. La serie converge poi anche in ± 1 per il criterio di Leibniz sulle serie a segno alterno.

Calcoliamo ora la derivata, utilizzando il teorema di derivazione per serie, in $]-1,1[$ (attenzione il teorema è applicabile solo all'interno dell'intervallo di convergenza e per questo la richiesta si limita all'intervallo aperto). Si ha

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Se ne deduce, per il teorema di integrazione per serie, che

$$f(x)=\operatorname{arctg}x\,.$$

□

Esercizio 53. *Utilizzando opportunamente gli sviluppi di Taylor di punto iniziale* 0 *trovare l'ordine del seguente infinitesimo, per $x\to 0$*

$$e^x + a\sin x - 1\,,\qquad a\in\mathbb{R}\,,$$

mostrando anche che lo stesso infinitesimo ha segno costante in un opportuno intorno di 0*. Utilizzare il risultato ottenuto per determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{1/n}+a\sin\frac{1}{n}-1\right)\,,\qquad a\in\mathbb{R}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\begin{aligned} e^x + a\sin x - 1 &= x+\frac{x^2}{2}+x^2\omega(x)+ax-\frac{ax^3}{6}+ax^3\omega_1(x) = \\ &= (1+a)x+\frac{x^2}{2}+x^2\omega_2(x)\,. \end{aligned}$$

Da qui si deduce che se $a \neq -1$ l'infinitesimo è di ordine 1 ed è positivo o negativo in un opportuno intorno di 0 (il termine $(1+a)x$ "predomina" sugli altri), se invece $a=-1$ l'infinitesimo è di ordine 2.

Per quanto riguarda la serie si può concludere che essa diverge se $a \neq -1$, converge se $a=-1$. □

Esercizio 54. *Calcolare le radici cubiche del numero complesso*

$$z = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{-3}$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Risoluzione. Si ha

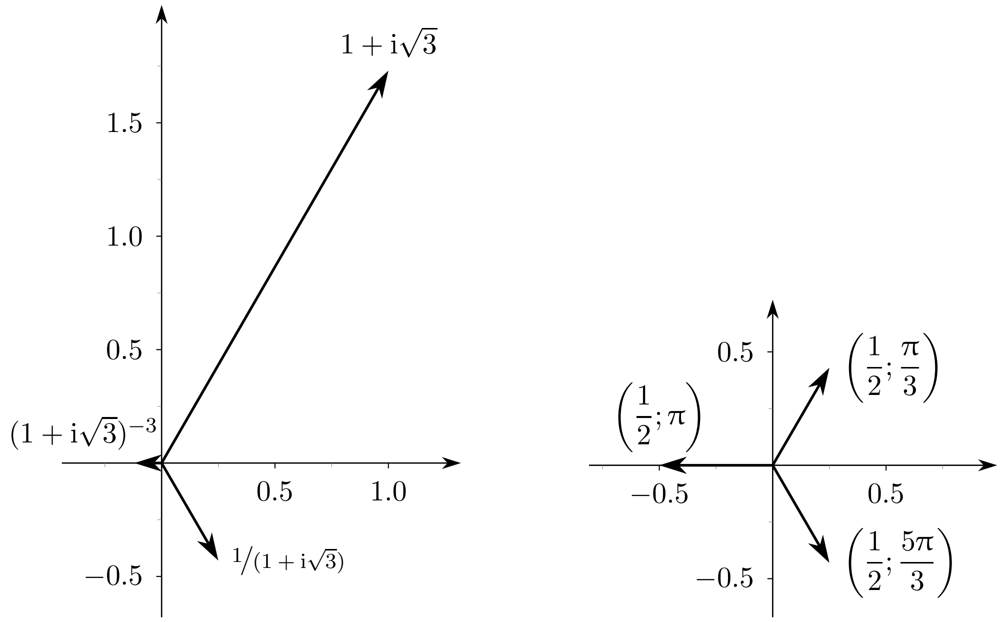
$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \left(2; \frac{\pi}{3}\right),$$

da cui

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{-3} = \left(\frac{1}{8}; -\pi\right) = \left(\frac{1}{8}; \pi\right).$$

Le radici terze richieste sono allora le seguenti.

$$\left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}; \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \middle| \; k = 0,\, 1,\, 2 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{1}{2}; \pi\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{3}\right) \right\}.$$



Si presti attenzione al fatto che mentre nei reali

$$\sqrt[3]{x^{-3}} = x^{-1},$$

la cosa non è vera nei complessi, in quanto le radici cubiche di un complesso sono sempre 3, tra di loro distinte, qualunque sia il complesso. È naturalmente vero, come mostra anche la soluzione dell'esercizio proposto, che *una* delle radici cubiche di z^{-3} è z^{-1}. Sfruttando poi le note proprietà delle radici di un complesso si sarebbero potute trovare immediatamente le altre due radici semplicemente ruotando z^{-1} di $2\pi/3$ e poi ancora di $2\pi/3$, come risulta del resto evidente dalla soluzione trovata per via diretta. È, tra l'altro, anche per questo che, nei complessi, non è conveniente usare per le radici lo stesso simbolo usato nei reali, in quanto questo può portare a confusione[(3)]. □

Esercizio 55. *Utilizzare gli sviluppi di Taylor per valutare l'ordine dell'infinitesimo*

$$f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$$

per $x \to 0$ e per determinarne segno in un opportuno intorno di zero. Utilizzare il risultato ottenuto per discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{n^a} - \operatorname{tg} \frac{1}{n^a} \right), \qquad a \in \mathbb{R},\, a > 0.$$

Esercizio 56. *Tenendo presente la serie esponenziale, calcolare*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

Risoluzione. Basta osservare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}.$$

□

Esercizio 57. *Data la funzione*

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^7 + 4x^3 + x + 6,$$

dimostrare che è invertibile e, detta g l'inversa, calcolare $g'(0)$. Calcolare poi

$$\lim_{y \to +\infty} g\big(\mathrm{e}^{-y}\big).$$

Risoluzione. Per la prima parte osservare che $f(-1) = \dots$. Per la seconda parte osservare che le ipotesi di regolarità consentono di scrivere

$$\lim_{y \to +\infty} g\big(\mathrm{e}^{-y}\big) = g(0) = \dots$$

□

Esercizio 58. *Dire per quali valori dei parametri reali a, b la funzione f definita da*

$$f(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^x, & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{bx-1}}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$.

[3] Naturalmente non tutti sono d'accordo su questo: prestare la massima attenzione nella lettura dei testi.

Esercizio 59. *Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme dei complessi z tali che*

$$1 \leq |z + \mathrm{i} + 1| \leq \sqrt{2}\,.$$

Risoluzione. Si può osservare che $|z + \mathrm{i} + 1|$ rappresenta la distanza tra i numeri z e $-1-\mathrm{i}$. L'insieme in questione è dunque costituito da tutti i punti del piano di Gauss che hanno distanza da $(-1, -1)$ compresa tra 1 e $\sqrt{2}$, ovvero dalla corona circolare di centro $(-1, -1)$ e raggi interno 1 ed esterno $\sqrt{2}$.

Volendo eseguire tutti i calcoli con la formula algebrica si può porre $z = x+iy$ e osservare che

$$|z + \mathrm{i} + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 1)^2}\,,$$

ottenendo naturalmente lo stesso risultato di prima. □

Esercizio 60. *Calcolare le radici quarte di*

$$z = (\mathrm{i} - 1)^{12}\,.$$

Risoluzione. Si può calcolare prima la potenza dodicesima di $\mathrm{i} - 1$ e poi le quattro radici quarte, oppure calcolare

$$z_1 = (\mathrm{i} - 1)^3\,,$$

che è *una* delle radici quarte cercate, e poi tenere conto che le quattro radici quarte sono i vertici del quadrato inscritto nella circonferenza di centro l'origine e passante per z_1, quadrato che ha un vertice in z_1, ovvero che le altre tre radici quarte si ottengono ruotando z_1 di $\pi/2$, π, $3\pi/2$. □

Esercizio 61. *Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x) = x^{1-x}x^{1+x}\,.$$

Risoluzione. Dopo averne trovato il dominio ($x \geq 0$), si può scrivere la funzione come...
□

Esercizio 62. *Trovare, se esistono, i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che le due funzioni*

$$f(x) = \lambda \ln x \quad e \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$$

siano tangenti in un punto.

Risoluzione. Affinche le due funzioni siano tangenti in un punto, di cui indichiamo con c l'ascissa, occorre che

$$\begin{cases} f(c) = g(c) \\ f'(c) = g'(c) \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{cases} \lambda \ln c = \sqrt[5]{c} \\ \dfrac{\lambda}{c} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{c^4}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{c}{5\sqrt[5]{c^4}} = \dfrac{\sqrt[5]{c}}{5} \\ \dfrac{\sqrt[5]{c}}{5} \ln c = \sqrt[5]{c} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\mathrm{e}}{5} \\ c = \mathrm{e}^5 \end{cases}.$$

□

Esercizio 63. *Risolvere, in $\mathbb{C}$, l'equazione*

$$|z|^2 - z^2 - 2\mathrm{i}z = 0\,,$$

usando la forma algebrica dei complessi.

Risoluzione. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, si trova

$$x^2 + y^2 - (x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 2\mathrm{i}x + 2y) = 0\,.$$

Riordinando ed uguagliando a zero la parte reale e quella immaginaria si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite, con le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ (cioè } x \text{ qualunque} \\ y = -1 \end{cases}.$$

□

Esercizio 64. *Verificare che per ogni numero complesso z si ha $|z|^4 = z^2\overline{z}^2$. Utilizzare questo risultato per risolvere l'equazione*

$$(1-\mathrm{i})z^5\,|z|^4 - \mathrm{i}\overline{z}^2 = 0\,,$$

dove è richiesta la forma trigonometrica delle soluzioni.

Risoluzione. Si ha intanto, raccogliendo, $\overline{z}^2 = 0$, da cui $z = 0$ e successivamente

$$(1-\mathrm{i})z^7 - \mathrm{i} = 0\,.$$

Basterà dunque trovare le 7 radici settime di... □

Esercizio 65. *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) = x(1 + \ln^2|x|)\,,$$

determinando in particolare gli intervalli ove f è concava e quelli ove è convessa. Dire se la funzione può essere prolungata per continuità in 0 *e se la funzione così ottenuta è derivabile in* 0*.*

Risoluzione. Si tratta di una funzione dispari. Le derivate prima e seconda in $\mathbb{R}^+$ sono

$$f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 1\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1)\,.$$

La funzione è prolungabile per continuità in 0, ma la funzione prolungata non è derivabile in 0. □

Esercizio 66. *Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\mathrm{e}^x - \lambda x)}{\ln(\cos x)}\,.$$

Risoluzione. Poiché la derivata della funzione logaritmo è particolarmente semplice, conviene applicare, almeno una volta la regola di l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \lambda}{\mathrm{e}^x - \lambda x} \frac{-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \lambda}{\mathrm{e}^x - \lambda x} \frac{1}{x} \frac{x}{\sin x} (-\cos x) = \dots$$

Il limite vale -1 se $\lambda = 1$, altrimenti... □

Esercizio 67. *Calcolare, al variare di* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2\mathrm{e}^{x^2} - \lambda x^2) - \ln 2}{x \operatorname{tg} x}.$$

Risoluzione. Trasformare preventivamente in

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2\mathrm{e}^{x^2} - \lambda x^2) - \ln 2}{x^2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$$

e poi applicare l'Hôpital al primo fattore. □

Esercizio 68. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log_3(1-\sqrt{x})} \right)^n.$$

Risoluzione. Si tratta di una serie... □

Esercizio 69. *Provare che la funzione*

$$g(x) = \frac{\ln x}{2x}$$

è decrescente in $[\mathrm{e}, +\infty]$. *Utilizzare questo risultato per provare che anche la funzione*

$$f(x) = x^{1/(2x)} \sin \frac{1}{x^2}$$

è decrescente nello stesso intervallo.

Risoluzione. La decrescenza di g si prova facilmente calcolando la derivata prima. Successivamente si può vedere la funzione f come il prodotto tra le funzioni

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\ln x/(2x)} \quad \text{e} \quad f_2(x) = \sin \frac{1}{x^2},$$

entrambe decrescenti in $[\mathrm{e}, +\infty]$ perché composte di funzioni una crescente e una decrescente. Sia f_1 che f_2 sono inoltre positive, naturalmente in $[\mathrm{e}, +\infty]$, dal che si deduce subito che anche f è decrescente. □

Esercizio 70. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\ln(1-\sqrt{x}) - 1}.$$

Se ne determini il dominio e successivamente, pensandola opportunamente come funzione composta, si trovino gli estremi superiore e inferiore, precisando anche se si tratta di massimo o minimo.

Risoluzione. Il dominio è chiaramente $[0, 1[$. Dopodiché la funzione può essere vista come la composta di

$$h(t) = \frac{t}{t-1}\,, \quad \text{e} \quad g(x) = \ln(1 - \sqrt{x})\,.$$

La prima è chiaramente decrescente in $[0, 1[$ (si può, per esempio, farne la derivata), la seconda anche, perché composta tra una funzione crescente e una decrescente. Se ne deduce che f, come composta tra due funzioni decrescenti, è crescente. Si ha ora facilmente

$$\inf(f) = \min(f) = 0\,, \qquad \sup(f) = 1\,.$$

□

Esercizio 71. *calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{e^{x^4} - 1}\,.$$

Risoluzione. Conviene eseguire la trasformazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{e^{x^4} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{x^4} \, \frac{x^4}{e^{x^4} - 1}\,,$$

dopodiché si può calcolare il limite del primo fattore con la regola di l'Hôpital[4]. Il limite vale $1/4$. □

Esercizio 72. *Utilizzando opportunamente la serie geometrica e la sua serie derivata, calcolare lo sviluppo in serie di*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Successivamente dire per quali x reali converge assolutamente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^n$$

e, per i valori trovati di x, calcolarne la somma.

Risoluzione. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,,$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per x si ottiene

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

[4] Naturalmente si potevano anche usare gli sviluppi di Taylor, ma in un caso come questo la regola di l'Hôpital non complica troppo la vita.

Per la convergenza assoluta della serie proposta basta applicare il criterio del rapporto per concludere che la serie converge assolutamente per $x > 1/2$ (si può anche provare che questo è anche l'insieme di convergenza non assoluta). Per questi x la somma si calcola subito sostituendo $(x-2)/(x+1)$ al posto di x nella somma trovata precedentemente. Si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^n = \frac{(x-2)(x+1)}{9}\,.$$

□

Esercizio 73. *Risolvere nei complessi l'equazione*

$$z - \frac{4}{\mathrm{i}z} - 202\mathrm{i}\,.$$

Esercizio 74. *Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ il*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x+4}\right)^{\dfrac{x^2-1}{x}}\,.$$

Risoluzione. Il limite è banalmente 1 se $a = 4$ (non si ha una forma di indecisione). Se $a \neq 4$ tra i vari modi di procedere conviene il seguente:

$$\frac{x+a}{x+4} = \frac{x+4-4+a}{x+4} = 1 + \frac{a-4}{x+4}\,.$$

Si può poi scrivere

$$\left(\frac{x+a}{x+4}\right)^{\dfrac{x^2-1}{x}} = \left(\left(1+\frac{a-4}{x+4}\right)^{\dfrac{x+4}{a-4}}\right)^{\left(\dfrac{a-4}{x+4}\dfrac{x^2-1}{x}\right)}\,.$$

Il limite proposto vale e$a - 4$. □

Esercizio 75. *Fissato $\lambda > 0$, si consideri la funzione*

$$f_\lambda(x) = \lambda \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

Si dimostri che, per ogni $\lambda > 0$, la funzione è invertibile in un opportuno intorno dell'origine e si indichi con g l'inversa di f_λ ristretta a questo intorno. Constatato poi che $f_\lambda(0) = 1$, si calcoli $g'(1)$.

Risoluzione. la funzione è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ e si ha, nei punti interni dell'intervallo,

$$f'_\lambda(x) = \frac{\lambda - x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Questa derivata è positiva per $x < \lambda$, negativa per $x > \lambda$. Considerato che $\lambda > 0$ e che la funzione è definita in $[-1, 1]$, se ne deduce che la funzione ha derivata positiva in

– $[-1, \lambda[$ se $\lambda < 1$,

- $[-1, 1]$ se $\lambda \geq 1$.

Dunque la funzione è invertibile in un intorno di 0. La regola di derivazione delle funzioni inverse fornisce subito la derivata richiesta:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\lambda}\,.$$

□