Osservazioni su infinitesimi e infiniti

Ordine rispetto a un campione

Richiamiamo la definizione di ordine di un infinitesimo o di un infinito rispetto a un campione.

Definizione 1. *Siano f e g due infinitesimi o due infiniti simultanei in un punto x_0. Se esiste $\alpha > 0$ tale che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = l > 0\,, \tag{1}$$

si dice che f ha ordine α rispetto a g. L'infinito o infinitesimo g si dice anche un campione.

Naturalmente l'ordine di un infinitesimo o infinito dipende dal campione scelto. Per esempio la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ è infinitesima di ordine 2 in 0 rispetto a x, mentre è infinitesima di ordine $2/3$ rispetto a $\sin^3 x$, sempre in 0. Si ha infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|1-\cos x|}{|x|^2} = \frac{1}{2} > 0\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{|1-\cos x|}{|\sin^3 x|^{2/3}} = \lim_{x\to 0} \frac{|1-\cos x|}{|\sin^2 x|} = \frac{1}{2} > 0\,.$$

Si noti che, a causa del teorema sul limite del modulo di una funzione, se ha senso ed esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)^\alpha} = m \neq 0 \tag{2}$$

esiste anche il limite (1) e si ha $l = |m|$. Però il limite (2) potrebbe non avere senso (per esempio con α non intero e $g(x) < 0$) oppure potrebbe non esistere, pur esistendo il limite (1). Si può quindi ragionare negli esempi "senza il valore assoluto", se tutto funziona, altrimenti bisogna prendere i valori assoluti, come vuole la definizione 1.

Purtroppo questa definizione non permette sempre di assegnare un ordine a un infinitesimo o a un infinito rispetto a un determinato campione. Proponiamo alcuni esempi relativi sia a infiniti che infinitesimi.

Esempio 1. Le funzioni $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $g(x) = x$ sono infinite per $x \to +\infty$, ma non esiste un ordine di f rispetto a g (o di g rispetto a f). Infatti, come è noto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

Si può esprimere questo risultato affermando che e^x è, per $x \to +\infty$, infinito di ordine superiore a x^α per ogni α, ovvero di ordine superiore ad α, per ogni α, rispetto a x. Si usa anche dire che un infinito come questo ha un ordine *soprareale* in $+\infty$ rispetto a x.

Si tenga anche ben presente che e^x può avere un ordine, in $+\infty$, rispetto a un campione diverso: per esempio rispetto al campione e^{2x} ha ordine $1/2$.

Esempio 2. Le funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$ sono infinite per $x \to +\infty$, ma non esiste un ordine di f rispetto a g (o di g rispetto a f). Infatti, come è noto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

Si può esprimere questo risultato affermando che $\ln x$ è, per $x \to +\infty$, infinito di ordine inferiore a x^α per ogni α, ovvero di ordine inferiore ad α, per ogni α, rispetto a x. Si usa anche dire che un infinito come questo ha un ordine *sottoreale* in $+\infty$ rispetto a x.

Si tenga anche ben presente che $\ln x$ può avere un ordine, in $+\infty$, rispetto a un campione diverso: per esempio rispetto al campione $\ln(x^2)$ ha ordine 1.

Esempio 3. Le funzioni $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e $g(x) = {}^1\!/x$ sono infinitesime per $x \to +\infty$, ma non esiste un ordine di f rispetto a g. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0\,, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

Si può esprimere questo risultato affermando che e^{-x} è, per $x \to +\infty$, infinitesimo di ordine superiore a $({}^1\!/x)^\alpha$ per ogni α, ovvero di ordine superiore ad α, per ogni α, rispetto a ${}^1\!/x$. Si usa anche dire che un infinitesimo come questo ha un ordine *soprareale* in $+\infty$ rispetto a ${}^1\!/x$.

Esempio 4. Le funzioni $f(x) = x\ln x$ e $g(x) = x$ sono infinitesime in 0 (ovviamente per f ha senso solo il limite destro in 0), ma non esiste ordine di f rispetto a g. Infatti

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} x^{1-\alpha}\ln x\,;$$

e possiamo osservare che

- se $0 < \alpha < 1$ si tratta di un limite fondamentale (che si presenta nella forma $0\cdot\infty$) che vale 0;
- se $\alpha = 1$ coincide col limite di $\ln x$ in 0^+, che vale $-\infty$;
- se $\alpha > 1$ si ottiene la forma $+\infty\cdot(-\infty)$ e quindi il limite è $-\infty$.

Possiamo esprimere questo fatto affermando che $x\ln x$ è, per $x \to 0$, infinitesimo di ordine superiore a x^α, per ogni $\alpha < 1$, e di ordine inferiore a x^α, per ogni $\alpha \geq 1$. Si può anche affermare, ma l'espressione richiede una certa cautela interpretativa, che $x\ln x$ ha, per $x \to 0$, ordine superiore a ogni reale minore di 1 e inferiore a ogni reale maggiore o uguale a 1, rispetto a x. La cautela è legata al fatto che non esistono reali siffatti. Si usa dire che un infinitesimo come questo ha un ordine *infrareale* in 0, rispetto all'infinitesimo campione x.

In ogni caso al di là della nomenclatura utilizzata occorre avere ben chiaro il problema che la ricerca dell'ordine di un infinito o infinitesimo rispetto a un campione non ha sempre soluzione.

Campioni "standard"

Nella pratica si conviene spesso di assumere tacitamente alcuni infiniti o infinitesimi come campioni "standard" e, quando non si fanno ulteriori precisazioni, si sottintende che l'ordine sia riferito a questi campioni standard. Precisamente si conviene spesso che

- per $x \to \pm\infty$, l'infinito campione sia x, e l'infinitesimo campione sia ${}^1\!/x$;
- per $x \to x_0$, l'infinito campione sia ${}^1\!/(x-x_0)$, e l'infinitesimo campione sia $x - x_0$.

Si presti però particolare attenzione al testo degli esercizi, controllando se invece è stato scelto un campione diverso.

Infiniti e infinitesimi in diversi punti

Anche se è quasi ovvio, merita di essere segnalato il fatto che una funzione può essere infinita o infinitesima in corrispondenza di diversi punti: per esempio la funzione

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$$

è infinitesima in corrispondenza dei naturali 0, 1, 2, ..., n.

È altresì importante segnalare che la stessa funzione può essere infinita o infinitesima di ordine diverso rispetto ai campioni standard nei diversi punti (ovviamente i campioni standard cambiano da punto a punto). Per esempio la funzione

$$f(x) = (x-1)^3(x-2)^5$$

è infinitesima di ordine 3 rispetto al campione $x - 1$ in 1, e infinitesima di ordine 5 rispetto al campione $x - 2$ in 2.