Proprietà di Darboux e derivate

Si dice che una funzione definita in un intervallo I ha la proprietà di Darboux[(1)] se presi due punti x_1e x_2 in I e considerato un y compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (o tra $f(x_2)$ e $f(x_1)$) esiste sempre un x appartenente a I tale che $f(x) = y$. Detto in altri termini la funzione assume tutti i valori compresi tra due suoi valori qualunque.

In base al teorema di connessione, ogni funzione continua su un intervallo ha la proprietà di Darboux. Ma anche funzioni discontinue possono avere la proprietà di Darboux. Un esempio è fornito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0, & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

È chiaro che il grafico di una funzione con questa proprietà non può avere "salti", ovvero punti in cui il limite sinistro e destro esistono entrambi finiti ma diversi; se per esempio ci fosse un punto x_0 in cui

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}\,, \quad l \neq m\,,$$

allora restringendo la funzione a un intorno opportuno di x_0 essa avrebbe un'immagine con una lacuna intermedia tra l ed m: basta per questo prendere un intorno di l e uno di m che siano disgiunti e applicare la definizione di limite.

È importante il fatto che la funzione derivata di una funzione derivabile su un intervallo ha la proprietà di Darboux, come afferma il seguente teorema.

Teorema (Proprietà di Darboux per le funzioni derivabili)**.** *Sia f ua funzione derivabile in un* intervallo *I e siano $x_1 < x_2$ due punti di I tali che $f'(x_1) < f'(x_2$ (oppure $f'(x_1) > f'(x_2)$. Preso allora un punto y compreso tra $f'(x_1)$ e $f'(x_2$, esiste sempre almeno un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f'(c) = y$.*

Questo teorema ha come conseguenza che la derivata di una funzione derivabile su un intervallo non può avere "salti", e quindi una funzione definita su un intervallo e che presenta qualche salto non può essere la derivata di nessuna funzione definita sullo stesso intervallo (cioè non può avere primitive nell'intervallo).

Per esempio la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non può essere la derivata di nessuna funzione definita su tutto $\mathbb{R}$. Per contro la funzione $f(x) = {}^{x}/_{|x|}$ che ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, può essere la derivata di una funzione ($f(x)$ *non* è definita su un intervallo). In effetti questa funzione è la derivata della funzione $g(x) = |x|$, che è derivabile, ma in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che *non* è un intervallo.

Questa propietà ci consente di affermare quanto segue. Se una funzione è continua in un intervallo I ed è derivabile in tutto I tranne un punto x_0, e se il limite sinistro e destro della derivata in corrispondenza di x_0 sono finiti e diversi, la funzione non può essere derivabile in x_0. Si tratta di una proprietà largamente usata nel controllare la derivabilità di una funzione senza calcolare il limite del rapporto incrementale. Per esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

ha, per $x \neq 0$, la derivata seguente

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ \cos x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e quindi non può essere derivabile in 0, perché il limite sinistro e destro di questa derivata per x tendente a 0 sono finiti e diversi (rispettivamente -1 e 1).

[1]Gaston Darboux (1842 – 1917)