

Osservazioni sulla continuità per le funzioni reali di variabile reale

Come è noto una funzione è continua in un punto x_0 *non isolato* del suo dominio se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se invece il punto x_0 è isolato nel dominio, allora f è automaticamente continua in x_0 .

La continuità di una funzione in x_0 ha dunque interesse solo in punti non isolati del dominio e richiede:

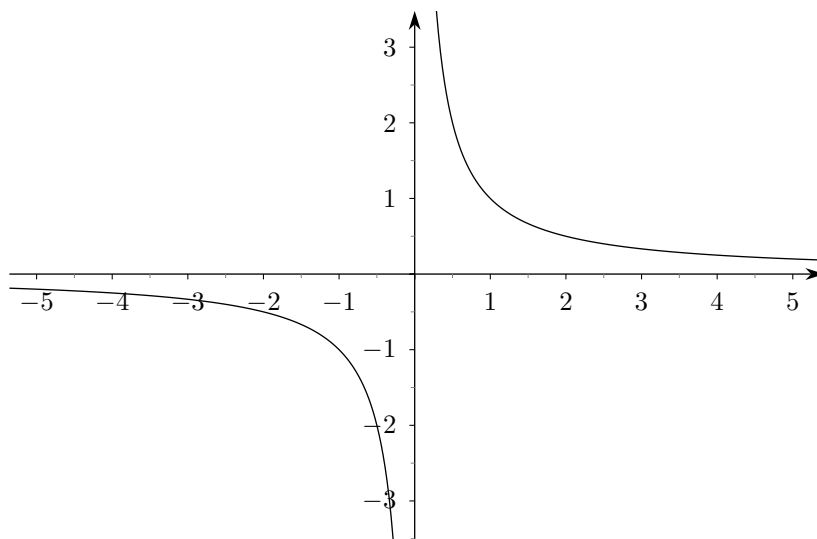
1. che il punto x_0 stia nel dominio;
2. che il limite della funzione per x tendente a x_0 esista finito;
3. che detto limite sia esattamente uguale al valore che la funzione assume in x_0 .

Fissiamo particolarmente l'attenzione sulla prima condizione, perché in molti testi si usano espressioni, a nostro avviso, formalmente scorrette. Consideriamo alcuni esempi per chiarire il problema.

Esempio 1. La funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Il suo grafico è proposto qui di seguito.



Naturalmente, poiché 0 è di accumulazione per il dominio della funzione, ha perfettamente senso ricercare il limite per $x \rightarrow 0$ e si ha, banalmente,

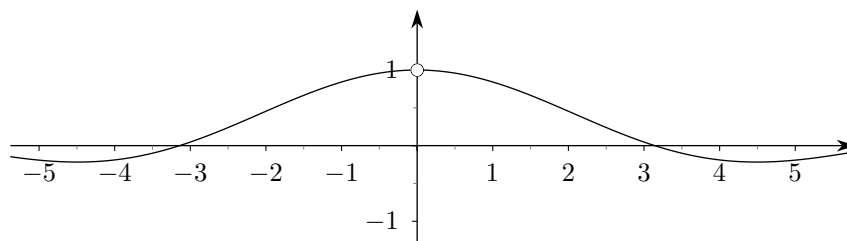
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

ma non ha invece alcun senso chiedersi se la funzione è o no continua in 0.

Esempio 2. La funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.



Naturalmente, poiché 0 è di accumulazione per il dominio della funzione, anche in questo caso ha perfettamente senso ricercare il limite per $x \rightarrow 0$ e si ha, come è ben noto,

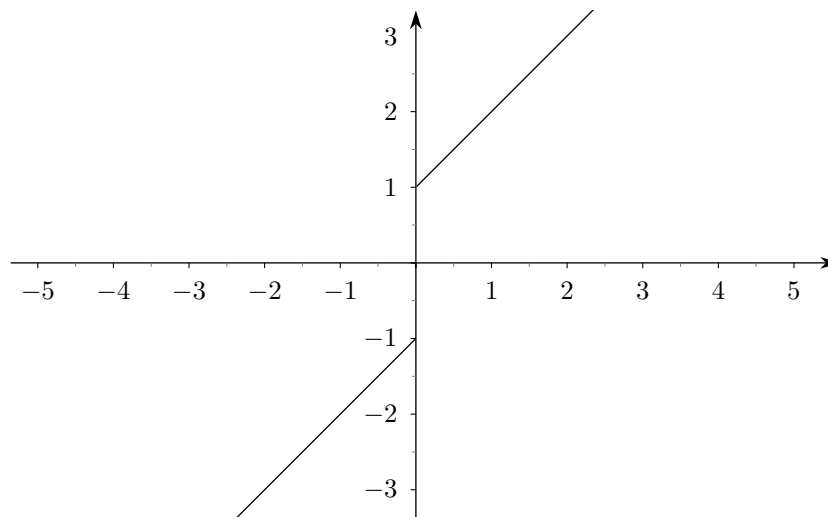
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

ma, anche in questo caso, non ha alcun chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Esempio 3. La funzione definita da

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.



Come nei due casi precedenti, poiché 0 è di accumulazione per il dominio della funzione, anche in questo caso ha perfettamente senso ricercare il limite per $x \rightarrow 0$ e si ha

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{|x|}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{|x|}{x} = +1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{|x|}{x} = \nexists,$$

ma, ancora una volta, non ha alcun senso chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Esempio 4. La funzione definita da

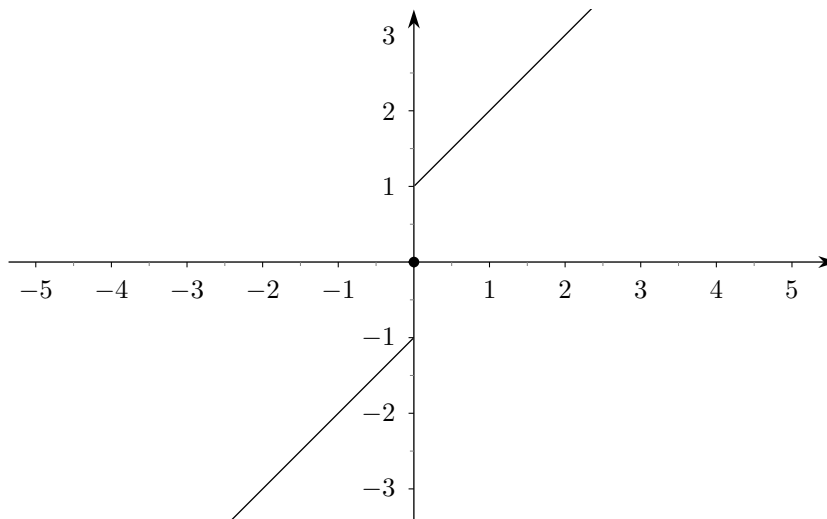
$$f(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$$

ha come dominio naturale tutto $\mathbb{R}$ e dunque ha perfettamente senso chiedersi se essa è continua oppure no in corrispondenza a un qualunque reale. Ci interessa in particolare il punto 0. È immediato constatare

che

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \operatorname{sgn}(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \operatorname{sgn}(x) = +1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x + \operatorname{sgn}(x) = \nexists,$$

esattamente come nell'esempio precedente. Questa volta però, a differenza di prima, possiamo concludere che la funzione *non è continua* in 0. Si veda il grafico, che mostra come l'unica differenza con la funzione dell'esempio precedente sia costituita dal fatto che ora il punto 0 sta nel dominio.



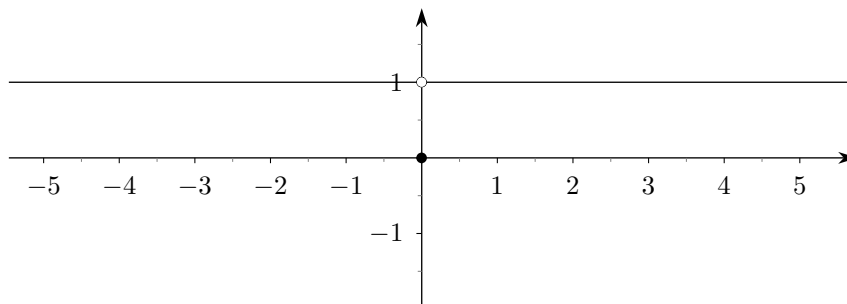
Esempio 5. La funzione definita da

$$f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$$

ha come dominio naturale tutto $\mathbb{R}$ e dunque ha perfettamente senso chiedersi se essa è continua oppure no in corrispondenza a un qualunque reale. Ci interessa in particolare il punto 0. È immediato constatare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1 \neq f(0) = 0.$$

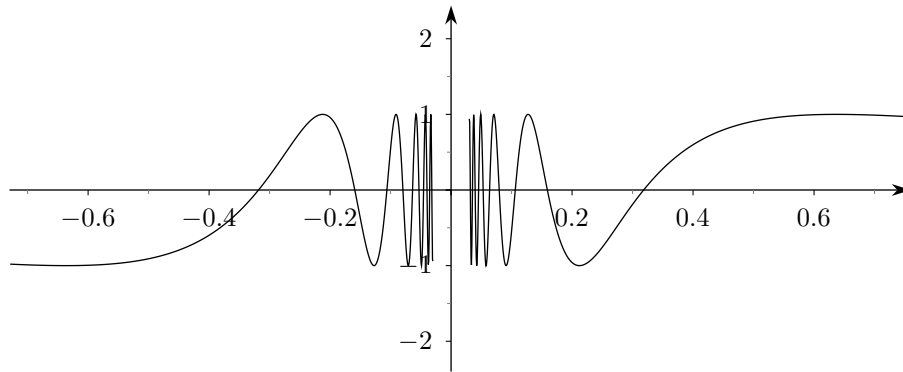
Anche ora possiamo concludere che la funzione *non è continua* in 0, seppure per una ragione diversa da prima (il limite esiste ma non coincide con il valore della funzione quando $x \rightarrow 0$). Il grafico che segue rende evidente il motivo della non continuità.



Esempio 6. La funzione definita da

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.

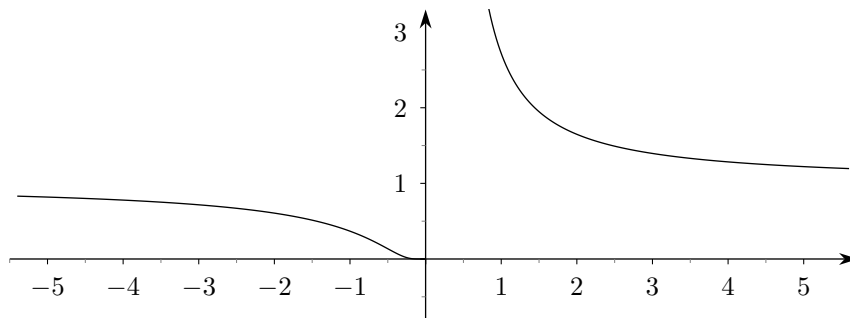


Anche in questo caso possiamo ricercare il limite per $x \rightarrow 0$ e troviamo, come è ben noto, che il limite non esiste, nemmeno se consideriamo il limite destro o quello sinistro; naturalmente non ha ancora alcun senso chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Esempio 7. La funzione definita da

$$f(x) = e^{1/x} \left(= \exp \frac{1}{x} \right)$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.



Ancora una volta possiamo ricercare il limite per $x \rightarrow 0$ e troviamo

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \frac{1}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \exp \frac{1}{x} = \nexists,$$

ma, come ormai dovrebbe essere chiaro, non ha alcun senso chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Gli esempi che abbiamo proposto si riferiscono sempre a funzioni che sono non definite o non continue in un solo punto, che è comunque di accumulazione per il dominio della funzione. In tutti i casi infatti abbiamo potuto ricercare il limite della funzione. È entrata nell'uso comune una nomenclatura per classificare le varie situazioni che si possono presentare (e che non sono solo quelle qui proposte). Anche se questa classificazione ha un certo interesse, non la riportiamo per evitare inutili confusioni, segnalando solo quanto segue.

1. In situazioni in cui il limite destro e sinistro di una funzione per $x \rightarrow x_0$ esistono finiti ma diversi, si usa dire che la funzione presenta un *salto* in corrispondenza di x_0 , indipendentemente dal fatto che si possa o no parlare di continuità.

2. In situazioni in cui la funzione ha un limite finito per $x \rightarrow x_0$

- se x_0 *non appartiene* al dominio della funzione, si può *prolungare per continuità* in x_0 ponendo

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

ottenendo così una funzione definita e continua anche in x_0 ;

- se x_0 *appartiene* al dominio della funzione, si può costruire una nuova funzione g ponendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x_0; \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), & \text{se } x = x_0; \end{cases}$$

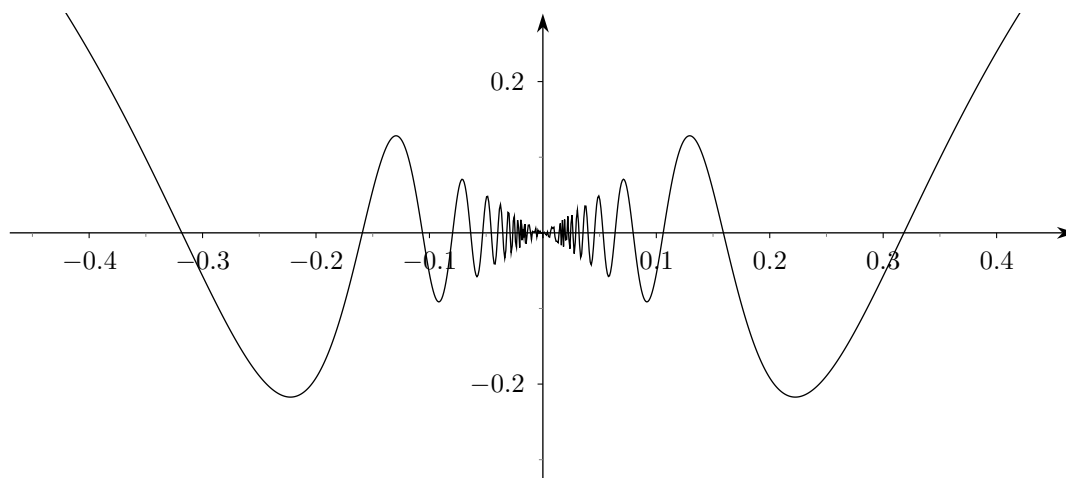
si ottiene così una funzione continua *anche* in x_0 e che differisce da f solo nel punto x_0 .

Proprietà “grafiche” della continuità

È tradizione pensare alle funzioni continue come a funzioni il cui grafico *si può tracciare senza staccare la penna dal foglio*. Gli esempi proposti sopra (in particolare i numeri 1, 2, 3, 6 e 7) mostrano come l'espressione può non avere alcun senso. Si può naturalmente obiettare, a proposito di questi esempi, che la cosa è evidente visto che anche nel dominio c'è una lacuna. Per rispondere a questa obiezione consideriamo l'esempio seguente di funzione il cui dominio non ha alcuna lacuna.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

È immediato constatare che la funzione è ovunque continua. Il grafico è proposto qui di seguito.



Anche se non è facile provarlo, il tratto di grafico della funzione compreso in un intorno (anche “molto piccolo”) dell’origine ha sempre lunghezza infinita: che senso può avere allora l’affermazione che detto grafico è tracciabile senza staccare la penna dal foglio?