Breve formulario di matematica

Luciano Battaia

$\sqrt{a^2} = |a|$; $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$, se $x \to 0$; $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2}$; $\int \sin x\, dx = -\cos x + k$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$; $\log_a x^2 = |x|$; $y = ax^2 + bx + c$; $x^2 + y^2 = r^2$; $\int e^x\, dx = e^x + k$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $y = mx + q$; $\lim x \ln x = 0$, se $x \to 0$; $\tan x = \sin x / \cos x$; $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x + 2$

1 Qualche prodotto e scomposizione notevole

- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

2 Formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$ax^2+bx+c=0$: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. La quantità $\Delta=b^2-4ac$ si chiama anche *discriminante*: se è negativo l'equazione non ha soluzioni, se è zero ha una soluzione (o, come si usa dire, due soluzioni coincidenti), se è maggiore di zero ha due soluzioni distinte.

3 Qualche equazione di grado superiore

Equazione di terzo grado elementare. $ax^3+b=0 \quad : \quad x=\sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$. Nello stesso modo si risolvono tutte quelle di grado dispari elementari.

Equazione di quarto grado elementare. $ax^4+b=0 \quad : \quad x=\pm\sqrt[4]{\frac{-b}{a}}$, purché $\frac{-b}{a}\geq 0$, altrimenti non ci sono soluzioni. Nello stesso modo si risolvono tutte quelle di grado pari elementari.

Equazioni scomposte in fattori. $f(x)\cdot g(x)=0$. Si applica la *legge dell'annullamento del prodotto*: basta trovare le soluzioni di $f(x)=0$ *o* di $g(x)=0$ (attenzione tutte le soluzioni dell'una oppure dell'altra!).

4 Disequazioni di primo e secondo grado

Primo grado. $ax + b \gtreqless 0$. Conviene mettersi sempre nella condizione con $a > 0$, dopodichè si ha $x \gtreqless -\frac{b}{a}$.

Secondo grado con il ">". $ax^2 + bx + c > 0$. Conviene mettersi sempre nella condizione $a > 0$, dopodichè si distinguono i seguenti casi:

$\Delta < 0$ Verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

$\Delta = 0$ Verificata per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, tranne $x = x_1 = x_2$.

$\Delta > 0$ Verificata per valori esterni alle radici: $x < x_1$ oppure $x > x_2$

Secondo grado con il "<". $ax^2 + bx + c < 0$. Conviene mettersi sempre nella condizione $a > 0$, dopodichè si distinguono i seguenti casi:

$\Delta < 0$ Mai verificata.

$\Delta = 0$ Mai verificata.

$\Delta > 0$ Verificata per valori interni alle radici: $x_1 < x < x_2$.

Secondo grado con anche "=": $\geq$ *o* $\leq$. Se è presente anche l'uguale, basta aggiungere ai risultati della disequazione (se ci sono) quelli dell'equazione.

5 Qualche altra disequazione

Terzo grado elementari $ax^3 + b \gtreqless 0$. Conviene mettersi nel caso $a > 0$, dopodichè si ha: $x \gtreqless \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$

Sistemi $\begin{cases} f(x) \gtreqless 0 \\ g(x) \gtreqless 0 \end{cases}$ Si risolvono separatamente le disequazioni e poi si prendono le *soluzioni comuni* (mediante un grafico).

Prodotti o fratte $f(x) \cdot g(x) \gtreqless 0$ oppure $\frac{f(x)}{g(x)} \gtreqless 0$. Si discute separatamente la positività e negatività dei due fattori (oppure di numeratore e denominatore) e poi si traggono le conclusioni mediante un grafico *di "segno"*.

Esempio Occorre prestare la massima attenzione a distinguere tra i *sistemi* e il caso di *prodotti o fratte*. Per esempio $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$ ha come soluzione $x \geq 1$, mentre $(x-1)(x+1) \geq 0$ ha come soluzione $x \leq -1$ *o* $x \geq 1$.

6 Geometria analitica

Distanza tra due punti. Dati $A\,(x_A, y_A)$ e $B\,(x_B, y_B)$, per la distanza si ha $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Punto medio di un segmento. Dati $A\,(x_A, y_A)$ e $B\,(x_B, y_B)$, le coordinate del punto medio M del segmento AB sono la media delle coordinate di A e B: $M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Equazione generica di una retta. $ax + by + c = 0$.

Equazione di una retta non verticale. $y = mx + q$. Il coefficiente di x, m, si chiama *coefficiente angolare* e caratterizza la pendenza della retta; il termine noto, q, si chiama *ordinata all'origine*.

Equazione di una retta verticale (parallela all'asse y). $x = k$.

Equazione di una retta parallela all'asse x. $y = k$.

Equazione di una retta passante per due punti. Se sono dati due punti $A\,(x_A, y_A)$ e $B\,(x_B, y_B)$, la retta passante per entrambi ha equazione $(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$.

Parabola con asse verticale Ha equazione $y = ax^2 + bx + c$. Se $a > 0$ la parabola volge la concavità verso l'alto, se $a < 0$ verso il basso. L'ascissa del vertice è: $-\frac{b}{2a}$, l'ordinata del vertice si trova per sostituzione nell'equazione.

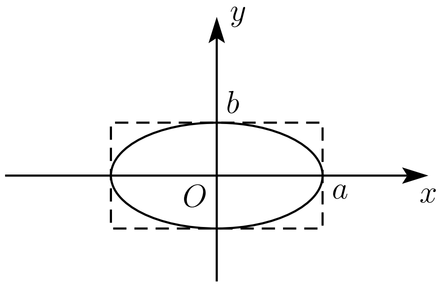
Parabola con asse orizzontale. Ha equazione $x = ay^2 + by + c$. Se $a > 0$ la parabola volge la concavità verso destra, se $a < 0$ verso sinistra. L'ordinata del vertice è: $-\frac{b}{2a}$, l'ascissa del vertice si trova per sostituzione nell'equazione.

Circonferenza. Ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Perchè sia effettivamente una circonferenza deve verificare la condizione $\frac{a^2+b^2-4c}{4} \geq 0$ (se vale l'uguale a zero si tratta di una circonferenza ridotta ad un punto). Il centro ha coordinate $C = \left(-\frac{a}{2}\,, -\frac{b}{2}\right)$, il raggio è $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}$. Attenzione: queste formule si applicano se l'equazione della circonferenza è scritta nella forma riportata sopra, cioè con i coefficienti di x^2 e y^2 uguali a 1. L'equazione di una circonferenza con centro $C\,(x_C, y_C)$ e raggio r si scrive semplicemente $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$.

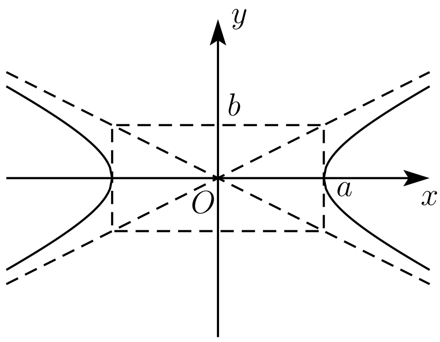
Ellisse ed iperbole. L'equazione $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$, rappresenta:

1. un'ellisse se è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1$;
2. un'iperbole se è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$ oppure $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$;
3. non ha alcuna soluzione se è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

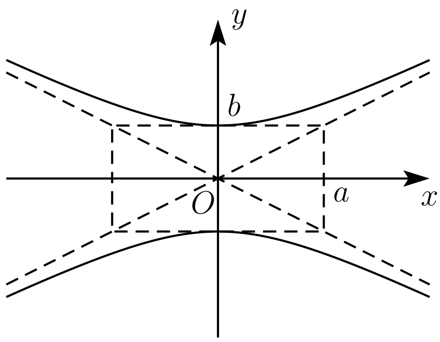
Nei primi due casi per la rappresentazione grafica si comincia col tracciare un rettangolo di centro l'origine e lati $2a$ (sull'asse orizzontale) e $2b$ (sull'asse verticale). Se si tratta di un'ellisse il suo grafico è immediato. Se si tratta di un'iperbole bisogna ancora tracciare le rette diagonali del rettangolo e poi procedere come nei grafici riportati oltre.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

7 Potenze e logaritmi

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

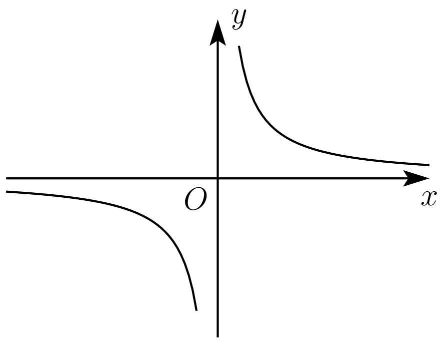
Il $\log_a b$ è definito solo se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, ed è l'esponente da dare ad a per ottenere b. Se la base è il numero di Nepero e, il logaritmo si indica semplicemente con ln ($\ln = \log_e$).

- $\log_a a = 1$ ($\ln e = 1$)
- $\log_a 1 = 0$ ($\ln 1 = 0$)
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, con b e c entrambi maggiori di zero.
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, con b e c entrambi maggiori di zero.

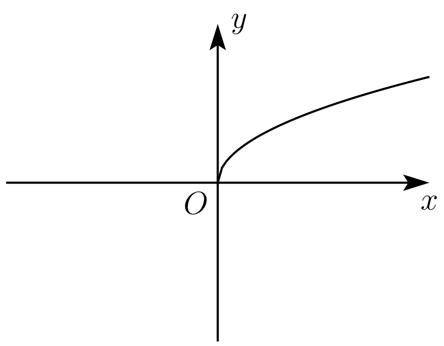
Osservazione: $\ln e^2 = 2,\ \ln e^3 = 3,\ \ln e^4 = 4,\ \dots$.

8 Grafici elementari

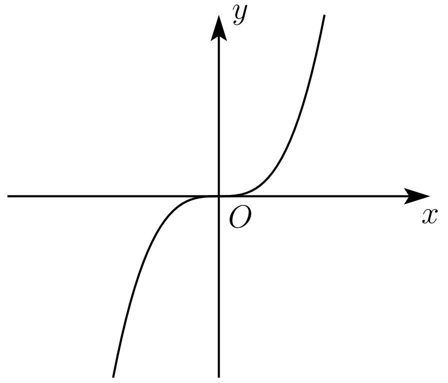
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



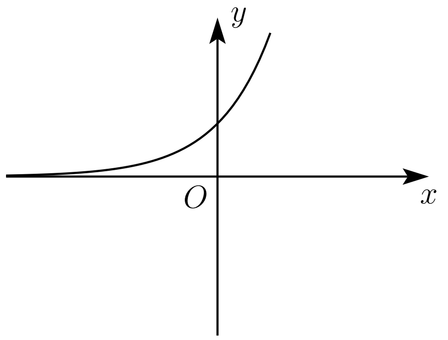
$$f(x) = \sqrt{x}$$



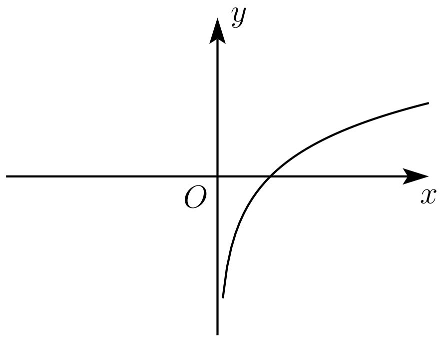
$f(x) = x^3$



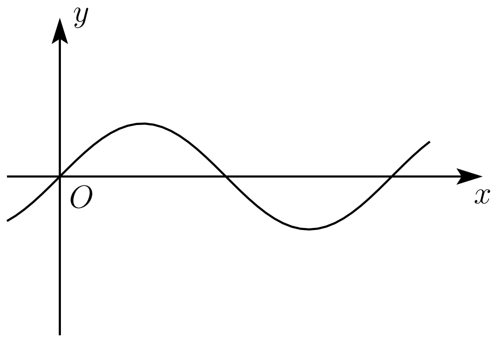
$f(x) = e^x$



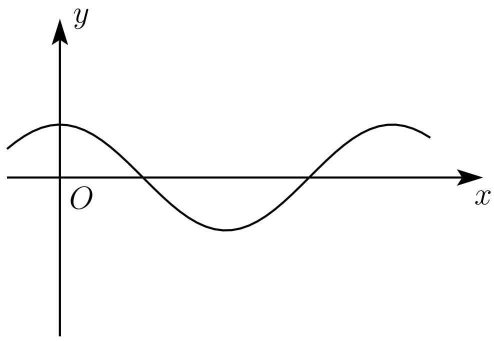
$f(x) = \ln x$



$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



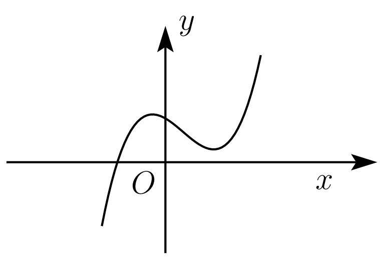
9 Grafici derivati

Alcune tecniche elementari per ottenere nuovi grafici di funzioni, a partire da grafici noti.

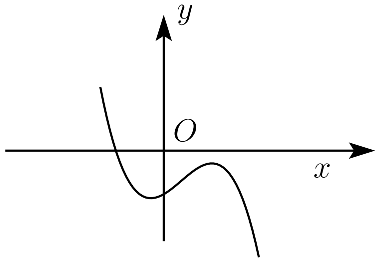
- Da $f(x)$ a $-f(x)$: simmetria rispetto all'asse x.
- Da $f(x)$ a $f(-x)$: simmetria rispetto all'asse y.
- Da $f(x)$ a $f(x+k)$, $k > 0$: traslazione di k unità verso sinistra.
- Da $f(x)$ a $f(x-k)$, $k > 0$: traslazione di k unità verso destra.
- Da $f(x)$ a $f(x)+k$, $k > 0$: traslazione di k unità verso l'alto.
- Da $f(x)$ a $f(x)-k$, $k > 0$: traslazione di k unità verso il basso.
- Da $f(x)$ a $f(|x|)$,: la parte di grafico a destra dell'asse y rimane identica, a sinistra dell'asse y il grafico si ottiene per semplice simmetria, rispetto all'asse y, della parte di destra.
- Da $f(x)$ a $|f(x)|$,: la parte di grafico sopra l'asse x rimane identica, la parte sotto l'asse x si ribalta rispetto all'asse x stessa.

Esempi:

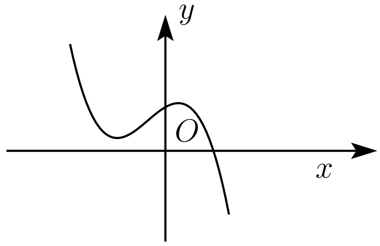
$f(x)$



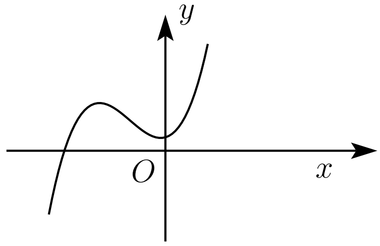
$-f(x)$



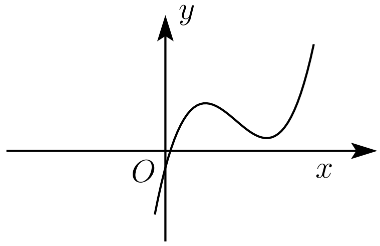
$f(-x)$



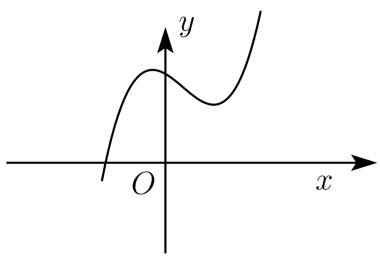
$f(x+1)$



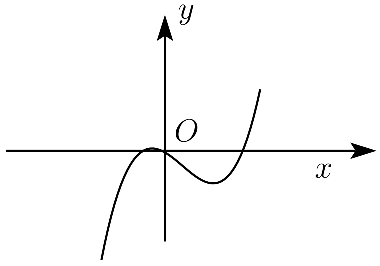
$f(x-1)$



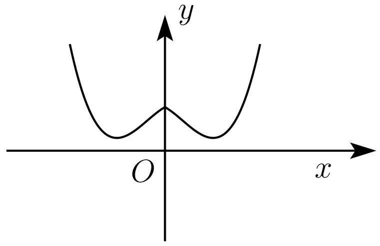
$f(x)+1$



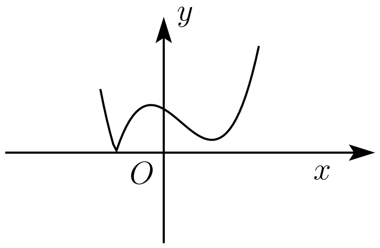
$f(x) - 1$



$f(|x|)$



$|f(x)|$



10 Calcoli sulla retta reale "estesa"

Se a è un numero reale qualunque si ha:

- $a + (+\infty) = +\infty$
- $a - (+\infty) = -\infty$
- $a + (-\infty) = -\infty$
- $a - (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
- $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

Se a è un numero reale *diverso da zero* si ha:

- $a \cdot (\infty) = \infty$
- $(\infty) \cdot (\infty) = \infty$
- $\frac{\infty}{a} = \infty; \quad \frac{\infty}{0} = \infty$
- $\frac{a}{0} = \infty$
- $\frac{a}{\infty} = 0; \quad \frac{0}{\infty} = 0$

In tutti i casi elencati, quando il segno di "∞" non è precisato, si applica la usuale *regola dei segni*, con qualche attenzione per il "segno di zero".

11 Formule per le derivate

1. Somme, prodotti, quozienti
   - $y = f(x) + g(x)$, $y' = f'(x) + g'(x)$
   - $y = f(x) \cdot g(x)$, $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
   - $y = k \cdot f(x)$, $y' = k \cdot f'(x)$
   - $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
2. Funzioni elementari
   - $y = k$, $y' = 0$
   - $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$
   - $y = e^x$, $y' = e^x \quad ; y = a^x$, $y' = a^x \ln a$
   - $y = \ln x$, $y' = \dfrac{1}{x} \quad ; y = \log_a x$, $y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$
   - $y = \sin x$, $y' = \cos x$
   - $y = \cos x$, $y' = -\sin x$
   - $y = \operatorname{tg} x$, $y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
3. Funzioni composte
   - $y = (f(x))^n$, $y' = n\,(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
   - $y = e^{f(x)}$, $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad ; y = a^{f(x)}$, $y' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$

- $y = \ln\left(f(x)\right),\ y' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad ;$

  $y = \log_a\left(f(x)\right),\ y' = \dfrac{1}{f(x)} \log_a e \cdot f'(x)$
- $y = \sin\left(f(x)\right),\ y' = \cos\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$
- $y = \cos\left(f(x)\right),\ y' = -\sin\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$
- $y = \operatorname{tg}\left(f(x)\right),\ y' = \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(f(x)\right)\right) \cdot f'(x)$

12 Integrali indefiniti

1. Linearità

   - $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$
   - $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. Funzioni elementari

   - $\int k\,dx = kx + c$
   - $\begin{cases} \int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \\ \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad , \quad \alpha \neq -1 \end{cases}$
   - $\int e^x\,dx = e^x + c$
   - $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
   - $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
   - $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + c$
   - $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

3. Funzioni composte

   - $\begin{cases} \int f'(x) f^{-1}(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c \\ \int f'(x) f^{\alpha}(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad , \quad \alpha \neq -1 \end{cases}$
   - $\int f'(x) e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$
   - $\int f'(x) \sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$
   - $\int f'(x) \cos f(x)\,dx = \sin f(x) + c$

4. Integrazione per parti
   La formula di integrazione per parti sui può scrivere in due modi equivalenti:
   - $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$
   - $\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$, ove $F(x) = \int f(x)\,dx$

5. Due integrali famosi non calcolabili elementarmente
   - $\int e^{-x^2}\,dx$
   - $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

13 Massimi e minimi relativi per le funzioni di due variabili

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili, derivabile quanto serve, e indichiamo con

$$f'_x(x,y) \quad \text{e} \quad f'_y(x,y)$$

le sue derivate parziali prime, e con

$$f''_{xx}(x,y) \quad , \quad f''_{xy} = f''_{yx}(x,y) \quad \text{e} \quad f''_{yy}(x,y)$$

le sue derivate parziali seconde. Un punto (x_0, y_0) interno al dominio può essere di massimo o di minimo solo se

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases} .$$

Se poi poniamo $H(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \big(f''_{xy}(x_0,y_0)\big)^2$, si ha che:

- se $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ e $H(x_0,y_0) > 0$, il punto è di **minimo**;
- se $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ e $H(x_0,y_0) > 0$, il punto è di **massimo**;
- se $H(x_0,y_0) < 0$, il punto non è né di **massimo** né di **minimo** (punto di *sella*);
- se $H(x_0,y_0) = 0$, occorre un'indagine locale per stabilire la natura del punto.

14 Massimi e minimi vincolati per le funzioni di due variabili

Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili e $g(x, y) = 0$ un vincolo, con tutte le ipotesi di regolarità che servono per le funzioni f e g.

Per la ricerca dei massimi e minimi vincolati si può procedere come segue:

- se da $g(x, y) = 0$ si può esplicitare o la x o la y, la si sostituisce nella funzione f, ottenendo una funzione di una variabile i cui massimi e minimi si trovano come al solito;

- se la cosa non è possibile i punti di massimo e minimo vanno ricercati fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

  Se il vincolo rappresenta un insieme chiuso e limitato e sono verificate tutte le ipotesi di regolarità che servono, tra le soluzioni del sistema indicato ci sono sicuramente sia il punto di massimo assoluto che quello di minimo assoluto.