Diario delle lezioni di Matematica di Base

Luciano Battaia

Questi appunti contengono il diario delle lezioni di Matematica di Base tenute, nell'anno accademico 2008/2009, presso la sede di Pordenone dell'Università degli studi di Udine.

La raccolta comprende solo lo schema delle lezioni e degli esercizi proposti e/o svolti e non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi trattandosi di un *diario delle lezioni* alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione più estesa e approfondita, ma in ogni caso questi appunti non possono sostituire i testi specifici.

Il linguaggio usato è volutamente informale e spesso sono fornite anche indicazioni spicciole, come normalmente vengono fornite durante un'ora di lezione. Anche le notazioni usate sono quelle comuni nelle scuole medie superiori.

Per gli esercizi si fa riferimento al testo *Matematica di Base*, di Luciano Battaia e Pier Carlo Craighero, contenente i testi con soluzione breve di tutti i temi di Matematica di Base assegnati presso l'Università di Udine. Il testo è reperibile su `http://www.uniud.it/didattica/offerta/cepo/info` > Servizi alla didattica > Dispense. In ogni caso, per tutti gli esercizi proposti nel corso è riportato in questi appunti il testo dell'esercizio.

Il testo è composto con LaTeX 2ε e la classe di documento Komascript di Markus Kohm e Jens Uwe Morawski. Le immagini sono realizzate con il pacchetto PSTricks e le sue estensioni. Molte figure sono state prima costruite usando Geogebra e poi esportate direttamente in formato PSTricks.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo riportato sul sito www.batmath.it.

1 Lezione del 4 settembre 2008

Salvo diversa esplicita indicazione si sottintende di lavorare sempre nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

1.1 Questioni teoriche trattate

Polinomi e radici

Considerato un polinomio in una variabile

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \,,$$

i numeri

$$a_n,\, a_{n-1},\, \dots,\, a_0$$

si chiamano *coefficienti*, mentre il numero naturale n si chiama *grado* del polinomio.

Un numero reale $\overline{x}$ si dice una *radice* o uno *zero* del polinomio $p(x)$ se $p(\overline{x}) = 0$, cioè se “sostituendo” $\overline{x}$ a x il polinomio stesso vale zero.

Per esempio, dato il polinomio

$$p(x) = x^5 - 5x^2 + 6\,,$$

il numero 1 è una sua radice, perché $(1)^5 - 5(1)^2 + 6$ vale zero.

Si noti che, nel polinomio precedente, i coefficienti sono

$$a_5 = 1,\; a_4 = 0,\; a_3 = 0,\; a_2 = -5,\; a_1 = 0,\; a_0 = 6:$$

un polinomio di grado n ha esattamente sempre $n + 1$ coefficienti, anche se qualcuno può risultare nullo (in sostanza se manca una potenza significa che il corrispondente coefficiente è nullo).

Un quoziente di 2 polinomi (per ora in una variabile) si chiama una *frazione algebrica*:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}\,.$$

È molto importante ricordare che se il grado del numeratore $N(x)$, indicato anche con $\deg(N(x))$, è maggiore o uguale a quello del denominatore, si può eseguire la divisione, ottenendo un quoziente e un resto, esattamente come succede nella divisione tra naturali:

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}\,,$$

dove 5 è il quoziente e 2 è il resto. Il seguente esempio chiarisce come si esegue la divisione tra due polinomi.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +2x^4 & +3x^3 & -x^2 & +x & +2 & x^2 + x \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & & & & & x^3 + x^2 + 2x - 3 \\ \cline{1-6}
/ & x^4 & +3x^3 & -x^2 & +x & +2 & \\
 & -x^4 & -x^3 & & & & \\ \cline{2-6}
 & / & 2x^3 & -x^2 & +x & +2 & \\
 & & -2x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{3-6}
 & & / & -3x^2 & +x & +2 & \\
 & & & 3x^2 & 3x & & \\ \cline{4-6}
 & & & / & 4x & +2 &
\end{array}$$

Il risultato della divisione si può scrivere nel seguente modo:

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2}{x^2 + x} = x^3 + x^2 + 2x - 3 + \frac{4x + 2}{x^2 + x}\,.$$

Il quoziente ha sempre come grado la differenza tra i gradi del numeratore e del denominatore, il resto ha sempre grado inferiore a quello del denominatore.

Nel caso in cui il divisore (denominatore) sia un polinomio di primo grado con primo coefficiente 1, cioè un polinomio del tipo $x + a$, la divisione si può anche eseguire con una particolare regoletta (detta *Regola di Ruffini*), molto elegante, ma non eccessivamente importante in quanto anche con la regola “tradizionale” si ottiene (quasi nello stesso tempo e con minore possibilità di sbagliare) lo stesso identico risultato: per questo non richiamiamo questa regola.

È di grande importanza il seguente

Teorema 1. *Se $\overline{x}$ è una radice del polinomio $p(x)$, allora il polinomio stesso è* divisibile *per $x-\overline{x}$, ovvero la divisione tra $p(x)$ e $x-\overline{x}$ dà come resto* 0.

Come conseguenza immediata si ha che se $p(x)$ è *divisibile* per $x-\overline{x}$, $p(x)$ stesso si può decomporre nel prodotto

$$p(x) = (x-\overline{x})q(x)\,,$$

ove $q(x)$ è il polinomio quoziente, con grado necessariamente inferiore di 1 rispetto a quello di $p(x)$.

Se si conoscono radici di $q(x)$ (non essendo escluso che $\overline{x}$ possa essere radice anche di $q(x)$), anche a $q(x)$ si può applicare la decomposizione appena vista e si può così procedere fin che si riesce a trovare radici dei quozienti via via ottenuti. Il polinomio $p(x)$ si potrà allora scrivere nella forma

$$p(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots(x-x_r)^{m_r}q(x)\,,$$

dove x_1, x_2, …, x_r sono radici (che supponiamo distinte) e $q(x)$ è "l'ultimo quoziente". Se x_1 *non* è radice di $q(x)$, allora il numero m_1 si chiama *molteplicità* della radice x_1. Analogo per le altre radici.

Se di un polinomio di grado n si conoscono n radici (con qualcuna eventualmente multipla), allora il polinomio stesso si può decomporre nella forma:

$$p(x) = a_n(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots(x-x_r)^{m_r}\,,$$

ove

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n.$$

Questo risultato è una forma particolare del teorema fondamentale dell'algebra che ha una formulazione molto elegante e sintetica se espresso nell'insieme dei numeri complessi (di cui occuperemo nel corso di Analisi I).

Il caso dei polinomi di secondo grado è particolarmente importante e vale la pena di scrivere in dettaglio il risultato precedente.

Nel caso di polinomi a coefficienti interi vale il seguente importante risultato.

Teorema 2. *Se il polinomio*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\,,$$

è a coefficienti interi, allora le sue eventuali *radici razionali (cioè esprimibili come frazioni di interi) si devono ricercare fra le frazioni costruite prendendo come numeratore un divisore del termine noto* (a_0) *e come denominatore un divisore del primo coefficiente* (a_n)*.*

Prestare attenzione al fatto che questo teorema *non* afferma che le radici sono da ricercare solo tra queste frazioni, ma unicamente che se radici razionali esistono, allora esse sono da ricercare tra queste frazioni.

Vediamo alcuni esempi. Il polinomio

$$p_1(x) = x^4 + x^2 + 16$$

non ha alcuna radice (come è evidente visto che non può avere valori inferiori a 16); il polinomio

$$p_2(x) = x^2 - 5x + 6$$

ha come radici i numeri 2 e 3 che appartengono all'insieme delle frazioni costruite come sopra detto; il polinomio

$$p_3(x) = x^3 + 5x + 6$$

ha come radice -1 che appartiene all'insieme delle frazioni dette e non ha alcuna altra radice (nell'insieme dei reali); il polinomio

$$p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$$

ha come radici 1 (che appartiene all'insieme di frazioni detto) e $\pm\sqrt{2}$ che ovviamente non sono razionali.

1.2 Esercizi

Tema 2, **es.**2
Semplificare la frazione algebrica dopo averne trovato il dominio

$$\frac{x^4 - x^2}{2x^3 - 3x^2 - 5x + 6}\,.$$

Si scompone facilmente il numeratore: $x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$. Per scomporre il denominatore si cercano le eventuali radici razionali del polinomio $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$, radici che, se ci sono, devono appartenere all'insieme delle frazioni che hanno al denominatore uno dei numeri ±1, ±2, ±3, ±6 e al denominatore uno dei numeri ±1, ±2:

$$\left\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}\right\}\,.$$

Si verifica facilmente che i numeri $-3/2$, 1, 2 sono radici. Siccome il polinomio è di 3° grado e ho trovato r radici, si può decomporre in

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(x-2)(2x+3)\,.$$

A questo punto la determinazione del dominio e la semplificazione della frazione sono elementari. Si noti che, avendo trovato una prima radice, per esempio 1, si poteva eseguire la divisione tra il polinomio $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ e il binomio $x - 1$, ottenendo

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x-1)(2x^2 - x - 6)\,;$$

a questo punto la determinazione delle altre due radici si poteva anche fare con la solita regola dei trinomi di secondo grado.

Tema 4, **es.**1
Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{9 - 6x + x^2}.$$

La scomposizione del numeratore è facile se si osserva che i numeri -2, 1, 3 sono radici. Il resto dell'esercizio è immediato.

Tema 4, **es.**5
Determinare i numeri reali a e b in modo che il polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 2$ sia divisibile per il polinomio $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Conviene iniziare a eseguire la divisione tradizionale dei due polinomi, almeno fin quando la presenza dei parametri a e b non crea problemi

$$
\begin{array}{ccccc|l}
x^4 & & +ax^2 & +bx & +2 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2-x \\ \cline{1-5}
/ & -x^3 & +(a-1)x^2 & +bx & +2 & \\
 & +x^3 & +x^2 & +x & & \\ \cline{2-5}
 & / & ax^2 & +(b+1)x & +2 &
\end{array}
$$

A questo punto bisogna distinguere due casi:

1. se $a=0$ la divisione cessa perché il resto ha grado minore del divisore (precisamente 1 oppure 0 a seconda del valore di b);
2. se $a\neq 0$ la divisione prosegue e si ottiene

$$
\begin{array}{cccccc|l}
x^4 & & +ax^2 & & +bx & +2 & x^2+x+1 \\ \cline{7-7}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & & x^2-x+a \\ \cline{1-6}
 & & -x^3 & +(a-1)x^2 & & +bx & +2 \\
 & +x^3 & +x^2 & & +x & & \\ \cline{2-6}
 & / & ax^2 & & +(b+1)x & +2 & \\
 & & -ax^2 & & -ax & -a & \\ \cline{3-6}
 & & / & & (b-a+1)x & -a+2 &
\end{array}
$$

La divisione in ogni caso termina, perché il resto ha grado minore del divisore. Se il resto deve essere zero occorrerà dunque che

$$
b-a+1=0 \quad \wedge \quad -a+2=0\,,
$$

cioè $a=2$, $b=1$.

Tema 8, **es.**4

Stabilire per quali valori dei coefficienti $a,b\in\mathbb{R}$ il seguente polinomio

$$
P(x)=x^3+x^2+ax+b
$$

ammette $x=-1$ come radice doppia.

Se $x_{-}1$ deve essere radice occorre che “sostituendo” -1 al posto di x, il polinomio assuma il valore 0; si trova subito che

$$
(-1)^3+(-1)^2+a(-1)+b=-a+b=0\,,
$$

da cui

$$
a=b.
$$

A questo punto si può eseguire la divisione tra x^3+x^2+ax+a e $x+1$, oppure più semplicemente scomporre x^3+x^2+ax+a mediante raccoglimento parziale, e si ottiene

$$
x^3+x^2+ax+a=(x+1)(x^2+a)\,.
$$

Il numero -1 deve essere radice anche di x^2+a, e questo succede solo se $a=-1$. A questo punto si può scrivere

$$
x^3+x^2-x-1=(x+1)(x^2-1)=(x+1)^2(x-1)\,,
$$

che conferma che -1 è una radice doppia.

Si sarebbe naturalmente potuto anche procedere come nell'esercizio precedente, dividendo x^3+x^2+ax+b per $(x+1)^2=x^2+2z+1$, ma i calcoli sarebbero stati leggermente più complessi.

2 Lezione del 5 settembre 2008

2.1 Questioni teoriche trattate

Valore assoluto

Dato un numero reale x, si chiama suo *valore assoluto* o *modulo* il numero (positivo o nullo) $|x|$ così definito:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0; \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Si presti la massima attenzione al fatto che il *valore assoluto* di un numero *non è* il "numero stesso privato del segno", come purtroppo si trova scritto anche in alcuni testi: nell'ambito dell'analisi i "numeri senza segno" (numeri assoluti) non sono di alcuna utilità e non vengono mai usati.

Equazioni e disequazioni

La risoluzione di equazioni o disequazioni contenenti i valori assoluti si fa "scindendo" i valori assoluti che compaiono e considerando i vari casi che si possono presentare.

Una equazione o disequazione si dice *irrazionale* se l'incognita compare sotto il segno di qualche radicale. $x\sqrt{2} - 1 = 0$ non è una equazione irrazionale, $\sqrt{x} - x = 0$ è una equazione irrazionale.

Non esistono regole universali per risolvere equazioni o disequazioni irrazionali, tranne in alcuni casi semplici. I principi generali si possono riassumere così:

1. valuta il dominio delle funzioni che compaiono a primo e secondo membro;
2. eleva a una opportuna potenza in modo da "eliminare" i radicali. Nell'eseguire questa operazione bisogna prestare la massima attenzione, in quanto l'elevazione di ambo i membri di una equazione a una potenza dispari è sempre consentita, l'elevazione a una potenza pari può introdurre soluzioni estranee. In generale occorrerà un attento esame del segno dei due membri per trovare la strategia giusta di risoluzione.

Due esempi per rendersi conto dei problemi che si presentano elevando ambo i membri di una equazione a un esponente pari.

- L'equazione $x = 1$ ha, banalmente, solo il numero 1 come soluzione; elevando al quadrato si ottiene $x^2 = 1$ che ha, invece, 2 soluzioni, ± 1.
- L'equazione $\sqrt{x^2} = -1$ non ha alcuna soluzione; elevando al quadrato si ottiene $x^2 = 1$ che ha, invece, 2 soluzioni, ± 1.

La risoluzione di disequazioni fratte o scomposte in fattori, del tipo $f(x) \gtreqless 0$, si fa studiando il segno di ciascuno dei fattori e poi costruendo un grafico che consenta una agevole applicazione della "regola dei segni". È importante il fatto che la costruzione del "grafico dei segni" *non* dipende dal verso della disequazione: solo dopo aver correttamente determinato il segno della funzione a primo membro si controlla qual è il verso della disequazione proposta e si traggono le dovute conclusioni.

Poiché si usano, di norma, grafici molto simili anche per la trattazione dei sistemi di disequazioni, è opportuno prestare attenzione alla differenza che c'è tra i due problemi: grafico di segno (grafico del tipo $+/-$) oppure grafico di sistema (grafico del tipo Vero/Falso).

2.2 Esercizi

Tema 18, es.1

Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$$

è divisibile per $x^2 + x - 2$?

Si può procedere alla scrittura del polinomio $P(x)$ come un polinomio di 5° grado, eseguendo le moltiplicazioni indicate e poi procedendo con la divisione ordinaria per $x^2 + x - 2$, imponendo la condizione che il resto della divisione sia 0.

È però molto più agevole osservare che il divisore si può scomporre in $(x+2)(x-1)$. A questo punto affinché $P(x)$ sia divisibile per $(x + 2)(x - 1)$ si vede subito che deve essere $a^2 = 4$ (in questo modo $x^2-a^2 = x^2-4 = (x-2)(x+2)$), oppure $a+1 = 4$ (in questo modo $x^2-a-1 = x^2-4 = (x-2)(x+2)$). Si conclude che a deve appartenere a $\{-2, 2, 3\}$.

Tema 22, **es.**2

Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione

$$|9x^2 - 1|(x^2 + 1) = 16x^2 .$$

Ricordando la definizione di valore assoluto si trova

$$|9x^2 - 1| = \begin{cases} 9x^2 - 1 & \text{se} \quad 9x^2 - 1 \geq 0 \\ -(9x^2 - 1) & \text{se} \quad 9x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 9x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq -1/3 \vee x \geq 1/3 \\ -9x^2 + 1 & \text{se} \quad -1/3 < x < 1/3 \end{cases}$$

Dovremo dunque risolvere le seguenti due equazioni:

1. $(9x^2 - 1)(x^2 + 1) = 16x^2$, se $x \leq -1/3 \vee x \geq 1/3$;
2. $(-9x^2 + 1)(x^2 + 1) = 16x^2$, se $-1/3 < x < 1/3$.

Si tratta di due equazioni biquadratiche che hanno per soluzioni, rispettivamente,

1. ± 1;
2. $\pm\sqrt{\dfrac{-12 + \sqrt{153}}{9}}$.

Le quattro soluzioni trovate sono tutte accettabili.

Tema 22, **es.**10

Risolvere in $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\sqrt{x + 2} = \sqrt[3]{4x + 5} .$$

Il dominio della funzione a primo membro richiede $x \geq -2$, mentre non ci sono problemi per il secondo membro. Per "far sparire" i radicali devo elevare alla 6ª potenza ambo i membri. Poiché il primo membro è, quando esiste, non negativo, tale deve essere il secondo membro: si richiede dunque, per elevare a una potenza pari, che $x \geq -5/4$. Procedendo nei calcoli e semplificando si ottiene $x^3 - 10x^2 - 28x - 17 = 0$. Il polinomio a primo membro ha come radice -1, per cui si scompone in $(x + 1)(x^2 - 11x - 17)$. Esso ha le seguenti radici, che sono dunque soluzioni dell'equazione $x^3 - 10x^2 - 28x - 17 = 0$,

$$\frac{11 - \sqrt{189}}{2}, \ -1, \ \frac{11 + \sqrt{189}}{2} .$$

La prima di queste *non* è soluzione dell'equazione data, perchè minore di $-5/4$, le altre due sono invece anche soluzioni dell'equazione data.

Tema 20, **es.**4

Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$\frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x - 1} \leq 0 .$$

Osservato che il polinomio al numeratore ha 1 come radice, la disequazione si può scrivere come

$$\frac{(x - 1)(x^2 + 2x - 3)}{2x^2 - x - 1} \leq 0 .$$

A questo punto si può procedere a trovare il segno dei vari fattori e a costruire il tradizionale "grafico di segno", ottenendo il seguente insieme di soluzioni

$$]-\infty,-3]\cup\left]-\frac{1}{2},1\right[\,.$$

Si sarebbe potuto anche procedere ulteriormente nella scomposizione del numeratore e denominatore della frazione data nel testo, ottenendo

$$\frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(2x+1)}\le 0\,.$$

A questo punto si deve prestare particolare attenzione a *non* semplificare il fattore $x-1$ comune al numeratore e denominatore, in quanto così facendo si modifica il dominio della frazione a primo membro: si otterrebbe la disequazione

$$\frac{(x-1)(x+3)}{2x+1}\le 0\,,$$

che, a differenza di quella proposta nel testo, ha anche il numero 1 tra le soluzioni.

Osservazione sulle disequazioni

È molto importante osservare che la semplice sostituzione di $>$ con $\ge$ può modificare in maniera sostanziale le soluzioni di una disequazione. La cosa si può vedere sui seguenti due esempi:

1. $x+|x|>0$;
2. $x+|x|\ge 0$.

Scindendo il valore assoluto si procede, nei due casi, come di seguito descritto.

1. Se $x\ge 0$ la disequazione si scrive $x+x>0$, da cui $x>0$; se $x<0$ la disequazione si scrive $x-x>0$, ovvero $0>0$, che non è mai verificata. Dunque le soluzioni sono $x\in]0,+\infty[$.
2. Se $x\ge 0$ la disequazione si scrive $x+x\ge 0$, da cui $x\ge 0$; se $x<0$ la disequazione si scrive $x-x\ge 0$, ovvero $0\ge 0$, che è sempre verificata. Dunque le soluzioni sono $x\in\mathbb{R}$.

3 Lezione del 9 settembre 2008

3.1 Questioni teoriche trattate

Dai naturali ai reali

Quello di numero *naturale* è, per il nostro corso, un concetto primitivo. L'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$; l'appartenenza o meno del numero 0 all'insieme dei naturali è questione di convenzione: è pertanto opportuno, leggendo un testo, controllare sempre se l'insieme $\mathbb{N}$, secondo le convenzioni adottate dall'autore, comprende oppure no il numero 0.

A partire dall'insieme dei naturali si costruisce l'insieme degli *interi*,

$$\mathbb{Z}=\{0,\pm\ \pm 2,\ \dots\}\,.$$

La costruzione esplicita degli interi richiede l'uso di una relazione di equivalenza su un opportuno insieme, e non ne tratteremo in questo corso. Si ricordi comunque che gli interi non sono semplicemente definiti come i "naturali con segno", altrimenti $+0$ e -0 dovrebbero essere diversi. La lettera $\mathbb{Z}$ ricorda la parola tedesca *zahl* (numero, cifra). L'introduzione degli interi rende possibile eseguire sempre la sottrazione.

Il passo successivo nell'ampliamento dell'insieme dei numeri è quello dell'introduzione dei numeri *razionali*: essi sono, sostanzialmente, le frazioni di interi, con denominatore non nullo e con una opportuna relazione di equivalenza che renda identici i numeri rappresentati da frazioni equivalenti.

È molto importante per le applicazioni il fatto che i numeri razionali si possono rappresentare con allineamenti (decimali) che risultano essere sempre *finiti* o *periodici* (in realtà basterebbe considerare i decimali periodici, perché i decimali finiti si possono pensare come periodici con periodo 0), con *periodo diverso da nove.* Quest'ultimo fatto è molto importante ed esplicitamente deriva dal fatto che eseguendo la "divisione con la virgola" tra due interi *non si ottiene mai il periodo nove.* Per completezza si possono anche considerare i decimali con periodo nove, ma allora

$$0,\overline{9} = 1\,, \quad 2,37\overline{9} = 2,378, \quad \text{ecc.}$$

L'introduzione dei numeri razionali rende possibile eseguire sempre la divisione.

Il vero passo decisivo nell'ampliamento degli insiemi numerici (anche se non è l'ultimo) è quello dell'introduzione dei numeri *reali.* La trattazione esplicita e dettagliata di questo insieme numerico è abbastanza delicata ed esula dagli scopi di questo corso di matematica di base. Ci basterà sapere qui che in questo insieme trovano posto *tutti* gli allineamenti decimali, periodoci o non periodici, e che a questo insieme appartengono, oltre a tutti i razionali, tutti i radicali "non perfetti", i numeri π (rapporto di ogni circonferenza col suo diametro) ed e (base dei logaritmi naturali o *numero di Nepero*), ecc.

I numeri reali non razionali si chiamano anche *irrazionali*: l'insieme degli irrazionali è un insieme che non ha le proprietà tipiche degli insiemi numerici. Per esempio la somma o il prodotto di due irrazionali può non essere irrazionale:

$$\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) = 1\,, \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\,.$$

Nell'insieme degli irrazionali è particolarmente importante per gli scopi pratici l'insieme dei radicali o dei numeri costruiti a partire dai radicali con le operazioni elementari. Le ben note difficoltà di calcolo con questo tipo di numeri sono legate al fatto che la somma di due radicali non è di solito un radicale (a meno che i due radicali non siano simili).

È bene prestare la massima attenzione nell'uso delle "proprietà dei radicali", che valgono quasi sempre *solo ed esclusivamente* per i *radicali aritmetici.* Segnaliamo per esempio, perchè interviene spesso nei problemi, che

$$\sqrt{x^2} = |x|\,.$$

In ogni caso per la risoluzione degli esercizi proposti nei temi d'esame è opportuno avere bene in mente le tecniche per operare con i radicali, in particolare:

- il prodotto di radicali aventi o no lo stesso indice;
- la razionalizzazione dei denominatori delle frazioni, almeno nei casi di un singolo radicale quadratico e della somma o differenza di due radicali quadratici o, più raramente, cubici;
- le tecniche per "portare fattori dentro e fuori dal segno di radice".

Ancora un'osservazione relativa a una affermazione che, purtroppo, si trova spesso anche su molti testi.

L'equazione $x^2 = 4$ ha due soluzioni, $+2$ e -2. Questo *non* ci autorizza a dire che $\sqrt{4} = \pm 2$, altrimenti la radice quadrata sarebbe una funzione plurivoca (a più valori) ed è assolutamente sconveniente l'uso di questo tipo di funzioni, tranne alcuni casi ben speciali di cui non vogliamo qui occuparci. In particolare l'implementazione di funzioni plurivoche provoca, ovviamente, grossi problemi nelle macchine calcolatrici. Dunque la scrittura $\sqrt{a}$ rappresenta, per ogni numero reale non negativo a, *un unico numero non negativo.* In relazione alle soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$, la dicitura corretta è che essa ha due soluzioni, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Introduzione al concetto di logaritmo

I logaritmi, si sa, sono "una brutta bestia", principalmente perché il tempo dedicato a questo argomento nelle scuole medie superiori è spesso troppo limitato. Riportiamo qui solo le idee di base che sono utilizzate nell'introduzione della funzione logaritmo, segnalando che si tratta di idee sostanzialmente simili a quelle seguite nell'introduzione dei radicali[1].

Consideriamo un'equazione esponenziale del tipo

$$(*) \qquad a^x = b\,,$$

ed osserviamo quanto segue:

- se $a = 1$ l'equazione diventa banale, in quanto $1^x = 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
- se $a = 0$ l'equazione diventa critica per gli $x \leq 0$, banale per gli $x > 0$;
- se $a < 0$ l'equazione diventa critica perché le potenze con base negativa sono "trattabili" solo nel caso di esponenti interi.

Per questo nel considerare l'equazione $(*)$ ci limitiamo *solo ed esclusivamente* al caso di basi a tali che $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Con queste limitazioni per a, a^x è sempre un numero strettamente positivo e dunque l'equazione $(*)$ non ha soluzioni se $b \leq 0$. Si prova invece quanto segue.

Teorema 3. *L'equazione $(*)$, con*

$$a \in]0,1[\cup]1,+\infty[\quad e \quad b > 0$$

ha una e una sola soluzione *che si indica con*

$$\log_a b\,,$$

e si legge logaritmo in base a di b.

Dunque la scrittura

$$\log_a b$$

ha senso *solo ed esclusivamente* per $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ e $b > 0$ e, con queste limitazioni, rappresenta *l'esponente a cui si deve elevare la base a per ottenere l'argomento b*.

Si presti attenzione a *non* estendere questa definizione a casi non previsti. Per esempio, anche se $(-2)^3 = -8$, *non ha alcun senso* dire che il *logaritmo in base -2 di -8 vale* 3.

Si dimostrano le seguenti proprietà dei logaritmi.

$$\begin{array}{ll} \log_a a = 1 & \qquad \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \\ \log_a 1 = 0 & \qquad \log_a(b^m) = m \log_a b\,. \end{array}$$

A costo di sembrare prolissi, ripetiamo che in tutte le quattro proprietà precedenti dobbiamo supporre $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$. Se si dimenticano queste limitazioni si può incorrere in gravi errori, come mostrano le considerazioni seguenti.

Se potessimo mettere $a = 1$ nelle due proprietà della colonna di sinistra otterremmo

$$\log_1 1 = 1 \quad \text{e contemporaneamente} \quad \log_1 1 = 0\,,$$

cosa *palesemente assurda*. Mettendo $b = c = -1$ nella prima proprietà della colonna di destra otterremmo

$$\log_a[(-1)(-1)] = \log_a 1 = 0 \quad \text{e contemporaneamente} \quad \log_a[(-1)(-1)] = \log_a(-1) + \log_a(-1)\,,$$

anch'essa palesemente assurda, in quanto l'ultima uguaglianza è priva di senso (non esiste il logaritmo dei numeri negativi). Stesso discorso se si mette $a = -1$ (e per esempio $m = 2$) nell'ultima proprietà, quando si otterrebbe

$$\log_a(-1)^2 = \log_a 1 = 0 \quad \text{e contemporaneamente} \quad \log_a(-1)^2 = 2\log_a(-1)\,,$$

[1] Chi è interessato può trovare un'ampia e dettagliata trattazione delle analogie e differenze che ci sono tra questi due problemi in http://www.batmath.it/schede/algebra/logs.htm.

anch'essa assurda perché l'ultima uguaglianza è priva di senso.

In relazione a un'osservazione analoga fatta sui radicali si osservi, perché importante nelle applicazioni, che

$$\log_a(x^2) = 2\log_a|x|\,.$$

3.2 Esercizi

Tema 18, **es.**9

Risolvere la disequazione

$$\sqrt{5+4x} < 3 + |2x|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Prima di tutto si trova il dominio delle funzioni a primo e secondo membro, ottenendo facilmente $x \geq -5/4$. A questo punto la risoluzione comporta due tipi di problemi:

- la presenza di un radicale quadratico, per eliminare il quale bisognerà elevare al quadrato;
- la presenza di un valore assoluto, che richiede l'esame di due casi distinti, a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto.

L'ordine con cui affrontare i due problemi è largamente questione di gusto personale. Qui si può osservare che, affrontandoli nell'ordine in cui sono stati proposti, l'elevazione al quadrato non presenta alcun problema, in quanto la diseguaglianza è, anche visivamente, tra due numeri non negativi e quindi si può fare senza alcuna condizione. Procedendo in questo modo (ma nulla cambierebbe se "dividessimo" prima i due casi del valore assoluto) si ottiene

$$5 + 4x < 9 + 6|2x| + |2x|^2\,.$$

A questo punto si può osservare che, per ogni numero reale a, $|a|^2 = a^2$, infatti:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{se} \quad a < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |a|^2 = \begin{cases} a^2, & \text{se} \quad a \geq 0 \\ (-a)^2, & \text{se} \quad a < 0 \end{cases} = a^2\,.$$

Si ottiene dunque, anche riordinando i termini,

$$4x^2 + 6|2x| - 4x + 4 > 0\,. \tag{$*$}$$

Distinguiamo i due casi per il valore assoluto:

$$|2x| = \begin{cases} 2x, & \text{se} \quad 2x \geq 0 \\ -2x, & \text{se} \quad 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -2x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}\,.$$

Caso $x \geq 0$

$$4x^2 + 8x + 4 > 0$$
$$x^2 + 2x + 1 > 0$$
$$(x+1)^2 > 0$$
$$x \neq -1$$

Tenendo conto della condizione $x \geq 0$, le soluzioni di questo primo caso sono proprio tutti gli $x \geq 0$.

Caso $x < 0$

$$4x^2 - 16x + 4 > 0$$
$$x^2 - 4x + 1 > 0$$
$$x < 2 - \sqrt{3} \cup x > 2 + \sqrt{3}$$

Tenendo conto della condizione $x < 0$, le soluzioni di questo secondo caso sono proprio tutti gli $x < 0$.

Facendo *l'unione* dei risultati ottenuti nei due casi otteniamo che la disequazione $(*)$ è verificata per tutti gli x reali.

Per concludere basta solo ricordare le condizioni per il dominio, già trovate, e si ottiene che la disequazione data nel testo è verificata per

$$x \in [-5/4\,,\,+\infty[\ .$$

Osserviamo esplicitamente che avremmo anche potuto sempre tenere conto del dominio trovato nel corso della risoluzione; abbiamo preferito risolvere separatamente la disequazione $(*)$ e poi tenere conto alla fine del dominio: è una semplice questione di gusto personale la scelta tra le diverse strategie possibili per risolvere questo problema.

Tema 22, **es.**4

Servendosi della somma e del prodotto dei numeri reali

$$a = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

stabilire se a e b sono entrambi razionali, entrambi irrazionali o di tipo diverso. Nell'ultima eventualità si precisi quale è razionale e quale non lo è. (Metodo alternativo: usare le formule dei radicali doppi).

Seguendo le indicazioni del testo, calcoliamo la somma e il prodotto dei due numeri dati:

$$a + b = 2\sqrt{3} + 2 \quad , \quad a \cdot b = 4\sqrt{3}\,.$$

Ricordiamo ora che se di due numeri reali è data la somma s e il prodotto p, allora essi sono soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$x^2 - sx + p = 0\,.$$

Tenendo conto di questo si trova facilmente che i due numeri sono 2 e $2\sqrt{3}$. Per capire quale dei due è a e quale b si può osservare che a è il minore, dunque $a = 2$, oppure calcolare il quadrato di a e controllare se si ottiene 4, come succede.

Seguendo le indicazioni del testo si poteva anche usare la formula dei radicali doppi:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + b}}{2}}\,,$$

che risulta conveniente solo se $a^2 - b$ è un *quadrato perfetto*: infatti inquesto caso il radicale doppio si trasforma nella somma di due radicali smeplici.

L'applicazione di questa formula nel nostro caso fornisce

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{4 - \sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{4^2 - 12}}{2}} - \sqrt{\frac{4 - \sqrt{4^2 - 12}}{2}} = \sqrt{3} - 1\,,$$

dopodiché la conclusione nel senso richiesto dal testo è banale.

Tema 12, **es.**1

Verificare che i due seguenti numeri sono razionali e reciproci:

$$p = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} + 2} - \frac{2\left(\sqrt{2} + 3\right)}{9\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} + \sqrt{6} - \sqrt{3}\,,$$

$$q = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{4}\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\left(2 + \sqrt{5}\right)^2 + 2 - 4\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right)\,.$$

La risoluzione di questo esercizio richiede una serie di calcoli "standard" sui radicali. Ragionando per esempio su p, conviene razionalizzare i due denominatori, moltiplicando numeratore e denominatore della prima frazione per $\sqrt{3} - 2$ e della seconda per $(\sqrt{2} + 1)^2$. Il resto dei calcoli è standard. Analogo discorso per q, dove conviene eseguire prima i calcoli nell'unico denominatore presente, ottenendo così un denominatore razionale.

4 Lezione dell'11 settembre 2008

4.1 Questioni teoriche trattate

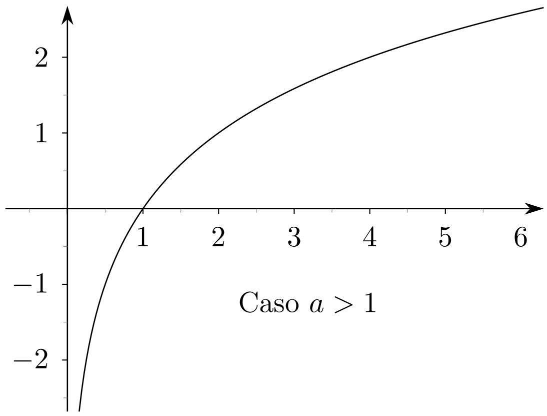
Grafici e proprietà delle funzioni logaritmo

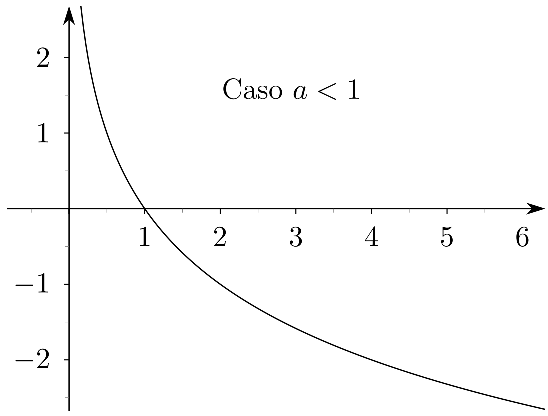
Le funzioni $x \mapsto \log_a x$ hanno due tipi di comportamento completamente diverso, a seconda che $a > 1$ oppure $0 < a < 1$. Precisamente:

- se $a > 1$ sono tutte funzioni *crescenti*;
- se $0 < a < 1$ sono tutte funzioni *decrescenti*.

Si tratta di proprietà di cruciale importanza nella risoluzione delle disequazioni contenenti le funzioni logaritmo.

I grafici hanno l'andamento qui di seguito riportato, nei due casi $a > 1$ e $a < 1$.





Si noti che i due grafici, come quelli di tutte le altre funzioni logaritmo, passano per il punto $(1, 0)$, come conseguenza della proprietà

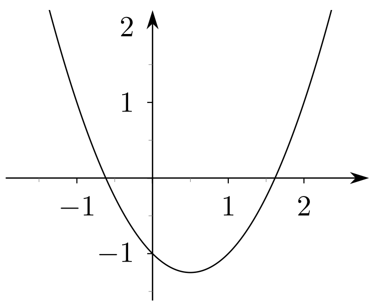
$$\log_a 1 = 0\,,$$

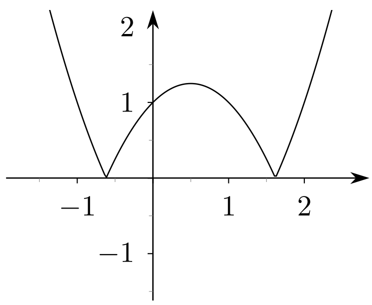
valida per qualunque base a, ovviamente maggiore di 0 e diversa da 1.

Il grafico del valore assoluto di una funzione

Il tracciamento del grafico del valore assoluto di una funzione, a partire dal grafico della funzione stessa è immediatamente deducibile dalla definizione di valore assoluto: per la parte di grafico che "sta sopra l'asse x" non si deve fare alcuna modifica; la parte di grafico che "sta sotto all'asse x" va "ribaltata per simmetria" rispetto all'asse x stessa, in quanto il valore assoluto non ha alcuna influenza sui numeri positivi, mentre sui negativi li inverte solamente di segno.

Nei due grafici che seguono sono proposti il grafico della funzione definita da $f(x) = x^2 - x - 1$ e quello della funzione definita da $g(x) = |f(x)| = |x^2 - x - 1|$.





Risoluzione grafica di equazioni

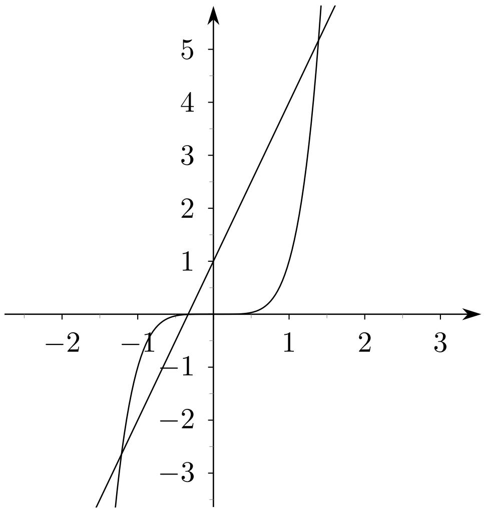
La risoluzione di una equazione in una incognita

$$f(x) = g(x)$$

non può essere sempre fatta con metodi algebrici. Un esempio è fornito dall'equazione

$$x^5 = 3x + 1 \quad \text{oppure} \quad x^5 - 3x - 1 = 0\,,$$

che non ha chiaramente radici razionali e che non può essere risolta con formule algebriche[2]. In casi come questo si può ricorrere a una tecnica grafica che, seppure non fornisce le soluzioni "esatte", può fornire utili informazioni sul numero delle soluzioni ed eventualmente anche stime più o meno buone sul valore delle soluzioni stesse. La tecnica si base sulla rappresentazione grafica delle funzioni presenti nei due membri e sulla individuazione dei loro eventuali punti di intersezione. Nel caso della equazione precedente i grafici delle funzioni a primo e secondo membro sono elementari e sono di seguito riportati.



Dall'esame del grafico si deduce che l'equazione ha 3 soluzioni, rispettivamente appartenenti agli intervalli

$$]-2,-1[\quad , \quad]-1,0[\quad , \quad]1,2[\,.$$

L'informazione sull'intervallo di appartenenza di una soluzione è molto importante per una corretta scrittura di un programma informatico in grado di trovare la soluzione stessa con il grado di approssimazione voluto.

È chiaro che il metodo è applicabile solo se i grafici sono tra quelli costruibili: a questo livello il loro numero è molto basso, ma nel corso di Matematica I il loro numero aumenterà esponenzialmente.

Equazioni di secondo grado e "completamento dei quadrati"

La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado è una delle più importanti tra quelle studiate nella scuola media superiore. Tuttavia essa, all'occorrenza, può essere facilmente ricavata con un procedimento, detto *di completamento dei quadrati*, molto importante in varie circostanze. Si procede con le trasformazioni di seguito indicate.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

[2] Si dimostra che per equazioni di grado superiore al quarto non è possibile trovare una formula risolutiva "per radicali".

$$
\begin{aligned}
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)&=0\\
a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]&=0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x&=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,,
\end{aligned}
$$

in cui ognuno riconosce la formula agognata. Si noti che, a un certo punto, abbiamo semplificato per a (cosa lecita perché $a \neq 0$) e abbiamo estratto la radice quadrata dei due membri, cosa lecita se $b^2-4ac \geq 0$, come ampiamente noto.

Formule di base della geometria analitica del piano

Le formule più importanti della geometria analitica del piano, in un sistema cartesiano ortogonale, sono:

– la formula della distanza tra due punti A e B:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\,;$$

– le coordinate del punto medio di un segmento AB:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\,;$$

– le coordinate del baricentro di un triangolo di vertici A, B, C:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\quad,\quad y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\,.$$

La circonferenza nel piano cartesiano

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano aventi distanza assegnata da un punto fisso detto centro. Questa definizione ci permette di scrivere subito la sue equazione come il luogo dei punti $P(x,y)$ del piano tali che

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2\,,$$

con evidente significato dei simboli.

Sviluppando i calcoli si ottiene un'equazione di secondo grado in due incognite del tipo

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0\,.$$

Viceversa, data un'equazione di secondo grado in due incognite del tipo

$$ax^2+ay^2+bx+cy+d=0\,,\ \text{con } a\neq 0\,,$$

dividendo per a si ottiene l'equazione in forma *canonica* o *standard*

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0\,.$$

Essa rappresenta una circonferenza se e soltanto se

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \geq 0\,;$$

sotto questa condizione il centro della circonferenza è

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}\,,\,-\frac{\beta}{2}\right)\,,$$

mentre il raggio è

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}\,.$$

Se per caso $r = 0$, allora la circonferenza è *ridotta solo al suo centro.*

Si presti particolare attenzione, nel caso di un'equazione del tipo $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$, a *dividere preventivamente* per a prima di procedere ad applicare le formule relative alla circonferenza.

A un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

si può utilmente applicare il metodo del completamento dei quadrati, secondo lo schema che segue, ove abbiamo concentrato alcuni passaggi.

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\
x^2 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{4} + y^2 + \beta y + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0 \\
\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma\,.
\end{gathered}$$

È chiaro che l'equazione ha soluzioni se e solo se

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \geq 0\,,$$

e in questo caso ha l'aspetto dell'equazione del luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tali che la loro distanza da

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}\,,\,-\frac{\beta}{2}\right)$$

sia

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}\,,$$

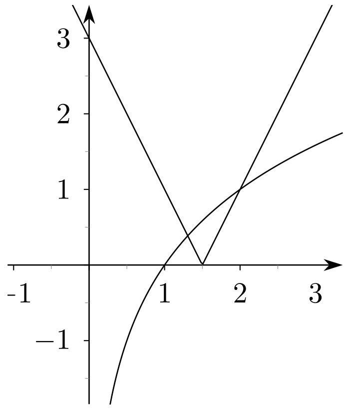
cioè proprio una circonferenza di centro C e raggio r.

Come già accennato, il metodo *del completamento dei quadrati* può essere utile per ricostruire formule in caso di dubbi o necessità.

4.2 Esercizi

Tema 2, **es.**5

Il grafico che segue corrisponde alla risoluzione grafica di una equazione. Scegli l'equazione tra quelle proposte a fianco.



(a) $\log_3 x = |x - 3|$,
(b) $\log_2 x = |2x - 3|$,
(c) $2^x = |3 - x|$,
(d) $\log_2 x = 3 - 2x$.

Per rispondere alla domanda del testo si può seguire questo schema:

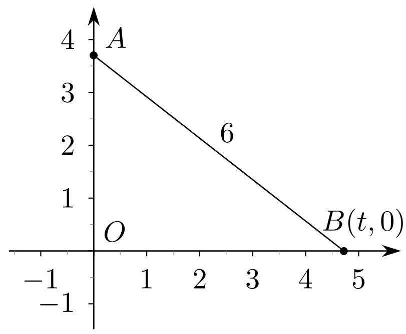
- la risposta (d) è chiaramente errata perchè non è presente il grafico di una retta;
- la risposta (c) è chiaramente errata perchè non è presente alcuna funzione esponenziale;
- le risposte (a) e (b) sono entrambe compatibili con gli andamenti grafici proposti; un esame più dettagliato mostra però che
  - la funzione logaritmo ha un valore valutabile graficamente "vicino a 1" quando x vale 2, mentre un valore decisamente più grande quando x vale 3;
  - il grafico di valore assoluto tocca l'asse x in un valore valutabile graficamente "vicino a $1.5 = 3/2$", e sicuramente lontano da 3.

Tutte queste considerazioni permettono di affermare con assoluta certezza che la risposta corretta è la (b).

Tema 1, **es.**9

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si consideri il segmento AB di lunghezza 6; il punto A appartiene al semiasse positivo delle y e le coordinate di B sono $(t, 0)$ essendo $t \geq 0$. Si scrivano le equazioni parametriche del luogo geometrico $\mathfrak{L}$ descritto dal punto medio del segmento AB al variare del parametro t nell'intervallo $[0, 6]$. Dedurre, infine, l'equazione cartesiana di tale luogo geometrico, descriverne il tipo e tracciarne il grafico.

Cominciamo con il rappresentare nel sistema cartesiano indicato i dati del problema.



Fissato il punto B sull'asse delle x nell'intervallo indicato, la posizione di a può essere trovata con il teorema di Pitagora, osservando che $\overline{OB} = t$ e $\overline{OA} = y_A$, tenendo conto che $y_A \geq 0$ per le condizioni poste dal problema. Dunque

$$t^2 + y_A^2 = 36 \Rightarrow y_A = \sqrt{36 - t^2}\,.$$

Si poteva anche fare un ragionamento più analitico, osservando che A deve stare sull'intersezione tra la circonferenza di centro B e raggio 6 e il semiasse positivo delle y. La scrittura dell'equazione di una circonferenza quando sono noti il centro $C\,(x_C, y_C)$ e il raggio r è una semplice conseguenza della definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano aventi distanza assegnata dal centro:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 .$$

Nel nostro caso si ottiene

$$(x - t)^2 + (y - 0)^2 = 36 .$$

Intersecando questa circonferenza con l'asse delle y, e considerando solo la soluzione con $y \geq 0$, si ottiene esattamente lo stesso valore trovato prima.

A questo punto le coordinate del punto medio M del segmento AB si trovano facilmente e si ottiene:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{36 - t^2}}{2} \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 6] .$$

Le due equazioni scritte forniscono le *equazioni parametriche del luogo* richiesto. Per determinarne l'equazione cartesiana e valutare di che tipo di luogo si tratta bisogna "eliminare la t". Basterà ricavarla nella prima equazione e sostituirla nella seconda (non sempre le cose sono così facili|). Si ottiene:

$$y = \frac{\sqrt{36 - (2x)^2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}\,, \text{ con } x \in [0, 3] .$$

Per valutare il tipo di luogo conviene tentare di semplificarne la scrittura. Si può osservare che, essendo $y \geq 0$, si possono elevare ambo i membri al quadrato, ottenendo

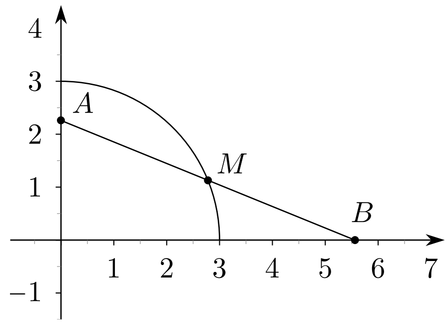
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Abbiamo tralasciato la condizione $x \leq 3$, in quanto compresa nelle restanti. Si tratta del quarto di circolo di centro l'origine e raggio 3, contenuto nel primo quadrante, compresi gli estremi.

Si presti particolare *attenzione* al fatto che, mentre nell'equazione

$$y = \frac{\sqrt{36 - t^2}}{2}$$

la condizione $y \geq 0$ può anche essere tralasciata, in quanto compresa nel testo (il secondo membro, essendo un radicale, è sicuramente non negativo!), dopo elevamento al quadrato la condizione va esplicitata, in quanto l'elevazione al quadrato "fa sparire" l'informazione che $y \geq 0$.



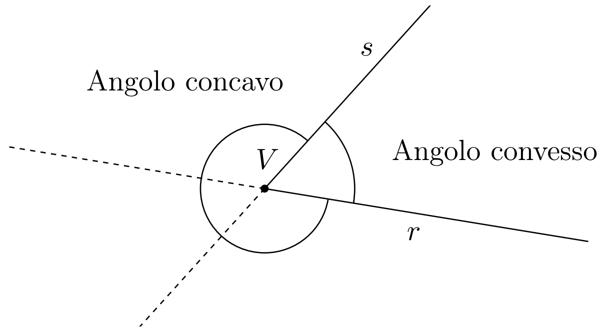
5 Lezione del 16 settembre 2008

5.1 Questioni teoriche trattate

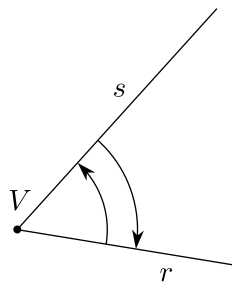
Angoli e angoli orientati

La definizione elementare di angolo è la seguente: *Angolo è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi l'origine in comune.*

Le due semirette si chiamano *lati* dell'angolo, l'origine comune *vertice*. Se le due semirette non sono una sul prolungamento dell'altra le due parti di piano sono diverse: la più grande contiene il prolungamento dei lati, la più piccola no. La più grande si chiama *angolo concavo*, la più piccola *angolo convesso*.



In assenza di precisazioni, di norma, parlando di angolo individuato da due semirette intenderemo sempre riferirci a quello convesso. In questa definizione l'ordine in cui le due semirette sono prese non ha alcuna influenza: si potrebbe dire che l'angolo è l'*insieme* $\{ r, s \}$ delle due semirette (naturalmente aventi l'origine in comune).



In moltissime questioni interessa attribuire un *orientamento* all'angolo, esattamente come oltre ai segmenti "ordinari" si possono considerare i segmenti orientati. Orientare un angolo significa, sostanzialmente, attribuire un ordine ai due lati. È come dire che un angolo orientato è una *coppia* (r, s) di semirette aventi l'origine in comune. Uno stesso angolo è dunque supporto di due angoli orientati in verso opposto.

Una volta orientato un angolo è anche possibile attribuire loro un segno, purchè sia stato scelto nel piano un verso di riferimento. Di solito si procede fissando nel piano un sistema cartesiano (ortogonale per semplicità) in cui i due assi di riferimento abbiano un determinato ordine; si diranno poi *positivi* gli angoli orientati "concordemente" al verso scelto per il sistema cartesiano, *negativi* gli altri. A livello elementare si usa scegliere il verso sul sistema cartesiano in senso "antiorario" e allora saranno positivi gli angoli orientati in senso antiorario, negativi gli altri. Si tenga presente però che il concetto di orario e antiorario non è assoluto ed è difficile se non impossibile darne una precisa definizione.

Misura degli angoli

Trattando gli angoli ha senso misurarne "l'ampiezza" (attenzione: ovviamente non l'area, trattandosi di parti illimitate di piano, tranne nel caso dell'angolo nullo). La cosa si può fare nello stesso modo in cui si opera con le misure delle altre grandezze: si sceglie un angolo campione e si verifica quante volte il campione o i suoi sottomultipli sono contenuti nell'angolo dato, tenendo conto che si possono presentare problemi di incommensurabilità identici a quelli che si presentano, per esempio, nella misura dei segmenti. Storicamente si sono affermati due diverse unità di misura possibili: il *grado sessagesimale*, detto *deg*, pari alla , e il grado centesimale, detto *gra* o *grad*, pari alla 400ª parte del piano (angolo giro). In questi sistemi l'angolo retto misura, rispettivamente 90 deg e 10 gra. Nella misura in deg anche gli angoli pari a $2/3$, $1/2$ e $1/3$ di angolo retto (angoli molto importanti in tutte le applicazioni) hanno misura espressa da un numero intero, rispettivamente 60 deg, 45 deg, 30 deg; nella misura in gra ciò succede solo per l'angolo pari alla metà di un retto, che misura 50 gra, mentre gli angoli pari a $2/3$ e $1/3$ di retto misurano, rispettivamente, $66,\bar{6}$ gra e $33,\bar{3}$ gra, numeri che purtroppo non sono interi né decimali finiti[3].

In matematica comunque nessuna di queste due tecniche per misurare l'ampiezza degli angoli è adatta e la scelta che si fa è completamente diversa. Precisamente dato un angolo α si considera una circonferenza di raggio r arbitrario con centro nel vertice dell'angolo; l'angolo stacca sulla circonferenza un arco di lunghezza, diciamo, a. Ebbene si chiama *misura in radianti* dell'angolo α il rapporto

$$(*) \qquad \alpha^{\mathrm{r}} = \frac{a}{r}$$

tra l'arco e il raggio. Trattandosi di un rapporto di grandezze omogenee si ottiene un "numero puro", privo di dimensione. Siccome gli angoli in matematica sono sempre misurati in radianti abitualmente si sottintende l'apice "r" e si scrive α sia per l'angolo che per la sua misura.

Questo sistema di misura ha enormi vantaggi, come si vedrà nel corso di analisi. Ne segnaliamo comunque uno, importante per le applicazioni alla fisica: dalla $(*)$ si trae subito $a = \alpha\, r$ e da qui, in un moto circolare uniforme, dividendo per il tempo si ottiene $v = \omega\, r$, formula di grande importanza che lega la velocità periferica alla velocità angolare.

Si osservi inoltre che, se si considera una circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice dell'angolo, allora la misura in radianti dell'angolo è espressa dallo stesso numero che esprime la lunghezza dell'arco (anche se dimensionalmente si tratta di due cose diverse): si può addirittura confondere, ento certi limiti, gli angoli con gli archi, e diventa particolarmente facile pensare ad angoli "maggiori di un angolo giro", se si pensa a un punto che descrive un arco di circonferenza più lungo della circonferenza stessa, ripassando più volte su se stesso, come avviene normalmente in un moto circolare. Gli "angoli più grandi di un angolo giro" sono importanti in tutte le applicazioni e si possono chiamare *angoli generalizzati.*

Le funzioni seno e coseno

Dato un angolo α (o un numero reale α che può essere pensato come la misura di un angolo), si può trasportare l'angolo nel piano fino a farne coincidere il vertice con l'origine del sistema di coordinate e il primo lato con il semiasse positivo delle x: il secondo lato interescherà allora la cirocnferenza di centro l'origine e raggio 1 (detta anche *circonferenza goniometrica*) in un punto $P(x_P,\, y_P)$. Si pone allora, per definizione,

$$\cos\alpha = x_P \quad , \quad \sin\alpha = y_P\,.$$

Dalla definizione scende immediatamente che

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1\,,$$

[3] L'uso di numeri decimali illimitati nei calcoli può provocare, sui sistemi di calcolo automatico, gravi problemi di arrotondamento. Si provi a impostare il seguente calcolo su una calcolatrice tascabile:

$$1 \colon 3 \times 4 - 1\,.$$

Poiché il risultato è $1/3$, sul display dovrebbe apparire (e in effetti appare) $0.33\ldots3$. Il problema è che se si moltiplica di nuovo per 4 e si sottrae 1 dovrebbe sempre apparire sul display $0.33\ldots3$: purtroppo se si ripete questo procedimento una ventina di volte si trovano risultati sballati, e diversi a seconda della calcolatrice in uso. L'errore peggiora sensibilmente continuando nelle iterazioni del calcolo.

formula che viene detta *Formula fondamentale della trigonometria* e che di solito è scritta nella forma

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,.$$

È importante per le applicazioni memorizzare i valori di coseno e seno per gli angoli importanti già ricordati (oltre che per altri che si incontreranno nel corso di analisi):

angolo (rad)	angolo (deg)	cos	sin
0	$0°$	1	0
$\pi/6$	$30°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$60°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	$90°$	0	1

Introdotta la funzione seno possiamo accennare al motivo per il quale in matematica è praticamente obbligatorio misurare gli angoli con il sistema dei radianti. Si esaminino le seguenti tabelle.

angolo (deg)	sin
$10°$	0.1736
$5°$	0.0872
$1°$	0.0175
$0.1°$	0.0017
$0.01°$	0.0002

angolo (rad)	sin
10	-0.5440
5	-0.9589
1	0.8415
0.1	0.0998
0.01	0.01

Ebbene, la cosa che interessa è il fatto che, come mostra la seconda tabella, se gli angoli sono misurati in radianti, per angoli molto piccoli la misura di un angolo e quella del suo seno tendono a coincidere, tanto che "al limite", il loro rapporto tenderà a 1. Questo fatto per esempio è cruciale nello studio delle piccole oscillazioni di un pendolo, dove l'euqazione che regola il moto diventa facilmente risolubile, come si vedrà nel corso di fisica, proprio per l'approssimazione che si fa per angoli piccoli: $\sin\alpha \simeq \alpha$.

Risoluzione di triangoli

L'introduzione delle funzioni seno e coseno permettono di dimostrare alcune formule di grande importanza sui triangoli, formule che permettono di "risolvere i triangoli" non solo ragionando sui lati (come si fa per esempio sui teoremi di Pitagora ed Euclide), ma anche sugli angoli. Adottiamo la solita convenzione che in un triangolo ABC i lati opposti ai vertici A, B, C si indicano con a, b, c, mentre gli angoli con quei vertici si indicano con α, β, γ, rispettivamente. I teoremi che interessano sono i seguenti.

1. *Triangoli rettangoli.*

$$\text{cateto}=\text{ipotenusa}\times\text{coseno(angolo acuto adiacente al cateto)};$$
$$\text{cateto}=\text{ipotenusa}\times\text{seno(angolo opposto al cateto)}\,.$$

2. *Triangoli qualsiasi.*
   - Teorema del coseno o di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

– Teorema dei seni o di Eulero

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,,$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo. Questo teorema si può enunziare dicendo che in un triangolo esiste proporzionalità tra i lati e il seno degli angoli opposti (attenzione: *non* tra i lati e gli angoli opposti!).

Formule trigonometriche

Già in altre circostanze, dopo aver introdotto una nuova operazione in matematica, ci si è preoccupati di scoprire quali sono le sue "relazioni" con le operazioni di somma e prodotto. Alcuni dei risultati si possono compendiare nella seguente tabella.

$$\begin{array}{cc}
\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b} & \sqrt{ab}\overset{!}{=}\sqrt{a}\sqrt{b}\\
\dfrac{1}{a+b}\neq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{ab}\neq\dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{b}\\
|a+b|\leq|a|+|b| & |ab|=|a|\cdot|b|\\
\log(a+b)\neq\log a+\log b & \log(ab)\overset{!}{=}\log a+\log b
\end{array}$$

dove il punto esclamativo sta a ricordare che l'uguaglianza può essere problematica, come già visto.

Anche per le funzioni seno e coseno si ricerca innanzitutto se è possibile esprimere il seno e il coseno di una somma noti che siano il seno e il coseno di due angoli. Si trova, come è noto,

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\qquad\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\,,$$

dette *formule di addizione e sottrazione*.

Da qui si ottengono subito le formule

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\qquad\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\,,$$

dette *formule di duplicazione*.

Si noti che, mentre $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$.

6 Lezione del 18 settembre 2008

6.1 Questioni teoriche trattate

Ancora sulle formule goniometriche

Molto importanti nelle applicazioni sono le *formule di bisezione*:

$$(*)\qquad\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad,\quad\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,.$$

Il segno davanti al radicale deve essere scelto tenendo conto del quadrante dove si trova l'angolo $\alpha/2$. Si noti che applicando ripetutamente queste formule è possibile trovare anche le funzioni trigonometriche di $\alpha/4$, $\alpha/8$, ldots, $\alpha/2^n$. È invece molto importante ricordare che *non* è possibile scrivere formule di trisezione, in accordo con il fatto che la trisezione di u angolo non è possibile con riga e compasso. Naturalmente questo non esclude che ci siano alcuni angoli che possono essere divisi in tre parti con riga e compasso (un esempio è quello dell'angolo retto): il problema è che la cosa non è realizzabile per tutti gli angoli.

Scrivendo nelle formule (∗) 2β al posto di α ed elevando al quadrato si ottiene la seguente forma delle formule di bisezione, molto utile nella risoluzione delle disequazioni.

$$\sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2} \quad , \quad \cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2} .$$

Anche la seguente forma della formula di duplicazione per il seno è molto utile nella risoluzione delle disequazioni, come vedremo.

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} .$$

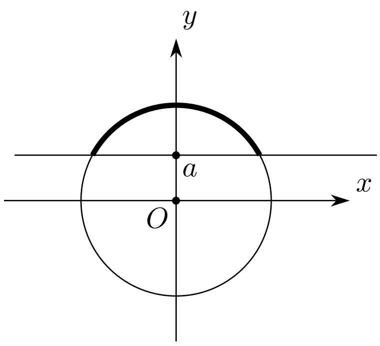
Equazioni e disequazioni goniometriche

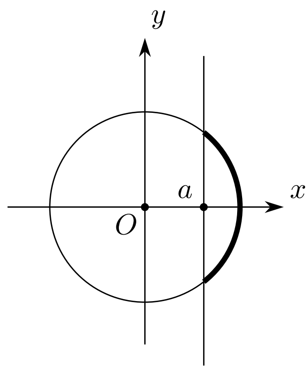
La risoluzione delle equazioni e disequazioni goniometriche è, in genere, molto difficile, per non dire impossibile. Solo alcuni casi speciali si lasciano trattare in maniera semplice. Fisseremo l'attenzione su alcuni di questi.

Equazioni e disequazioni elementari

- $\sin(x) \lesseqgtr a$;
- $\cos(x) \lesseqgtr a$.

Conviene ricorrere alla rappresentazione della circonferenza goniometrica e ragionare come evidenziato nei due grafici seguenti, di cui quello di sinistra si riferisce al caso $\sin x > a$ e quello di destra al caso $\cos x > a$.





Equazioni e disequazioni contenenti solo seno o solo coseno, in particolare di secondo grado

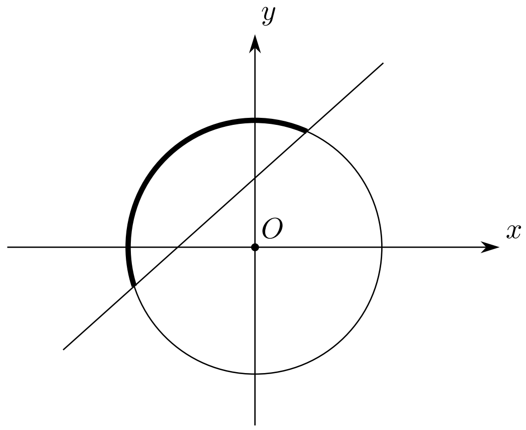
- $a\sin^2 x + b\sin x + c \lesseqgtr 0$
- $a\cos^2 x + b\cos x + c \lesseqgtr 0$

Si risolvono ponendo $\sin x = t$, oppure $\cos x = t$, e riconducendosi a disequazioni elementari dopo aver risolto le corrispondenti equazioni o disequazioni algebriche ottenute.

Disequazioni lineari in sin *e* cos.

$$a\cos x + b\sin x + c \lesseqgtr 0 .$$

Si risolvono ponendo $\cos x = X$, $\sin x = Y$ e rappresentando graficamente, nel piano OXY, la retta $aX + bY + c = 0$ e la circonferenza (goniometrica) $X^2 + Y^2 = 1$. Successivamente è facile controllare se la disequazione è verificata "sopra" o "sotto" la retta, individuando così l'arco di circonferenza in cui la disequazione data è verificata. Si veda il grafico proposto di seguito.



Si osservi come questo tipo di disequazioni possa essere pensato, soprattutto usando questa tecnica, come una generalizzazione di quelle elementari, in quanto si tratta si passare da una retta orizzontale o verticale a un obliqua.

Disequazioni omogenee di secondo grado in sin *e* cos.

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d \lesseqqgtr 0\,.$$

Si risolvono usando le formule di bisezione e duplicazione:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,, \qquad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,,$$

che permettono di trasformare la disequazione in una lineare in seno e coseno, con la variabile $2x$.

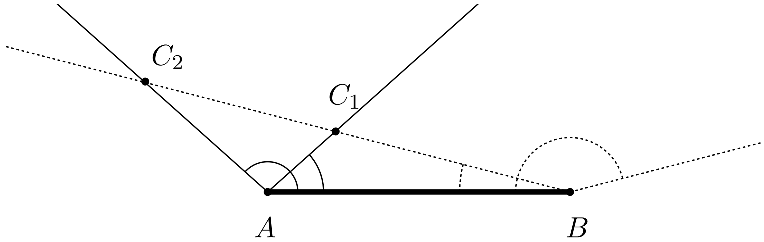
Naturalmente i metodi proposti non sono gli unici possibili, ma hanno il vantaggio di utilizzare estesamente le rappresentazioni grafiche, cosa oltremodo utile e vantaggiosa.

6.2 Esercizi

Tema 23, **es.**9

In un triangolo ABC si ha $\overline{AB} = 2a$, $\sin\alpha = 2/3$ e $\sin\beta = 1/4$, essendo $\alpha = C\hat{A}B$ e $\beta = C\hat{B}A$. Calcolare l'altezza h relativa ad AB.

Il problema richiede una discussione preliminare, in quanto l'assegnazione del seno di un angolo in un triangolo non permette di determinare univocamente l'angolo: poiché gli angoli di un triangolo sono sempre compresi tra 0 e π, assegnando il seno ci sono due angoli, tra di loro supplementari, che hanno quel valore del seno. Nel nostro caso ciò succede sia per l'angolo α che per l'angolo β. È chiaro che uno solo dei due potrà essere ottuso. ma dovremo esaminare i vari casi possibili. Nella figura di seguito sono rappresentate le varie situazioni possibili, avendo indicato con tratto continuo i due valori possibili per l'angolo α e con tratteggio i due valori possibili per β.



La figura mostra subito che l'opzione α acuto e β ottuso è da escludere: rimangono il caso che i due angoli siano entrambi acuti (e così si ottiene il triangolo AC_1B) e quello che il primo sia ottuso e il secondo acuto (e così si ottiene il triangolo AC_2B). Risolviamo esplicitamente il primo caso. Osserviamo che si ha (con le solite convenzioni sui nomi degli angoli)

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta)\,.$$

Allora

$$\sin\gamma = \sin\big(\pi - (\alpha+\beta)\big) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Occorre trovare il coseno di α e quello di β. Entrambi saranno positivi per l'ipotesi fatta sugli angoli in questione. Si trova:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e, analogamente,

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}\,.$$

Trovato $\sin\gamma$ si può applicare il teorema dei seni al triangolo AC_1B, ottenendo

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}\,.$$

Da qui si trova subito $\overline{BC}$. Non resta che applicare uno dei teoremi sui triangoli rettangoli al triangolo C_1HB (H è il piede della perpendicolare condotta da C_1 ad AB) per concludere. Si trova

$$h = \frac{4a}{(2\sqrt{3}+1)\sqrt{5}}\,.$$

Nell'altro caso l'unica cosa che cambia è il coseno di α, che sarà negativo:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

Il resto procede esattamente come prima.

Prima di concludere osserviamo che nei teoremi di trigonometria sui triangoli non intervengono mai esplicitamente gli angoli, ma sempre il seno o coseno degli stessi: non spaventarsi dunque se il testo fornisce il seno e/o il coseno degli angoli, anziché gli angoli. Per effettuare una accurata costruzione della figura (indispensabile per risolvere agevolmente qualunque problema geometrico) si può o ricorrere alla calcolatrice per ottenere un valore ottimamente approssimato di un angolo di cui viene dato o il seno o il coseno o, *molto molto meglio* effettuare, se possibile, una costruzione con riga e compasso.

Tema 2, **es.**4

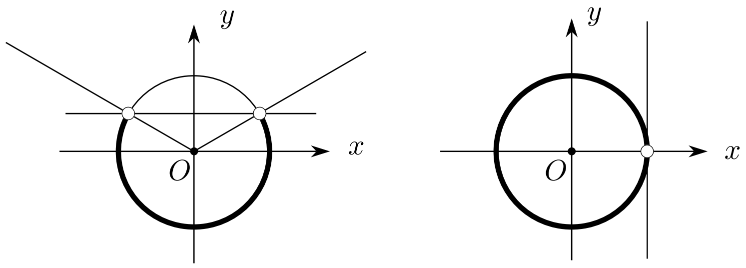
Risolvere la disequazione

$$\frac{1-2\sin x}{1-\cos x} > 0\,.$$

Trattandosi di una disequazione fratta si deve trovare il segno di numeratore e denominatore. Per fare questo risolviamo le disequazioni

$$1-2\sin x > 0 \Rightarrow \sin x < \frac{1}{2}$$
$$1-\cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 1$$

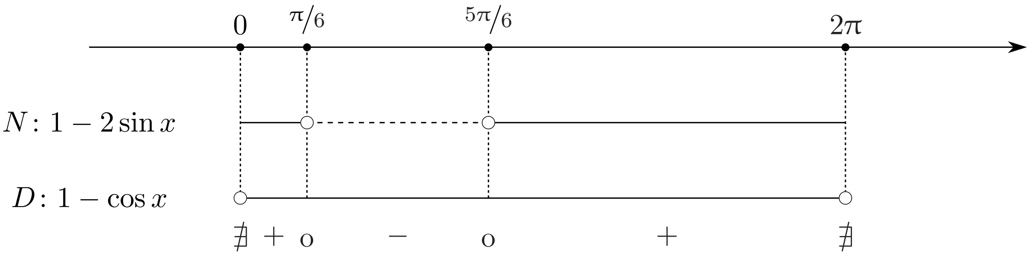
Per la risoluzione delle due disequazioni utilizziamo i grafici di seguito riportati.



Dai grafici deduciamo che la prima disequazione è verificata, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, per

$$0 \le x < \frac{\pi}{6} \cup \frac{5\pi}{6} < x \le 2\pi\,,$$

mentre la seconda per tutti gli x tranne 0 (e naturalmente 2π). In corrispondenza di $\pi/6$ e $5\pi/6$ il numeratore si annulla; in corrispondenza di 0 si annulla il denominatore (e quindi questo punto andrà escluso dal dominio). Si può costruire, sempre nell'intervallo $[0, 2\pi]$, il seguente *grafico di segno.*



Dall'analisi del grafico si traggono subito le conclusioni:

$$x \in]0,\ \pi/6[\cup]5\pi/6\,,\ 2\pi[\,.$$

A questi intervalli andranno aggiunti tutti quelli che si ottengono per periodicità:

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \left]2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,, 2\pi + 2k\pi\right[\right\}\,.$$

7 Lezione del 19 settembre 2008

7.1 Esercizi

Tema 2, **es.**7

Consideriamo un triangolo di lati a, b e c opposti rispettivamente agli angoli α, β e γ. Calcolare a e b sapendo che $c = 1$, $\alpha = 2\beta$ e $\cos\alpha = 2/5$.

Cominciamo con l'osservare che l'assegnazione del coseno dell'angolo α individua univocamente l'angolo α stesso come angolo acuto. Anche l'angolo β sarà ovviamente acuto e a questo punto, usando le formule di bisezione si potranno trovare il seno e il coseno di β. naturalmente, all'occorrenza, si potrà anche ricavare il seno di α. Osservando poi che $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, sarà possibile anche, se necessario, trovare il seno e il coseno di γ: ribadiamo ancora una volta che sono proprio il seno e il coseno degli angoli che interessano, più che il valore degli angoli stessi. Tenuto conto che il testo assegna un solo lato, il teorema da usare sarà necessariamente quello dei seni. Per esempio, se vogliamo trovare b, potremo usare la formula

$$(*)\qquad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}
\sin\beta = \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-{}^{2}/_{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{10}}\,;\\
\cos\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{3}{10}} = \sqrt{\frac{7}{10}}\,;\\
\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}}\,.
\end{aligned}$$

Ora possiamo trovare il seno di γ.

$$\sin\gamma = \sin[\pi-(\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \dots = \frac{9\sqrt{3}}{5\sqrt{10}}.$$

La determinazione di b è ora immediata sulla base di $(*)$ e si ottiene $b = {}^{5}/_{9}$. Analogamente si può procedere per trovare a, ancora applicando il teorema dei seni, oppure, a questo punto, anche quello del coseno.

Tema 22, **es.**6

Risolvere la seguente disequazione

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x \geq 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Applichiamo le formule (di bisezione la prima e di duplicazione la seconda)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}\,,$$

ottenendo

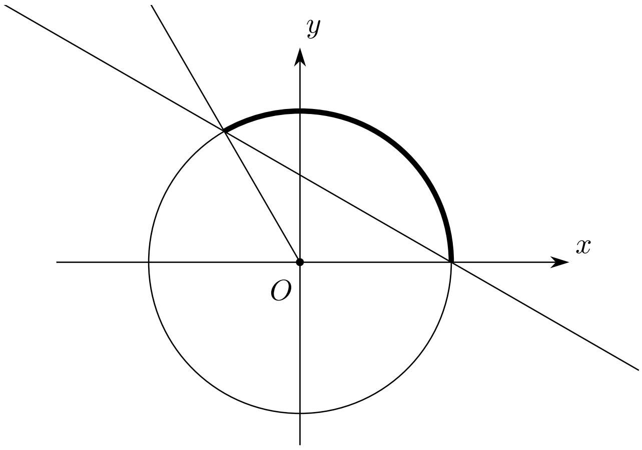
$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 1 \geq 0\,.$$

Posto $2x = t$ otteniamo

$$\cos t + \sqrt{3}\sin t - 1 \geq 0\,.$$

Adottiamo la soluzione grafica:

$$\begin{cases} X + \sqrt{3}Y - 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Si ottiene, tenendo conto anche della periodicità,

$$2k\pi \le t \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,.$$

Sostituendo nuovamente $2x$ al posto di t e dividendo per 2 si trova

$$k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi\,.$$

Siccome il testo chiede le soluzioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$, basterà considerare solo i casi $k = 0$ e $k = 1$, ottenendo

$$x \in \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi,\ 4\frac{\pi}{3}\right]$$

8 Lezione del 23 settembre 2008

8.1 Esercizi

Tema 17, **es.**5

Risolvere nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la disequazione

$$\sin^2 x - \sin x + \cos x - \sin x \cos x \ge 0\,.$$

Poiché la disequazione proposta non rientra in nessuno degli schemi elementari normalmente trattati, tentiamo di operare una scomposizione in fattori. Conviene risolvere intanto nell'intervallo $[0, 2\pi]$ e poi trovare le soluzioni nell'intervallo richiesto, sfruttando la periodicità. Si ottiene, successivamente,

$$\sin x(\sin x - 1) - \cos x(\sin x - 1) \ge 0$$
$$(\sin x - 1)(\sin x - \cos x) \ge 0$$

Si tratta ora di trovare il segno del prodotto di due fattori, con la usuale regola dei segni. Il primo fattore è sempre negativo tranne per $x = \pi/2$, dove si annulla. Per il segno del secondo fattore si deve risolvere

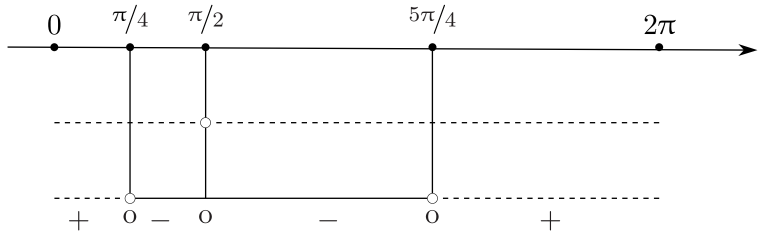
$$\sin x - \cos x > 0\,.$$

La cosa potrebbe essere fatta in via elementare, ma si può anche procedere normalmente con la risoluzione di una disequazione elementare in seno e coseno.

$$\begin{cases} Y - X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Si deduce facilmente che questo fattore è positivo nell'intervallo $]\pi/4,\ 5\pi/4[$, nullo agli estremi dell'intervallo e negativo altrove.

Costruendo il grafico si ottiene:



Le conclusioni sono ora immediate:

$$x \in \left[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\pi\right\}.$$

Tema 14, **es.**5

Verificare che l'equazione $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ ha una soluzione intera e risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \big||x| - 1\big| \geq 2 \\ x(x^2 - 1) > x^2 + 2 \end{cases}.$$

Le possibili soluzioni razionali dell'equazione data sono $\{\pm 1, \pm 2\}$ e si verifica subito che 2 è soluzione, ed è proprio quella richiesta. Il polinomio a primo membro si può allora dividere per $x - 2$, ottenendo $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$. A questo punto si conclude subito che la seconda equazione proposta ha per soluzioni gli $x > 2$. Tenendo conto che si deve fare un sistema, cioè trovare le soluzioni comuni a due disequazioni, si può, nella prima, tranquillamente supporre $x > 2$, per cui

$$\big||x| - \big| = |x - 1|,$$

e ancora, sempre per lo stesso motivo,

$$|x - 1| = x - 1.$$

Dunque la prima disequazione è verificata, per quanto ci interessa, per $x \geq 3$. La conclusione è immediata: $x \in [3, +\infty[$.

Naturalmente si poteva anche procedere nella maniera tradizionale, esaminando i vari casi che si presentano a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto.

<table>
<tr><td colspan="2">Caso $x \geq 0$

$|x - 1| \geq 2$</td><td colspan="2">Caso $x < 0$

$|-x - 1| \geq 2$</td></tr>
<tr><td>Caso $x \geq 1$

$x - 1 \geq 2$</td><td>Caso $x < 1$

$-x + 1 \geq 2$</td><td>Caso $x \leq -1$

$-x - 1 \geq 2$</td><td>Caso $x > -1$

$x + 1 \geq 2$</td></tr>
</table>

Le soluzioni dei vari casi, tenendo conto delle condizioni esplicitate, sono:

$x \geq 3$	$\emptyset$	$x \leq -3$	$\emptyset$

Le conclusioni finali sono naturalmente le stesse di prima, anche se ora abbiamo trovato in dettaglio le soluzioni della prima disequazione del sistema.

Tema 9, **es.**2

Risolvere la seguente equazione trigonometrica

$$\sin 3x - \sin x - (2\cos^2 x - 1) = 0.$$

Si possono applicare le formule di triplicazione (magari ricavandole se non si ricordano!). Si ottiene

$$3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - \sin x - 2\cos^2 x + 1 = 0\,.$$

Conviene trasformare tutto in seno, usando la formula fondamentale $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Semplificando si ha

$$-4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0\,.$$

Il primo membro si può scomporre con un raccoglimento parziale, ottenendo

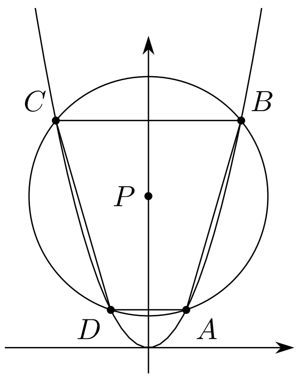
$$-2\sin^2 x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1) = (2\sin x - 1)(1 - 2\sin^2 x)$$

A questo punto la risoluzione è immediata, in quanto si è scomposto in fattori perfettamente "trattabili". Si ottiene:

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}\,.$$

Esercizio 2.34

Nel piano Oxy è data la parabola $\mathcal{C}\colon\ y = x^2$. Trova il raggio e l'equazione della circonferenza di centro $P(0,4)$ che interseca su $\mathcal{C}$ i quattro vertici di un trapezio isoscele di area $5 + 5\sqrt{6}$. Fornisci le coordinate dei quattro vertici del trapezio.



La circonferenza richiesta avrà un raggio r incognito e un'equazione del tipo:

$$(x-0)^2 + (y-4)^2 = r^2\,.$$

L'area del trapezio sarà:

$$(x_A + x_B)(y_B - y_A)\,.$$

Basterà dunque trovare le coordinate dei punti A e B in funzione di r e inserirle nel calcolo dell'area che andrà uguagliata a $5 + 5\sqrt{6}$. Le coordinate si trovano intersecando la parabola con la circonferenza, con un po' di attenzione nei calcoli, che comunque sono standard. Si trova $r = \sqrt{10}$.