Esercizio 1, Tema 15 del 19/03/07[1]

Verificare che il numero

$$a = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

è un intero positivo.

Una possibile soluzione di questo esercizio è la seguente.

Elevando al cubo ambo i membri si ottiene, successivamente:

$$a^3 = 20 + \sqrt{392} + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})^2(20 - \sqrt{392})} + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})^2} + 20 - \sqrt{392}$$

$$a^3 = 40 + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})(20 + \sqrt{392})} + 3\sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})(20 - \sqrt{392})2}$$

$$a^3 = 40 + 3\sqrt[3]{8(20 + \sqrt{392})} + 3\sqrt[3]{8(20 - \sqrt{392})}$$

$$a^3 = 40 + 6\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + 6\sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

$$a^3 = 40 + 6\left(\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}\right)$$

$$a^3 = 40 + 6a$$

$$a^3 - 6a - 40 = 0$$

L'equazione scritta nell'ultima riga è un'equazione di terzo grado nell'incognita a, che ha come radice intera $a = 4$. Eseguendo la divisione del polinomio a primo membro per $a - 4$ si ottiene

$$(a - 4)(a^2 + 4a + 10) = 0$$

e da qui si vede che l'equazione ha solo il numero 4 come soluzione.

Se ne conclude che $a = 4$.

[1] La raccolta completa dei temi di Matematica di Base assegnati presso l'Università degli Studi di Udine, con allegata una scelta di esercizi proposti, è reperibile al link http://www.batmath.it/matematica/mat_base/temi_esame.pdf.