Il teorema di Rouché-Capelli

Luciano Battaia

Questi appunti[1], ad uso degli studenti del corso di Matematica (A-La) del corso di laurea in Commercio Estero dell'Università Ca' Foscari di Venezia, campus di Treviso, contengono un'integrazione al testo "Metodi matematici per l'analisi economica e finanziaria" di K.Sydsæter, P.Hammond e A.Strøm e si inseriscono dopo il paragrafo 13.8.

Cominciamo con l'introdurre il concetto di minore estratto da una matrice qualunque.

Data una matrice qualunque $A_{m\times n}$, dunque anche non quadrata, scegliamo k righe e k colonne qualsiasi: gli elementi comuni a queste k righe e k colonne costituiscono una matrice quadrata, che si chiama *matrice estratta* dalla matrice A; di questa matrice si può calcolare il determinante che chiameremo *minore*, o anche minore estratto, di ordine k. Equivalentemente si può dire che una matrice estratta è una matrice ottenuta dalla matrice data sopprimendo alcune righe e alcune colonne, con la condizione che le righe e colonne rimanenti formino una matrice quadrata.

Per esempio dalla matrice $A_{2\times 3}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

si possono estrarre 6 minori di ordine 1

$$1,\ 3,\ -1,\ -2,\ 1,\ -3,$$

e tre minori di ordine 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7,\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-5,\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-8,\quad .$$

Il massimo intero positivo r per cui esiste un minore di ordine r diverso da zero si chiama *rango* della matrice.

Esempio 1. Il rango della matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

è 3, perché, per esempio, il minore di ordine 3 ottenuto con la prima, la terza e la quarta colonna vale 7, come è facile provare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=7\,.$$

[1]Versione del 3 dicembre 2016.

Esempio 2. Il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 8 & -6 \end{pmatrix},$$

è 2, perché l'unico minore di ordine 4 (cioè il determinante della matrice stessa) vale 0 (provarlo per esercizio), tutti i minori di ordine 3 valgono sempre 0 (anche questo è da provare per esercizio), mentre per esempio il minore di ordine 2 ottenuto "intersecando" le prime due righe e le prime due colonne vale (è immediato!) 7.

In sostanza per determinare il rango di una matrice si procede con il seguente schema.

— Si cominciano a considerare le matrici estratte di ordine massimo possibile: non appena un determinante di una di queste matrici è diverso da zero, si conclude che il rango è l'ordine di questa matrice e il processo termina.
— Se tutti i determinanti delle matrici di ordine massimo possibile sono nulli, si considerano tutte quelle di un ordine inferiore: non appena un determinante di una di queste matrici è diverso da zero, si conclude che il rango è l'ordine di questa matrice e il processo termina.
— Si procede così di seguito fin quando si trova un determinante di una matrice estratta che è diverso da zero.

Si noti che il rango di una matrice può essere *solo un numero naturale*, minore od uguale al minimo tra il numero di righe e di colonne della matrice stessa. Se poi la matrice è diversa dalla matrice nulla, il rango è almeno 1.

Il seguente teorema è utile per verificare la dipendenza o indipendenza lineare di m vettori di $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1. *Data una matrice $A_{m\times n}$, il rango di A è il massimo numero di vettori riga o di vettori colonna linearmente indipendenti.*

Esempio 3. Si considerino i due vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Li disponiamo in una matrice a due colonne e tre righe:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2 perché

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$$

Dunque le sue due colonne (i due vettori dati) sono linearmente indipendenti. Nulla cambia se i vettori si dispongono in riga anziché in colonna.

Si noti che da questo teorema si può concludere che m vettori di $\mathbb{R}^n$, con $m > n$ sono sempre dipendenti: infatti disponendo i vettori in colonna si ha una matrice con n righe e m colonne che non può avere rango maggiore di n, visto che $m > n$.

Richiamiamo ora alcuni concetti già in parte presentati sul libro di testo.

Un sistema lineare (qualunque sia il numero di equazioni e di incognite) può avere solo tre comportamenti rispetto alla sua risolubilità:

1. non avere soluzioni, nel qual caso si dice *incompatibile* o *inconsistente*;
2. avere una sola soluzione, nel qual caso si dice *determinato*;
3. avere infinite soluzioni, nel qual caso si dice *indeterminato*.

Un sistema che abbia soluzioni (una o infinite) si dice *compatibile* o *consistente*.

Per valutare la risolubilità del sistema occorre considerare, come già abbiamo visto con il metodo di Gauss, oltre alla matrice incompleta A, anche la *matrice completa*, che si indica con $A|b$ e si ottiene aggiungendo, a destra, alle colonne di A la colonna dei termini noti.

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{1}$$

La separazione dell'ultima colonna con una barra verticale consente di visualizzare immediatamente nella stessa scrittura sia la matrice incompleta che quella completa. In sostanza parlando di sistemi lineari, ci si può limitare a scrivere direttamente la matrice completa, nel modo indicato: da questa scrittura, volendo, è immediato ricavare la scrittura tradizionale con le equazioni e le incognite. Negli esempi che seguono faremo sempre così.

La risolubilità o meno del sistema lineare si può decidere sulla base del seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

Teorema 2 (Teorema di Rouché-Capelli). *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite ha soluzioni se e solo se la matrice incompleta e quella completa hanno lo stesso rango. Il rango comune delle due matrici, quando il sistema è compatibile, si chiama anche* rango del sistema.

Esempio 4. Il sistema lineare di matrice completa

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

non ha soluzioni, perché la matrice completa ha determinante

$$\det(A|b) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

e quindi rango 3, mentre quella incompleta potrebbe avere al massimo rango 2, in quanto ha solo due colonne.

Esempio 5. Il sistema lineare di matrice completa

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

è compatibile. Infatti si ha $\det(A|b) = 0$, mentre, per esempio,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

e quindi le matrici incompleta e, a maggior ragione quella completa, hanno rango 2. Si noti che, ovviamente, il rango della matrice completa non può essere più piccolo di quello della matrice incompleta, in quanto ogni minore della incompleta è anche minore della completa.

Come mostra l'ultimo esempio sopra riportato, per la compatibilità del sistema occorre trovare un minore non nullo di ordine massimo possibile che sia contemporaneamente minore della matrice incompleta e di quella completa. Fatto questo la risoluzione del sistema procede con i passi indicati di seguito (e che saranno meglio chiariti, al solito, con un esempio).

1. Sopprimi tutte le eventuali equazioni corrispondenti alle righe i cui coefficienti non intervengono nel minore trovato.
2. Trasporta a secondo membro tutti gli eventuali termini contenenti le incognite corrispondenti a colonne che non intervengono nel calcolo del minore trovato: queste incognite saranno considerate come parametri, cioè rimarranno completamente arbitrarie.
3. Il sistema residuo è ora un sistema "quadrato", ovvero con lo stesso numero di equazioni e di incognite: risolvilo usando il già noto teorema di Cramer, che, per comodità, abbiamo riportato anche qui di seguito.

Se il sistema è compatibile e non c'è nessuna incognita da considerare come parametro, allora esso ha una sola soluzione; se è compatibile e ci sono incognite da considerare come parametro, allora il sistema ha infinite soluzioni e, se i parametri sono k, si usa dire che ha ∞^k soluzioni.

Teorema 3 (Teorema di Cramer)**.** *Sia dato un sistema quadrato di n equazioni in n incognite, di matrice dei coefficienti A, e determinante* $\det(A) \neq 0$*. Si considerino le matrici* A_i*, ottenute sostituendo alla i-esima colonna di A la colonna dei termini noti. L'unica soluzione del sistema è data da*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Esempio 6. Il sistema di matrice completa

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 3 & 19 \\ 4 & 5 & 2 & 20 \end{array}\right)$$

è compatibile perché per la matrice incompleta si ha $\det(A) = -17 \neq 0$, e quindi il suo rango è 3. La matrice completa deve avere lo stesso rango, perché intanto ha rango maggiore della incompleta e, inoltre, ha solo 3 righe. Per le tre matrici A_i si ha:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 19 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -17,\ \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 2 \\ 2 & 19 & 3 \\ 4 & 20 & 2 \end{vmatrix} = -34,\ \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 19 \\ 4 & 5 & 20 \end{vmatrix} = -51.$$

La soluzione del sistema è allora data da

$$x_1 = \frac{-17}{-17} = 1, \quad x_2 = \frac{-34}{-17} = 2, \quad x_1 = \frac{-51}{-17} = 3,$$

cioè dal vettore colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esempio 7. Il sistema lineare di matrice completa

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ha rango 2. Infatti i quattro minori di ordine 3 della matrice completa sono tutti nulli (compreso quindi quello costituito solo dalla matrice incompleta)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

mentre la matrice estratta prendendo le prime due righe e le prime due colonne (sottomatrice comune della completa e della incompleta), ha determinante (minore) $9-8=1\neq 0$.

Trascuriamo quindi la terza equazione e portiamo i termini contenenti la terza incognita a secondo membro.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1+x_3 \\ 4 & 3 & 2+x_3 \end{array}\right)$$

Questo sistema si risolve con Cramer ottenendo

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+x_3 & 2 \\ 2+x_3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = x_3 - 1, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+x_3 \\ 4 & 2+x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} 2 - x_3,$$

mentre x_3 rimane completamente arbitrario (parametro) e possiamo indicarlo con t. I vettori soluzione sono allora

$$\begin{pmatrix} t-1 \\ 2-t \\ t \end{pmatrix},$$

che sono infiniti, al variare di t. Poiché è rimasto un solo parametro, il sistema ha ∞^1 soluzioni.

Esempio 8. Una industria fabbrica tre prodotti, P_1, P_2, P_3. Ciascuno di essi subisce un ciclo lavorativo in tre diversi reparti, A, B, C, con i tempi seguenti, in ore:

	A	B	C
P_1	2	1	1
P_2	5	3	2
P_3	3	2	2

Se in una lavorazione il carico orario dei 3 reparti è stato di 104 ore, 64 ore e 55 ore rispettivamente per i reparti A, B e C, si chiede quante sono le quantità fabbricate di ciascun prodotto.

Dette x_1, x_2, x_3 queste quantità si deve avere:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 104 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 64 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 55 \end{cases}.$$

Si tratta dunque di risolvere un sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 104 \\ 1 & 3 & 2 & 64 \\ 1 & 2 & 2 & 55 \end{array}\right).$$

Poiché il determinante della matrice incompleta vale 1, e quindi è diverso da zero, il sistema ha rango 3 e quindi ha una sola soluzione che si può trovare facilmente con la regola di Cramer, ottenendo

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = 15.$$

È però utile la seguente osservazione. Posto

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 104 \\ 64 \\ 55 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

il sistema si può scrivere in forma compatta

$$A\vec{x}=\vec{b}.$$

La matrice A ha determinante diverso da zero e quindi è invertibile, con

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla precedente uguaglianza si può dunque ricavare

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 104 \\ 64 \\ 55 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix},$$

in completo accordo con il risultato prima trovato.

In sostanza la risoluzione di un sistema quadrato compatibile con determinante della matrice incompleta non nullo si può fare, formalmente, esattamente come per un'equazione di primo grado in un'incognita:

$$ax=b, \quad a\neq 0, \quad \Rightarrow \quad x=a^{-1}b.$$