Dipendenza e indipendenza lineare

Luciano Battaia

Questi appunti[1], ad uso degli studenti del corso di Matematica (A-La) del corso di laurea in Commercio Estero dell'Università Ca' Foscari di Venezia, campus di Treviso, contengono un'integrazione al testo "Metodi matematici per l'analisi economica e finanziaria" di K.Sydsæter, P.Hammond e A.Strøm e si inseriscono dopo il paragrafo 12.6.

Cominciamo ricordando che si chiama *vettore* di $\mathbb{R}^n$ una matrice a una sola riga e n colonne (*vettore-riga*) o una matrice a una sola colonna e n righe (*vettore-colonna*). Queste particolari matrici si indicano abitualmente con una lettera minuscola in grassetto o sormontata da una freccia (come faremo noi). Nelle applicazioni intervengono principalmente i vettori-colonna[2], ma quanto diremo è valido con le stesse parole sia per vettori-riga che per vettori-colonna.

Diamo ora una prima definizione.

Definizione 1. *Siano $\vec{w}$ e $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_r$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Si dice che il vettore $\vec{w}$ è* combinazione lineare *dei vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_r$ se esistono r scalari (numeri reali) c_1, c_2, …, c_r tali che*

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_r\vec{v}_r.$$

Esempio 1. Si considerino i vettori $\vec{v}_1 = (1,1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,0,1)$ e $\vec{v}_3 = (3,3,-2)$. È facile verificare che

$$\vec{v}_3 = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2,$$

ovvero che $\vec{v}_3$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con coefficienti 3 e -2.

Esempio 2. Si considerino i vettori $\vec{v}_1 = (1,0,0)$, $\vec{v}_2 = (0,1,0)$ e $\vec{v}_3 = (0,0,1)$. In questo caso non è possibile scrivere nessuno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due: per esempio qualunque combinazione dei vettori $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ avrà uno zero come primo elemento e quindi non potrà mai dare il vettore $\vec{v}_1$.

Dalla definizione 1 segue ora il concetto di dipendenza ed indipendenza lineare che costituisce l'oggetto di queste pagine integrative.

Definizione 2. *I vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ si dicono* linearmente dipendenti *se è possibile scrivere almeno uno di essi come combinazione lineare degli altri,* linearmente indipendenti *in caso contrario.*

Vale il seguente teorema, che discende quasi immediatamente dalla definizione.

[1] Versione del 4 dicembre 2016.

[2] Si pensi ad esempio alla scrittura in forma matriciale di un sistema di m equazioni in n incognite:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

dove A è una matrice di tipo $m \times n$, $\vec{x}$ è una colonna di n righe (contiene i nomi delle incognite), $\vec{b}$ è una colonna di m righe (contiene gli m termini noti delle equazioni date).

Teorema 3. *I vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se dall'uguaglianza*

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_r\vec{v}_r = \vec{0} = (0,0,\ldots,0)$$

segue $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. Se invece l'uguaglianza precedente vale con almeno uno dei coefficienti diverso da zero, allora i vettori sono linearmente dipendenti.

Il problema di verificare se un insieme di vettori è o no indipendente conduce alla risoluzione di un sistema lineare, come si può vedere dal seguente esempio.

Esempio 3. Si considerino ad esempio i vettori $\vec{v}_1 = (1,-1,2)$, $\vec{v}_2 = (2,1,3)$ e $\vec{v}_3 = (1,0,3)$ e supponiamo di voler stabilire se $\vec{v}_3$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1$ e di $\vec{v}_2$. Si devono ricercare le soluzioni dell'equazione:

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nelle incognite c_1 e c_2. Tenendo conto che due vettori sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, si ottiene:

$$\begin{cases} c_1 & + & 2c_2 & = & 1 \\ -c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ 2c_1 & + & 3c_2 & = & 3 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni in due incognite[3], che possiamo risolvere in maniera elementare: dalla seconda equazione ricaviamo $c_1 = c_2$ che per sostituzione nella prima equazione fornisce $c_2 = 1/3$, mentre per sostituzione nella terza fornisce $c_2 = 3/5$, palesemente impossibile. Se ne deduce che il sistema non ha soluzioni[4].

Come utile esercizio di applicazione del metodo di eliminazione di Gauss, risolviamo lo stesso sistema con questa strategia. Scriviamo la matrice completa[5] del sistema.

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Al di sotto dell'elemento a_{11} (il primo *pivot*) dobbiamo far comparire due zeri. Cominciamo a moltiplicare la prima riga per

$$\frac{-1}{1}, \text{ cambiato di segno, ovvero per } 1,$$

e sommiamola con la seconda; successivamente moltiplichiamo la prima riga per

$$\frac{2}{1}, \text{ cambiato di segno, ovvero per } -2,$$

e sommiamola con la terza. Otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

[3] Un sistema siffatto ha una nota interpretazione geometrica: poiché un'equazione in due incognite ha come grafico nel piano cartesiano una retta, risolvere questo sistema significa verificare se tre rette hanno o no un unico punto comune.

[4] E questo fatto è in accordo con la situazione geometrica indicata: non è facile che tre rette di un piano abbiano un punto in comune.

[5] È tradizione indicare questa matrice con la scrittura $A|b$, ad indicare che è ottenuta affiancando alla matrice A dei coefficienti (detta matrice incompleta) la colonna $\vec{b}$ dei termini noti.

A questo punto lasciamo in pace la prima riga ("scendiamo di un livello") e cerchiamo di far comparire uno zero al di sotto dell'elemento a_{22} (cioè al disotto del 3, il nostro secondo "pivot"). Basterà moltiplicare la seconda riga per

$$\frac{-1}{3}, \text{ cambiato di segno, ovvero per } \frac{1}{3},$$

e sommarla con la terza. Si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{array}\right).$$

Da qui si capisce subito che il sistema non ha soluzioni, perché la terza equazione si è ridotta alla forma

$$0\,c_1 + 0\,c_2 = \frac{4}{3},$$

palesemente impossibile.

Esempio 4. Studiare la dipendenza e indipendenza lineare dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo vedere, sulla base della definizione, se almeno uno dei tre è combinazione lineare degli altri due, oppure, in base al teorema 3, se dall'uguaglianza

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

si deduce oppure no che $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Quest'uguaglianza si traduce nella seguente

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 - 4c_3 \\ -3c_1 - c_2 + 2c_3 \\ 7c_1 - c_2 + 2c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero nel sistema

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 0 \\ -3c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \\ 7c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases}$$

Si noti che questo sistema, che è detto *omogeneo*, ha sicuramente la soluzione $c_1 = c_2 = c_3 = 0$: il problema è vedere se ne ha anche altre oppure no. Risolviamo questo sistema, come utile esercizio, con il metodo di Gauss. Scriviamo la matrice completa:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Cominciamo con il moltiplicare la prima riga per

$$\frac{-3}{1}, \text{ cambiato di segno, ovvero per } 3,$$

e sommarla con la seconda; successivamente moltiplichiamo la prima riga per

$$\frac{7}{1}, \text{ cambiato di segno, ovvero per } -7,$$

e sommiamola con la terza. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & -15 & 30 & 0 \end{array}\right).$$

Per semplificare i calcoli possiamo dividere la seconda riga per 5 e la terza per −15. Otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

A questo punto scendiamo di un livello,lasciando in pace la prima riga. Moltiplichiamo la seconda riga per

$$\frac{1}{1}, \text{ cambiato di segno, ovvero per } -1,$$

e sommiamola con la terza. Otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

la terza equazione è diventata un'identità ($0 = 0$). Dalla seconda troviamo che c_3 può assumere un valore qualunque, valore che indicheremo genericamente con t, mentre $c_2 = 2t$. dalla prima troviamo poi $c_1 = -4t + 4t = 0$.

Possiamo dunque concludere che i tre vettori sono linearmente dipendenti e che si ha

$$0\vec{v}_1 + 2t\vec{v}_2 + t\vec{v}_3 = \vec{0},$$

qualunque sia il numero reale t. Da qui possiamo ricavare, prendendo per esempio $t = 1$, che:

— $\vec{v}_2 = -\frac{1}{2}\vec{v}_3$.
— $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_2$.
— $\vec{v}_1$ non si può scrivere come combinazione lineare di $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. È per questo che, nella definizione di vettori linearmente dipendenti o indipendenti abbiamo detto: sono *dipendenti* se *almeno uno* è combinazione lineare dei rimanenti.

Esempio 5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

dire se la sua terza colonna è combinazione lineare della altre due.

Si tratta di vedere se esistono o no due numeri c_1 e c_2 tali che

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Come già sappiamo questo si traduce nel sistema

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = -1 \\ c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases},$$

che si risolve immediatamente ottenendo

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -3.$$

La terza colonna della matrice è combinazione lineare delle altre due, ovvero le tre colonne sono tre vettori di $\mathbb{R}^2$ linearmente dipendenti.

Esercizi proposti.

Esercizio 1. Data la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

vedere se le tre righe sono dipendenti o no.

Esercizio 2. Dati i vettori di $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

mostrare che v_1 non è combinazione lineare degli altri due, mentre v_2 è combinazione lineare degli altri due. I tre vettori sono dipendenti o no?