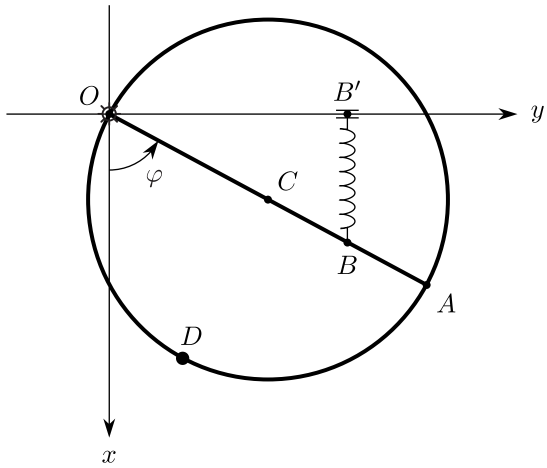
Con riferimento alla figura seguente, si consideri un telaio circolare omogeneo di massa m, raggio r e centro C, fissato senza attrito nell'origine O di un sistema cartesiano ortogonale Oxy, con una cerniera che consenta solo rotazioni attorno al punto fisso O. L'asse x sia verticale discendente. Il diametro OA del telaio è costituito da un'asta rigida omogenea con la stessa m del telaio, saldata al telaio. Nel punto D di figura, tale che l'angolo $O\hat{C}D$ sia $\pi/2$, è saldato un punto di massa m, ancora uguale a quella del telaio.

Sul sistema agiscono, oltre al peso del telaio, del diametro e del punto in D, una forza elastica nel punto B dell'asta rigida, avente centro nella proiezione B' di B sull'asse y, essendo $\overline{CB} = r/2$.

Si chiede

1. di scrivere l'equazione del moto usando il metodo di Lagrange;
2. di ricavare la reazione vincolare in O durante il moto;
3. di esprimere la reazione vincolare solo per mezzo del parametro lagrangiano φ di figura, sapendo che $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.



Posizioni dei punti di applicazione dei carichi e di altri punti notevoli.

- $\overrightarrow{OC} = r\cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\varphi\vec{\jmath}$.
- $\overrightarrow{OB} = \dfrac{3r}{2}\cos\varphi\vec{\imath} + \dfrac{3r}{2}\sin\varphi\vec{\jmath}$.
- $\overrightarrow{OB'} = \dfrac{3r}{2}\sin\varphi\vec{\jmath}$.
- $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = r\cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\varphi\vec{\jmath} + r\sin\varphi\vec{\imath} - r\cos\varphi\vec{\jmath} = (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\vec{\imath} + (r\sin\varphi - r\cos\varphi)\vec{\jmath}$.

Forze agenti.

- Pesi dei tre elementi: $m\vec{g} = mg\vec{\imath}$.
- Forza elastica: $h\overrightarrow{BB'} = -h\dfrac{3r}{2}\cos\varphi\vec{\imath}$
- Reazione vincolare in O: $\vec{\Phi}_O = \Phi_{Ox}\vec{\imath} + \Phi_{Oy}\vec{\jmath}$.

Potenziale delle forze (tutte conservative).

$$
\begin{aligned}
U &= U_{\text{peso telaio}} + U_{\text{peso asta}} + U_{\text{peso punto}} + U_{\text{forza elastica}} = \\
&= -mgx_C - mgx_C - mgx_D + \frac{1}{2}h\left(\frac{3r}{2}\cos\varphi\right)^2 = \\
&= -3mgr\cos\varphi - mgr\sin\varphi + \frac{9}{8}hr^2\cos^2\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Da qui si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 3mgr\sin\varphi - mgr\cos\varphi - \frac{9}{4}hr^2\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

In un problema di statica questa equazione avrebbe potuto fornire le posizioni di equilibrio, ma si tratta di un'equazione di non facile risoluzione.

Per scrivere l'equazione di Lagrange ci basta ora solo calcolare l'energia cinetica, molto semplice perchè il sistema in questione è un rigido con un asse fisso (l'asse z). Basterà dunque trovare il momento di inerzia rispetto all'asse z.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_z &= \mathcal{I}_{\text{telaio}} + \mathcal{I}_{\text{asta}} + \mathcal{I}_{\text{punto}} = \\ &= \left(\mathcal{I}_{z_C} + m\overline{OC}^2\right) + m\,\frac{(2r)^2}{3} + m\left(r\sqrt{2}\right)^2 = \\ &= mr^2 + mr^2 + \frac{4mr^2}{3} + 2mr^2 = \frac{16}{3}\,mr^2\,.\end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$K = \frac{8}{3}\,mr^2\dot\varphi^2\,, \qquad \frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0\,, \qquad \frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = \frac{16}{3}\,mr^2\dot\varphi\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = \frac{16}{3}\,mr^2\ddot\varphi\,.$$

L'unica equazione di Lagrange del moto si scrive ora facilmente.

$$\frac{16}{3}\,mr^2\ddot\varphi = -3mgr\sin\varphi + mgr\cos\varphi + \frac{9}{4}hr^2\cos\varphi\sin\varphi\,,$$

e da qui si ricava altrettanto facilmente $\ddot\varphi$ in funzione di φ:

$$\ddot\varphi = -\frac{9}{16r}g\sin\varphi + \frac{3}{16r}g\cos\varphi + \frac{27h}{64m}\cos\varphi\sin\varphi\,.$$

Dal principio di conservazione dell'energia si ottiene poi, tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate:

$$\frac{8}{3}\,mr^2\dot\varphi^2 - 3mgr\cos\varphi - mgr\sin\varphi + \frac{9}{8}hr^2\cos^2\varphi = -3mgr + \frac{9}{8}hr^2\,,$$

e da qui si ricava $\dot\varphi$ in funzione di φ.

La determinazione della reazione vincolare esterna in O si può fare con la sola prima equazione cardinale della dinamica

$$\overrightarrow{R}^e = 2m\vec a_C + m\vec a_D\,.$$

La scrittura del primo membro è immediata, visto che abbiamo già scritto tutte le forze presenti. Per il secondo membro occorreranno le derivate opportune di $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$.

$$\begin{aligned}\dot x_C &= -r\dot\varphi\sin\varphi & \ddot x_C &= -r\ddot\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi \\ \dot y_C &= r\dot\varphi\cos\varphi & \ddot y_C &= r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi \\ \dot x_D &= -r\dot\varphi\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi & \ddot x_D &= -r\ddot\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi \\ \dot y_D &= r\dot\varphi\cos\varphi + r\dot\varphi\sin\varphi & \ddot y_D &= r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi + r\ddot\varphi\sin\varphi + r\dot\varphi^2\cos\varphi\end{aligned}$$

Proiettando l'equazione cardinale sui due assi si trovano le due componenti della reazione vincolare in O. Sostituendo in queste componenti i valori di $\ddot\varphi$ e $\dot\varphi$ trovati prima si può avere la reazione vincolare solo in funzione dell'angolo φ.