Corso Estivo Matematica/Mathematics

Luciano Battaia

5 luglio 2016

Esempi schematici sull'ottimizzazione in una e due variabili

In queste pagine proponiamo due esempi di problemi di ottimizzazione in una e due incognite, svolti in parallelo per mostrare le analogie e le differenze tra il caso di una variabile e quello di due variabili. Gli esempi proposti possono servire da modello per la risoluzione di questo tipo di problemi.

1 Il caso di una variabile

Esercizio 1. *È data la funzione*

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$$

a) *Determinare i massimi e minimi relativi e* assoluti *in tutto il dominio naturale* ($\mathbb{R}$).
b) *Determinare il massimo e minimo assoluti nell'insieme* $0 \le x \le 3/2$.

Risoluzione.

a) Occorre innanzitutto calcolare i limiti agli estremi del dominio ($\pm\infty$). Si ha, per semplice sostituzione,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

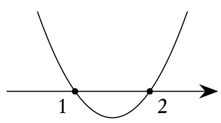
Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{9}{x} + \frac{12}{x^2}\right) = +\infty(2+0+0) = +\infty.$$

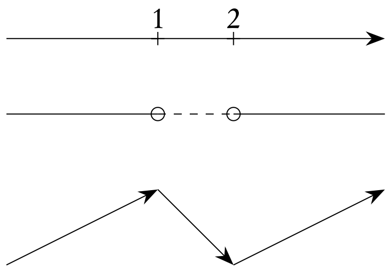
Se ne deduce subito che la funzione non può avere, in tutto il suo dominio naturale, massimo o minimo assoluto.
La derivata prima è data da

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2).$$

Potremmo usare il metodo della derivata seconda per i massimi e minimi relativi, ma, vista la semplicità della derivata prima, ne possiamo calcolare il segno, cioè risolvere la disequazione $x^2 - 3x + 2 \ge 0$ (il fattore 6 è sempre positivo e dunque non influisce sul segno). Le soluzioni dell'equazione associata sono $x = 1$ e $x = 2$, dunque la parabola corrispondente è del tipo



Il segno della derivata è dunque



La funzione avrà un massimo relativo per $x = 1$ e un minimo relativo per $x = 2$. I valori di questo massimo e di questo minimo si ottengono sostituendo 1 e 2 nella funzione. Si ottiene, rispettivamente, 5 per il massimo e 4 per il minimo.

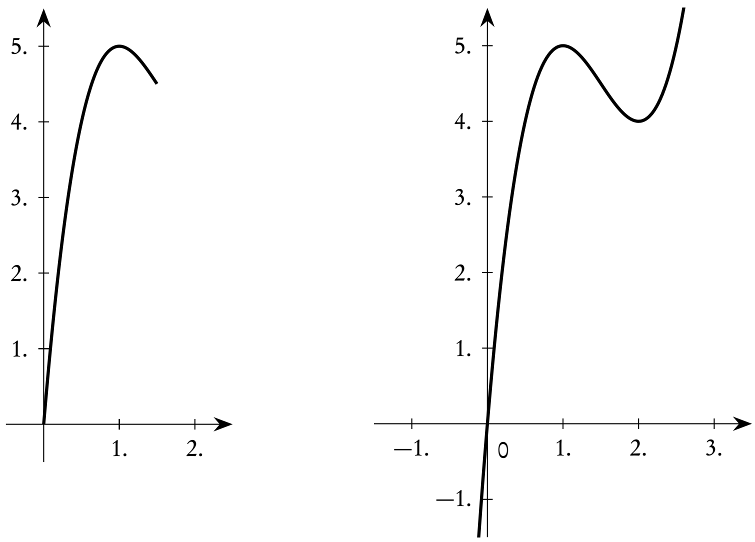
b) Tutti i risultati già trovati continuano a valere, anche se ora ci interesseranno solo in parte, in quanto dobbiamo limitare l'indagine solo a un intervallo del dominio. Intanto osserviamo che questo intervallo è chiuso e limitato e dunque, per il teorema di Weierstrass, il massimo e minimo assoluto esisterannno sicuramente. Per completare l'analisi dobbiamo innanzitutto esaminare il comportamento ai bordi, cioè per $x = 0$ e $x = 3/2$. Si trova:

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

De due valori di massimo e minimo relativo trovati prima conserviamo solo il valore 5, in quanto il valore 4 si raggiunge per $x = 2$ che è fuori dal campo di indagine.
Dobbiamo dunque confrontare i tre valori residui:

$$0, \quad \frac{9}{2}, \quad 5.$$

Il più grande, 5, è il massimo assoluto, il più piccolo, 0, è il minimo assoluto.
Nel dettaglio potremmo osservare (ma non è indispensabile per concludere) che, nel tratto considerato la funzione parte da 0, sale fino a 5 e poi ridiscende fino a $9/2$. Volendo se ne può tracciare un grafico indicativo.



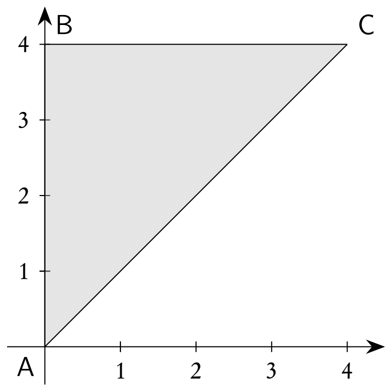
Questo grafico prende una parte del grafico della funzione su tutto $\mathbb{R}$. Per completezza abbiamo tracciato, sulla destra, anche uno schema dell'intero grafico. □

2 Il caso di due variabili

Esercizio 2. *È data la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 7y.$$

a) *Determinare i massimi e minimi relativi*[1] *in tutto il dominio naturale* ($\mathbb{R}^2$).
b) *Determinare il massimo e minimo assoluti nell'insieme di seguito rappresentato.*



Risoluzione.

a) Nel caso di due variabili non trattiamo i "limiti all'infinito", non perché non sia possibile, ma perché non sono compresi nel nostro programma (la situazione in ogni caso sarebbe più complessa del caso di una variabile). Per questo ci limitiamo solo alla ricerca dei massimi e minimi relativi. Per le funzioni di due variabili non abbiamo la possibilità di usare la crescenza e decrescenza (concetti che qui non hanno senso): dovremo dunque necessariamente utilizzare il metodo delle derivate seconde.
Si ha, intanto,

$$\begin{cases} f'_x = 2x - y + 3 \\ f'_y = 2y - x - 7 \end{cases}.$$

Uguagliando a zero le due derivate troviamo l'unico punto critico $\mathsf{P} = (1/3, 11/3)$. Per le derivate seconde si trova facilmente

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -1, \quad f''_{yy} = 2.$$

L'Hessiano (che fortunatamente non dipende da x o da y) vale

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Poiché $f''_{xx} = 2 > 0$, il punto P è un minimo relativo, il cui valore si ottiene sostituendo nella funzione f. Si ottiene:

$$z = f\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) = -\frac{37}{3}.$$

b) Esattamente come nel caso di una variabile dobbiamo esaminare il bordo. In questo caso però il bordo è più complesso: allora era costituito solo da due punti, ora è costituito da tre segmenti che si congiungono a formare un triangolo. Esistono due strategie per trattare la situazione su bordi di questo tipo: il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, di cui qui non ci occupiamo (e che ha validità abbastanza generale) e il metodo, purtroppo non sempre applicabile, che consiste nel ridurre, su ciascuno dei tratti del bordo, la funzione di due variabili a una funzione di una variabile. Esaminiamo separatamente i tre segmenti che costituiscono il bordo.

[1] Attenzione: solo relativi!

— Sul tratto AB si ha $x = 0$ e $0 \leq y \leq 4$: la funzione si riduce a $g(y) = y^2 - 7y$. Facendo la derivata si trova che questa funzione è decrescente da 0 a 7/2, crescente da 7/2 a 4. Si ha poi

$$g(0) = 0, \quad g(7/2) = -49/4, \quad g(4) = -12.$$

— Sul tratto BC si ha $y = 4$ e $0 \leq x \leq 4$: la funzione si riduce a $h(x) = x^2 - x - 12$. Facendo la derivata si trova che questa funzione è decrescente da 0 a 1/2, crescente da 1/2 a 4. Si ha poi

$$h(0) = -12, \quad h(1/2) = -49/4, \quad h(4) = 0.$$

— Sul tratto AC si può cercare l'equazione della retta BC (con un qualunque metodo) e si trova $y = x$, dunque basterà sostituire y con x e tenere conto che x varia da 0 a 4: la funzione si riduce a $l(x) = x^2 - 4x$. Facendo la derivata si trova che questa funzione è decrescente da 0 a 2, crescente da 2 a 4. Si ha poi

$$l(0) = 0, \quad l(2) = -4, \quad l(4) = 0.$$

Abbiamo trovato 9 valori. Alcuni ovviamente si ripetono, perché si deve necessariamente avere $g(0) = l(0)$ (in quanto si tratta sempre del punto A), $g(4) = h(0)$ (in quanto si tratta sempre del punto B) e infine $h(4) = l(4)$ (in quanto si tratta sempre del punto C. In ogni caso il più alto di questi valori è il massimo assoluto sul bordo, il più basso è il minimo assoluto sul bordo: rispettivamente 0 e $-49/4$.

Per concludere dovremo confrontare questi massimo e minimo assoluto sul bordo con quanto succede sull'interno, *se ci sono punti critici nell'interno*. In questo caso l'unico punto critico che abbiamo trovato è proprio sull'interno e in quel punto la funzione vale, come abbiamo visto, $-37/3$. Il massimo e il minimo assoluto vanno allora ricercati tra i tre valori

$$0, \quad -\frac{49}{4}, \quad -\frac{37}{3}.$$

Si deduce he il massimo assoluto vale 0, mentre il minimo assoluto è $-37/3$, che è un po' più piccolo di $-49/4$. □