Corso Estivo Matematica/Mathematics

Luciano Battaia

21 luglio 2016

Esercizi proposti 20/07/2016 e simulazioni domande esame

Alcuni degli esercizi proposti in queste pagine sono stati svolti a lezione. Sono qui proposti con lo stesso schema che sarà adottato per il prossimo tema d'esame finale.

1 Esercizi

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \ln(x^3 + x^2),$$

determinarne il massimo e minimo assoluto nell'intervallo $1 \leq x \leq 10$*. Dire inoltre se la funzione, nello stesso intervallo, è concava o convessa.*

Facoltativamente *trovare il dominio naturale della funzione.*

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x}, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 + ax, & \text{se } x < 1 \end{cases},$$

determinare $a \in \mathbb{R}$ *in modo che la funzione sia continua in tutto il dominio. Trovare poi l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e le rette* $x = 0$ *e* $x = 2$.

Esercizio 3. *Data la funzione*

$$f(x, y) = e^{xy} - y^2$$

determinarne gli eventuali massimi e minimi liberi e i punti di sella.

Esercizio 4. *Data la funzione*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x,$$

a) determinarne gli eventuali massimi e minimi liberi e i punti di sella;
b) determinarne il massimo e minimo assoluto eventuali sull'insieme

$$y - x - 2 = 0.$$

Esercizio 5. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 6. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 7. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 8. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 9. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 10. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 11. *Dire se i vettori*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti o indipendenti.

Esercizio 12. *Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra le due curve*

$$f(x) = x^2 + x \quad e \quad f(x) = -x^2 + 1.$$

Esercizio 13. *Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra la curva*

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

l'asse delle ascisse e le rette $x = -1$, $x = 0$.

Esercizio 14. *Data la funzione*

$$f(x) = x\mathrm{e}^x,$$

a) *trovare l'area della regione finita di piano compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e le rette* $x = 1$ *e* $x = 2$*;*
b) *dire se la funzione, nell'intervallo* $1 \leq x \leq 2$ *è concava o convessa;*
c) *trovare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa* 1*;*
d) *trovare l'area della regione finita di piano compresa tra la curva, la tangente sopra trovata e le rette* $x = 1$ *e* $x = 2$.

Esercizio 15. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y^2} \cdot x$$

a) *trovare gli eventuali punti critici, precisando se si tratta di massimi, minimi o selle;*
b) *trovare gli eventuali massimo e minimo assoluto sul vincolo* $y = x$.

Esercizio 16. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3x + y^2 - 4y\,,$$

a) *trovarne gli eventuali massimi e minimi relativi;*
b) *trovarne gli eventuali estremi assoluti e relativi sul vincolo* $y = x - 1$*;*
c) *trovarne gli estremi assoluti nel quadrato di vertici* $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,4)$, $(0,4)$.

Esercizio 17. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2},$$

a) *trovarne il dominio e rappresentarlo nel piano* Oxy*;*
b) *trovarne gli estremi assoluti nel dominio.*

Esercizio 18. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$

a) *trovarne il dominio e rappresentarlo nel piano* Oxy*;*
b) *trovarne gli estremi relativi.*

Esercizio 19. *Data la funzione*

$$f(x) = \ln(x - 2) + x$$

a) *determinarne il dominio;*
b) *calcolare i limiti per* $x \to 2^+$ *e per* $x \to +\infty$*;*
c) *dire se è crescente o decrescente nel dominio;*
d) *dire se è concava o convessa nel dominio.*

Esercizio 20. *Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva*

$$y = (x+1)\mathrm{e}^x$$

dall'asse delle ascisse e dalle rette $x = 1$ *e* $x = 2$.

Esercizio 21. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\,,$$

a) *determinarne il dominio e rappresentarlo nel piano* Oxy*;*

b) *disegnare, se esiste, la curva di livello* 1;
c) *calcolarne le derivate parziali prime e i punti critici eventuali.*

Esercizio 22. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+3y^2},$$

trovarne il massimo e minimo assoluto nell'insieme piano dato da

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Esercizio 23. *Data la funzione*

$$f(x,y) = \ln(4 - x^2 + y)$$

a) *determinarne il dominio e rappresentarlo graficamente nel piano* Oxy;
b) *disegnarne la curva di livello* 0, *se possibile.*

Esercizio 24. *Data la funzione*

$$f(x,y) = x + \ln y,$$

a) *determinarne il dominio e rappresentarlo graficamente nel piano* Oxy;
b) *dire se la funzione ha massimi e minimi relativi;*
c) *calcolarne le* 4 *derivate parziali seconde.*

Esercizio 25. *Data la funzione*

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2},$$

a) *dimostrare che è sempre crescente;*
b) *calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra il suo grafico, l'asse delle* x *e le rette* $x = 1$ *e* $x = 2$.

Esercizio 26. *Si debba corrispondere dopo un tempo* $t = 1$ *un capitale di* 1000 *con il tasso effettivo* i *del* 25%. *Calcolare la somma da anticipare e il tasso effettivo di sconto.*

Esercizio 27. *Calcolare il montante ottenuto da un investimento di capitale iniziale di* 1000, *al tasso annuo del* 3%, *dopo* 2 *anni e* 3 *mesi, nel regime dell'interesse semplice.*

Esercizio 28. *In quanto tempo (anni, mesi e giorni) un capitale di* 530 *genera un montante di* 600 *se investito in regime di capitalizzazione semplice al tasso annuo del* 1%?

Esercizio 29. *Quanto tempo (anni, mesi e giorni) ci vuole perché un capitale* $C = 1000$ *investito in regime di capitalizzazione composta al tasso annuo del* 1,32% *produca un montante* $M = 1500$?

Esercizio 30. *Quale capitale è stato investito per produrre un montante* $M = 110$ *dopo* 2 *anni e* 5 *mesi all'interesse annuo dello* 0,5%?

Esercizio 31. *Determinare il tasso di interesse annuo affinché, in regime di interesse semplice, una somma di* 1600 *produca un interesse di* 80 *in* 6 *mesi. Ripetere lo stesso calcolo in regime di interesse composto.*

Esercizio 32. *Calcolare gli interessi prodotti da un investimento di* 3600 *per* 6 *anni al tasso annuo del* 1,75% *in regime di interesse semplice e in regime di interesse composto.*