Corso Estivo Matematica/Mathematics

Luciano Battaia

28 giugno 2016

Esercitazione del 23/06/2016

1 Osservazioni sulle disequazioni di secondo grado

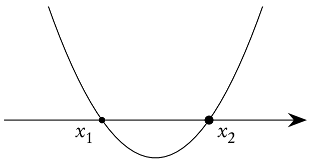
Una disequazione (in una incognita) di secondo grado si può sempre scrivere in una delle forme "canoniche" o "standard" seguenti:

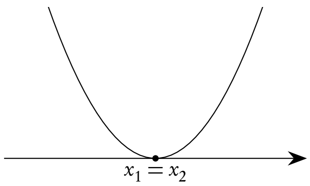
$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0. \tag{1}$$

È opportuno utilizzare la seguente strategia.

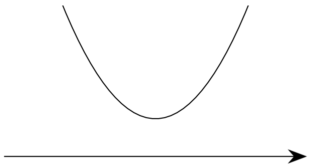
1. Indipendentemente dal verso della disequazione (">", oppure "<") e dalla presenza o meno del segno di uguaglianza, rappresentare graficamente, seppure solo in maniera schematica, la parabola
$$y = ax^2 + bx + c\,,$$
determinando in particolare, se ci sono, le sue intersezioni con l'asse delle ascisse, ovvero le soluzioni dell'equazione "associata" $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Trarre le conclusioni, tenendo conto, solo a questo punto, della specifica richiesta della disequazione in esame (">", "≥", "<", oppure "≤").

Tenendo conto del segno di a (primo coefficiente) e del valore di Δ, le situazioni grafiche possibili per la parabola sono le seguenti.

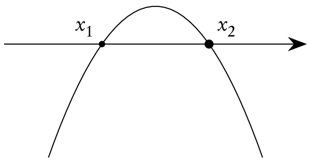
1. $a > 0, \quad \Delta > 0$: 

2. $a > 0, \quad \Delta = 0$: 

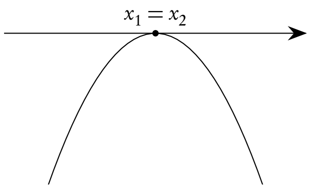
3. $a > 0, \quad \Delta < 0:$



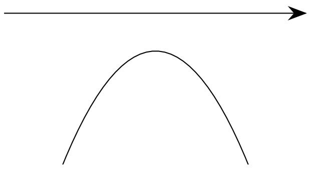
4. $a < 0, \quad \Delta > 0:$



5. $a < 0, \quad \Delta = 0:$



6. $a < 0, \quad \Delta < 0:$



Il semplice esame dei grafici permette ora di trarre le conclusioni nel caso desiderato. Alcuni esempi chiariranno il metodo.

Segnaliamo che i primi tre casi (cioè quelli con $a > 0$ sono i più frequenti, perché ci si può sempre ricondurre ad essi cambiando segno ad ambo i membri. Prestare la massima attenzione nel cambio di segno!

Esempio 1. *Risolvere la disequazione* $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Risoluzione. Siamo nel caso 1, con $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. La disequazione è verificata per $1 < x < 2$. □

Esempio 2. *Risolvere la disequazione* $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Risoluzione. Siamo nel caso 1, con $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. La disequazione è verificata per $x \leq 1 \vee x \geq 2$. □

Esempio 3. *Risolvere la disequazione* $-x^2 + 5x - 6 \leq 0$.

Risoluzione. Siamo nel caso 4, con $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. La disequazione è verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 3$. □

Esempio 4. *Risolvere le disequazioni*

1. $x^2 - 6x + 9 > 0$
2. $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
3. $x^2 - 6x + 9 < 0$
4. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

Risoluzione. Per quanto riguarda la parabola siamo sempre nel caso 2, con $x_1 = x_2 = 3$. Se ne deduce quanto segue per le quattro disequazioni proposte.

1. È verificata per $x \neq 3$.

2. È verificata per $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. Non è verificata per nessun x.
4. È verificata solo per $x = 3$. □

Esempio 5. *Risolvere la disequazione* $x^2 - 3x + 5 > 0$.

Risoluzione. Siamo nel caso 3, e l'equazione associata non ha nessuna soluzione. La disequazione è invece verificata per $\forall x \in \mathbb{R}$.

È opportuno prestare la massima attenzione a questo esempio: come detto, l'equazione associata non ha nessuna soluzione, mentre la disequazione è *sempre* verificata. □

Esempio 6. *Risolvere la disequazione* $x^2 - 3x + 5 \geq 0$.

Risoluzione. Nulla cambia rispetto all'esempio precedente: l'equazione associata non ha nessuna soluzione, mentre la disequazione risulta essere sempre verificata[1]. □

2 Esercizi

Esercizio 1. *Trovare il dominio di*

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Risoluzione. Trattandosi di radice cubica c'è una sola condizione da imporre, ovvero che il denominatore sia diverso da 0. Si trova subito $x \neq 1$. Questo insieme si può scrivere, più formalmente,

$$x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Molti testi usano una scrittura con le parentesi tonde anziché quadre rovesciate per indicare che il corrispondente valore *non* è compreso: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Questo tipo di scrittura è perfettamente legittima, ma ci pare molto meno elegante e, in certi casi, fonte di confusione. Per esempio la scrittura

$$(2, 3)$$

può indicare sia la coppia $(2, 3)$ di numeri reali, che l'insieme dei numeri $2 < x < 3$. La scrittura $]2, 3[$, invece, si può unicamente interpretare come l'insieme dei numeri $2 < x < 3$. □

Esercizio 2. *Trovare il dominio di*

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Risoluzione. Questa volta, trattandosi di radice quadrata occorrerà imporre anche la condizione che il radicando sia non negativo:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{x-1} \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione del sistema è di banale risoluzione, la prima è una fratta, per la quale conviene usare la *regola dei segni*.

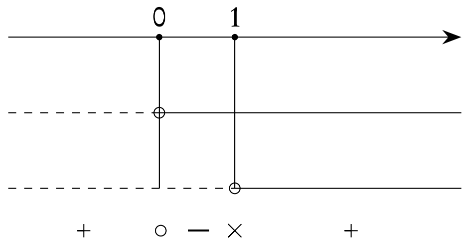
[1] Attenzione! Si noti che il simbolo $\geq$ significa "maggiore *oppure* uguale". Per esempio

$$3 \geq 2$$

è vera perché $3 > 2$, anche se $3 \neq 2$ (è proprio questo il significato di "oppure"). Analogamente

$$2 \leq 2$$

è vera perché $2 = 2$, anche se $2 \not< 2$.



Il sistema è dunque verificato per $x \leq 0 \vee x > 1$, dove abbiamo anche tenuto conto della seconda condizione ($x \neq 1$). □

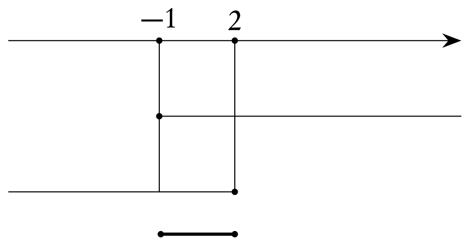
Esercizio 3. *Trovare il dominio di*

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}.$$

Risoluzione. Si devono imporre le condizioni di realtà dei due radicali quadratici.

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 & \Rightarrow \quad x \geq -1 \\ 2-x \geq 0 & \Rightarrow \quad x \leq 2 \end{cases} .$$

Questa volta si tratta di un sistema di disequazioni, per cui bisogna trovare le soluzioni comuni. Anche se in questo caso la soluzione sarebbe banale, conviene fare un grafico (*diverso* da quello che abbiamo utilizzato per la regola dei segni!).



Il sistema è verificato per $-1 \leq x \leq 2$. □

Esercizio 4. *Trovare il dominio di* $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

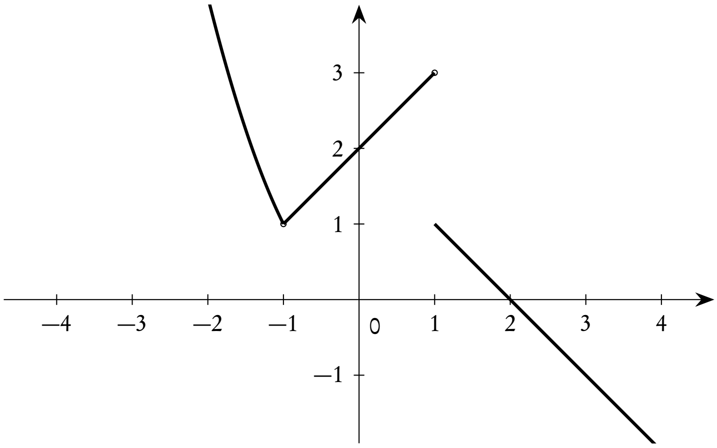
Risoluzione. Imponendo la condizione che l'argomento del logaritmo sia strettamente maggiore di 0, si trova $x < 1 \vee x > 2$. □

Esercizio 5. *Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{se } x < -1; \\ x+2, & \textit{se } -1 \leq x \leq 1; \\ -x+2, & \textit{se } x > 1. \end{cases}$$

Dal grafico dedurre i limiti della funzione per $x \to -1$, *per* $x \to 1$, *per* $x \to +\infty$, *per* $x \to -\infty$. *La funzione è iniettiva, suriettiva, biunivoca? Qual è l'insieme delle immagini?*

Risoluzione. Il grafico si trova facilmente, trattandosi di archi di parabola e di parti di retta. Si ottiene la figura seguente.



Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

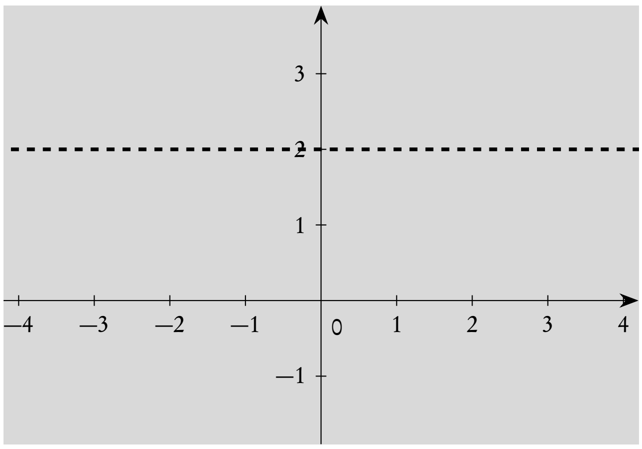
Dunque il limite per $x \to 1$ non esiste e la funzione presenta una discontinuità a salto in corrispondenza di 1. □

Esercizio 6. *Trovare il dominio di*

$$f(x,y) = \frac{x}{2-y}.$$

Risoluzione. Trattandosi di una funzione di 2 variabili il dominio sarà un sottoinsieme del piano e, generalmente, *non* si potrà scrivere in formule, ma converrà rappresentarlo con un disegno.

In questo caso di deve solo imporre la condizione che $2-y \neq 0$. Questo significa che il dominio è costituito da tutti i punti del piano *tranne* quelli che hanno $y = 2$, cioè tranne quelli della retta di equazione $y = 2$.

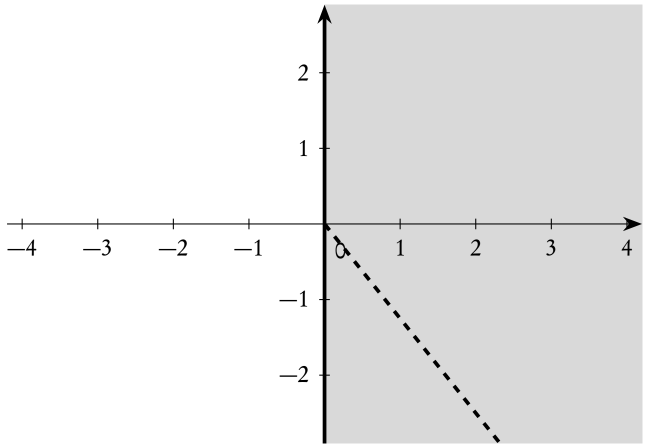


La linea tratteggiata sta ad indicare che i suoi punti vanno esclusi. □

Esercizio 7. *Trovare il dominio di*

$$f(x) = \sqrt{x}\,\frac{1}{x+y}.$$

Risoluzione. In questo caso si devono imporre la condizione di realtà del radicale ($x \geq 0$) e la condizione che il denominatore non si annulli ($x + y \neq 0$). Si tratta di un sistema di due disequazioni in due incognite: la soluzione sarà ancora un sottoinsieme del piano. Per la prima condizione si ottengono i punti del primo e quarto quadrante (quelli appunto dove la x è non negativa), per la seconda condizione si devono escludere i punti della retta $x + y = 0$ (bisettrice del secondo e quarto quadrante).

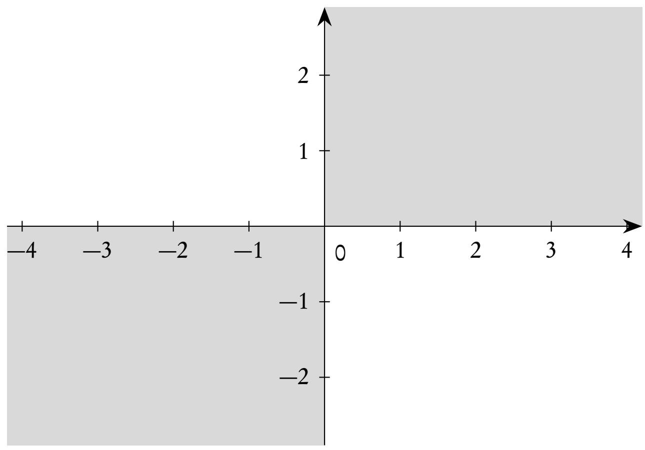


La linea tratteggiata sta ad indicare che i suoi punti vanno esclusi. I punti dell'asse y vanno ivece compresi. □

Esercizio 8. *Trovare il dominio di*

$$f(x) = \sqrt{xy}\,.$$

Risoluzione. Basta solo ragionare sul segno delle coordinate nei vari quadranti, per concludere che sono accettabili i punti del primo quadrante (dove sia la x che la y sono positive) e quelli del terzo quadrante (dove sia la x che la y sono negative). Anche i punti degli assi vanno compresi: la condizione infatti è $xy \geq 0$.



□

Esercizio 9. *Trovare il dominio di*

$$f(x,y) = \sqrt{x+y-1}.$$

Risoluzione. Si deve imporre la condizione

$$x + y - 1 \geq 0.$$

Conviene risolvere prima l'equazione associata

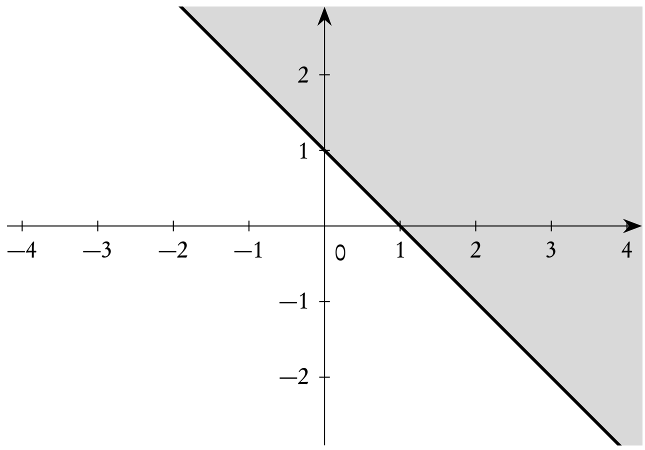
$$x + y - 1 = 0$$

il cui grafico è una retta del piano. Successivamente provando con un punto *fuori dal grafico della retta* si trova in quale parte di piano la disequazione risulta verificata.

La retta divide il piano in due semipiani. Se considero il punto $(0,0)$ e ne sostituisco le coordinate nella disequazione data ottengo

$$0+0-1 \geq 0,$$

che è falsa. La disequazione sarà allora verificata sull'altro semipiano (quello che non contiene nil punto scelto). □

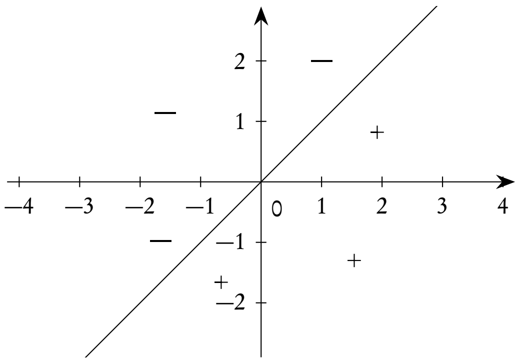


Esercizio 10. *Trovare il dominio di*

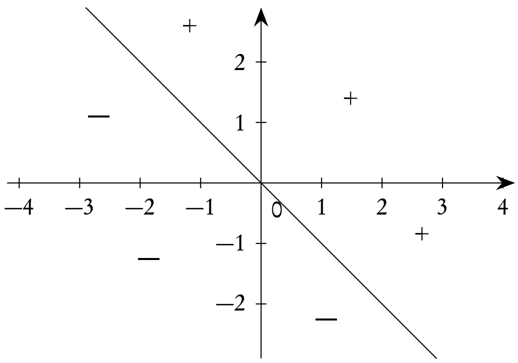
$$f(x) = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{(x-y)(x+y)}.$$

Risoluzione. Questo esercizio è più complesso, in quanto si tratta di trovare il segno di un prodotto di due quantità che, entrambe, sono rappresentate da sottoinsiemi del piano.

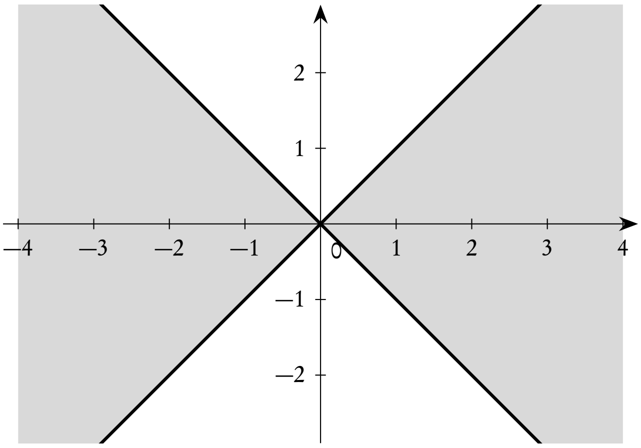
Il primo fattore $(x-y)$ ha il segno di seguito rappresentato.



Il secondo fattore $(x+y)$ ha invece il segno qui di seguito rappresentato.



Per il dominio richiesto si dovranno prendere le parti di piano dove entrambi i fattori sono positivi o dove entrambi sono negativi. Si ottiene il dominio seguente. □



Esercizio 11. *Trovare il dominio di*

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2-x).$$

Risoluzione. Si deve imporre la condizione

$$x^2+y^2-x>0.$$

Conviene prima risolvere l'equazione associata: $x^2+y^2-x=0$, che ha come grafico una circonferenza in cui $a=-1$, $b=0$, $c=0$. Dunque il centro è

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0\right),$$

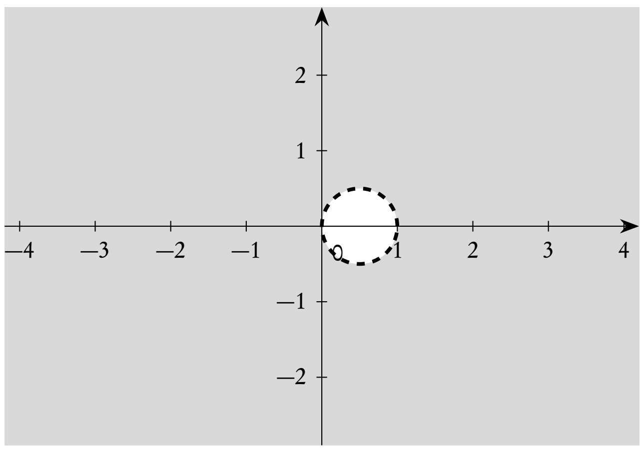
mentre il raggio è

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-x}=\frac{1}{2}.$$

Se si sostituisce nella disequazione un punto, per esempio il centro C della circonferenza, si ottiene

$$\frac{1}{4}+0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}>0,$$

che è falsa: la disequazione sarà dunque verificata all'esterno della circonferenza (esclusa la stessa). □



Esercizio 12. *Trovare il dominio della funzione*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-x+y}.$$

Risoluzione. Si deve imporre la condizione

$$x^2-x+y\geq 0.$$

Conviene prima risolvere l'equazione associata

$$x^2-x+y=0,$$

che ha come grafico la parabola che si può scrivere in forma canonica

$$y=-x^2+x.$$

Per disegnare la parabola, senza ricorrere a formule, si può fare la derivata: $y'=-2x+1$, da cui si conclude che si tratta di una funzione crescente per $x<1/2$, decrescente per $x>1/2$. Per $x=1/2$ si avrà dunque il vertice, la cui ordinata si trova per sostituzione (nella parabola, non nella derivata!)

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Se ora si prende un punto (fuori dalla parabola!), per esempio $(0,1)$, e si sostituisce nella disequazione data si trova

$$0-0+1\geq 0,$$

che è vera: la disequazione sarà verificata per tutti i punti che si trovano nella stessa condizione di $(0,1)$, cioè quelli che stanno "sopra" la parabola stessa. La parabola è compresa nel dominio. □