Primi esercizi sui limiti

Trattandosi dei primi esercizi di calcolo di limiti, con l'uso dei teoremi sui limiti, sulle funzioni continue e dei limiti fondamentali, sono proposte anche alcune considerazioni dettagliate utili per individuare la strategia da seguire nel calcolo dei limiti, nonché per mostrare come i teoremi studiati intervengono nei calcoli.

Esercizio 1. *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}+x^2}{\sqrt{1-\cos x}-x^2}\,.$$

Risoluzione. Intanto si comincia con l'osservare che il limite si presenta come il rapporto di due funzioni entrambe continue in 0: per questo motivo il loro limite si può calcolare semplicemente "per sostituzione". Poiché però sia il numeratore che il denominatore hanno limite 0, non si possono applicare i teoremi sui limiti (forma di "indecisione" $0/0$). Per "risolvere" problemi con le forme di indecisione si applicano diverse strategie, alcune delle quali saranno studiate successivamente (principio di sostituzione di infinitesimi e e infiniti, regola di l'Hôpital, formula di Taylor, …). Per ora le tecniche utilizzabili si basano su

- uso di limiti noti per funzioni elementari;
- "manipolazioni algebriche" che permettano di scrivere la funzione in una forma in cui i teoremi sui limiti siano applicabili;
- uso di limiti notevoli, magari applicando anche il teorema sul limite delle funzioni composte (uso di "sostituzioni" opportune).

Per quanto riguarda i limiti noti delle funzioni elementari, intendiamo riferirci a limiti del tipo:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$;
- ecc.

Per quanto riguarda le manipolazioni algebriche si vedano i classici esempi seguenti.

Esempio 1. Si debba calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+\sqrt{2}}{2x^2-3x-5}\,.$$

Si vede subito che si presenta, sia al numeratore che al denominatore, la forma di indecisione $\infty-\infty$. Basta raccogliere, sia al numeratore che al denominatore, la rispettiva potenza di x di grado massimo (in questo x^2 sia al numeratore che al denominatore) per risolvere il problema, come si vede dai calcoli che seguono. Si tenga presente che il raccoglimento di x^2 è lecito perché $x\to+\infty$ e quindi sicuramente $x\neq 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+\sqrt{2}}{2x^2-3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}\,.$$

A questo punto si può semplificare la x e osservare che il secondo e terzo addendo del numeratore e denominatore tendono a 0 (sono tutti della forma a/∞, con a reale): si conclude che il limite vale $1/2$.

Esempio 2. Si debba calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,.$$

Si tratta del limite del rapporto di due funzioni entrambe continue in 1, che però hanno limite 0 in 1, per cui non si possono applicare i teoremi sull'algebra dei limiti (forma $0/0$). Tra le diverse strade possibili per risolvere il problema, si può scegliere quella di razionalizzare il numeratore.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\,.$$

A questo punto si può semplificare per $x-1$ sia il numeratore che il denominatore, in quanto nel calcolare il limite per $x\to 1$ si può supporre $x\neq 1$ e quindi $x-1\neq 0$. Il limite vale ora, banalmente, $1/2$, in quanto si tratta del limite di una funzione continua in 1. Si tenga ben presente che

$$\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\neq\frac{1}{\sqrt{x}+1}\qquad\text{ma}\qquad\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\,.$$

Per quanto riguarda l'uso dei limiti fondamentali, l'esercizio che stiamo risolvendo ne è un esempio, e dunque ritorniamo a questo problema.

Un po' di allenamento (e di esercizio!) ci dovrebbe far capire che nel limite proposto si deve utilizzare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\,.$$

Da questo limite ben noto discende il seguente

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|}=\sqrt{\frac{1}{2}}\,,$$

ovvero

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\sqrt{\frac{1}{2}}\,,\qquad\text{e}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=-\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Possiamo allora procedere al calcolo richiesto come segue.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}+x^2}{\sqrt{1-\cos x}-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}+x}{\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}-x}\,.$$

Se calcoliamo i limiti destro e sinistro separatamente troviamo facilmente che il limite proposto vale 1, sia da sinistra che da destra. □

Esercizio 2. *Calcolare il limite seguente.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}\,.$$

Risoluzione. Si può procedere come segue.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-{}^{\sin x}/_{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\cos x-1}{x^2}\,\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}\,.$$

È abbastanza interessante osservare che il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

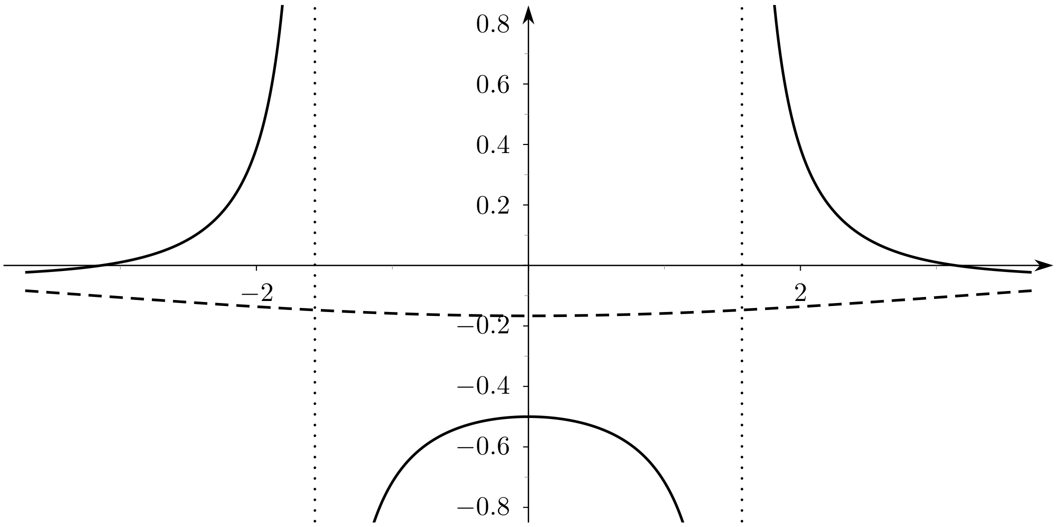
richiede una strategia di calcolo completamente diversa (non alla nostra portata attualmente, in quanto prevede l'uso delle derivate) e produce un risultato completamente diverso (precisamente $-1/6$), nonostante le funzioni $\operatorname{tg} x$ e x abbiamo, nei pressi dello 0, valori quasi identici come risulta dal fatto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,.$$

Per rendersi conto di quanto succede è opportuno visualizzare, nei pressi dell'origine, i grafici delle due funzioni

$$f(x) = \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}\,, \quad g(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}\,.$$

Questi grafici sono rappresentati con linea continua (il primo) e tratteggiata (il secondo) nella figura che segue.



La ragione della grande differenza di comportamento tra le due funzioni nei pressi dell'origine è dovuta al fatto che le quantità a numeratore e denominatore delle due frazioni sono entrambe molto prossime a zero e questo comporta che piccole variazioni nel numeratore possano comportare sensibili differenze nel rapporto. Si veda anche la tabella seguente, prodotta con un foglio di calcolo.

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$(\sin x - x)/x^3$	$(\sin x - \operatorname{tg} x)/x^3$
1,00000	0,841470984807897	1,557407724654900	-0,158529015192103	-0,715936739847006
0,50000	0,479425538604203	0,546302489843790	-0,164595691166376	-0,535015609916700
0,10000	0,099833416646828	0,100334672085451	-0,166583353171851	-0,501255438622394
0,05000	0,049979169270678	0,050041708375539	-0,166645834573376	-0,500312838883687
0,01000	0,009999833334167	0,010000333346667	-0,166665833335744	-0,500012500542768
0,00500	0,004999979166693	0,005000041667083	-0,166666458335796	-0,500003125035453
0,00100	0,000999999833333	0,001000000333333	-0,166666658339004	-0,500000125070593
0,00050	0,000499999979167	0,000500000041667	-0,166666664844217	-0,500000031829206
0,00010	0,000099999999833	0,000100000000333	-0,166666661483190	-0,499999998002099
0,00005	0,000049999999979	0,000050000000042	-0,166666647930663	-0,499999998002099
0,00001	0,000010000000000	0,000010000000000	-0,166667284899440	-0,500000160632424

Come si può notare, i valori di $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ e x diventano sempre più vicini, man mano che x si avvicina a zero, ma, come già osservato, le piccole differenze presenti sono sufficienti a modificare molto i valori dei rapporti considerati. □

Esercizio 3. *Dati i reali $\alpha > 0$ e $\beta \geq 1$, si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} (1+\sqrt{x})^{1/x^\alpha}, & \text{se } x > 0 \\ \beta(\mathrm{e}^{1/x}+1), & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$

Si chiede se esistono valori di α e β che rendano prolungabile per continuità la funzione in 0.

Risoluzione. Cominciamo con il ricordare che una funzione f è prolungabile per continuità in un punto x_0, di accumulazione per il suo dominio ma non appartenente al dominio, se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}\,.$$

Questo consente si costruire in modo naturale una nuova funzione g che abbia x_0 nel dominio e che sia continua in x_0, ponendo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x_0 \\ l, & \text{se } x = x_0 \end{cases} .$$

Nel caso in esame cominciamo a calcolare i limiti sinistro e destro in 0 della funzione data e poi controlleremo se è possibile scegliere α e β in modo che i due limiti esistano finiti e uguali.

Per quanto riguarda il limite sinistro non ci sono problemi e si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \beta(\mathrm{e}^{1/x}+1) = \beta\,,$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to -\infty} \mathrm{e}^t = 0\,.$$

Analizziamo ora il limite destro. Osserviamo che, se $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$. Da questa considerazione possiamo dedurre, sulla base del teorema sul limite delle funzioni composte, che il

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$$

non è altro che una diversa scrittura del

$$\lim_{u\to +\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u ,$$

limite che, notoriamente, vale e.

A questo punto possiamo procedere come segue, ponendo $\sqrt{x} = t$ e quindi $x = t^2$, e osservando che se $x \to 0^+$ anche $t \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sqrt{x})^{1/x^\alpha} = \lim_{t\to 0^+}(1+t)^{1/t^{2\alpha}} = \lim_{t\to 0^+}\left((1+t)^{1/t}\right)^{1/t^{2\alpha-1}} .$$

Dunque

- se $\alpha = 1/2$ il limite vale e, in quanto, per $t \neq 0$, $1/t^{2\alpha-1}$ vale costantemente 1;
- se $\alpha > 1/2$ il limite vale $+\infty$, in quanto $t^{2\alpha-1}$ tende a 0^+ e quindi $1/t^{2\alpha-1}$ tende a $+\infty$;
- se $\alpha < 1/2$ il limite vale 1, in quanto $t^{2\alpha-1}$ tende a $+\infty$ e quindi $1/t^{2\alpha-1}$ tende a 0.

Tenendo conto del fatto che il limite sinistro vale β, si conclude che la funzione può essere prolungata per continuità in zero solo se $\alpha = 1/2$ e $\beta = \mathrm{e}$, oppure $\alpha < 1/2$ e $\beta = 1$. □