Esercizi sul calcolo combinatorio

Esercizio 1. *Quanti sono i numeri di* 6 *cifre con almeno una cifra pari? E quelli con almeno una cifra dispari?*

Risoluzione. Come spesso succede, conviene contare i numeri di 6 cifre e sottrarre quelli che hanno solo cifre dispari o solo cifre pari, ottenendo il risultato cercato in maniera indiretta.

I numeri di 6 cifre sono chiaramente 900 000 (da 100 000 a 999 999), ma vogliamo contarli usando le tecniche del calcolo combinatorio: si tratta di riempire 6 caselline, in cui conta l'ordine, con le cifre dallo 0 al 9. Poichè al primo posto non ci può essere uno 0, ci sono solo 9 possibilità; nelle altre cinque caselline ci sono invece 10 possibilità; in totale $9 \times 10^5 = 900\,000$, come previsto.

Nello stesso modo contiamo i numeri che hanno solo cifre pari: 4 possibilità al primo posto (le cifre 2, 4, 6, 8), 5 possibilità nelle altre 5 caselline (le cifre di prima più lo 0); in totale 4×5^5 numeri. I numeri che hanno solo cifre dispari sono invece 5^6 (le cifre disponibili sono ora 1, 3, 5, 7, 9 in tutte le 6 caselline).

... □

Esercizio 2. *Si devono disporre su una fila di* 10 *sedie cinque coppie uomo-donna. In quanto modi la disposizione può essere fatta con una delle seguenti condizioni?*

1. *Alla rinfusa.*
2. *Mantenendo tutti gli uomini e tutte le donne vicini tra loro.*
3. *Mantenendo unite le coppie presenti.*

Risoluzione. Se la disposizione può essere fatta alla rinfusa ci sono chiaramente 10! possibilità: le disposizioni di 10 persone in 10 posti.

Se devo mantenere i gruppi di uomini e di donne uniti posso scegliere, in $2! = 2$ modi, come disporre i gruppi; successivamente ho 5! possibilità di permutare i maschi e 5! possibilità di permutare le femmine, in totale $2! \times 5! \times 5!$ possibilità.

Se infine ho già le coppie costituite e queste devono rimanere unite, ci sono 5! possibilità per sistemare le coppie (nelle cinque coppie di sedie vicine) e 2! possibilità di permutare ciascuna coppia; in totale $5! \times 5 \times 2!$ possibilità. □

Esercizio 3. *In una classe di* 22 *studenti, di cui* 12 *femmine e* 10 *maschi, si deve formare un gruppo di ricerca con* 3 *maschi e* 3 *femmine. In quanti modi la cosa si può fare se nei* 10 *maschi ci sono* 2 *gemelli e non si vuole che siano assieme nel gruppo?*

Risoluzione. Senza restrizioni la risposta sarebbe $C_{12,3} \cdot C_{10,3} = 24\,640$. Per la scelta delle femmine il numero $C_{12,3}$ rimane corretto. Per la scelta dei maschi basterà che togliamo da $C_{10,3}$ il numero delle terne in cui ci sono i due gemelli assieme: si tratta di 8 terne, in quanto se una terna deve contenere i due gemelli, per il suo completamento potrò scegliere uno degli altri 8 studenti maschi. Dunque

$$C_{12,3} \cdot (C_{10,3} - 8) = \binom{12}{3} \cdot \left(\binom{10}{3} - 8\right) = 24640\,.$$

Per contare le possibili scelte dei maschi avrei anche potuto ragionare in un altro modo: posso contare le terne formate senza i due gemelli, che sono $C_{8,3}$, poi le terne con il primo gemello soltanto, che sono $C_{8,2}$ e quelle con il secondo gemello soltanto, che sono ancora $C_{8,2}$, ottenendo lo stesso risultato. □

Esercizio 4. *Verificare, per induzione, che*

$$\sum_{n=1}^{p} \binom{n+1}{2} = \binom{p+2}{3}, \quad P \geq 1\,.$$

Risoluzione. 1. Se $p = 1$ si ha $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$, che è banalmente vera.

2. Se $p > 1$

– *Hp.*: $\sum\limits_{n=1}^{p} \binom{n+1}{2} = \binom{p+2}{3}$.
– *Th.*: $\sum\limits_{n=1}^{p+1} \binom{n+1}{2} = \binom{p+3}{3}$.

Si ha, successivamente,

$$\sum_{n=1}^{p+1} \binom{n+1}{2} = \sum_{n=1}^{p} \binom{n+1}{2} + \binom{p+2}{2} \overset{(*_1)}{=} \binom{p+2}{3} + \binom{p+2}{2} \overset{(*_2)}{=} \binom{p+3}{3}.$$

Nel passaggio segnato con $(*_1)$ abbiamo usato l'ipotesi, in quello segnato con $(*_2)$ la formula di Stifel. Ancge senza usare la formula di Stifel si poteva procedere al calcolo diretto.

$$\binom{p+2}{3} + \binom{p+2}{2} = \frac{(p+2)!}{(p-1)! \times 3!} + \frac{(p+2)!}{p! \times 2!} = \frac{(p+2)!}{(p-1)! \times 3 \times 2!} + \frac{(p+2)!}{p \times (p-1)! \times 2!} =$$
$$= \frac{(p+2)!}{(p-1)! \times 2!} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p} \right) = \frac{(p+2)!}{(p-1)! \times 2!} \, \frac{p+3}{3} = \binom{p+3}{3}.$$

□

Esercizio 5. *Dimostrare direttamente che*

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k).$$

Rifare la dimostrazione ragionando sui sottoinsiemi di un insieme.

Risoluzione. Il calcolo diretto è molto semplice:

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k) = \frac{k!}{(k-2)! \times 2!} + \frac{(n-k)!}{((n-k-2)! \times 2!} =$$
$$= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + k(n-k) =$$
$$= \frac{k^2 - k + n^2 - nk - n - nk + k^2 + k + 2nk - 2k^2}{2} =$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

Ragionando sugli insiemi si evitano tutti i calcoli. Basta tenere conto che $\binom{n}{2}$ è il numero dei sottoinsiemi con 2 elementi di un insieme con n elementi: per contare quanti sono questi insiemi posso anche immaginare di dividere l'insieme in due parti, una con k elementi e una con $n-k$ elementi e poi contare

– il numero dei sottoinsiemi di due elementi della prima parte, che sono $\binom{k}{2}$;
– il numero dei sottoinsiemi di due elementi della seconda parte, che sono $\binom{n-k}{2}$;
– il numero dei sottoinsiemi di due elementi ottenuti prendendo un elemento nella prima parte e uno nella seconda, che sono ovviamente $k(n-k)$.

Questo basta per concludere. □

Esercizio 6. *Dimostrare per induzione che*

$$2^n n! \le n^n, \quad n \ge 6$$

Risoluzione. 1. Per $n = 6$ la disuguaglianza è vera.

2. Per $n > 6$:
   – *Hp*: $2^n n! \le n^n$;
   – *Th*: $2^{n+1}(n+1)! \le (n+1)^{n+1}$.

Si ha
$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1)2^n n! \le 2(n+1)n^n\,,$$
dove nella disuguaglianza abbiamo usato l'ipotesi. Basterà quindi mostrare che
$$2(n+1)n^n \le (n+1)^{n+1}\,.$$
Si ha
$$2(n+1)n^n \le (n+1)^{n+1} \Leftrightarrow 2n^n \le (n+1)^n \Leftrightarrow 2 \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\,.$$
Ora, usando anche il binomio di Newton, si ha
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k =$$
$$= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} = 2\,.$$
e questo conclude la dimostrazione. □

Esercizio 7. *Calcolare il numero dei sottoinsiemi di un insieme.*

Risoluzione. Si può osservare che il numero richiesto si ottiene contando i sottoinsiemi con 0 elementi, quelli con 1 elemento, e così via, fino a quelli con n elementi: si deve dunque calcolare

(*)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \binom{n}{n}\,.$$

Applicando la formula del binomio al caso $(1+1)^n$ si ottiene subito
$$2^n = (1+1)^n \binom{n}{0} 1^n \times 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \times 1^1 + \dots \binom{n}{n} 1^0 \times 1^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \binom{n}{n}$$
Il numero di sottoinsiemi è allora 2^n.

Il calcolo della somma $(*)$ dei coefficienti binomiali si può anche fare in un altro modo, ragionando sui numeri di n cifre in binario. I numeri di n cifre in binario si ottengono disponendo le cifre 0 e 1 su n caselle numerate: ci sono ovviamente 2 possibilità su ogni casella, per cui in totale si hanno 2^n possibilità, ovvero 2^n numeri[1]. Calcoliamo questo numero in un altro modo, contando quanti sono i numeri che hanno un numero k di cifre 1, con k compreso tra 0 ed n. È chiaro che questo numero vale $\binom{n}{k}$, perché corrisponde alla scelta di k caselle in cui piazzare la cifra 1 su un totale di n caselle. Si ottiene nuovamente il risultato precedente. □

[1] Si tratta in realtà delle disposizioni con ripetizione di 2 oggetti in n caselle, ma le disposizioni con ripetizione non sono state trattate nel corso, per cui siamo ricorsi a un calcolo diretto (e assolutamente elementare!).