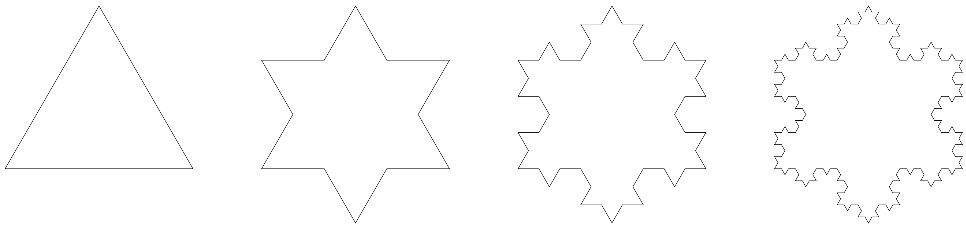
LUCIANO BATTAIA

INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone



www.batmath.it

Introduzione alla probabilità
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.1 del 3 ottobre 2020

In copertina: La generazione del *fiocco di neve di Koch*, uno dei primi frattali descritti.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 *novembre* 2013

Indice

Elenco delle figure

Premessa

Questi appunti sono rivolti agli studenti del primo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. Il corso di Matematica per il Design si articola nei primi due anni di corso: nel secondo anno saranno trattati gli argomenti più propriamente legati all'arte e al design, come i solidi platonici, varie curve e superfici geometriche, un cenno alla quarta dimensione, un cenno ai frattali. Nel primo anno il programma prevede invece una introduzione elementare al calcolo delle probabilità con lo scopo principale di trasmettere il modo di pensare tipico dei ragionamenti probabilistici, imparando a fare valutazioni in condizioni di incertezza, al fine di prendere una decisione; tutto questo naturalmente senza rinunciare ad introdurre con un certo rigore le nozioni teoriche più importanti.

Questi appunti contengono solo ed esclusivamente lo schema delle lezioni svolte senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi, trattandosi principalmente di un *diario delle lezioni*, alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione a volte più estesa e approfondita di quanto fatto in classe, per stimolare eventuali approfondimenti da parte degli allievi. In ogni caso si rimanda ai testi via via consigliati per i necessari completamenti che non trovano posto in questi appunti.

Si tenga comunque conto che, essendo in ogni caso questa dispensa un libro di testo, abbiamo dovuto essere più rigorosi di quanto non succeda con le lezioni in aula, dove è ammesso uno stile meno formale.

Gli appunti sono adatti per un corso complessivo di 32 ore di lezione, comprensive di esercitazioni: la ristrettezza dei tempi a disposizione impone numerose limitazioni sia nella scelta degli argomenti sia nel grado di approfondimento degli stessi. Naturalmente si è tenuto conto, sia nella scelta degli argomenti che nella loro trattazione, delle caratteristiche specifiche del corso in cui vengono utilizzati questi appunti.

Questo testo è liberamente disponibile sul sito web dell'autore, `www.batmath.it`. Come ogni testo di matematica, anche questo non può essere esente da errori, imperfezioni, lacune: chiunque abbia qualcosa da segnalare è pregato di usare l'indirizzo di mail collegato al già citato sito web dell'autore.

1. Logica. Insiemi

La logica vi porterà da A a B. L'immaginazione vi porterà dappertutto.
Albert Einstein

Scopo di questo capitolo è quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso per gli sviluppi futuri del corso e di richiamare alcuni concetti di teoria degli insiemi che ci saranno utili per lo studio della probabilità.

In questo capitolo utilizzeremo fin da subito gli insiemi dei numeri naturali ($\mathbb{N}$), interi ($\mathbb{Z}$), razionali ($\mathbb{Q}$) e reali ($\mathbb{R}$), le cui proprietà essenziali dovrebbero essere note dalla scuola media superiore.

1.1. Logica proposizionale

La frase "*La neve è bianca*" esprime un fatto ritenuto da tutti *vero*, anzi universalmente vero. La frase "*La terra è una stella*" esprime invece un fatto ritenuto da tutti *falso*, anzi universalmente falso. La frase "*Pordenone è una bella città*" esprime un fatto che può essere ritenuto vero da certi individui e falso da altri. Alle frasi "*Non disturbare mentre faccio lezione*", "*Vai a comperare il pane*", "*Se lancio un dado esce il sei*", "*Domani pioverà*", non può essere attribuito[1] un valore di verità o falsità.

Questi esempi mostrano che alcune frasi, o proposizioni, della lingua italiana (ma lo stesso succede in tutte le lingue) assumono uno ed uno solo tra i valori *vero* e *falso*, in altri casi o non c'è accordo sull'attribuzione di un valore di verità o falsità, oppure non ha proprio senso tale attribuzione.

Esistono anche esempi più complessi, come l'affermazione "*Tutti i numeri naturali pari maggiori di* 2 *sono somma di due numeri primi*". Ebbene, a tutt'oggi (2015), non è possibile sapere se tale affermazione sia *vera* o *falsa*[2], benché non si sia trovato nessun caso in cui tale affermazione non è verificata.

Tenendo conto di queste osservazioni, daremo ora una definizione di *enunciato*, o *proposizione*, segnalando comunque che il concetto di *verità* è estremamente delicato e un'analisi approfondita del problema esula dagli scopi di questo corso.

Definizione 1.1. *Si chiama* proposizione *o* enunciato *ogni affermazione che assume uno e un solo valore di verità:* vero *o* falso.

Si noti che è implicito nella definizione data il fatto che ammettiamo che la logica di cui ci occupiamo sia *bivalente*, cioè preveda che le espressioni di cui ci occupiamo possano avere uno solo dei due valori di verità "vero" o "falso".

[1] Come vedremo studiando il calcolo delle probabilità, frasi come "*Se lancio un dado esce il sei*" oppure "*Domani pioverà*", diventano importanti in quella teoria, in quanto saremo allora interessati non ad attribuire loro a priori un valore di verità o falsità, quanto piuttosto una probabilità di accadimento.

[2] Si tratta della famosa *Congettura di Goldbach*, proposta sostanzialmente da Christian Goldbach nel 1742. Per esempio si ha $4=2+2, \quad 6=3+3, \quad 8=3+5, \quad 10=3+7=5+5, \quad \dots$

Gli enunciati possono essere costituiti da una sola affermazione, come negli esempi che abbiamo proposto sopra, e li chiameremo *enunciati atomici*, oppure possono essere costituiti da più affermazioni, collegate tra di loro. Un esempio è costituito dall'enunciato "*Il sole è una stella* e *la terra è un pianeta*", che si può considerare composto da due enunciati atomici (entrambi veri) connessi dalla parola "e". Un altro modo per costruire nuovi enunciati è quello di usare la negazione "non". Per esempio "*La terra* non *è una stella*" è ottenuto dalla *negazione* dell'enunciato (falso) "*La terra è una stella*".

Si chiamano *connettivi* le parole (come la "e" dell'esempio) che collegano tra di loro due enunciati, oppure che operano su un enunciato (come il "non" dell'esempio) per ottenere un nuovo enunciato. A volte il "non" è chiamato un *operatore* invece che un connettivo, in quanto in realtà non connette due enunciati, ma agisce, "opera", su un singolo enunciato.

Si deve notare che i connettivi collegano tra di loro due enunciati senza alcun riguardo al significato che questi possono assumere; per esempio è perfettamente legittimo l'enunciato "*Parigi è la capitale del Brasile* o $2+2$ *vale* 4", che è la connessione, tramite la parola "o", di due enunciati (uno falso e uno vero). L'unica cosa che conta è il valore di verità complessivo dell'enunciato risultante.

Poiché nel linguaggio comune le parole non hanno sempre un senso univoco, in logica al posto delle parole si utilizzano dei simboli speciali per formalizzare in maniera rigorosa i connettivi e si costruiscono delle *tavole di verità* che stabiliscono le regole che permettono di dedurre la verità o meno di un enunciato composto, una volta che sia noto il valore di verità degli enunciati componenti: queste tavole di verità possono essere pensate come delle vere e proprie *definizioni* dei connettivi stessi.

1.1.1. Connettivi logici

Nel seguito indicheremo le proposizioni con simboli come $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, ... I connettivi che ci interesseranno sono i seguenti:

- non, oppure $\neg$, *negazione*: $non\mathscr{P}$ (oppure $\neg\mathscr{P}$) è vera, se $\mathscr{P}$ è falsa, e viceversa;
- $\wedge$, "et", oppure "e", *congiunzione*: $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ è vera se tutte due le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa;
- $\vee$, "vel", oppure "o", *disgiunzione*: $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$ è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, altrimenti è falsa;
- $\Rightarrow$, "implica", *implicazione*: $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ è falsa solo quando $\mathscr{P}$ è vera e $\mathscr{Q}$ è falsa, in particolare da una proposizione falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- $\Leftrightarrow$, "se e solo se", "condizione necessaria e sufficiente", *equivalenza*: $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ è vera se $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.

La tabella 1.1 (dove "V" indica *vero* e "F" indica *falso*) riassume in maniera formale le definizioni dei connettivi.

Si noti che la tabella 1.1 è costruita tenendo conto che ciascuno dei due enunciati atomici ha due possibili valori di verità, e che quindi per esaminare il valore di verità di un enunciato che li coinvolga entrambi devo esaminare tutte le situazioni che si possono presentare. Per il solo connettivo "non" basterebbero evidentemente due sole righe nella tabella, in quanto in questo caso è coinvolto un solo enunciato atomico. Tabelle di questo tipo si chiamano *tavole di verità*.

Il connettivo $\Rightarrow$ ha molta importanza in matematica. Dimostrare un teorema significa infatti dimostrare la verità di $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, sapendo che $\mathscr{P}$ è vera: $\mathscr{P}$ è detta *ipotesi* e $\mathscr{Q}$ è detta *tesi*.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\neg\mathscr{P}$	$\mathscr{P}\wedge\mathscr{Q}$	$\mathscr{P}\vee\mathscr{Q}$	$\mathscr{P}\Rightarrow\mathscr{Q}$	$\mathscr{P}\Leftrightarrow\mathscr{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Tabella 1.1.: *Connettivi logici e tavola di verità*

1.2. Logica dei predicati

Come abbiamo detto, il senso di una proposizione sta nel poter stabilire se è vera o se è falsa. Un'affermazione del tipo $x < -2$ non è una proposizione, perché il suo valore di verità dipende da x. Facendo variare x in un opportuno insieme (che deve essere precisato) si possono ottenere proposizioni vere o proposizioni false. Possiamo dire che si tratta di un proposizione dipendente da x, e indicarla con $\mathscr{P}(x)$: x sia chiama una *variabile* e $\mathscr{P}(x)$ un *predicato*. Naturalmente si possono avere predicati che dipendono da più variabili, per esempio $x + y > 0$, e in questo caso i predicati sono anche chiamati *relazioni*.

Come abbiamo già osservato è indispensabile precisare in quale ambiente si deve scegliere la variabile (o le variabili) di un predicato. Per esempio l'affermazione "*x è pari*" ha senso se x è un numero naturale, non ha alcun senso se x è una frazione.

Fissato uno dei possibili valori di x, diciamolo x_0, il predicato diventa una proposizione (che sarà vera o falsa a seconda di x_0), proposizione che si indica con $\mathscr{P}(x_0)$.

1.2.1. Quantificatori

Nella costruzione dei predicati si usano comunemente costruzioni del tipo

— *Esiste (almeno) un x tale che valga $\mathscr{P}(x)$.*
— *Per ogni x è verificato $\mathscr{P}(x)$.*

Per formalizzare queste frasi si usano due simboli logici, detti *quantificatori*

— $\forall$, "per ogni", *quantificatore universale*;
— $\exists$, "esiste (almeno) un", *quantificatore esistenziale*.

Si usa anche spesso il simbolo $\exists!$, oppure $\exists_1$ per indicare che *esiste uno e uno solo*.

Nel caso di uso contemporaneo di più quantificatori si deve prestare particolare attenzione all'ordine con cui sono scritti. Un esempio chiarirà il senso di questa affermazione.

Consideriamo il predicato $\mathscr{P}(x,y) =$ "x è uno studente in grado di risolvere il problema y". Allora

$$\forall y\ \exists x \text{ tale che } \mathscr{P}(x,y)$$

significa: "qualunque sia il problema y c'è uno studente in grado di risolverlo". Invece

$$\exists x\ \forall y \text{ tale che } \mathscr{P}(x,y)$$

significa: "c'è uno studente in grado di risolvere qualsiasi problema". Evidentemente si tratta di due situazioni radicalmente diverse.

Osservazione 1.2. È opportuno rendersi conto, su un esempio classico, di come la simbologia comunemente usata in matematica possa facilmente dar luogo a equivoci, senza un'effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi logici.

Consideriamo dunque l'equazione

$$x^2 = 1\,,$$

le cui soluzioni si trovano scritte usualmente nella forma

$$x = \pm 1\,,$$

ove si intende che sia il numero 1 che il numero -1 soddisfano l'equazione (in termini logici: rendono vero, nell'insieme dei numeri reali, il predicato "$x^2 = 1$"). Questo risultato andrebbe, più correttamente, espresso nella forma

$$x = 1 \vee x = -1\,.$$

Consideriamo ora la scrittura

$$x^2 \neq 1$$

la cui "soluzione" è usualmente scritta nella forma

$$x \neq \pm 1.$$

Ebbene, questa scrittura *non* deve essere tradotta in $x \neq 1 \vee x \neq -1$, che porterebbe alla conclusione che $x^2 \neq 1$ è verificata da ogni numero reale; la traduzione logica corretta è, invece,

$$x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

in quanto quello che si intende scrivendo $x \neq \pm 1$ è proprio il *contemporaneo* verificarsi delle due condizioni su x.

Si può notare che $x^2 \neq 1$ equivale a $\neg(x^2 = 1)$ che porta a $\neg(x = 1 \vee x = -1)$ ovvero a $\neg(x = 1) \wedge \neg(x = -1)$, che viene abitualmente scritta $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.

1.3. Il simbolo di sommatoria

Tra i molti simboli che si usano nella pratica matematica ne richiamiamo qui uno, per la sua importanza in numerose questioni.

Se dobbiamo scrivere la somma dei numeri 1, 2, 3, possiamo tranquillamente scrivere $1 + 2 + 3$, ma se dobbiamo scrivere la somma dei numeri da 1 a 100[(3)], la scrittura esplicita diventa oltremodo pesante. Si potrebbe pensare di ovviare con l'uso dei puntini di sospensione:

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100\,.$$

[3] Un aneddoto, abbastanza verosimile, relativo al grande matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), racconta che all'età di otto-nove anni il maestro, per metterlo a tacere per un bel po', gli ordinò di sommare i numeri da 1 a 100: in brevissimo tempo Gauss fornì la risposta $50 \times 101 = 5050$, sorprendendo anche il maestro che aveva sottovalutato l'intelligenza del suo allievo…

La cosa però non è esente da critiche e, soprattutto, non è sempre praticabile. Per questo si introduce il cosiddetto *simbolo di sommatoria*, col quale la somma precedente si scrive

$$\sum_{i=1}^{100} i\,,$$

che traduce in forma compatta esattamente quello che si deve fare: sommare i numeri naturali, rappresentati genericamente dalla "variabile" i, partendo dal numero 1 e arrivando fino al numero 100.

In generale gli addendi di una somma possono essere più complessi, per esempio:

— i reciproci dei numeri naturali: $1/i$,
— i quadrati dei numeri naturali: i^2,
— un'espressione qualunque coinvolgente i numeri naturali, come il rapporto tra un naturale e il suo successivo: $i/(i+1)$,
— ecc.

Se indichiamo con $a(i)$, o a_i, l'espressione coinvolgente il numero naturale i, la scrittura

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \tag{1.1}$$

indicherà la somma di tante "copie" di quell'espressione, dove al posto di i si devono mettere, successivamente, tutti i numeri naturali dal valore iniziale m al valore finale n. Proponiamo alcuni esempi per chiarire ancora meglio il senso di quanto detto[4].

— $\displaystyle\sum_{i=5}^{10} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}\,;$
— $\displaystyle\sum_{i=2}^{100} \frac{i}{i-1} = \frac{2}{2-1} + \frac{3}{3-1} + \dots + \frac{99}{99-1} + \frac{100}{100-1}\,;$
— $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} (-1)^i = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1-1+1-1+1-1\ (=0)$

È opportuno osservare che al posto di i (che si chiama *indice della sommatoria*) si può usare una qualunque altra lettera: le scritture

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad , \quad \sum_{j=m}^{n} a_j \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k$$

[4] Alcuni scrivono lo stesso simbolo disponendo soprattutto gli estremi in maniera leggermente diversa:

$$\sum_{n}^{m}{}_{i}\, a_i\,;$$

si tratta praticamente solo di una questione di gusto, e nulla cambia ovviamente per quanto riguarda il significato.

sono del tutto equivalenti (naturalmente purché i valori iniziale e finale restino gli stessi e le espressioni che coinvolgono numeri naturali siano identiche): per questo motivo l'indice i è spesso detto una *variabile muta*.

Giova anche ricordare che, trattandosi di somme, si possono applicare le usuali proprietà, in particolare ci interessa segnalare quella associativa. Si vedano gli esempi che seguono.

Esempi.

- $\displaystyle\sum_{i=2}^{100}\frac{2i+4}{i-1}=2\sum_{i=2}^{100}\frac{i+2}{i-1}$;
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{20}\frac{(-1)^i}{i}=(-1)\sum_{i=0}^{20}\frac{(-1)^{i-1}}{i}$.

1.4. Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo "un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*", ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire "un insieme è un insieme". Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: A, B, ...

La scrittura

$$x \in A \tag{1.2}$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge "x appartiene ad A". La (1.2) si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della (1.2) si scrive

$$x \notin A, \tag{1.3}$$

che si legge, naturalmente, "x non appartiene ad A". La (1.3) si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo $\forall$ ("*per ogni*"),

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x\ x\in A \Leftrightarrow x \in B) \tag{1.4}$$

dove la doppia freccia "$\Leftrightarrow$" si legge "*se e solo se*".

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con $\emptyset$, privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare dettagliatamente tutti gli elementi dell'insieme, per esempio $A=\left\{0,\pi,\sqrt{2},\text{Pordenone}\right\}$.
2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A=\{\,x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\,\}$.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{ 3, 6, 9, 12, \dots \}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{ 2, 3, \dots \}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P, dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15\,485\,863 \in P$, e per verificare che $2^{57\,885\,161} - 1 \in P$ (uno dei più grandi[5] primi conosciuti alla fine del 2013, con ben 17 425 170 cifre[6]) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un *sottoinsieme* di B, o che è *contenuto* in B, o anche che B è un *soprainsieme* di A, o che *contiene* A, e scriveremo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A \,. \tag{1.5}$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$A \subset B, \text{ oppure } B \supset A \tag{1.6}$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A, \forall A$. Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{ a \} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli $\in$ e $\subset$ (o $\subseteq$): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con $\mathscr{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{ a, b \}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, A \} \,.$$

[5] A coloro che si chiedono quale possa essere l'interesse concreto a scoprire numeri primi sempre più grandi, segnaliamo che tutti gli algoritmi crittografici oggi usati, in particolare nel web, sono basati sull'uso di numeri primi con parecchie centinaia di cifre.

[6] Volendo scrivere questo numero occupando circa 2 millimetri per ogni cifra, si otterrebbe una fila di cifre lunga circa 35 chilometri.

1.5. Operazioni tra insiemi

Definizione 1.3 (Unione di insiemi). *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* unione, *e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi*[7].

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}\,. \tag{1.7}$$

Esempio 1.1. Se $A = \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}$ e $B = \{\, 2, 3, 4 \,\}$, allora $A \cup B = \{\, 0, 1, 2, 3, 4 \,\}$.

Definizione 1.4 (Intersezione di insiemi). *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* intersezione, *e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}\,. \tag{1.8}$$

Esempio 1.2. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{\, 2, 3 \,\}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione e si possono verificare per utile esercizio.

$$\begin{aligned} A \cup A &= A; & A \cap A &= A; \\ A \cup B &= B \cup A; & A \cap B &= B \cap A; \\ A \cup \emptyset &= A; & A \cap \emptyset &= \emptyset; \\ A \cup B &\supseteq A; & A \cap B &\subseteq A; \\ A \cup B = A &\Leftrightarrow A \supseteq B; & A \cap B = A &\Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.9}$$

Si noti che le proprietà distributive sono due: dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione. Nel caso della somma e prodotto tra numeri vale solo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $a(b + c) = ab + ac$.

Definizione 1.5 (Differenza di insiemi). *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* differenza, *e si indica con $A \setminus B$, o anche con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.*

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}\,. \tag{1.10}$$

[7] I simboli $\vee$, *vel*, ed $\wedge$, *et*, sono normalmente usati in logica e nella teoria degli insiemi. Significano, rispettivamente, "*o, oppure*" ed "*e contemporaneamente*".

Esempio 1.3. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A \setminus B = \{0, 1\}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si chiama anche *complementare di B rispetto ad A* e si indica con $\complement_A B$, o semplicemente con $\complement B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. Useremo anche la notazione A^c, particolarmente diffusa nei testi di probabilità, dove un sottoinsieme A di un insieme opportuno costituisce un evento e A^c indica l'evento contrario. In molte situazioni(8) si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Segnaliamo che la teoria degli insiemi che qui stiamo presentando è la cosiddetta *teoria ingenua*, più che sufficiente per tutti i nostri scopi ma non esente da problemi: tra gli altri ricordiamo il fatto che essa può creare dei paradossi come quello famoso(9) del barbiere.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con (x, y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y:

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1 .$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{a, b\} = \{b, a\} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a).$$

Definizione 1.6 (Prodotto cartesiano). *Dati due insiemi A e B si chiama loro* prodotto cartesiano, *o semplicemente* prodotto, *l'insieme, indicato con A × B, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B:*

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{ (a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \} .$$

È una conseguenza immediata della definizione che $A \times B \neq B \times A$. Nel caso particolare che $A = B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A \times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte, si scriverà A^n in luogo di $A \times A \times \cdots \times A$.

1.6. Diagrammi di Eulero-Venn

In molte situazioni è utile servirsi dei cosiddetti *diagrammi di Eulero-Venn* per rappresentare gli insiemi e verificare le proprietà delle operazioni tra insiemi. In questo tipo di diagrammi gli insiemi sono individuati da regioni del piano delimitate da una curva chiusa. In certi casi si conviene di evidenziare esplicitamente alcuni elementi di un insieme mediante punti: la cosa è particolarmente utile nel caso di insiemi finiti, quando si possono anche evidenziare tutti gli elementi degli insiemi stessi. Pur essendo questo tipo di rappresentazione grafica molto significativa, non bisogna abusarne ed è opportuno prestare la massima attenzione.

Nella figura 1.1 è rappresentato un insieme A con evidenziati tre elementi, a, b, c che gli appartengono e due elementi e, f, che non gli appartengono.

[8] Questo sarà particolarmente importante nel calcolo delle probabilità.

[9] Questo paradosso, formulato da Bertrand Russell agli inizi del 1900, è uno dei più importanti della storia della logica. Si può sintetizzare come segue: *In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. La domanda che ci poniamo è: il barbiere rade se stesso?*

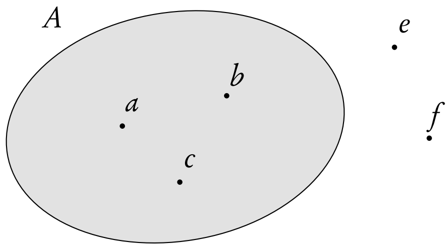


Figura 1.1.: *Un insieme con alcuni elementi che gli appartengono ed altri che non gli appartengono*

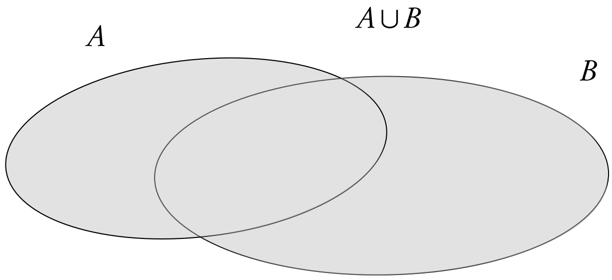


Figura 1.2.: *Due insiemi A e B e la loro unione*

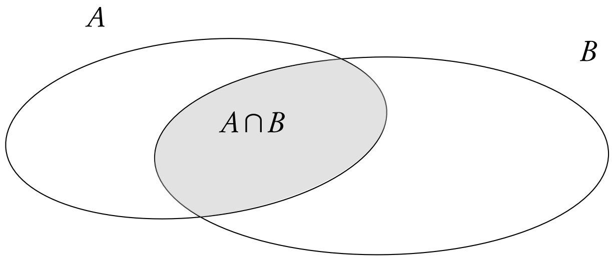


Figura 1.3.: *Due insiemi A e B e la loro intersezione*

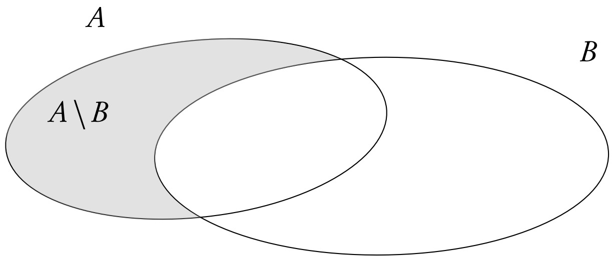


Figura 1.4.: *Due insiemi A e B e la differenza $A \setminus B$*

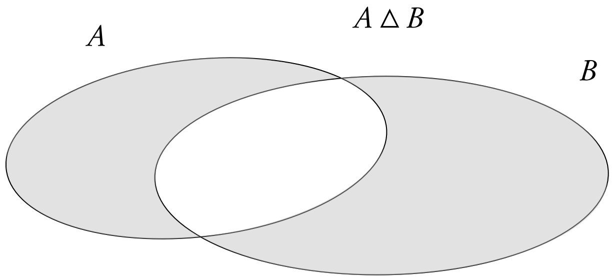


Figura 1.5.: *Due insiemi A e B e la loro differenza simmetrica*

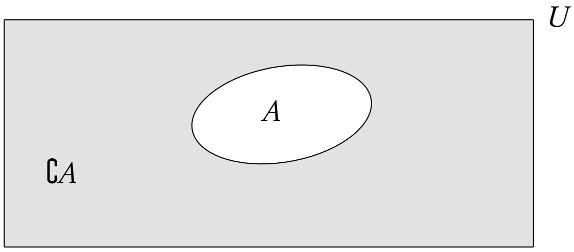


Figura 1.6.: *Complementare di un insieme rispetto all'universo U*

1.7. Partizioni di un insieme

Se E è un insieme, saremo interessati a considerare una famiglia $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ di sottoinsiemi di E con le seguenti caratteristiche.

1. Ciascun sottoinsieme è non vuoto: $A_i \neq \emptyset$, qualunque sia i.
2. I sottoinsiemi sono a due a due disgiunti: $A_i \cap a_j = \emptyset$, per ogni i e j tali che $i \neq j$.
3. L'unione di tutti i sottoinsiemi coincide con tutto l'insieme E: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$.

In sostanza è come dire che l'insieme E è *suddiviso*, *ripartito*, in sottoinsiemi non vuoti in modo che ogni suo elemento appartenga a uno e uno solo di quei sottoinsiemi. Una tale famiglia di sottoinsiemi di un insieme la chiameremo una *ripartizione* o una *partizione* di E.

Esempio 1.4. Se $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali e A e B sono, rispettivamente, l'insieme dei pari e dei dispari, la famiglia $\{A, B\}$ è una partizione di $\mathbb{N}$.

Esempio 1.5. Se $\mathbb{N}$ è ancora l'insieme dei numeri naturali e A l'insieme dei naturali pari, B l'insieme dei primi, C l'insieme dei dispari non primi, la famiglia $\{A, B, C\}$ non è una partizione di $\mathbb{N}$, nonostante $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, in quanto il numero 2 appartiene sia ad A che a B.

Nel calcolo delle probabilità ci interesserà un particolare modo di costruire una partizione di un insieme, a partire da alcuni sottoinsiemi generici. Invece di dare una definizione formale, procederemo presentando un esempio che poi si potrà generalizzare. Utilizzeremo i diagrammi di Venn per questioni di semplicità.

Consideriamo un insieme "universo" Ω e tre suoi sottoinsiemi A, B, C, come mostrati nella figura 1.7.

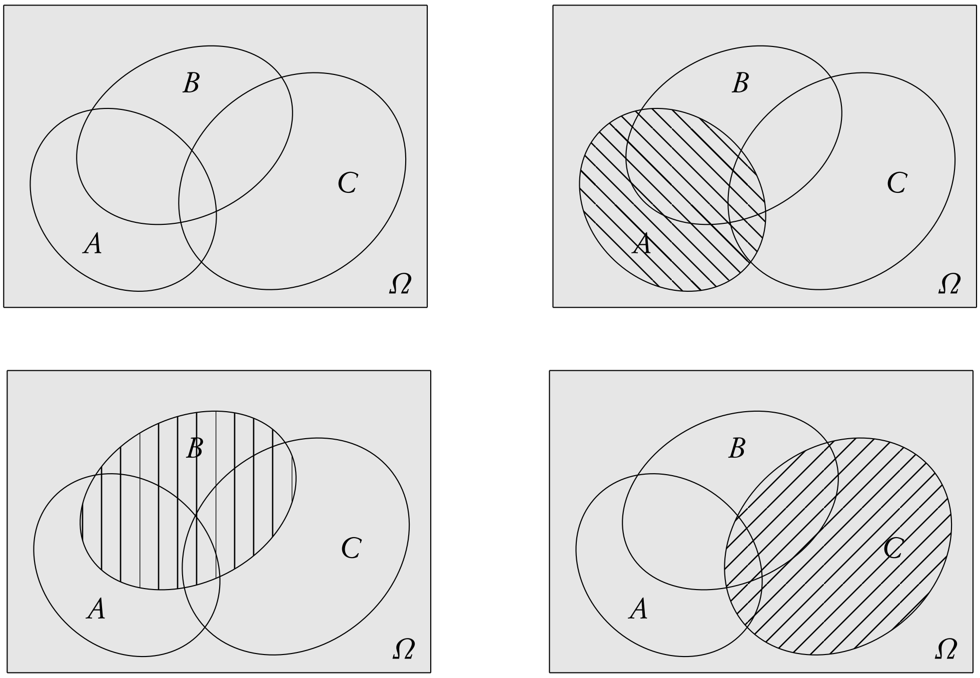


Figura 1.7.: *Un insieme universo Ω e tre suoi sottoinsemi: A, B, C*

A partire da questi tre sottoinsiemi consideriamo i seguenti sottoinsiemi, che indicheremo con I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8.

1. L'insieme dei punti comuni ad A, B e C: $A \cap B \cap C = I_1$.
2. L'insieme dei punti comuni ad A e B, ma esterni a C: $A \cap B \cap C^c = I_2$.
3. L'insieme dei punti comuni a B e C, ma esterni ad A: $A^c \cap B \cap C = I_3$.
4. L'insieme dei punti comuni ad A e C, ma esterni a B: $A \cap B^c \cap C = I_4$.
5. L'insieme dei punti di A esterni sia a B che a C: $A \cap B^c \cap C^c = I_5$.
6. L'insieme dei punti di B esterni sia ad A che a C: $A^c \cap B \cap C^c = I_6$.
7. L'insieme dei punti di C esterni sia ad A che a B: $A^c \cap B^c \cap C = I_7$.
8. L'insieme dei punti esterni a tutti tre i sottoinsiemi dati: $A^c \cap B^c \cap C^c = I_8$.

Questi insiemi sono rappresentati, nell'ordine indicato, nelle figure 1.8, 1.9, 1.10, 1.11.

In questo esempio questa tecnica ci ha permesso di costruire 8 diversi sottoinsiemi di Ω, non vuoti, a due a due disgiunti e la cui riunione fornisce tutto Ω: si tratta dunque di una partizione di Ω, ottenuta utilizzando i sottoinsiemi A, B e C considerati.

A partire da questi 8 insiemi possiamo sia ricostruire l'insieme universo Ω, facendo la riunione di tutti 8, sia ricostruire i tre insiemi di partenza, come di seguito indicato.

— $A = I_1 \cup I_2 \cup I_5$.

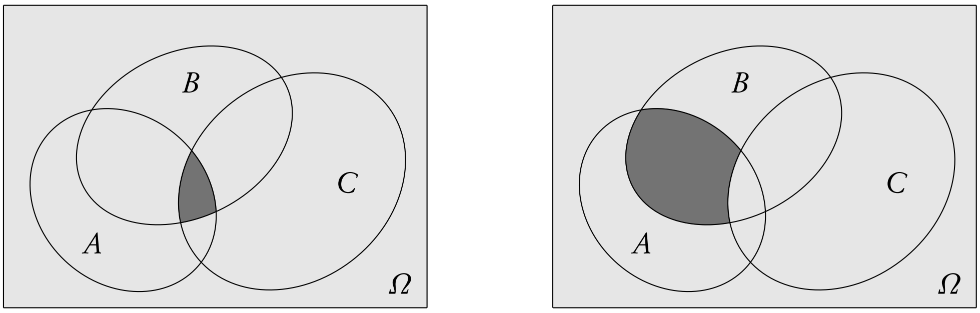


Figura 1.8.: $A \cap B \cap C = I_1$ *e* $A \cap B \cap C^c = I_2$*, con riferimento alla figura* 1.7

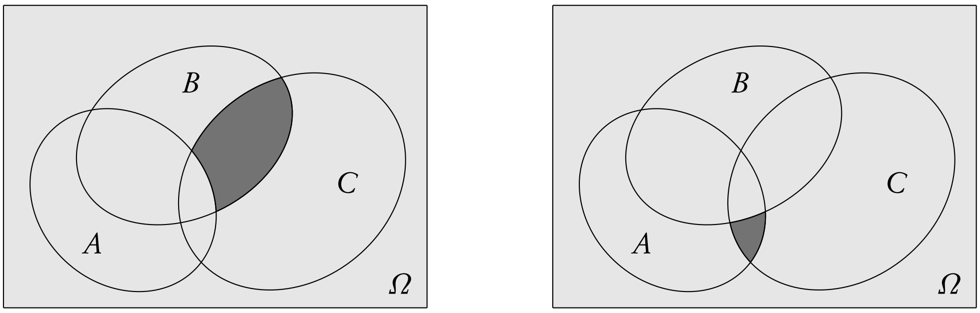


Figura 1.9.: $A^c \cap B \cap C = I_3$ *e* $A \cap B^c \cap C = I_4$*, con riferimento alla figura* 1.7

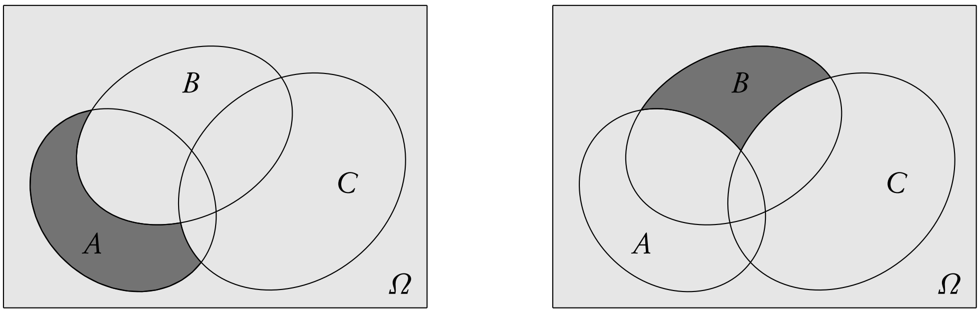


Figura 1.10.: $A \cap B^c \cap C^c = I_5$ *e* $A^c \cap B \cap C^c = I_6$*, con riferimento alla figura* 1.7

— $B = I_1 \cup I_3 \cup I6$.
— $C = I_1 \cup I_4 \cup I_7$.

Per questo motivo gli insiemi I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 e I_8 si chiamano insiemi *costituenti*[(10)] dei tre

[10]In alcuni testi sono chiamati anche *atomi*.

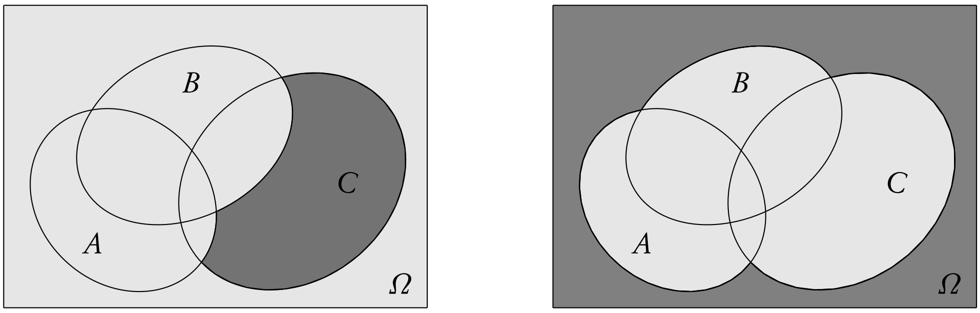


Figura 1.11.: $A^c \cap B^c \cap C = I_7$ *e* $A^c \cap B^c \cap C^c = I_8$*, con riferimento alla figura* 1.7

sottoinsiemi dati.

In vista di un argomento che introdurremo successivamente, si noti che gli otto insiemi si sono ottenuti sempre considerando l'intersezione di tre insiemi: nel primo caso di nessuno si considera il complementare, nel secondo, terzo e quarto si considera il complementare di uno dei tre, nel quinto, sesto e settimo il complementare di due dei tre, nell'ultimo il complementare di tutti tre. È come se avessimo tre caselline di nome A, B e C da lasciare vuote o riempire con la lettera "c". Come vedremo si tratta di un problema di *disposizioni con ripetizione* e il numero totale di possibilità è proprio $8 = 2^3$: se i sottoinsiemi fossero n anziché tre, si otterrebbero 2^n insiemi. In generale però, procedendo nel modo indicato, si possono ottenere anche insiemi vuoti, e poiché siamo interessati alle partizioni, cioè a sottoinsiemi non vuoti, dovremo concludere che l'insieme dei costituenti può contenere anche meno di 2^n elementi, ma non più di 2^n. Lo vedremo tra un momento su un esempio.

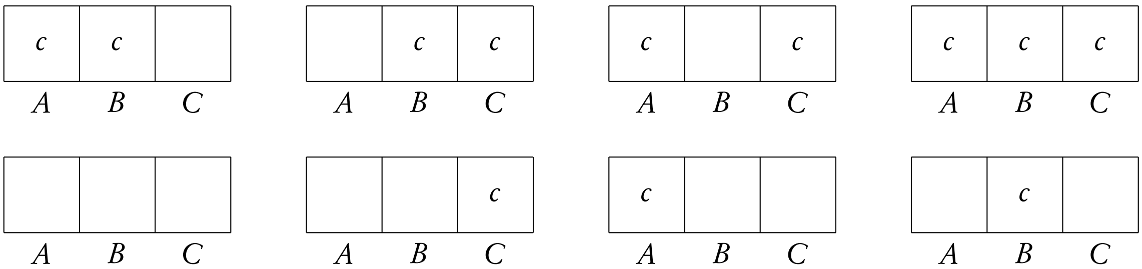


Figura 1.12.: *Tre caselle da lasciare vuote o riempire con la lettera "c"*

Per costruire un esempio semplice di insieme con sottoinsiemi in cui i costituenti sono meno di 2^n, consideriamo la situazione costituita da tre sottoinsiemi A, B e C, che siano a due a due disgiunti. In questo caso tutte le intersezioni che coinvolgono due o tutti tre i sottoinsiemi producono l'insieme vuoto (facendo riferimento all'esempio discusso a pagina 12 si tratta degli insiemi che abbiamo indicato con I_1, I_2, I_3 e I_4). Delle otto possibilità ne rimangono quindi soltanto quattro, cioè i tre insiemi dati e la parte esterna a tutti tre. Si veda la figura 1.13.

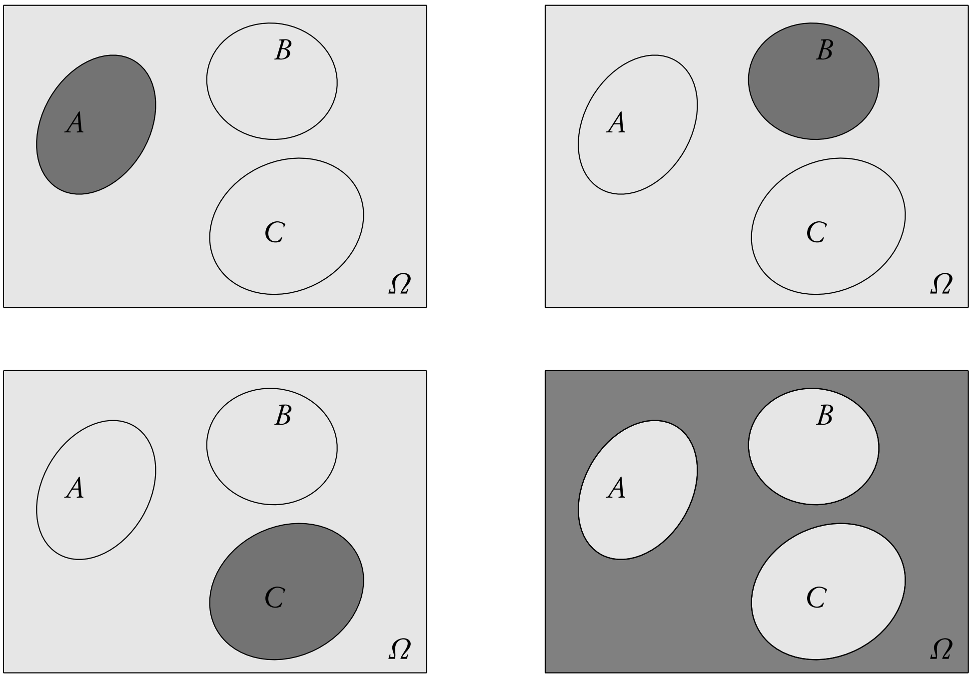


Figura 1.13.: *Costituenti in caso di tre sottoinsiemi disgiunti*

Come utile esercizio si provi a considerare anche altre situazioni, per esempio quella in cui si hanno sempre tre sottoinsiemi, due dei quali hanno una parte comune, mentre il terzo è esterno agli altri due.

Si noti che quando non si hanno sottoinsiemi, ovvero se $n = 0$, il numero dei costituenti è $2^0 = 1$ ed è l'insieme Ω stesso. Stesso discorso se abbiamo come unico sottoinsieme l'insieme Ω stesso: l'unico costituente è ancora Ω: in questo caso si avrebbe $2^1 = 2$, ma sappiamo che i costituenti possono essere meno di $2^n = 2^1 = 2$.

1.8. Funzioni

Il concetto di funzione, o applicazione, tra due insiemi è uno dei più fecondi della matematica. Per quanto attiene al nostro corso siamo interessati solo ad alcuni aspetti essenziali.

Definizione 1.7. *Dati due insiemi A e B, si dice* funzione *di A in B una qualunque legge che faccia corrispondere* a ogni *elemento di A* uno ed un solo elemento *di B.*

L'insieme A è detto dominio *della funzione, l'insieme B è detto* codominio. *Se x è un elemento dell'insieme A e y è l'*unico *elemento di B che corrisponde ad A, si dice che y è* funzione *di x e si scrive $y = f(x)$ (leggi: "y uguale a effe di x").*

È molto importante ricordare che per assegnare una funzione occorre assegnare

— il dominio

— il codominio
— una legge o regola che indichi, per ogni x del dominio, quale sia l'unico y corrispondente del codominio.

Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce, come quello della figura 1.14.

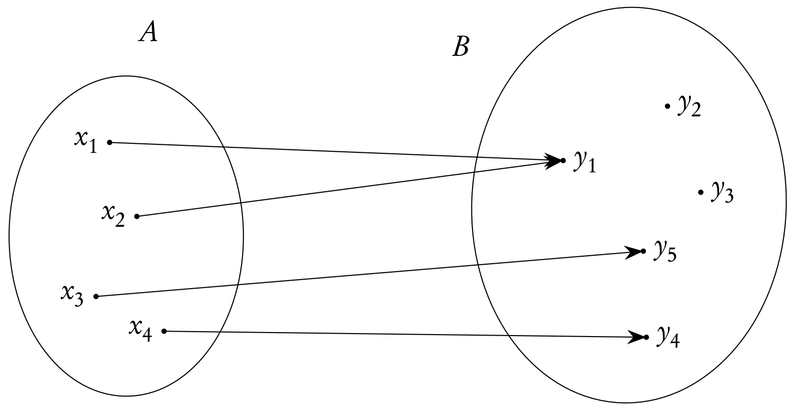


Figura 1.14.: *Diagramma "a frecce" per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti)*

Si noti che *è obbligatorio* che da *ogni* punto (elemento dell'insieme) A parta *esattamente* una freccia, mentre sui punti dell'insieme B possono anche arrivare *più* frecce, oppure *nessuna* freccia. Si potrebbe dire, usando un linguaggio figurato, che A è l'insieme degli arcieri, B l'insieme dei bersagli e che ogni arciere ha a disposizione nella propria faretra solo una freccia che è costretto a lanciare, mentre non ci sono limitazioni sui bersagli da colpire: ci possono essere bersagli colpiti da più frecce, e anche bersagli non colpiti da alcuna freccia.

I casi particolari seguenti interessano le applicazioni.

1. Il caso in cui "tutti i bersagli sono colpiti": in questo caso la funzione si dice *suriettiva*.
2. Il caso in cui "ciascun bersaglio è colpito al massimo una volta": in questo caso la funzione si dice *iniettiva*; è come dire che arcieri diversi colpiscono bersagli diversi.
3. Il caso in cui si verificano contemporaneamente le due situazioni precedenti, cioè "ogni bersaglio è colpito esattamente una volta": in questo caso la funzione si dice *biunivoca* o *biiettiva*. Dunque biunivoca significa iniettiva e contemporaneamente suriettiva.

Non sarà sempre possibile avere funzioni con una delle tre proprietà considerate. Se per esempio A ha tre elementi (tre arcieri) e B ne ha quattro (quattro bersagli), non sarà mai possibile avere una funzione suriettiva; viceversa se A ha quattro elementi e B ne ha tre non sarà mai possibile avere una funzione iniettiva.

Se, dati due insiemi A e B, esiste una funzione biunivoca tra i due, allora si dice che i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca.

1.9. Cardinalità

Per trattare alcuni concetti di probabilità abbiamo bisogno di introdurre il concetto di *cardinalità* di un insieme: si tratta in sostanza di valutare la *quantità di elementi* dell'insieme. Ne faremo solo un breve cenno.

Definizione 1.8. *Se due insiemi A e B sono in corrispondenza biunivoca si dice che hanno la* stessa cardinalità. *Se un insieme A è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ del tipo* $\{1, 2, \dots, n\}$, *dove n è un numero naturale maggiore o uguale a* 1, *allora si dice che l'insieme A è* finito *e il numero n si chiama* cardinalità *di A. Se ciò non è possibile l'insieme A si dice* infinito *o che ha* cardinalità infinita.

La cardinalità di un insieme A si indica con il simbolo

$$|A| \quad \text{oppure} \quad \text{card}(A). \tag{1.11}$$

Per quanto riguarda gli insiemi finiti il concetto di cardinalità è abbastanza semplice e anzi possiamo osservare che è in questo modo che, alle scuole elementari, ci è stato introdotto il concetto di numero: il numero 2, per esempio, ci è stato introdotto proprio come quello che identifica la quantità di oggetti negli insiemi rappresentati nella figura 1.15.

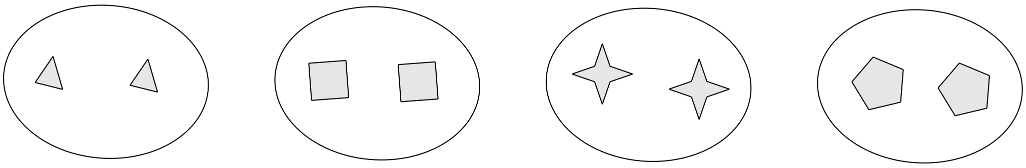


Figura 1.15.: *Insiemi di cardinalità* 2

La situazione è più complessa quando si ha a che fare con insiemi infiniti. Senza entrare troppo nei dettagli faremo alcune considerazioni di base (anche perché sono interessanti e, in un certo senso, sorprendenti).

Intanto osserviamo che il primo esempio di insieme infinito è quello dei numeri naturali $\mathbb{N}$: è ovvio che non si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e un insieme del tipo $\{1, 2, \dots, n\}$. Anche l'insieme, diciamolo $\mathbb{P}$, dei numeri naturali pari (che è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$) è infinito, come è evidente: la cosa sorprendente è che tra $\mathbb{P}$ ed $\mathbb{N}$ è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca, come mostra l'immagine che segue.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Potremo dire che gli insiemi $\mathbb{P}$ ed $\mathbb{N}$ hanno la stessa "quantità di elementi", oppure la stessa "numerosità", nonostante $\mathbb{P}$ sia un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, anzi un sottoinsieme che dovrebbe avere, a livello intuitivo, la metà degli elementi di $\mathbb{N}$.

A questo punto potrebbe venire il sospetto che tra due insiemi infiniti qualunque si possa stabilire sempre una corrispondenza biunivoca, ovvero che due insiemi infiniti qualunque abbiano la stessa cardinalità. Purtroppo la cosa non è vera e l'esempio più famoso[(11)] è dato dagli insiemi dei numeri naturali e dei numeri reali: non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi. Se ne può concludere (visto anche che $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$) che l'insieme dei numeri reali ha più elementi, ovvero è più numeroso, dell'insieme dei numeri naturali: si dice che la cardinalità di $\mathbb{R}$ è più grande della cardinalità di $\mathbb{N}$. Per la cardinalità di $\mathbb{N}$ si usa il simbolo $\aleph_0$ (leggi "alef-zero"), per la cardinalità[(12)] di $\mathbb{R}$ si usa il simbolo $\aleph_1$ (leggi "alef-uno"): dunque

$$\aleph_0 < \aleph_1 .$$

Gli insiemi che hanno la cardinalità $\aleph_0$ si dicono *numerabili*, la cardinalità di $\mathbb{R}$ si chiama anche *cardinalità del continuo*: quest'ultima denominazione sta, in un certo senso, a ricordare che l'insieme dei numeri reali si può rappresentare sulla retta, che è un "continuo", senza alcuna interruzione o "lacuna".

1.10. Numeri

Gli "oggetti base" su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono i seguenti:

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} .$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il "presentare" questi insiemi.

— $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri *naturali* che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo". Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \} .$$

L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.

— $\mathbb{Z}$ (il simbolo usato è legato alla parola tedesca *zahl*, cioè *numero*, *cifra*) è l'insieme dei numeri *interi*, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei "numeri naturali con segno" (attenzione però al fatto che $+0 = -0 = 0$, ovvero al fatto che 0 non ha segno!):

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} .$$

Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un *successivo*.

[11] Questa scoperta è dovuto al grande matematico Georg Cantor (1845-1918), che la provò con un famoso procedimento detto "procedimento diagonale". È interessante quello che David Hilbert (1862-1943), uno dei più eminenti matematici a cavallo tra l'800 e il 900, disse a proposito di Cantor: "Nessuno riuscirà a cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi."

[12] In alcuni testi si usa anche il simbolo $\mathfrak{c}$.

— $\mathbb{Q}$ (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, *ratio* in latino) è l'insieme dei numeri *razionali*, ovvero delle *frazioni* con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, occorre tenere conto che due frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali, rappresentano lo stesso numero. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):
$$\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 \,\}\,.$$
I numeri razionali si possono anche scrivere come *numeri decimali*, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di *successivo* di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):
$$\text{se } a = \frac{m}{n} \text{ e } b = \frac{p}{q}, \text{ allora il numero } c = \frac{a+b}{2} \text{ è razionale ed è compreso tra } a \text{ e } b.$$

— $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri *reali*. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come π, ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare "all'estrema destra", e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall'insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell'ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in $\mathbb{N}$ non si può sempre fare la sottrazione, mentre in $\mathbb{Z}$ e successivi si, in $\mathbb{Z}$ non si può sempre fare la divisione, mentre in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si (tranne per zero, ovviamente!).

In matematica si utilizza estesamente anche un altro insieme numerico, l'insieme dei numeri complessi, che si indica con $\mathbb{C}$ e che è un soprainsieme dell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il vantaggio principale di questo insieme numerico è che in esso si può sempre estrarre la radice quadrata, anche dei numeri negativi. Non avremo comunque occasione di occuparcene.

1.11. Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nelle applicazioni. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

Definizione 1.9. *Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano* intervalli, *con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

$]a,a[$	$\emptyset$	*intervallo vuoto*
$]a,b[$	$\{\,x \mid a < x < b\,\}$	*intervallo limitato* aperto
$[a,b]$	$\{\,x \mid a \le x \le b\,\}$	*intervallo limitato* chiuso
$[a,b[$	$\{\,x \mid a \le x < b\,\}$	*intervallo limitato* chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a,b]$	$\{\,x \mid a < x \le b\,\}$	*intervallo limitato* aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a,+\infty[$	$\{\,x \mid x > a\,\}$	*intervallo superiormente illimitato* aperto
$[a,+\infty[$	$\{\,x \mid x \ge a\,\}$	*intervallo superiormente illimitato* chiuso
$]-\infty,a[$	$\{\,x \mid x < a\,\}$	*intervallo inferiormente illimitato* aperto
$]-\infty,a]$	$\{\,x \mid x \le a\,\}$	*intervallo inferiormente illimitato* chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo.
Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti, *quelli illimitati anche* semirette.

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme $\mathbb{R}$ si usa la scrittura $]-\infty,+\infty[$ e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che $a=b$ l'intervallo chiuso $[a,a]$ si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo*.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza*. L'intervallo (aperto) di centro x_0 e raggio δ è allora

$$]x_0-\delta\,,\,x_0+\delta[\,.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

1.12. Esercizi

Esercizio 1.1. *Se $A=\{\,1,2,3\,\}$, scrivere l'insieme $\mathscr{P}(A)$.*

Risoluzione. Si ha

$$\mathscr{P}(A) = \{\,\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\,\}\,.$$ □

Esercizio 1.2. *Se $A=\{\,1,2,3\,\}$, dire quali delle seguenti scritture sono corrette e quali errate.*

- $\{\,1\,\} \in A$.
- $\{\,1\,\} \subset A$.
- $\{\,1\,\} \subseteq A$.
- $1 \in A$.

- $\emptyset \subseteq A$.
- $\emptyset \subset A$.
- $\emptyset \in A$.
- $|A| = 3$.
- $|\mathscr{P}(A)| = 8$.
- $A \subset A$.
- $A \subseteq A$.

Risoluzione. $\{1\} \in A$ è falsa perché $\{1\}$ è un sottoinsieme, non un elemento di A. $\{1\} \subset A$ e $\{1\} \subseteq A$ sono entrambe vere (si ricordi che $\{1\} \subseteq A$ significa $\{1\} \subset A \vee \{1\} = A$: la prima è vera, la seconda è falsa, dunque la proposizione ottenuta con "Vel" è vera). $1 \in A$ è vera: 1 è un elemento di A. $\emptyset \subseteq A$ e $\emptyset \subset A$ sono vere (si ricordi quanto appena osservato per il significato di $\subseteq$). $\emptyset \in A$ è falsa: $\emptyset$ è un sottoinsieme, non un elemento di A. $|A| = 3$ e $|\mathscr{P}(A)| = 8$ sono banalmente vere. $A \subset A$ è falsa, in quanto $A = A$. $A \subseteq A$ è vera, per quanto già osservato sul senso di $\subseteq$. □

Esercizio 1.3. *Siano dati gli insiemi* $A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$, $B = \{2,3,7,15,16,17\}$, $C = \{1,3,7,17,18,20\}$ *e* $D = \{6,7,8,9,10,11\}$. *Trovare i seguenti insiemi.*

- $A \cup B$.
- $A \cap B$.
- $(A \cup B) \cap (C \cup D)$.
- $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.
- $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$.
- $A \setminus (B \cap C)$.
- $(D \setminus C) \cup (C \setminus D)$.

Risoluzione. Si ha:

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9,11,15,16,17\}$.
- $A \cap B = \{2,3,7\}$.
- $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{1,3,7,9,11,17\}$.
- $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2,3,7\}$.
- $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = \{1,3,4,5,9,11,17,18,20\}$.
- $A \setminus (B \cap C) = \{1,2,4,5,9,11\}$.
- $(D \setminus C) \cup (C \setminus D) = \{1,3,6,8,9,10,11117,18,20\}$. □

Esercizio 1.4. *Con riferimento agli stessi insiemi dell'esercizio 1.3, dire se valgono o no le seguenti uguaglianze.*

- $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap B = B \cap A$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
— $A = A \cup (A \cap B)$.

Risoluzione. Le uguaglianze indicate valgono per tutti gli insiemi: le prime due esprimono le proprietà commutative, la terza e la quarta la doppia proprietà distributiva, la quinta e la sesta le proprietà associative, l'ultima si può leggere dicendo che un insieme è l'unione dell'insieme stesso con un suo sottoinsieme. □

Esercizio 1.5. *Calcolare*

$$\sum_{i=3}^{6} \left(\frac{i}{i+1} + i \right)^2 .$$

Risoluzione. La somma indicata si può scrivere, in maniera esplicita, come

$$\left(\frac{3}{4}+3\right)^2 + \left(\frac{4}{5}+4\right)^2 + \left(\frac{5}{6}+5\right)^2 + \left(\frac{6}{7}+3\right)^2 .$$

Il calcolo richiede una buona dose di pazienza: dopo un bel po' di fatica si ottiene

$$\frac{20841781}{176400} .$$

Quello che ci interessa qui segnalare è come un simbolo così compatto possa in realtà racchiudere un numero così complesso. □

Esercizio 1.6. *Calcolare*

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=2}^{4} (i^2 + j) \right) .$$

Risoluzione. In questo caso si tratta di fare prima la somma interna, ponendo j successivamente uguale a $2, 3, 4$ e solo dopo fare la somma esterna, ponendo i successivamente uguale a $1, 2, 3$. In termini espliciti si ha, al primo passo,

$$\sum_{i=1}^{3} \big((i^2+2) + (i^2+3) + (i^2+4) \big) = \sum_{i=1}^{3} \big(3i^2 + 9 \big) .$$

Al secondo passo si ottiene

$$\big(3 \cdot 1^2 + 9\big) + \big(3 \cdot 2^2 + 9\big) + \big(3 \cdot 3^2 + 9\big) = 69 .$$ □

Esercizio 1.7. *Siano Ω l'insieme dei naturali da* 1 *a* 8, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{5, 6, 7\}$. *Scrivere una partizione di Ω mediante costituenti.*

Risoluzione. Scriviamo intanto gli insiemi A^c, B^c e C^c. Si ha

$$A^c = \{2, 4, 6, 7, 8\}, \quad B^c = \{1, 3, 5, 7, 8\}, \quad C^c = \{1, 2, 3, 4, 8\} .$$

Se ne deduce che gli insiemi ottenuti intersecando fra di loro questi insiemi come descritto nella pagina 12 sono i seguenti.

— $A \cap B \cap C = \emptyset$.
— $A \cap B \cap C^c = \emptyset$.
— $A \cap B^c \cap C = \{5\}$.
— $A^c \cap B \cap C = \{6\}$.
— $A \cap B^c \cap C^c \{1,3\} =$.
— $A^c \cap B^c \cap C = \{7\}$.
— $A^c \cap B \cap C^c = \{2,4\}$.
— $A^c \cap B^c \cap C^c = \{8\}$.

I primi due insiemi sono vuoti, gli altri 6 costituiscono una partizione, come richiesto. □

Esercizio 1.8. *Per ognuna delle uguaglianze seguenti dire, giustificando le risposte, quando vale (A e B sono insiemi).*

1. $A \cup B = A$;
2. $A \cap B = A$;
3. $A \setminus B = A$;
4. $A \setminus B = \emptyset$;
5. $A \cap B = \emptyset$;
6. $A \cup B = \emptyset$.

Risoluzione. Si possono fare le considerazioni seguenti.

1. $A \cup B = A$: è valida se se A è un soprainsieme di B, in particolare, ma non solo, se B è vuoto.
2. $A \cap B = A$: è valida se A è un sottoinsieme di B, in particolare anche se A è vuoto.
3. $A \setminus B = A$: è valida quando A e B sono disgiunti, ovvero non hanno elementi comuni.
4. $A \setminus B = \emptyset$: è valida quando B è un soprainsieme di A.
5. $A \cap B = \emptyset$: è valida se A e B sono disgiunti, in particolare, ma non solo se uno o entrambi sono vuoti.
6. $A \cup B = \emptyset$: è valida solo se A e B sono entrambi vuoti. □

2. Cenni di calcolo combinatorio

In matematica non si capiscono le cose. Semplicemente ci si abitua ad esse.
John von Neumann

In questo capitolo è proposta una introduzione ai fondamenti del calcolo combinatorio, limitatamente ai suoi aspetti più elementari.

In tutto questo capitolo, salvo quando diversamente specificato, i numeri m, n, k sono sempre naturali.

2.1. Introduzione

Il calcolo combinatorio si occupa della determinazione della cardinalità di certi insiemi finiti, assegnati mediante proprietà caratteristica. Il problema è usualmente molto complesso e, soprattutto, non esistono metodi standard per risolverlo: forse per questo è ritenuto argomento ostico e difficile. Oltre ad essere una premessa molto importante per lo studio del calcolo delle probabilità, questo argomento entra anche nei rapporti tra matematica, arte e design.

In questo capitolo descriveremo le tecniche fondamentali e proporremo alcuni esempi risolti: l'esame di un buon numero di casi concreti è l'unico modo per acquisire dimestichezza nella risoluzione di questo tipo di problemi, anche se in questo corso saremo interessati solo alle questioni essenziali.

E' opportuno segnalare fin da subito che esistono situazioni in cui l'unica strategia che è possibile utilizzare è quella di scrivere l'insieme in questione e numerare, uno alla volta, i suoi elementi. L'esempio più classico è costituito dal seguente problema: *Dato un numero naturale n, determinare la cardinalità dell'insieme dei numeri primi minori di n.* Non resta altro da fare che scrivere pazientemente tutti i numeri richiesti e contarli.

Prima di entrare nei dettagli è utile una definizione.

Definizione 2.1. *Dato un naturale $n > 0$, si chiama* fattoriale *di n e si indica con $n!$ (n fattoriale) il prodotto di tutti i naturali da 1 a n:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n. \tag{2.1}$$

Si pone poi $0! = 1$.

Quasi certamente il motivo per cui nel simbolo è presente il punto esclamativo è legato allo stupore per la rapidità con cui il risultato dell'operazione cresce, al crescere del numero n. Si ha, per esempio,

$$10! = 3628800,$$

numero che non è ancora molto grande, mentre

$$\begin{aligned}100! = {} & 9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389521759999\\ & 322991560894146397615651828625369792082722375825118521091686400000000\\ & 0000000000000000 \simeq 10^{158},\end{aligned}$$

e questo si che è drammaticamente grande. Per rendersi ancora meglio conto di questo fatto si può osservare che la maggior parte delle calcolatrici tascabili, anche scientifiche, non riescono a calcolare nemmeno 70!, in quanto è un numero superiore a 10^{100}, che è il massimo intero ammesso nelle comuni calcolatrici.

È utile in molte questioni tenere conto delle seguenti formule, immediata conseguenza della definizione di fattoriale.

$$n! = n \cdot (n-1)!, \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!, \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!, \quad \dots \tag{2.2}$$

2.2. Disposizioni

Il primo problema base del calcolo combinatorio può essere espresso come segue: dato un insieme A di n elementi in quanti modi è possibile costruire allineamenti ordinati di k di questi elementi?

Esempio 2.1. Dati i simboli 1, 2, X, quante colonne di 13 simboli siffatti si possono costruire? (Gioco del totocalcio).

Esempio 2.2. Dato un alfabeto di 26 simboli, quante sono le parole di tre simboli tutti distinti che si possono costruire (prescindendo dal significato!)?

Esempio 2.3. In una gara di Formula 1 con 20 piloti, quante sono le possibili terne candidate a salire sul podio?

Si noti che nel primo esempio gli allineamenti richiesti comportano la possibilità di ripetizioni, negli altri due no.

Utilizzando uno schema a celle il problema può essere visualizzato così: dati n simboli e k caselle numerate progressivamente, in quanti modi è possibile riempire le k caselle con gli n simboli? È chiaro che, se non sono consentite ripetizioni dei simboli, k non deve superare n, altrimenti non ci sono condizioni. Si veda la figura 2.1.

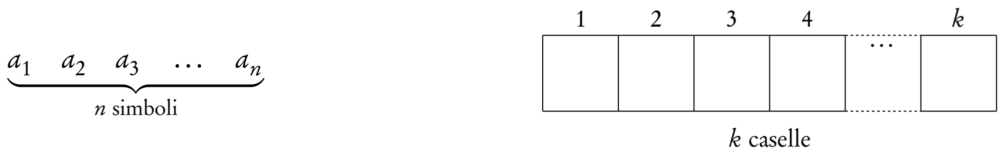


Figura 2.1.: *Disposizioni di "n" oggetti distinti in "k" caselle numerate*

Diamo ora due definizioni più formali.

Definizione 2.2 (Disposizioni semplici). *Dati n oggetti distinti e detto k un numero positivo non superiore a n, si chiamano* disposizioni semplici *di questi n oggetti presi k alla volta, ovvero di classe k, tutti gli allineamenti che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ciascuno sia preso al massimo una volta, che due allineamenti differiscano per l'ordine in cui i k oggetti sono presi o per almeno uno degli oggetti contenuti.*

Definizione 2.3 (Disposizioni con ripetizione). *Dati n oggetti distinti e detto k un numero positivo qualunque, si chiamano* disposizioni con ripetizione *di questi n oggetti presi k alla volta, ovvero di classe k, tutti gli allineamenti che si possono formare con gli n oggetti dati in modo che ciascuno sia preso al massimo k volte, che due allineamenti differiscano per l'ordine in cui gli oggetti sono presi o per almeno uno degli oggetti contenuti o per il numero di ripetizioni di un oggetto.*

Il numero delle disposizioni semplici di n oggetti di classe k si indica[1] con V_n^k, quello delle disposizioni con ripetizione con ${}^{\mathsf{R}}\mathsf{V}_n^k$. Valgono le seguenti formule.

$$\mathsf{V}_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}_{k \text{ fattori}} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ fattori}} = \frac{n!}{(n-k)!}\,; \tag{2.3}$$

$${}^{\mathsf{R}}\mathsf{V}_n^k = n^k. \tag{2.4}$$

Esempio 2.4. Dato $A = \{a, b, c, d\}$, le disposizioni semplici di classe 2 sono in numero $\mathsf{V}_4^2 = 12$ e sono: ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc. Le disposizioni con ripetizione della stessa classe sono invece ${}^{\mathsf{R}}\mathsf{V}_4^2 = 16$ e sono le 12 precedenti con l'aggiunta di aa, bb, cc, dd.

Per comprendere ancora meglio il concetto di disposizione si può pensare che gli n oggetti siano lettere di un alfabeto e che gli allineamenti siano le parole che si possono formare con queste lettere: disposizioni semplici se nessuna lettera può essere ripetuta, con ripetizione se qualche lettera può essere ripetuta.

2.3. Permutazioni

Permutare significa "cambiare l'ordine" in cui certi oggetti sono scritti. Interessa sia il caso in cui gli oggetti sono tutti distinti, sia quello in cui ci sono ripetizioni.

2.3.1. Permutazioni fra elementi distinti

Il caso in cui le disposizioni semplici di n oggetti siano di classe n ha una particolare importanza, tanto da meritare un capitolo a sé nello studio del calcolo combinatorio.

Si dà la seguente definizione.

Definizione 2.4. *Si chiama* permutazione *di un insieme A di n elementi una disposizione semplice degli elementi, di classe n.*

Il numero V_n^n si indica con P_n e si ha

$$\mathsf{P}_n = n! \tag{2.5}$$

[1] Qui, come del resto in tutto questo testo, abbiamo preferito usare, quando presente, la notazione UNI CEI ISO 80000-2 : 2013. In questo caso il simbolo V sta per "variazioni". Un altro simbolo molto comune utilizza la lettera D, al posto di V.

Gli anagrammi di parole con lettere tutte distinte sono il più comune esempio di permutazioni. Naturalmente in questo problema si prescinde dal significato delle parole. Per esempio gli anagrammi di *cane* sono in numero di $4! = 24$ e sono: *cane*, caen, cean, *cena*, cnae, cnea, aecn, aenc, anec, *ance*, *acne*, acen, eacn, eanc, ecan, ecna, enac, enca, nace, naec, neac, neca, ncae, ncea. Di questi solo quelli in corsivo hanno un significato nel vocabolario italiano.

2.3.2. Permutazioni fra elementi non tutti distinti

Se riprendiamo in considerazione gli anagrammi, sappiamo che hanno interesse anche quelli di parole formate da lettere non tutte distinte (come "mamma"). E' chiaro che in questo caso il numero di anagrammi è notevolmente inferiore rispetto a quello di parole con lo stesso numero di lettere tutte distinte: per esempio nel citato caso di "mamma", uno scambio tra le tre m o tra le due a non provoca cambiamenti nella parola. In questa e altre situazioni ha dunque interesse anche il calcolo del numero delle permutazioni, o allineamenti, su un insieme di oggetti non tutti distinti.

Consideriamo allora un allineamento di n oggetti, di cui n_1 uguali ad un oggetto a_1, n_2 uguali ad un oggetto a_2, ..., n_k uguali ad un oggetto a_k, con $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, e non essendo escluso che qualcuno degli n_i (o magari anche tutti) sia 1. La determinazione del possibile numero di allineamenti è immediata se si suppone inizialmente che gli oggetti siano tutti distinti, si calcola il numero delle loro possibili permutazioni (che sono in numero di $n!$) e si tiene conto che le $n_i!$ permutazioni degli oggetti uguali ad a_i non danno luogo a situazioni distinte. Questo numero si indica con il simbolo

$$\mathsf{P}_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

e si ha

$$\mathsf{P}_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}. \tag{2.6}$$

Questa formula comprende la (2.5) come caso particolare: la (2.5) si ottiene dalla (2.6) ponendo tutti gli n_i uguali a 1.

Per esempio gli anagrammi della parola *mamma* sono *mamma*, mmmaa, mmaam, mmama, mamam, ammma, amamm, aammm, ammam, amamm. Di questi solo l'originale ha un significato nel vocabolario italiano (del resto, come tutti sappiamo, "di mamma ce n'è una sola!").

2.4. Combinazioni

"Combinare" significa prendere un certo numero di oggetti da un insieme, senza tenere conto dell'ordine con cui sono presi. Anche qui ha interesse sia il caso in cui sono consentite ripetizioni, sia quello in cui le ripetizioni non sono consentite.

Il terzo problema base del calcolo combinatorio è quello del computo del numero di sottoinsiemi di un dato insieme finito. È immediato che un sottoinsieme di k elementi, presi da un insieme di n elementi, può essere pensato come una collezione di k oggetti su un totale di n, in cui non conti l'ordine. Questo distingue il problema qui trattato da quello del calcolo delle disposizioni (semplici). Si dà in proposito la seguente definizione.

Definizione 2.5. *Dato un insieme A di n elementi, un suo sottoinsieme contenente k* $(k \leq n)$ *elementi si chiama una* combinazione semplice *degli n elementi di classe k oppure a k a k.*

Il numero delle combinazioni (semplici) di n elementi di classe k si indica con

$$\mathsf{C}_n^k \quad \text{oppure con} \quad \binom{n}{k}.$$

È evidente che, se si considera una qualunque combinazione di n elementi di classe k e si permutano in tutti i modi possibili, cioè in $k!$ modi, i suoi elementi, si ottengono le disposizioni di n elementi di classe k. Questo ci permette di concludere (tenendo presente, se $n = k$, che $0! = 1$) che, per le combinazioni in oggetto, vale la formula (2.7).

$$\mathsf{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{\mathsf{V}_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \tag{2.7}$$

I numeri C_n^k si chiamano anche, perché legati allo sviluppo della potenza di un binomio, *coefficienti binomiali*; tuttavia non avremo necessità di occuparci di questo problema. Se $k = 0$ il numero dei possibili sottoinsiemi è 1 (solo l'insieme vuoto) e perciò si pone

$$\binom{n}{0} = 1\,, \tag{2.8}$$

in accordo con la formula (2.7).

Esempio 2.5. Dato $A = \{a, b, c, d\}$, le combinazioni semplici di classe 2 sono in numero di $\mathsf{C}_4^2 = 6$ e sono ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Definizione 2.6. *Dato un insieme A di n elementi, si chiama* combinazione con ripetizione, *di classe k, ogni gruppo di k elementi, anche non distinti, presi tra gli n elementi dell'insieme, nell'ipotesi che l'ordine sia ininfluente.*

Si può dimostrare che il numero di combinazioni con ripetizione di n elementi, di classe k è dato da

$$^{\mathsf{R}}\mathsf{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}. \tag{2.9}$$

Esempio 2.6. Consideriamo un'urna contenente 4 palline, contrassegnate con le lettere a, b, c, d, e supponiamo di estrarre una pallina e, dopo averne segnato il contrassegno, di reimbussolare la pallina ed effettuare una nuova estrazione. Le possibili estrazioni diverse in cui non si tenga conto dell'ordine di estrazione sono ab, ac, ad, bc, bd, cd, aa, bb, cc, dd e sono in numero di 10. Si ha infatti

$$^{\mathsf{R}}\mathsf{C}_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10.$$

2.5. Esercizi

Esercizio 2.1. *Quanti sono gli anagrammi della parola* Battaia *che comincino con la lettera "B"?*

Risoluzione. Basta pensare che delle sette caselle che compongono la parola *Battaia*, la prima è fissa; per le altre sei si tratta di calcolare il numero degli anagrammi di una parola di 6 lettere di cui 3 "a", due "t" e una "i", ovvero

$$\mathrm{P}_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60.$$

La "i" compare una sola volta, si poteva anche trascurare il calcolo del numero delle sue ripetizioni ($1! = 1$). □

Esercizio 2.2. *Quanti sono gli anagrammi della parola* Battaia *cha abbiano le due "t" una di seguito all'altra?*

Risoluzione. Si può pensare al gruppo delle due "t" come un unico oggetto e calcolare gli anagrammi di una parola di 6 lettere, di cui 3 "a", una "doppia t", una "i" e una "b", ovvero

$$\mathrm{P}_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!\,1!\,1!\,1!} = 120.$$ □

Esercizio 2.3. *Uno studente deve sostenere 7 esami per ognuno dei suoi tre anni di corso, senza poter rimandare esami all'anno successivo, ma nell'ordine da lui scelto. In quanti modi lo può fare?*

Risoluzione. Per ogni anno ha 7! possibilità di scelta dell'ordine in cui sostenere gli esami, dunque in totale ha

$$3 \cdot 7! = 15120.$$

Si noti come, anche in un problema apparentemente così elementare, ci siano moltissime possibilità di scelta. □

Esercizio 2.4. *In quanti modi un giocatore di bridge può ricevere le sue* 13 *carte dal mazzo di* 52*?*

Risoluzione. Si tratta delle combinazioni di 52 oggetti a 13 a 13 senza ripetizione:

$$\mathrm{C}_{52}^{13} = \frac{52!}{13!\,39!} = 635013559600 > 635 \text{ miliardi}.$$

□

Esercizio 2.5. *In quanti modi un giocatore di bridge può ricevere le sue* 13 *carte in modo che siano tutte di valore diverso?*

Risoluzione. Poiché ci sono 4 possibilità per ciascun valore, in totale ci saranno

$$4^{13} = 67108864$$

modi. □

Esercizio 2.6. *Quante bandiere tricolori si possono formare con i sette colori fondamentali?*

Risoluzione. Questo problema, per come è formulato, richiede alcune precisazioni, in quanto non è chiaro per esempio se una bandiera con i colori bianco rosso e verde a strisce verticali o a strisce orizzontali siano da considerare diverse o no. Supporremmo che le bandiere in esame siano a strisce verticali. Ma anche così rimane un dubbio: si deve tenere conto anche del verso nella disposizione dei colori? La bandiera italiana è a strisce verticali verde-bianco-rosso o rosso-bianco-verde? La cosa non è così ovvia, tanto che nelle regole di esposizione è prescritto che, "da sinistra a destra" l'ordine sia verde-bianco-rosso: per esempio se la bandiera è attaccata al pennone il verde deve stare vicino al pennone. Questo tipo di problemi si manifestano spesso in questioni che riguardano il calcolo combinatorio ed è proprio per avere modo di discuterne che abbiamo lasciato la formulazione dell'esercizio nella maniera, abbastanza ambigua, con cui di solito è proposto negli eserciziari. Avendo dunque deciso che le bandiere che ci interessano sono a strisce verticali di uguale grandezza e che conta anche il verso, il numero di bandiere tricolori coincide con le disposizioni semplici di 7 oggetti a 3 a 3:

$$V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

□

Esercizio 2.7. *Quanti numeri di tre cifre diverse si possono formare con le cifre* 1, 2, 3, 4, 5*, ma che comincino per* 4*?*

Risoluzione. La prima cifra deve essere 4, abbiamo quindi altre due caselline da riempire con le restanti 4 cifre, senza ripetizione:

$$V_4^2 = 12.$$

□

Esercizio 2.8. *Quanti numeri di tre cifre si possono formare con le cifre pari* (0, 2, 4, 6, 8)*, che non comincino per* 0*?*

Risoluzione. Possiamo osservare che al primo posto abbiamo 4 possibili scelte, negli altri due dobbiamo calcolare le disposizioni con ripetizione di 5 oggetti a 2 a 2; in totale

$$4 \cdot V_5^2 = 4 \cdot 20 = 80.$$

□

Esercizio 2.9. *Quanti ambi e quante terne si possono formare avendo a disposizione* 5 *numeri distinti?*

Risoluzione. In questo caso non conta l'ordine quindi si tratta di un problema di combinazioni, senza ripetizione:

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = 10, \quad C_5^3 = \binom{5}{3} = 10.$$

□

Esercizio 2.10. *Quante cinquine si possono formare con i* 90 *numeri del lotto, se uno dei numeri è prefissato?*

Risoluzione. Si tratta di calcolare le quaterne che si possono formare con 89 numeri, ovvero con i numeri restanti dopo aver tolto il numero che è prefissato. Poiché l'ordine non conta si ha

$$C_{89}^4 = \binom{89}{4} = \frac{89!}{85!\,4!} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdots 1}{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdots 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2441626.$$

Si noti che abbiamo indicato esplicitamente i calcoli da eseguire con i fattoriali, in quanto le comuni calcolatrici tascabili (anche scientifiche) non accettano calcoli comprendenti fattoriali maggiori o uguali a 70!, in quanto 70! supera 10^{100}, che è il massimo intero gestibile dalle comuni calcolatrici tascabili. Nessun problema invece se si esegue il calcolo con un software tipo Mathematica™ o Geogebra. □

Esercizio 2.11. *In quanti modi distinti si possono sistemare* 6 *persone in una fila di* 10 *poltrone?*

Risoluzione. Posso pensare agli anagrammi formati da 10 simboli: 6 simboli diversi (le 6 persone) e 4 simboli identici (le quattro sedie vuote). Si ottiene

$$P_{10}^{4,1,1,1,1,1,1} = \frac{10!}{4!} = 151200. \qquad \square$$

Esercizio 2.12. *Quante sono le cinquine del lotto che contengono una determinata terna?*

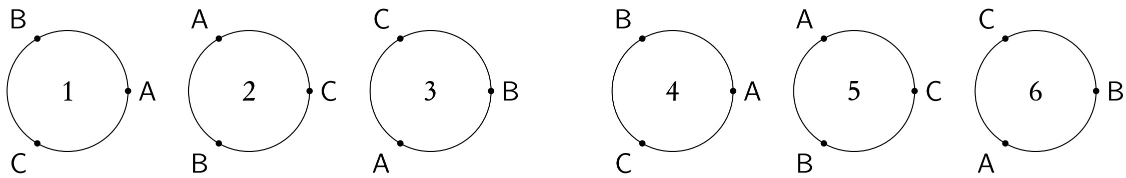
Risoluzione. Si tratta di calcolare gli ambi che si possono formare con 87 numeri, ovvero i 90 numeri del lotto meno i 3 numeri della terna prefissata.

$$C_{87}^{2} = \binom{87}{2} = 3741.$$

□

Esercizio 2.13. *In quanti modi si possono sedere* 10 *persone attorno a un tavolo tondo con* 10 *sedie?*

Risoluzione. Se il tavolo è tondo bisogna tenere conto che una rotazione delle persone non modifica la distribuzione. Esaminiamo per esempio la situazione in cui le persone che si devono sedere, indicate con A, B e C, siano solo 3, sempre su tre sedie.



È chiaro che le prime tre configurazioni si possono considerare identiche e così pure le ultime tre. Possiamo pesnare di tenere fissa una delle tre persone e di far ruotare solo le altre due, ovvero invece di 3! permutazioni, ne restano solo 2!. In generale saranno $(n-1)!$. In situazioni come questa si parla anche di *permutazioni circolari* Nel caso del problema avremo dunque

$$(10-1)! = 9! = 362880$$

possibilità: sempre un bel numero! □

Esercizio 2.14. *In quanti modi si possono sedere, in una fila di* 12 *sedie,* 3 *italiani,* 5 *francesi e* 4 *tedeschi se quelli della stessa nazionalità devono sedere vicini?*

Risoluzione. Occorre prima permutare le tre nazionalità in $3! = 6$ modi, e poi, all'interno di ciascuna nazionalità, permutare le persone in 3!, 5! e 4! modi rispettivamente.

$$3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = 103680. \qquad \square$$

Esercizio 2.15. *In quanti modi si possono sedere, attorno a un tavolo tondo con* 12 *sedie,* 3 *italiani,* 5 *francesi e* 4 *tedeschi se quelli della stessa nazionalità devono sedere vicini?*

Risoluzione. Tenendo conto che per le tre nazionalità si tratta di una permutazione circolare (vedi l'esercizio 2.13) avremo, in analogia con l'esercizio 2.14,

$$2!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 4! = 34560.$$

□

Esercizio 2.16. *Verificare che*

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2.$$

Risoluzione. Si ha

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = \frac{n!}{1!(n-1)!} + 2\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{(n-1)\cdot(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} =$$
$$= \frac{n!}{(n-2)!}\left(\frac{1}{n-1}+1\right) = \frac{n!}{(n-2)!}\,\frac{n}{n-1} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)}\cdot\cancel{(n-2)!}\cdot n}{\cancel{(n-2)!}\cdot\cancel{(n-1)}} = n^2.$$

□

Esercizio 2.17. *In quanti modi si possono mischiare le 52 carte di un mazzo?*

Risoluzione. Anche in questo, come in altri problemi di combinatoria, andrebbe precisato meglio cosa si intende per “mazzi diversamente mischiati”. Per esempio se, una volta mischiato il mazzo, debbo distribuire le carte a 4 giocatori, 13 carte a testa e le distribuisco dando le prime 13 al primo giocatore e così via successivamente, è chiaro che una diversa permutazione delle prime 13 carte non conta, e così via per i successivi gruppi di 13. Noi qui supponiamo, più semplicemente che con “modi di mischiare le carte” si intenda diverse permutazioni delle 52 carte. In questo caso il risultato è semplice

$$\mathsf{P}_{52} = 52! \simeq 8\cdot 10^{67}.$$

Questo numero non è molto diverso dal numero stimato di atomi presenti nell'universo! Il problema dei mescolamenti[2] di carte non è assolutamente banale. □

Esercizio 2.18. *Verificare che*

$$\mathsf{P}_6 = 12\cdot \mathsf{V}_5^3.$$

Risoluzione. Si tratta di un semplice calcolo. Si ha

$$\mathsf{P}_6 = 6!,\quad 12\cdot\mathsf{V}_5^3 = 12\frac{5!}{(5-3)!} = 12\frac{5!}{2!} = 6\cdot 5! = 6!$$

□

[2]Chi è interessato può trovare informazioni su questo problema, oltre che in testi specialistici, in una tesi di laurea discussa alla Facoltà di Ingegneria dell'Università Tor Vergata di Roma nel 2013 e dal titolo *Come, quando e quanto un mazzo di carte è stato ben mischiato?*, laureando Benjamin Isac Fargion, relatore Prof. Benedetto Scoppola.

3. Incertezza e sua valutazione

Il concetto di Probabilità e il più importante della scienza moderna, perché
nessuno ha la più pallida idea del suo significato.
Bertrand Russel, 1927

Nel trattare la logica proposizionale abbiamo introdotto, vedi la definizione 1.1, il concetto di proposizione o enunciato come una affermazione che assume uno ed un solo valore di verità: vero o falso. Nello studio del calcolo delle probabilità dobbiamo invece trattare affermazioni delle quali non si sa se a priori se siano vere o false: ci troviamo di fronte a uno stato di conoscenza parziale e non completa del fenomeno in esame e possiamo solo pensare ad una valutazione che misuri il nostro grado di fiducia nel verificarsi o meno di un certo evento. Esempi tipici, alcuni dei quali già citati parlando di logica proposizionale, sono le frasi: "*Se lancio una moneta esce testa*", "*Se lancio un dado esce il sei*", "*Domani pioverà*", "*Il primo nato a Pordenone nell'anno* 2016 *sarà un maschio*", "*Alle prossime olimpiadi in Brasile l'Italia vincerà* 10 *medaglie*". Parleremo anche di fenomeni *casuali* o *incerti*. Abitualmente si pensa a situazioni di incertezza solo per fenomeni futuri, in quanto è tipicamente per tali eventi che non si sa dire se sono veri o falsi. In realtà ciò che conta è solo la mancanza di informazioni su un evento: è sicuramente casuale il risultato del prossimo incontro di calcio tra la Roma e la Lazio, ma il fenomeno rimane casuale anche dopo che si è verificato, se non ne siamo venuti a conoscenza.

Prestare la massima attenzione a quanto abbiamo detto: l'evento è comunque un fatto che è vero o falso cioè è, in linea di principio una "proposizione" nel senso della logica proposizionale di cui abbiamo parlato, solo che noi non disponiamo dell'informazione adeguata per decidere sul valore di verità della stessa. In sostanza vogliamo studiare situazioni in cui l'informazione necessaria per valutare la verità o falsità di una proposizione non ci è nota, per un qualche motivo (evento che deve ancora accadere, evento già accaduto ma di cui non conosciamo l'esito).

Una osservazione importante sul ragionamento probabilistico: esso è, essenzialmente, un ragionamento induttivo e non deduttivo come la maggior parte delle "tradizionali" teorie matematiche, e questo risulterà evidente man mano che ci addentreremo nello studio. Per ora cerchiamo di far capire che cosa intendiamo con questa affermazione proponendo un esempio, preso da un testo di Romano Scozzafava [vedi 14]. Supponiamo di avere una scatola contenente dieci monete di cui nove normali, cioè con una faccia testa e una croce, e una truccata, cioè con due facce entrambe testa. Se estraiamo una moneta da questa scatola è del tutto ragionevole pensare, prima di effettuare l'estrazione, che la probabilità di estrarre quella truccata è $1/10$, anche senza avere ancora un'idea chiara di che cosa voglia dire probabilità. Se a posteriori controlliamo la moneta possiamo subito scoprire se si tratta o no di quella truccata. Supponiamo però di voler fare un ulteriore esperimento su questa moneta estratta, senza esaminarla: la lanciamo in aria sei volte e controlliamo quale faccia mostra la moneta una volta caduta sul pavimento. Se si ottiene sei volte testa è chiaro che dovremo ragionevolmente pensare che la probabilità che la moneta sia quella truccata è maggiore di $1/10$, anche se ancora non ne abbiamo la certezza[1]. Più avanti

[1] Anche se può sembrare paradossale, potrebbe benissimo succedere che anche con centinaia di lanci l'esito sia sempre testa,

vedremo come fare a calcolare questo "incremento di probabilità". Per ora ci interessa osservare che questo modo di procedere è chiaramente induttivo: abbiamo migliorato le nostre conoscenze facendo degli esperimenti, ovvero abbiamo "appreso dall'esperienza", come dice sempre Romano Scozzafava nel libro citato.

A proposito dei lanci di monete, argomento utilizzato di continuo negli esempi di calcolo delle probabilità, ci piace fare una osservazione che, a prima vista, può sembrare completamente estranea rispetto al discorso che stiamo introducendo sulla probabilità. Da un punto di vista puramente fisico[2] il lancio di una moneta non è un evento casuale o incerto: in teoria se conosciamo la posizione esatta della moneta al momento del lancio, la forza che le imprimiamo lanciandola, l'attrito dell'aria, la sua struttura meccanica, ecc., applicando le leggi della fisica (in pratica la legge della dinamica di Newton) dovremmo essere in grado di valutare esattamente[3] se uscirà testa o croce. Il fatto è che tutte le conoscenze richieste per fare questa valutazione in condizioni di certezza non sono generalmente disponibili, o meglio non ha alcun senso cercare di procurarsele: l'esito del lancio sarà dunque incerto, proprio per la mancanza di tutte le conoscenze inerenti il fenomeno. Per entrare ancora più in profondità nel problema della possibilità di conoscere tutti i dati iniziali e le situazioni che determinano l'esito di un esperimento, è utile ricordare una famosa "polemica" intercorsa tra Albert Einstein e Niels Bohr. Einstein era profondamente convinto che ogni fenomeno potesse essere previsto con certezza, conoscendo le condizioni iniziali e ogni forza coinvolta, mentre Niels Bohr stava formulando la Meccanica Quantistica che assume, tra i suoi fondamenti, che invece i fenomeni fisici siano per la loro stessa natura esprimibili solo in termini di probabilità. In una lettera di Einstein a Niels Bohr del 4 dicembre 1926 compare la famosa frase "Dio non gioca a dadi con l'universo". A questa asserzione Niels Bohr rispose: "Einstein, smettila di dire a Dio cosa deve fare con i suoi dadi". Richard Feynman rincarò ulteriormente la dose con l'affermazione "Dio non solo gioca a dadi con l'universo, ma li getta anche dove non li possiamo vedere". Oggi è comunemente accettato che tutti i fenomeni fisici siano, intrinsecamente, esprimibili solo in termini di probabilità, anche se in molte circostanze "ordinarie" questo aspetto non risulta manifesto.

Prima di concludere questa introduzione al calcolo delle probabilità ci preme segnalare un fatto molto importante: lo studio del calcolo delle probabilità non porta *mai* ad eliminare l'incertezza, ma semplicemente a *gestire l'incertezza*. In molte situazioni se dovessimo attendere di avere l'informazione che ci manca prima del verificarsi di un evento, o perché sull'evento non abbiamo sufficienti conoscenze, non potremmo compiere alcuna azione.

Esempi classici sono quelli della valutazione sul tipo di guasto meccanico di un mezzo, oppure quello della diagnosi medica di una malattia: se un medico giudica che un paziente, sulla base dei sintomi descritti, potrebbe avere tre malattie diverse, valuterà la diversa probabilità di ciascuna e si muoverà di conseguenza. Naturalmente farà fare al paziente ulteriori test i cui risultati potranno modificare la valutazione precedente di probabilità. In ogni caso non rimane escluso il fatto che il paziente abbia la malattia che il medico ha giudicato la meno probabile, e non potremo addebitare al medico un errore di valutazione: se tutte e tre le malattie richiedessero l'assunzione di farmaci molto debilitanti, nessun dottore ci prescriverebbe l'assunzione contemporanea dei farmaci per le tre malattie, con il rischio che il cocktail di farmaci ci porti alla morte. Parimenti nessun medico aspetterebbe di avere la certezza assoluta sulla malattia, ancora una volta con il rischio di aggravamento e, magari, di impossibilità di cura.

senza che si possa avere la certezza che la moneta sia quella truccata. Tratteremo questo argomento nel capitolo sui percorsi casuali e la rovina del giocatore.

[2] L'osservazione è strettamente legata al fatto che il redattore di questi appunti è, come formazione, un fisico.

[3] Questo problema è trattato anche nel bellissimo giallo-thriller di Adam Fawer, *Improbable*, [vedi 8].

3.1. Due situazioni famose

Per iniziare l'argomento del calcolo delle probabilità cominciamo con il proporre una veloce trattazione di due approcci comuni al problema: l'approccio classico o combinatorio e l'approccio frequentista, segnalando fin da subito che la stragrande maggioranza dei casi concreti non si lascia inquadrare in nessuno dei due.

Per poter parlare di probabilità dobbiamo innanzitutto precisare che la probabilità si riferisce a un *evento*, concetto che ora introduciamo solo a livello intuitivo. Evento è "qualcosa che accade", come risultato di un "esperimento" (e anche la parola esperimento ha un significato molto generico): il risultato del lancio di un dado, il fatto che una squadra vinca una partita, che il terzo estratto su una ruota del lotto in una certa data sia il 27, che la percentuale di polveri sottili nell'aria di Pordenone un determinato giorno superi o no il limite di legge, ecc. Sostanzialmente possiamo dire che *evento* è un concetto primitivo e che a noi interessa sapere che cosa si può fare con gli eventi. Torneremo più in dettaglio su questo concetto in seguito. Per ora ci interessa il fatto che la probabilità opera sugli eventi, associando a ogni evento di una certa famiglia un numero: potremo dire che la probabilità è una *funzione* a valori reali definita su una famiglia di eventi e scrivere $P(E)$ se E è un evento e la funzione viene denominata, come è abitudine, con P. Una definizione rigorosa richiederà naturalmente una più precisa definizione di evento e una indagine su quali debbano essere le caratteristiche di questa funzione.

È abbastanza interessante ricordare che le origini del calcolo delle probabilità sono probabilmente legate ad una lettera scritta da Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, a Blaise Pascal intorno al 1650 e concernente un problema[4] nel gioco dei dadi: è più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado, oppure un doppio 6 lanciando ventiquattro volte due dadi? La successiva corrispondenza tra Pascal e Fermat intorno a questo problema pose i fondamenti del calcolo delle probabilità. Torneremo brevemente fra un po' su questo problema.

Esaminiamo ora un po' più da vicino l'esperimento del lancio di un dado (non truccato). In questo caso possiamo concordare abbastanza facilmente sul fatto di chiamare evento "semplice" o "elementare" l'uscita di un numero compreso tra 1 e 6, ovvero il possibile risultato di un lancio; potremo poi chiamare evento anche, per esempio, l'uscita di un numero pari, o di un numero dispari, o di un numero appartenente all'insieme $\{2,5\}$. In sostanza potremo considerare l'insieme dei numeri da 1 a 6 come l'insieme dei casi possibili e chiamare evento un qualunque suo sottoinsieme, contenente h di questi 6 numeri. In questo caso i diversi casi possibili sono a due a due *incompatibili*, nel senso che se si presenta uno di essi è escluso che si possa presentare uno qualunque degli altri. Potremo anche ritenere, se il dado non è truccato, che tutti questi casi siano *equiprobabili*, nel senso intuitivo[5] del termine. Il fatto che tutti i casi possibili siano equiprobabili ci fa ritenere abbastanza logico che la probabilità di ciascuno sia $1/6$ e che quindi la probabilità di un generico evento E sia data da $h/6$, dove h è il numero di casi possibili che costituiscono E.

Il numero di tutti i casi possibili varia a seconda dell'esperimento: è 2 nel caso del lancio di una moneta (Testa o Croce), 90 in un'estrazione al gioco del lotto. Detto n il numero dei casi possibili (che riteniamo

[4] In realtà ci sono due versioni diverse relativamente a quale fosse il problema proposto dal de Méré: oltre a quella che abbiamo indicato c'è anche la possibilità che il problema posto si riferisse invece al cosiddetto *problema della posta*. Quest'ultimo si può così formulare: "Come è possibile suddividere la posta fra due (o più) giocatori che possono ottenere un punto se la partita viene interrotta prima che uno dei due giocatori abbia raggiunto il risultato vincente?".

[5] Si noti che non abbiamo ancora definito che cosa sia la probabilità, e quindi parlare, a questo punto, di equiprobabilità sarebbe, a rigore, scorretto: è per questo che il concetto di equiprobabilità è introdotto salo a livello intuitivo.

equiprobabili e a due a due incompatibili) e h il numero degli elementi che costituiscono un evento E (casi favorevoli), potremo dire che la probabilità di E può essere *valutata* dal seguente numero:

$$P(E) = \frac{h}{n}. \tag{3.1}$$

Abbiamo volutamente usato la parola *valutata*, in quanto non può trattarsi di una definizione di probabilità: questo schema non si applica sicuramente a tutti i casi di interesse e poi richiede il concetto di equiprobabilità che, a questo punto, non può essere definito senza ambiguità e deve essere solo accettato a livello intuitivo.

Questo approccio[(6)] alla probabilità si chiama *approccio combinatorio* o *classico* e si usa brevemente richiamare parlando di rapporto fra i casi favorevoli e i casi possibili di un evento.

È chiaro che l'ipotesi di equiprobabilità non sarà sempre soddisfatta: un esempio elementare è il lancio di una puntina da disegno. Qui ci sono due casi possibili, come nel lancio di una moneta, ovvero la puntina cade con la "punta in su" o con la "punta in giù", ma i due casi non sono equiprobabili e anzi potremo avere risultati diversi a seconda del tipo di puntina in esame.

Esempio 3.1. Consideriamo il lancio contemporaneo di due dadi non truccati. Si chiede di valutare la probabilità che la somma delle due facce sia 5.

È abbastanza facile rendersi conto che il numero dei casi possibili in questo esperimento è 36, corrispondente a quante sono le coppie ordinate che si costruiscono con i numeri da 1 a 6. La somma 5 si ottiene con le coppie $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, cioè i casi favorevoli sono 4. La probabilità richiesta è dunque

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Esempio 3.2. Si lanciano due monete uguali. Si chiede di valutare la probabilità dell'evento: "esce una testa e una croce".

I casi possibili in questo esperimento sembrano essere, ad un esame sommario, tre:

1. due teste;
2. una testa e una croce;
3. due croci.

È abbastanza evidente che non possiamo ritenere equiprobabili questi tre eventi, in quanto il caso "una testa e una croce" si presenta più facilmente degli altri due. È più logico pensare alle due monete come distinte e ai casi possibili seguenti:

1. due teste;
2. croce per la moneta 1 e testa per la moneta 2;
3. testa per la moneta 1 e croce per la moneta 2;
4. due croci.

[6]Questa "definizione" di probabilità è dovuta a Pierre Simon Laplace (1749-1827), grande fisico matematico francese del periodo napoleonico. Autore tra l'altro dell'importantissimo trattato *Mécanique Céleste*, che pose i fondamenti dei moderni studi di meccanica. Per quanto riguarda la probabilità il suo contributo principale è l'*Essai philosophique sur les probabilités*, dove si ritrova formalmente la definizione classica di probabilità.

Tenendo conto di questa osservazione possiamo concludere che la probabilità richiesta può essere valutata, combinatoriamente, con il numero

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

È interessante ricordare che anche d'Alembert[7] incorse, nell'edizione del 1754 dell'Encyclopédie, alla voce "Croix ou pile" ("Testa o croce") nell'errore di considerare per questo esperimento tre soli eventi equiprobabili, valutando per ciascuno la probabilità di 1/3. Tuttavia è utile evidenziare che l'errore di d'Alembert è meno sciocco di quanto possa sembrare a prima vista. Esaminiamo infatti una situazione tutto sommato non molto dissimile. In un'urna abbiamo due monete e non sappiamo se sono entrambe normali (cioè con testa e croce), entrambe bacate (per esempio con due teste) o una normale e una bacata. Quale probabilità possiamo assumere, sulla base dell'approccio classico, per l'evento "Le monete sono una per tipo?". Riteniamo che si possa ragionevolmente pensare a questa situazione sia come individuata da tre casi possibili (entrambe normali, entrambe bacate, una bacata e una normale), supposizione che ci porta ad attribuire a ciascuna possibilità la probabilità 1/3, sia come individuata da quattro casi possibili (entrambe normali, entrambe bacate, la prima bacata e la seconda normale, la prima normale e la seconda bacata), supposizione che invece ci porta ad attribuire a ciascun caso la probabilità 1/4 e quindi all'evento che stiamo esaminando la probabilità 1/2. A nostro parere non esiste un evidente motivo per farci propendere per l'una o per l'altra di queste due scelte, anche se possiamo avere una leggera predilezione per la prima rispetto alla seconda, al contrario di quello che succedeva per il lancio delle due monete. Tuttavia nel caso del lancio delle due monete potremmo fare (come sarà spiegato fra poco) una prova statistica, lanciando effettivamente un gran numero di volte le due monete per controllare la bontà del valore 1/2 rispetto al valore 1/3, nel caso delle due monete nell'urna una tal verifica statistica è sostanzialmente priva di senso.

Esempio 3.3. Un test a risposta multipla si compone di quattro domande e per ogni domanda presenta due possibili risposte fra le quali scegliere quella esatta. Per ogni risposta esatta si ha un punto, per ogni risposta errata zero punti. Supponendo di rispondere a caso, si chiede qual è la probabilità di totalizzare almeno 3 punti.

Per valutare gli esiti possibili possiamo ragionare nel seguente modo: si hanno quattro caselline numerate e ciascuna andrà riempita o con il "simbolo" 0 o con il "simbolo" 1:

0	0	0	0		0	0	0	1		0	0	1	0	...

Si tratta delle disposizioni con ripetizione di 2 oggetti a 4 a 4, che sono in numero di $2^4 = 16$[8]. Tenendo conto che gli esiti favorevoli sono quelli che contengono tre o quattro 1, ovvero sono in numero di 5, si conclude che la probabilità richiesta può essere valutata dal numero

$$\frac{5}{16}.$$

[7] Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783), enciclopedista, matematico, fisico, filosofo e astronomo francese, tra i più importanti protagonisti dell'illuminismo. Fu tra i maggiori collaboratori della grande Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, pubblicata nel XVIII secolo in Francia, sotto la direzione di Denis Diderot.

[8] Chi è esperto di numeri binari noterà che sono i numeri che, in binario, corrispondono ai decimali da 0 a 15, cioè proprio 16 numeri.

Si noti che, sulla base della formula (3.1), il numero $P(E)$ è sicuramente un numero reale che soddisfa la condizione

$$0 \leq P(E) \leq 1. \tag{3.2}$$

Tra tutti gli eventi relativi ad un certo esperimento ce ne interessano in particolare due, l'evento *certo* e l'evento *impossibile*. Il primo si ha quando i casi favorevoli coincidono con i casi possibili, il secondo quando non si ha alcun caso favorevole. Essi si indicano tradizionalmente con Ω e con $\emptyset$. In particolare il secondo simbolo è lo stesso usato per l'insieme vuoto e sta proprio a significare che ci sono 0 casi favorevoli.

Esempio 3.4. Nel lancio di un dado la frase "esce un numero compreso tra 1 e 6" esprime l'evento certo, la frase "esce il numero 7" esprime l'evento impossibile. Si noti che l'evento certo può essere espresso anche da molte altre frasi, come per esempio "esce un numero minore di 10", e ciò vale anche per l'evento impossibile, espresso per esempio anche dalla frase "esce un numero irrazionale".

Per un classico esempio preso dal gioco del lotto, la frase "esce una cinquina tale che la somma dei suoi numeri è maggiore di 10" esprime l'evento certo, la frase "esce una cinquina tale che la somma dei suoi numeri è minore di 15" esprime l'evento impossibile.

Si noti che davanti a "evento certo" e "evento impossibile" abbiamo usato l'articolo determinativo: per ogni esperimento possiamo ritenere che ci sia un solo evento certo e un solo evento impossibile (come già per l'unicità dell'insieme vuoto nella teoria degli insiemi): anche se l'evento certo e l'evento impossibile, come ogni evento, possono essere espressi da più proposizioni, sia l'evento certo che l'evento impossibile sono unici.

Per concludere questa sommaria trattazione dell'approccio classico alla probabilità facciamo alcune osservazioni riassuntive che ci saranno utili in seguito.

In tutti gli esempi che abbiamo considerato abbiamo fatto un "esperimento" (lancio di una moneta, lancio di un dado, estrazione dei numeri al lotto, ecc.) che può presentare diversi esiti.

- Nel lancio di una moneta si possono avere due esiti, che possiamo chiamare T (Testa) o C (Croce), ovvero gli esiti costituiscono un insieme di cardinalità 2: $\{\,\mathrm{T},\mathrm{C}\,\}$.
- Nel lancio contemporaneo di due monete l'insieme degli esiti ha cardinalità 4: $\{\,\mathrm{TT},\mathrm{TC},\mathrm{CT},\mathrm{CC}\,\}$.
- Nel caso del lancio di un dado l'insieme degli esiti ha cardinalità 6: $\{\,1,2,3,4,5,6\,\}$.
- Nel caso dell'estrazione dei numeri al lotto l'insieme degli esiti ha cardinalità 90, tanti quanti sono i possibili estratti.

Possiamo chiamare questi insiemi *spazi campionari* o *spazi dei risultati*.

Se ripercorriamo gli esempi considerati, notiamo che gli eventi non sono in realtà che sottoinsiemi di questi spazi campionari: l'evento "testa o croce" nel lancio simultaneo di due monete è il sottoinsieme $\{\,\mathrm{TC},\mathrm{CT}\,\}$ dell'insieme sopra descritto. La valutazione di probabilità che abbiamo dato con la formula (3.1) può essere riscritta dicendo che $P(E)$ è il rapporto tra la cardinalità dell'insieme che rappresenta l'evento E e la cardinalità dello spazio campionario. Lo spazio campionario stesso è l'evento certo, il suo sottoinsieme vuoto è l'evento impossibile. Gli elementi dello spazio dei campioni, cioè gli esiti possibili dell'esperimento, sono essi stessi degli eventi, che possiamo chiamare *eventi elementari*.

L'approccio classico della probabilità ci consente, a partire dalla costruzione dello spazio campionario e dalla individuazione del sottoinsieme corrispondente all'evento in esame, di valutare la probabilità dello stesso.

Questo approccio si può applicare solo se nello spazio campionario tutti gli esiti sono equiprobabili (con le difficoltà a digerire questo concetto che abbiamo segnalato) e solo se lo spazio campionario è finito. Gli esempi che abbiamo proposto evidenziano subito che il campo di applicabilità è sicuramente limitato (seppure importante in molte applicazioni). È inoltre da segnalare che, come mostra l'esempio delle due monete nell'urna sopra proposto, non è sempre facile costruire lo spazio campionario, anzi in molte situazioni concrete l'insieme di informazioni di cui disponiamo su un certo esperimento non consentono di costruire un tale spazio: vedremo che sarà comunque possibile introdurre il concetto di probabilità.

Cambiamo ora le carte in tavola e consideriamo un esperimento in cui l'approccio combinatorio della probabilità non ci porta da nessuna parte, ovvero in sostanza non ci permette di valutare la probabilità di un evento a partire dallo spazio campionario e dal sottoinsieme che individua l'evento stesso nello spazio campionario. Precisamente riprendiamo in esame l'esperimento di lancio di una puntina da disegno, considerando la possibilità che una volta giunta al suolo la puntina si presenti "a punta in su" o "a punta in giù". Se ripetessimo quanto già detto con il lancio di una moneta dovremmo concludere che, essendo due i casi possibili (che chiameremo, per semplicità G=*Giù* e S=*Su*), sia il caso G che il caso S dovrebbero avere una probabilità di 1/2 (un caso favorevole su due possibili), ma nessuno di noi sarebbe disposto a scommettere su questo: il "grado di fiducia" sull'uscita di G è sicuramente diverso da quello sull'uscita di S. Come potremmo, in un caso come questo, riuscire a *valutare* (ancora una volta abbiamo usato il termine valutare: non giungeremo nemmeno questa volta ad una definizione universale di probabilità) la probabilità che in un lancio della puntina esca il caso G o il caso S? In genere in una situazione come questa si procede ad effettuare un numero di prove *abbastanza grande*[9], supponiamo 1000. Se in queste è uscito, supponiamo, 600 volte il caso G e 400 volte il caso S, potremo ragionevolmente assumere come probabilità che in un nuovo lancio la probabilità di G sia 600/1000, ovvero 3/5, mentre la probabilità di S sia 400/1000, ovvero 2/5.

Si noti una profonda differenza con il caso combinatorio: non stiamo più contemplando *a priori* un insieme di casi possibili e di casi favorevoli, calcolando la cardinalità di due insiemi, ma stiamo facendo una serie di prove ripetute, per giungere, *a posteriori*, a una valutazione di probabilità. Naturalmente le 1000 prove che abbiamo effettuato devono essere fatte in *identiche condizioni*: si dice che le prove devono essere *ripetibili*.

Se, facendo un certo esperimento, stiamo esaminando uno dei possibili esiti di quell'esperimento o un evento (insieme di esiti) ed eseguiamo delle prove ripetute diremo che abbiamo avuto un *successo* se si è ottenuto quell'esito o quell'evento, un *insuccesso* nel caso contrario.

Con questa nomenclatura, potremo dire che in una situazione in cui abbiamo fatto una successione di n prove ripetibili, o analoghe, di un esperimento, e se abbiamo ottenuto k successi per un esito o per un evento, la probabilità che un nuovo evento E dello stesso tipo sia anche lui un successo è valutata dal numero

$$P(E) = \frac{k}{n}, \tag{3.3}$$

ovvero è data dal numero di successi sul numero totale di prove effettuate. Chiameremo questo numero *frequenza relativa*.

[9]E, in questa fase, non precisiamo che cosa voglia dire "abbastanza grande".

Per essere più precisi, in questa definizione occorrerebbe fare il limite di questo rapporto, quando il numero di prove tende all'infinito: nella pratica ci accontentiamo di un numero di prove "molto grande", espressione che accettiamo come intuitivamente evidente.

Questo tipo di valutazione della probabilità si chiama *approccio frequentista* o *statistico* e si usa richiamare parlando brevemente di rapporto tra successi e totale delle prove.

Alcune situazioni tipiche in cui si può usare questo approccio sono le seguenti.

- Se in un'urna ci sono 20 palline, di cui un certo numero non noto sono bianche e le restanti nere, per valutare la probabilità che estraendo una pallina essa sia bianca (*bianca* è il successo), possiamo fare un centinaio di estrazioni (con reimmissione della pallina estratta nell'urna) e contare il numero di successi, valutando poi la probabilità di successo con la (3.3).
- Se vogliamo valutare la probabilità che il primo nato a Pordenone il 1 gennaio 2016 sia un maschio (*maschio* è il successo), possiamo consultare i registri comunali delle nascite, contare il numero di successi su un totale, per esempio, di 1000 nascite e usare ancora la (3.3).

Dunque condizione indispensabile perché questo approccio si possa usare è che si possano eseguire quante prove si vogliano su un evento, o che siano disponibili tavole statistiche relative ad un certo fenomeno. Importanti applicazioni si hanno in medicina, in psicologia, in economia, nella meccanica quantistica, e in generale in tutte le scienze nelle quali si possono utilizzare metodi statistici.

Notiamo che anche in questo caso si può parlare di evento certo e evento impossibile, con le stesse parole e le stesse proprietà già viste nel caso combinatorio. Inoltre anche in questo caso vale la (3.2), cioè la probabilità è un numero compreso tra 0 ed 1 (0 solo per l'evento impossibile, 1 solo per l'evento certo).

Notiamo anche, perché ci interesserà in futuro, che in questi due casi l'approccio combinatorio e quello frequentista ci permettono di assegnare esplicitamente una valutazione numerica intuitivamente convincente almeno alle probabilità degli eventi elementari, o di qualche altro caso da essi facilmente deducibile. Vedremo più avanti come assegnare la probabilità ad eventi più complessi in questi due casi, deducendola dalle probabilità assegnate agli eventi elementari. Ma la cosa che ci interessa di più è: come trattare le (molte) situazioni in cui questi due casi non si applicano? Dovremo affrontare due tipi di problemi:

- definire un concetto generale di probabilità che si applichi sempre e che si riconduca, quando possibile, alle valutazioni che abbiamo fatto in questi due casi particolari;
- valutare quali strategie utilizzare per assegnare esplicitamente una valutazione numerica convincente alle probabilità degli eventi che ci interessano.

3.2. Eventi e operazioni con essi

Abbiamo già introdotto il concetto di evento nei casi particolari considerati, sostanzialmente come sottoinsieme dell'insieme dei risultati di un esperimento, ora vogliamo darne una definizione che si possa applicare anche in situazioni più complesse[(10)]. Noi daremo la seguente definizione.

[10] È utile comunque segnalare che nell'impostazione assiomatica della teoria della probabilità, per introdurre il concetto di evento si procede sostanzialmente come fatto per il caso combinatorio, ovvero si considera preliminarmente uno spazio dei campioni come insieme di tutti i risultati di un esperimento e si chiama evento un sottoinsieme di questo spazio.

Definizione 3.1. *Un* evento *è una proposizione ben definita, ovvero non ambigua, che può risultare* vera *o* falsa*, senza che sia possibile stabilire a priori quale delle due situazioni si verifica, ovvero in cui è presente incertezza su quale sia il valore di verità.*

Nella sostanza il concetto di evento può essere considerato come un concetto primitivo: quello che conta è che l'evento può risultare vero o falso. È una situazione simile a quella del concetto di insieme: quello che conta è poter stabilire se un oggetto appartiene o no all'insieme.

Chiameremo *indicatore di un evento E*, e lo indicheremo con $|E|$ il numero 1 se E è vero, il numero 0 se E è falso:

$$|E| = \begin{cases} 1, & \text{se } E \text{ è vero;} \\ 0, & \text{se } E \text{ è falso,} \end{cases} \tag{3.4}$$

non essendo noto a priori quale dei due valori $|E|$ assume.

Attenzione: il simbolo usato per l'indicatore di un evento è identico a quello del valore assoluto di un numero, anche se qui il valore assoluto non centra per nulla!

Esempi.

— Se lancio una moneta esce testa.
— Estraendo due palline da un'urna contenente palline bianche e nere, escono due palline nere.
— Il prossimo nato a Pordenone sarà una femmina.
— Il candidato X vince le prossime elezioni a sindaco di Pordenone.
— La nuova vettura prodotta da FCA sarà un successo commerciale.
— Il logo che un dato studio di design ha prodotto per un'azienda sarà effettivamente adottato dal committente.
— Il risultato dell'ultima partita di calcio giocata tra due squadre A e B dello stato di Mirabilandia è stato 3 a 0 a favore di A.

Per quanto riguarda l'ultimo degli esempi proposti si noti che, come già osservato, anche un evento passato può essere soggetto a incertezza, se non si dispone della relativa informazione.

Come casi limite di evento, si chiama evento *certo* un evento il cui indicatore è solamente 1, evento *impossibile* un evento il cui indicatore è solamente 0. Gli esempi che abbiamo fatto precedentemente si possono naturalmente riproporre qui. Si noti che uno stesso evento può essere certo, incerto o impossibile, a seconda del contesto in cui lo si considera. Per esempio l'evento "Alla lotteria di beneficenza del paese X vinco il primo premio" è certo se compero tutti i biglietti, impossibile se non ne compero nessuno, incerto (o possibile, o casuale, o aleatorio) se ne compero qualcuno.

Perché il concetto di evento sia univoco è indispensabile dire quando due eventi sono uguali (è una cosa molto simile a quello che succede quando si introduce il concetto di insieme: la prima cosa di cui ci siamo preoccupati è stata quella di capire quando due insiemi sono uguali). Diremo *uguali* due eventi A e B se dalla verità della proposizione che individua A segue la verità di quella che individua B e viceversa. Esempi semplici di frasi che individuano lo stesso evento sono quelle che abbiamo già fatto a proposito dell'evento certo e dell'evento impossibile. Un altro esempio elementare è il seguente.

Esempio 3.5. In un gioco che prevede il lancio contemporaneo di due dadi Pierino fa un'unica puntata sull'uscita di una coppia di numeri dispari. Le due frasi

— "Pierino vince"
— "Il prodotto delle due facce uscite è dispari"

individuano lo stesso evento.

Da quanto detto sull'uguaglianza di eventi possiamo dedurre l'osservazione che c'è una certa differenza tra il trattare le proposizioni e gli eventi, in quanto proposizioni diverse possono individuare lo stesso evento: ovvero una proposizione implica un ben determinato evento, un evento non implica una unica proposizione.

È spesso molto utile rappresentare gli eventi mediante gli stessi diagrammi di Venn che abbiamo usato per gli insiemi. La cosa è ovvia se si introduce uno spazio campionario e si chiamano eventi i suoi sottoinsiemi. In generale si può seguire la strategia seguente, che comunque nella sostanza ripropone quanto detto per gli spazi campionari. Si comincia con il rappresentare in un piano un insieme (molto spesso un rettangolo) che rappresenta l'evento certo Ω (in teoria degli insiemi è quello che abbiamo chiamato insieme universo): gli eventi saranno rappresentati con sottoinsiemi di Ω, e conterranno quei punti che corrispondono ad una circostanza legata al fatto che l'evento E si verifica. In sostanza per i punti all'interno di un sottoinsieme un evento è vero, all'esterno è falso. Se si rappresentano gli eventi mediante diagrammi di Venn è tradizione "identificare" gli eventi con i rispettivi sottoinsiemi dell'insieme Ω nel diagramma, e usare per un evento e il corrispondente sottoinsieme lo stesso nome.

Sugli eventi si possono fare delle operazioni, che riproducono (anche nella simbologia usata) quelle fatte sugli insiemi. Saremo interessati alle situazioni descritte di seguito.

Si dice che l'evento A *implica* l'evento B se dalla verità di A segue la verità di B, ovvero se l'essere vera la proposizione che individua A implica la verità della proposizione che individua B. Per esempio nel lancio di un dado l'evento "Esce il 2" implica l'evento "Esce un numero pari". Si scrive $A \subseteq B$, o, se A è sicuramente diverso da B, $A \subset B$. Si noti che non è vero il viceversa: $B \nsubseteq A$, ovvero B non implica A.

Dati due eventi A e B si chiama *unione* o *somma logica* l'evento che è vero se almeno uno dei due eventi A e B è vero. L'evento unione si indica con $A \cup B$. Per esempio in una estrazione del lotto l'unione tra l'evento "Esce il 90" e l'evento "Esce un multiplo di 17" produce l'evento "Esce uno dei numeri 17, 34, 51, 68, 85, 90"; in un esperimento di due lanci con una moneta l'unione tra l'evento "testa al primo lancio" e l'evento "croce al secondo lancio" è l'evento individuato dalle seguenti uscite $\{\, \mathrm{TT}, \mathrm{TC}, \mathrm{CC} \,\}$.

Dati due eventi A e B si chiama *intersezione* o *prodotto logico* l'evento che è vero se entrambi gli eventi A e B sono veri. L'evento intersezione si indica con $A \cap B$. Per esempio in una estrazione del lotto l'intersezione tra l'evento "Esce un multiplo di 17" e l'evento "Esce un numero pari" è l'evento "Esce uno dei numeri 34, 68"; in un esperimento di due lanci con una moneta l'intersezione tra l'evento "testa al primo lancio" e l'evento "croce al secondo lancio" è l'evento individuato solo dall'uscita TC.

Per l'intersezione e il prodotto logico valgono le stesse proprietà delle analoghe operazioni tra insiemi (commutativa, associativa, doppia distributività).

Si possono naturalmente considerare anche l'unione o l'intersezione di più di due eventi: in ragione delle proprietà associativa e commutativa sia nell'unione che nell'intersezione di più eventi l'ordine di esecuzione delle operazioni e l'ordine degli eventi è ininfluente.

Dato un evento A, si chiama *contrario* l'evento, indicato con A^c, che è vero quando A è falso e viceversa. Dal punto di vista insiemistico se A è un evento, A^c è il suo complementare, rispetto a Ω. Per esempio in un esperimento di due lanci con una moneta il contrario dell'evento "testa al primo lancio" è l'evento individuato individuato dalle seguenti uscite $\{\, \mathrm{CT}, \mathrm{CC} \,\}$.

Due eventi sono *incompatibili* se la loro intersezione è vuota, ovvero il loro prodotto logico è l'evento impossibile. Una primo esempio di eventi incompatibili (e questa situazione ci interesserà spesso nel seguito) è il caso di un evento e del suo contrario. Un altro esempio, nell'esperimento di due lanci con una moneta, è dato dagli eventi "Escono due teste" e "Esce una testa e una croce". La nozione di incompatibilità si estende facilmente a più di due eventi che saranno incompatibili se lo sono *a due a due*. Attenzione: *non* è la stessa cosa dire che l'intersezione di tutti è vuota: basta pensare agli eventi come insiemi; se A, B e C sono tre insiemi tali che A e B abbiano una parte comune, mentre C non ha nulla in comune né con A né con B, ovvero $A \cap B \cap C = \emptyset$, ma questi eventi non sono a due a due incompatibili. In sostanza quando più eventi sono incompatibili al massimo 1 di essi è vero.

Ci interessa infine il concetto di *partizione* dell'evento certo Ω (o dello spazio campionario): un insieme di eventi incompatibili si dice una partizione di Ω o una *classe completa* di eventi di Ω se la riunione degli eventi è Ω. Poiché gli eventi sono a due incompatibili, solo uno al più di essi è vero, come già osservato; d'altra parte essendo la loro unione Ω che è l'evento certo, si conclude che in una partizione uno ed un solo evento è vero.

Come utile esercizio calcoliamo gli indicatori degli insiemi ottenuti con le operazioni indicate.

Esercizio 3.1. *Poiché E^c è vero se E è falso, e falso in caso contrario, ne segue subito che*

$$|E^c| = 1 - |E|.$$

Esercizio 3.2. *Se $|A|$ e $|B|$ sono gli indicatori di due eventi, per valutare l'indicatore di $A \cup B$ valutiamo le situazioni che si possono presentare.*

- $|A| = 1 \wedge |B| = 1 \Rightarrow |A \cup B| = 1 \wedge |A \cap B| = 1 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- $|A| = 1 \wedge |B| = 0 \Rightarrow |A \cup B| = 1 \wedge |A \cap B| = 0 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- $|A| = 0 \wedge |B| = 1 \Rightarrow |A \cup B| = 1 \wedge |A \cap B| = 0 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- $|A| = 0 \wedge |B| = 0 \Rightarrow |A \cup B| = 0 \wedge |A \cap B| = 0 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Dunque in ogni caso

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Esercizio 3.3. *Se $|A|$ e $|B|$ sono gli indicatori di due eventi, per valutare l'indicatore di $A \cap B$ osserviamo che se $|A| = 1 \wedge |B| = 1$ allora $|A \cap B| = 1$; se invece almeno uno dei due indicatori è 0, allora $|A \cap B| = 0$: è come dire che*

$$|A \cap B| = |A| \cdot |B|.$$

Nel seguito ci interesseranno particolari famiglie di eventi. Poiché siamo interessati a fare le operazioni di passaggio al contrario, di unione e di intersezione tra eventi, richiederemo esplicitamente che le famiglie $\mathcal{F}$ di eventi di cui ci occuperemo godano delle seguenti proprietà:

- se $A \in \mathcal{F}$, anche $A^c \in \mathcal{F}$;
- se $A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}$ anche $A \cup B \in \mathcal{F}$;
- se $A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}$ anche $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Una tal famiglia di eventi si chiama un'*algebra* di eventi. Il più semplice esempio di algebra di eventi è l'insieme delle parti, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi, dell'evento certo, cioè di Ω.

3.3. La concezione soggettiva della probabilità

Esaminiamo ora alcuni problemi in cui si richiede di calcolare una probabilità, valutando l'applicabilità dei due approcci proposti.

- Qual è la probabilità per un dato studente del corso ISIA di superare l'esame di matematica al prossimo appello?
- Qual è la probabilità che domenica prossima la mia squadra favorita vinca la partita di calcio in programma?
- Qual è la probabilità che un nuovo modello di moto abbia successo?

Risulta immediatamente evidente che l'approccio classico non è applicabile. Nel primo caso infatti ci porterebbe a concludere che la probabilità è $1/2$ (1 caso favorevole su 2 casi possibili), cosa che non tiene assolutamente conto di altri fattori, come per esempio il livello di preparazione dello studente stesso. Parimenti non è applicable il metodo frequentista: non ha nessun senso far ripetere allo studente molte volte lo stesso esame per vedere qual è la probabilità di superamento (anche perché, appena superato l'esame lo studente si guarderebbe bene dal ripeterlo solo per fare una valutazione di probabilità!). Discorsi analoghi si possono fare negli altri due casi.

In casi come questi è abbastanza logico (e lo si fa intuitivamente senza pensarci) *stimare* la probabilità in base allo stato d'informazione che si possiede del problema in esame. Ebbene si può assumere proprio questa idea come definizione, per ora solo qualitativa, di probabilità.

Definizione 3.2. *La probabilità di un evento è la misura del* grado di fiducia *che un individuo* coerente*, in base alle proprie opinioni e alle informazioni di cui dispone, attribuisce al verificarsi dell'evento.*

È chiaro che questa stima è sostanzialmente *soggettiva* in quanto sia le opinioni che le informazioni possedute possono differire grandemente da individuo a individuo. Per questo motivo questo approccio alla probabilità si chiama approccio *soggettivo* o *soggettivista*. È importante segnalare fin da subito che l'aggettivo "soggettivo" non deve far pensare alla totale arbitrarietà nella valutazione della probabilità di un evento, come vedremo tra poco: è per questo che, nella definizione 3.2, si fa riferimento a un individuo *coerente*.

È opportuna una ulteriore precisazione sull'aggettivo *soggettivo* che abbiamo utilizzato (e che, formalmente, è il contrario di *oggettivo*). Con il termine "soggettivo" intendiamo innanzitutto sottolineare il fatto che la valutazione di probabilità è fatta dall'individuo (il soggetto che esprime la valutazione) e non è propria dell'"oggetto", cioè dell'evento che stiamo esaminando. Per esempio lanciando un dado non truccato il soggetto valuta ad $1/6$ la probabilità di uscita del 5; la probabilità di questo evento rimane sempre di $1/6$ se, dopo il lancio, copriamo con un panno il dado senza potere vedere l'esito dello stesso: il numero $1/6$ dipende dal soggetto che valuta, non dall'oggetto della valutazione (la faccia del dado che uscirà o che è uscita).

Storicamente poi l'aggettivo *soggettivo* è stato applicato all'approccio alla probabilità che stiamo ora introducendo: tuttavia, in termini formali, anche gli approcci combinatorio e frequentista, sono *soggettivi* e anzi, come avremo modo di rimarcare, possono essere considerati casi particolari di questo. Sarebbe meglio usare, per questo approccio alla probabilità, un denominazione come *probabilità generalizzata*; tuttavia, in omaggio alla tradizione, continueremo ad usare la denominazione *probabilità soggettiva*.

Cerchiamo ora di formalizzare in termini quantitativi o operativi la definizione precedente. Che cosa significa che io stimo all'80% la probabilità che la mia squadra favorita vinca la partita di calcio in programma domenica prossima? L'idea base, dovuta a Bruno de Finetti (1906-1985), è basata sul concetto di scommessa (scommessa ipotetica naturalmente): stimare una probabilità dell'80% significa essere disposti a pagare 80 (euro, dollari, sterline, ecc.) per ricevere 100 nel caso la squadra vinca, ovvero in caso di esito positivo dell'evento, o anche, equivalentemente, essere disposti a pagare una quota $p = 0.8$ per ricevere una somma 1 in caso di esito positivo dell'evento. Possiamo riformulare la definizione precedente nel seguente modo.

Definizione 3.3. *La probabilità di un evento E è la somma p che un individuo* coerente *ritiene corretto pagare per ricevere la somma* 1 *al verificarsi dell'evento.*

Come si nota abbiamo di nuovo evidenziato l'aggettivo *coerente*. Dobbiamo precisare meglio che cosa si intenda con individuo coerente o *scommessa coerente*. Notiamo che se l'individuo paga p e l'evento si verifica egli guadagnerà la somma $1 - p$, se invece l'evento non si verifica egli perderà la somma p, ovvero "guadagnerà" la somma $-p$. Possiamo anche riscrivere questo "guadagno" in maniera univoca usando l'indicatore di evento, ottenendo $|E| - p$: basta tenere conto che $|E|$ può essere 1 o 0, a seconda che l'evento si verifichi o no. Dal punto di vista del banco il problema si presenta rovesciato: il banco è disposto a ricevere la somma p, pagando la somma 1 (e quindi a perdere) al verificarsi dell'evento e invece a ricevere la somma p senza pagare nulla (e quindi a guadagnare) se l'evento non si verifica, cioè è disposto a "guadagnare" $p - 1$ al verificarsi dell'evento, a guadagnare p se l'evento non si verifica. Ebbene la coerenza richiede che questi guadagni non siano dello stesso segno (ovvero che in un caso si perda, nell'altro si guadagni, e perdita o guadagno sono l'opposto per lo scommettitore e per il banco). Se questi due guadagni devono essere di segno opposto, significa che il loro prodotto deve essere negativo, ovvero

— $(1 - p)(-p) \leq 0$, dal punto di vista dello scommettitore;
— $(p - 1)(p) \leq 0$, dal punto di vista del banco.

La somma p si chiama la *quota* della scommessa. In entrambi i casi si trova che la condizione fondamentale perché una scommessa sia coerente è che la quota soddisfi le condizioni

$$0 \leq p \leq 1.$$

Se, al limite, l'evento è certo, è evidente che la somma da scommettere è 1 per ottenere 1 (lo scommettitore non guadagna nulla e il banco non perde nulla). Se invece l'evento è impossibile è altrettanto evidente che $p = 0$.

Possiamo riepilogare che la quota di una scommessa coerente è soggetta, per ora, alle seguenti regole.

$$0 \leq p \leq 1, \quad p = 1 \text{ se } E = \Omega, \quad p = 0 \text{ se } E = \emptyset. \tag{3.5}$$

Vedremo una ulteriore regola fra poco, sempre dedotta dal principio di coerenza.

Nel seguito sceglieremo di considerare sempre il punto di vista dello scommettitore: come mostrano le considerazioni precedenti sarebbe equivalente ragionare dal punto di vista del banco.

Normalmente in una scommessa effettiva non si paga generalmente una somma p compresa tra 0 ed 1, ma una somma pS, detta anche *posta*, qualunque per ricevere la somma S in caso di vincita. Con questa considerazione la condizione di coerenza si scrive

$$(1 - pS)(-pS) \leq 0, \quad \Rightarrow \quad (p^2 - p)S^2 \leq 0,$$

che porta sempre alla conclusione che la quota p deve essere compresa tra 0 ed 1. Potremo dunque dire la probabilità è il rapporto tra la somma pS che si è disposti a pagare per ricevere per ricevere S in caso di vincita della scommessa.

Si noti che le condizioni espresse dalla (3.5) sono identiche a quelle già ottenute per la probabilità nel caso degli approcci classico o frequentista. Anzi possiamo dire che i due casi citati sono casi particolari di questa definizione soggettiva di probabilità: in ogni caso quello che conta è il grado di fiducia nel verificarsi di un evento, e possiamo solo dire che in quelle due situazioni speciali abbiamo dei criteri abbastanza standard (potremmo dire "oggettivi", ma non tutti sono d'accordo nel ritenerli sempre tali) che agevolano la valutazione della somma p che siamo disposti a scommettere per vincere 1 in caso di verifica dell'evento.

Proponiamo un esempio che ci aiuti a capire meglio quanto affermato. Un individuo in una sala da giochi sta seguendo un gioco d'azzardo nel quale si vince se, lanciando due dadi, esce una coppia di numeri dispari. Il calcolo classico della probabilità lo porta a concludere che ci sono 36 casi possibili (tante quante sono le coppie ordinate dei numeri da 1 a 6, ovvero le disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a due a due, cioè 6^2) e 9 casi favorevoli (tanti quante sono le coppie ordinate dei numeri 1, 3, 5, ovvero le disposizioni con ripetizione di 3 oggetti a due a due, cioè 3^2), per una probabilità valutabile in $9/36 = 1/4 = 0.25$. Nel mentre fa questi calcoli tiene d'occhio i lanci che vengono via via effettuati e nota che su 24 lanci, la coppia di dispari è uscita 8 volte, con una frequenza di $8/24 = 1/3 = 0.33$. Decide allora di proporre al banco di giocare una posta di 10 euro per vincere i 36 euro a quel momento disponibili. In sostanza la quota della sua scommessa è

$$p = \frac{10}{36} = \simeq 0.28.$$

Questo individuo ha dunque tenuto conto sia della valutazione classica che l'avrebbe portato a scommettere 9 euro per vincerne 36, sia di quella frequentista che l'avrebbe portato a scommetterne 12 sempre per vincerne 36, ma alla fine ha fatto una valutazione *soggettiva*: è, ci pare, un atteggiamento abbastanza comune, e logico.

Naturalmente la scommessa di cui parliamo qui è solo una scommessa ipotetica: non c'è alcuna necessità di farla effettivamente!

3.4. Unione di eventi e probabilità

In generale quando si deve valutare la probabilità di un evento E occorre tenere conto anche di altri eventi il cui esito può contribuire a modificare il nostro stato di informazione e quindi il nostro grado di fiducia sul verificarsi o meno dell'evento stesso: è come dire che per valutare la probabilità di un evento dovremo valutare anche la probabilità di eventi più o meno connessi con esso.

Consideriamo allora una famiglia $\mathcal{F}$ di eventi[11] ed esaminiamo un sottoinsieme finito $\mathcal{F}_1$ di $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}_1 : = \{ E_1, E_2, \dots, E_n \}$, costituito da eventi a due a due incompatibili. Consideriamo poi l'evento E,

[11] Come già detto quando consideriamo famiglie di eventi ammettiamo sempre che in questa famiglia si possano eseguire le operazioni di unione, intersezione, passaggio al contrario, ovvero supponiamo che la famiglia sia un'algebra di eventi: se per caso non lo fosse immaginiamo di aggiungere alla famiglia gli eventi che mancano per completarla nel senso detto.

unione[(12)] di tutti gli eventi di $\mathcal{F}_1$:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Supponiamo ora di fare una scommessa di posta p_i per ciascun evento E_i, e una scommessa di posta p per l'evento E. Poiché gli eventi sono incompatibili a due a due, al massimo una sola delle scommesse sui singoli eventi può essere vinta, e in tal caso è vinta anche la scommessa su E; viceversa se tutte le scommesse sono perse, anche la scommessa su E è persa. Possiamo dire che il guadagno complessivo sulle n scommesse E_i deve essere uguale al guadagno sulla singola scommessa E. Come abbiamo già osservato il guadagno[(13)] su una scommessa può essere espresso dalla differenza fra l'indicatore dell'evento e la posta giocata, ovvero $|E_i| - p_i$ per le scommesse sugli eventi E_i, $|E| - p$ per le scommessa sull'evento E. Il guadagno complessivo relativo alle n scommesse è allora

$$G = \sum_{i=1}^{n} \big(|E_i| - p_i\big) = \big(|E_1| - p_1\big) + \cdots + \big(|E_n| - p_n\big) = \big(|E_1| + \cdots + |E_n|\big) - \big(p_1 + p_2 + \cdots + p_n\big)$$

Riguardando gli esercizi 3.2 e 3.3, possiamo concludere che, essendo gli eventi $|E_i|$ a due a due incompatibili, si ha

$$|E_1| + \cdots + |E_n| = |E|.$$

Dunque il guadagno totale sulle singole scommesse è

$$G = |E| - \big(p_1 + p_2 + \cdots + p_n\big).$$

D'altra parte il guadagno della scommessa sull'evento E è

$$G' = |E| - p.$$

Poiché $G' = G$, si conclude che

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

Se teniamo conto che le quote di scommessa rappresentano, nell'approccio soggettivo che stiamo seguendo, la probabilità degli eventi, possiamo concludere con il seguente teorema.

Teorema 3.4 (delle probabilità totali). *Dati n eventi a due a due incompatibili $E_1, E_2, \dots, E_n$, si ha*

$$P\big(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\big) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n). \tag{3.6}$$

La formula (3.6) costituisce l'ultima proprietà fondamentale della funzione di probabilità.

Richiamiamo per chiarezza tutte le proprietà che abbiamo dedotto per la probabilità degli eventi, ricordando che esse sono state ottenute sulla base della condizione di coerenza. Conglobando il contenuto della formula (3.5) e della (3.6) otteniamo quanto segue.

[12] Il simbolo che si usa per l'unione di più eventi è l'estensione all'operazione di unione del simbolo di sommatoria, usato per indicare in maniera compatta la somma di più numeri: valgono tutte le considerazioni fatte al paragrafo 1.3 del capitolo 1.

[13] Si tenga presente che la parola guadagno è usata in senso algebrico: se la scommessa è vinta il guadagno è positivo, se è persa il guadagno è negativo.

Data un'algebra $\mathcal{F}$ di eventi, una assegnazione coerente di probabilità sugli stessi, ovvero una funzione di probabilità P definita su $\mathcal{F}$, deve rispettare le seguenti regole.

(3.7) $0 \leq P(E) \leq 1, \ \forall E \in \mathcal{F}$.

(3.8) $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$.

(3.9) $P\big(E_1 \cup \cdots \cup E_n\big) = P(E_1) + \cdots + P(E_n)$, se $E_1, \ldots, E_n$ sono a due a due incompatibili.

Come abbiamo già avuto modo di osservare, le prime due proprietà sono verificate anche nel caso dell'approccio combinatorio e frequentista. Anche la terza proprietà risulta essere verificata in questi due casi particolari. Esaminiamo per esempio l'approccio combinatorio, limitandoci per semplicità al caso di due soli eventi incompatibili, la cui unione sia tutto Ω; se E_1 ed E_2 sono questi due eventi incompatibili, vuol dire che i corrispondenti insiemi E_1, di cardinalità h_1, ed E_2, di cardinalità h_2, sono disgiunti; se n è la cardinalità di Ω, la cardinalità di $E_1 \cup E_2$ è $h_1 + h_2$ e si ha

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{h_1 + h_2}{n} = \frac{h_1}{n} + \frac{h_2}{n} = P(E_1) + P(E_2),$$

ovvero sempre la stessa formula che abbiamo dedotto usando l'approccio soggettivo.

Esempio 3.6. La probabilità di ottenere doppia testa in un lancio simultaneo di due monete è $1/4$. La probabilità di ottenere una testa e una croce è $1/2$. Dunque la probabilità di ottenere almeno una testa è $1/4 + 1/2 = 3/4$, valore che si ottiene anche direttamente dalla considerazione che ci sono, per questo evento, 3 casi favorevoli su un totale di 4 casi possibili.

Una immediata conseguenza del teorema delle probabilità totali si ha nel caso di eventi che costituiscano una partizione dell'evento certo, cosa che succede in molti casi di interesse. In questo caso gli eventi E_i, oltre ad essere a due a due incompatibili (e ciascuno diverso dall'evento impossibile) godono anche della proprietà che la loro unione è l'evento certo, con probabilità 1. Si conclude subito con il seguente teorema.

Teorema 3.5 (probabilità in una partizione dell'evento certo). *Se un insieme di eventi E_i costituisce una partizione dell'evento certo Ω si ha*

(3.10) $$P\big(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\big) = 1.$$

Una conseguenza di questa proprietà della probabilità è il seguente teorema della *probabilità contraria*.

Teorema 3.6 (della probabilità contraria). *Se E è un evento di probabilità $P(E)$, il suo contrario, ovvero la negazione di E, ha probabilità*

(3.11) $$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Basta infatti ricordare che E ed E^c sono incompatibili e costituiscono una partizione di Ω.

Esempio 3.7. La probabilità di fare 6 come somma delle facce in un lancio simultaneo di due dadi è $5/36$, corrispondente a 5 casi favorevoli $\big((1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\big)$ su 36 casi possibili; la probabilità di ottenere una somma diversa è $31/36 = 1 - 5/36$, valore che si ottiene anche sommando i casi favorevoli all'ottenimento dei numeri $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ come somma.

Ulteriore conseguenza è la cosiddetta *proprietà di monotonia* della probabilità, che si può enunciare come segue.

Teorema 3.7 (monotonia della probabilità). *Se l'evento A implica l'evento B allora*

$$P(A) \leq P(B).$$

Per rendersene conto basta osservare che A e $B \setminus A = B \cap A^c$ sono eventi incompatibili, la cui unione restituisce l'evento B. Dunque

$$P(B) = P\big(A \cup (B \setminus A)\big) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Poiché $P(B \setminus A) \geq 0$, ne segue che $P(B) \geq P(A)$.

Esempio 3.8. Nel lancio simultaneo di due monete l'evento A ="escono due teste" implica l'evento B ="esce almeno una testa". La probabilità di A è $1/4$, quella di B $3/4$, dunque $P(A) < P(B)$.

Ancora come conseguenza della terza proprietà della probabilità si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.8. *Dimostrare che dati due eventi qualunque A e B, si ha*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dimostrazione. Conviene scrivere $A \cup B$ e B come unione di insiemi disgiunti e applicare la terza proprietà della probabilità.

$$\begin{aligned} A \cup B = A \cup \big(A^c \cap B\big) \quad &\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P\big(A^c \cap B\big); \\ B = \big(A \cap B\big) \cup \big(A^c \cap B\big) \quad &\Rightarrow \quad P(B) = P\big(A \cap B\big) + P\big(A^c \cap B\big). \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si trova

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P\big(A \cap B\big),$$

da cui si conclude subito. □

Si noti che da questo risultato segue che, in generale

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

In sostanza questo teorema afferma che per fare la probabilità dell'unione di eventi bisogna prestare attenzione a considerare una sola volta le eventuali parti comuni. Se per esempio abbiamo due eventi, sommando la probabilità di A con quella di B, conto due volte la parte comune, mentre essa deve essere contata solo una volta. Infatti A e B si possono scrivere come unione disgiunta di due eventi

$$A = (A \cap B) \cup \big(A \cap B^c\big) \quad \text{e} \quad B = (A \cap B) \cup \big(A^c \cap B\big),$$

e se sommo $P(A)$ con $P(B)$ ottengo

$$P(A \cap B) + P\big(A \cap B^c\big) + P(A \cap B) + P\big(A^c \cap B\big) = 2P(A \cap B) + P\big(A \cap B^c\big) + P\big(A^c \cap B\big).$$

La cosa diventa via via più complessa quando ho più di due eventi e rinunciamo a scrivere una formula generale. Può essere un utile esercizio provare, almeno a livello intuitivo, che nel caso di tre eventi si ottiene:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Se non aggiungessi l'addendo $P(A\cap B\cap C)$, l'eventuale parte comune a tutti i tre eventi non verrebbe mai considerata. In ogni caso ci interessa osservare che, in analogia con il caso di due eventi,

$$P(A\cup B\cup C)\le P(A)+P(B)+P(C),$$

e la cosa rimane vera con una qualunque unione di eventi.

3.5. L'impostazione assiomatica della probabilità

I diversi approcci che abbiamo presentato della probabilità portano tutti a una stessa conclusione: data una famiglia $\mathcal{F}$ di eventi (che deve essere un'algebra di eventi in quanto siamo interessati a fare unioni e intersezioni di eventi e a considerare il contrario di un evento), la probabilità di un evento è una regola, una legge, una corrispondenza che ad ogni evento della famiglia faccia corrispondere un numero reale p, detto probabilità dell'evento E, con le condizioni espresse dalle (3.7), (3.8), (3.9), ovvero che il numero p sia compreso tra 0 e 1, possa essere uguale a 0 solo se l'evento è l'evento impossibile e ad 1 solo se l'evento è l'evento certo e che inoltre soddisfi la legge dell'additività.

Detto in termini ancora più formali, la probabilità è una *funzione* che ha per dominio una famiglia $\mathcal{F}$ di eventi e per codominio l'insieme dei numeri reali, con le condizioni espresse dalle equazioni (3.7), (3.8), (3.9).

Poiché gli eventi possono essere a loro volta considerati come degli insiemi (sottoinsiemi dell'insieme che individua l'evento certo Ω), possiamo dire che la probabilità è una *funzione d'insieme*, in quanto opera su insiemi. Per funzioni di questo tipo si parla anche di *distribuzioni di probabilità*.

I diversi approcci che abbiamo considerato, e di cui quello soggettivista ci pare il più completo in quanto applicabile a tutti i casi di interesse, ci consentono di costruire effettivamente questa funzione, almeno per gli eventi più semplici[14] o elementari: le regole che ora studieremo ci consentiranno di assegnare la probabilità anche ad eventi complessi, opportunamente costruiti a partire da quelli elementari o da altri eventi di cui conosciamo la probabilità.

Un possibile diverso approccio alla probabilità si può realizzare come segue. Dato un qualunque esperimento (reale o concettuale) in questo approccio si richiede di poter costruire uno spazio campionario, Ω, ovvero l'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento; successivamente si introduce il concetto di evento come sottoinsieme dello spazio campionario, si definiscono le proprietà e operazioni tra eventi, nello stesso modo in cui abbiamo operato nel paragrafo 3.2 e si introduce un'algebra di eventi. La probabilità è definita come una arbitraria funzione su quest'algebra di eventi, soddisfacente solo le condizioni espresse dalle (3.7), (3.8), (3.9), senza preoccuparsi di dare un significato alla funzione stessa. Questa impostazione, proposta tra gli altri dal matematico russo Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987), prende il nome di *teoria assiomatica*.

[14] Sono gli eventi che appartengono a quello che abbiamo chiamato spazio campionario.

Tenendo conto di quanto abbiamo detto a proposito della teoria soggettiva, possiamo concludere che essa soddisfa sostanzialmente i requisiti di una teoria assiomatica, con il vantaggio però di fornire uno strumento esplicito su come calcolare la funzione di probabilità (comprendendo, come casi particolari, anche l'approccio classico e quello frequentista). Inoltre questa teoria non richiede necessariamente la costruzione di uno spazio campionario completo, e la cosa può risultare molto utile in tutti i casi in cui si ha poca informazione.

Dunque in molti degli esempi ed esercizi che considereremo supporremo di aver valutato in qualche modo la probabilità di alcuni eventi di interesse e sui quali abbiamo sufficiente informazione, e ci preoccuperemo di dedurre da queste conoscenze la probabilità di altri eventi che vorremo studiare.

Alla luce delle caratteristiche che abbiamo determinato per la probabilità (caratteristiche che, lo ripetiamo, sono una conseguenza della condizione di coerenza), possiamo mostrare ancora meglio come la valutazione combinatoria possa essere considerata un caso particolare della valutazione soggettiva (o generale) che abbiamo proposto. Se sono dati n eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$, che costituiscono una partizione di Ω e se esiste qualche ragione, per esempio di simmetria, che ce li fa ritenere equiprobabili (nel senso che siamo disposti a scommettere su di essi con la stessa quota), allora necessariamente dobbiamo attribuire a ciascuno di essi la probabilità $1/n$, visto che la somma deve essere 1. Se poi un evento E è unione di h di questi eventi, la sua probabilità sarà la somma delle probabilità degli h eventi, ovvero sarà h/n: ritroviamo la ben nota formula del rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, ma questa volta dedotta dalle caratteristiche generali della funzione di probabilità. Si noti, comunque, che in ogni caso, questa "valutazione" richiede l'individuazione degli eventi equiprobabili che costituiscono la partizione di Ω, cosa non sempre agevole, come abbiamo osservato in una considerazione sulla monete normali o bacate nella pagina 39.

3.6. Valutazione della coerenza nelle assegnazioni di probabilità

Abbiamo detto che una assegnazione coerente di probabilità su una famiglia $\mathcal{F}$ di eventi deve soddisfare le regole espresse dalle (3.7), (3.8) e (3.9). In particolare la più stringente di queste condizioni è la terza, ovvero la proprietà additiva della probabilità per eventi incompatibili. Tuttavia nella maggior parte dei casi noi non ci troviamo in situazioni in cui siamo ricondotti a trattare solo eventi incompatibili e dobbiamo comunque valutare la coerenza delle assegnazioni di probabilità che possiamo dare a ciascun evento sulla base delle informazioni in nostro possesso (e, naturalmente, della nostra valutazione su queste informazioni). Vediamo qualche esempio concreto per capire la situazione.

Esempio 3.9. In un lancio di dadi consideriamo gli eventi "$A =$ esce un numero dispari" e "$B =$ esce un numero pari". Se non sappiamo che il dado è truccato, possiamo metterci a valutare le probabilità di ciascuno degli eventi esaminando, per esempio, un gran numero di lanci. Se giungiamo alla conclusione che ciascuno dei due eventi ha probabilità di 0.6, possiamo subito affermare che si tratta di una conclusione incoerente, in quanto $0.6 + 0.6 = 1.2 > 1$ e questo è in contrasto con il teorema delle probabilità totali, che si può leggere anche, brevemente, dicendo che la somma delle probabilità di eventi incompatibili deve essere essa stessa una probabilità, cioè deve essere non superiore a 1.

Esempio 3.10. Riprendendo in esame l'esempio precedente, se riconsideriamo l'evento "$A =$ esce un numero dispari" e modifichiamo l'evento B in "esce un multiplo di 3", allora l'assegnazione di probabilità 0.6 a ciascuno dei 2 eventi non è, di per sè, incoerente: possiamo solo, in questo momento, concludere che non abbiamo implementato un metodo per valutarne la coerenza.

Per risolvere problemi come quello proposto nell'esempio 3.10, riprendiamo in esame il concetto di partizione di un insieme costruita mediante i costituenti relativi ad un certo numero di sottoinsiemi dati. Poiché abbiamo, nella sostanza, identificato gli eventi con sottoinsiemi dell'evento certo Ω, tutto quanto detto a proposito degli insiemi vale, con le stesse parole, per gli eventi. Se, dati n eventi E_1, E_2, $\dots$, E_n, riusciamo ad assegnare la probabilità, rispettando le ormai note regole, ai singoli costituenti, è chiaro che, usando il teorema delle probabilità totali riusciremo anche ad assegnare la probabilità, in maniera coerente, ai casi di nostro interesse.

Riesaminiamo, alla luce di questa osservazione, l'esempio 3.10. Tenendo conto che $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, troviamo che $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,6\}$, da cui otteniamo $4 = 2^2$ costituenti.

1. $I_1 = A \cap B = \{3\}$;
2. $I_2 = A \cap B^c = \{1,5\}$;
3. $I_3 = A^c \cap B = \{6\}$;
4. $I_4 = A^c \cap B^c = \{2,4\}$.

Se assegnamo

$$P(I_1) = 0.4, \quad P(I_2) = 0.2, \quad P(I_3) = 0.2, \quad P(I_4) = 0.2,$$

otteniamo

$$P(A) = P(I_1 \cup I_2) = 0.4 + 0.2 = 0.6, \quad P(B) = P(I_1 \cup I_3) = 0.4 + 0.2 = 0.6,$$

concludendo che la scelta era perfettamente legittima. Notiamo che una assegnazione di probabilità di questo tipo non è assolutamente spropositata. Essa può per esempio corrispondere ad un dado truccato in modo tale che la faccia 3 compaia il 40% delle volte, la faccia 6 il 20% e le altre 4 facce il 10%: per ottenere[(15)] questo basta mettere pesetti opportuni dietro le facce con il 3 e con il 6.

Tuttavia questo metodo non è praticamente realizzabile. Per rendercene conto riprendiamo un'altra volta in esame l'esempio 3.10. Se il giocatore di dadi è un buon matematico potrebbe anche avere fatto un ragionamento come quello che abbiamo indicato sui costituenti degli eventi, ma la cosa è abbastanza "improbabile". Se dunque, per un qualunque motivo, il giocatore ha valutato che $P(A) = P(B) = 0.6$, e questi sono gli unici dati in nostro possesso, quali strumenti abbiamo a disposizione per valutare *a tavolino*, senza ulteriori analisi di frequenze dei risultati, se la scelta è o no coerente?

Naturalmente possiamo costruirci i costituenti, come sopra riportato, ma non abbiamo strumenti per valutare la loro probabilità. Possiamo però porre, genericamente,

$$x_1 = P(I_1), \quad x_2 = P(I_2), \quad x_3 = P(I_3), \quad x_4 = P(I_4).$$

Avremo

$$P(A) = P(I_1 \cup I_2) = x_1 + x_2 = 0.6, \quad P(B) = P(I_1 \cup I_3) = x_1 + x_3 = 0.6.$$

Dobbiamo inoltre tenere conto che

$$P(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4) = P(\Omega) = 1, \quad \text{ovvero} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

con l'ulteriore condizione che

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

[15] Naturalmente questo esempio non vuole essere un incentivo a truccare i dadi in un eventuale gioco!

La condizione che le singole probabilità siano minori o uguali a 1 è implicita nel fatto che sono non negative e che la loro somma è 1.

Dunque la valutazione della coerenza della scelta effettuata dipenderà dalla risoluzione del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0.6 \\ x_1 + x_3 = 0.6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}.$$

Se il sistema ha soluzioni la scelta è coerente, altrimenti no.

Anche senza entrare nei dettagli teorici legati alla risoluzione di un sistema di questo tipo, osserviamo che si tratta di un sistema di 3 equazioni di primo grado in 4 incognite, con la particolare condizione dovuta al fatto che le soluzioni devono essere non negative, per il loro significato di probabilità: si parla di *sistema lineare* di equazioni. Poiché il numero di equazioni è inferiore a quello delle incognite è possibile, ma non certo, che esso abbia soluzioni, anche per la presenza dell'ultima condizione. In ogni caso perché la scelta sia coerente basta che esista *una* soluzione, anche se, in molti casi, un sistema come questo di soluzioni ne ha infinite. Una delle soluzioni possibili è quella che abbiamo indicato $x_1 = 0.4$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0.2$. Un'altra soluzione possibile (ma ce ne sono infinite) è, $x_1 = x_2 = x_3 = 0.3$, $x_4 = 0.1$. Questa soluzione corrisponde ad un diverso modo di truccare il dado, ma la cosa che qui ci interessa è *solo* il fatto che l'esistenza della soluzione prova la *coerenza* della assegnazione di probabilità fatta dal giocatore di dadi.

Dunque la valutazione della coerenza di una certa assegnazione di probabilità è una mera[16] questione di costruzione e di risolubilità di un sistema di equazioni.

Esaminiamo alcuni altri esempi per chiarire il metodo.

Esempio 3.11. Consideriamo i seguenti tre eventi, a cui assegnamo la stessa probabilità di 0.4.

- E_1 = "la prossima domenica l'Udinese vince la partita".
- E_2 = "la prossima domenica l'Udinese segna esattamente 2 goal".
- E_3 = "la prossima domenica l'Udinese non segna".

Possiamo osservare che E_1 ed E_2 possono avere qualcosa in comune in comune, mentre E_3 non ha nulla in comune né con E_1, né con E_2. Graficamente possiamo rappresentare la situazione con il diagramma di Venn rappresentato nella figura 3.1. I costituenti si ottengono al solito modo.

- $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = I_1 = \emptyset$.
- $E_1^c \cap E_2 \cap E_3 = I_2 = \emptyset$.
- $E_1 \cap E_2^c \cap E_3 = I_3 = \emptyset$.
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3^c = I_4$.
- $E_1^c \cap E_2^c \cap E_3 = I_5$.
- $E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c = I_6$.
- $E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c = I_7$.
- $E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c = I_8$.

[16] Negli esempi semplici che considereremo la costruzione (per cui è richiesta la determinazione dei costituenti) e la risolubilità o meno dei sistemi di equazioni in esame potrà essere fatta a mano. In esempi complessi può essere affrontata con un computer, attraverso apposite procedure. Tuttavia il problema può diventare complesso anche per un computer!

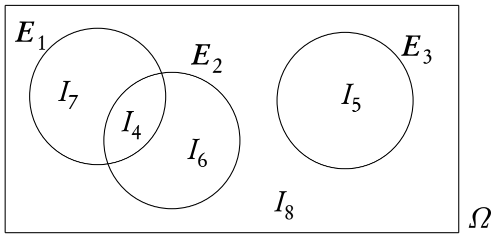


Figura 3.1.: *Eventi dell'esempio 3.11 e relativi costituenti*

Si ha poi:

$$E_1 = I_4 \cup I_7, \quad E_2 = I_4 \cup I_6, \quad E_3 = I_5.$$

Detto a parole i costituenti (non vuoti) sono individuati dalle seguenti proposizioni.

- $I_4 =$ "la prossima domenica l'Udinese vince segnando 2 goal".
- $I_5 =$ "la prossima domenica l'Udinese non segna".
- $I_6 =$ "la prossima domenica l'Udinese segna due goal ma non vince" (una bella sfortuna!).
- $I_7 =$ "la prossima domenica l'Udinese vince e segna più di due goal" (se non segnasse non potrebbe vincere!).
- $I_8 =$ "la prossima domenica l'Udinese segna più di 2 goal ma non vince lo stesso" (il massimo della sfortuna!).

L'assegnazione di probabilità che abbiamo fatto sarà coerente se, dette x_4, x_5, x_6, x_7 e x_8 le incognite probabilità dei costituenti, si ha

$$\begin{cases} x_4 + x_7 = 0.4 \\ x_4 + x_6 = 0.4 \\ x_5 = 0.4 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{4,5,6,7,8\} \end{cases} .$$

Anche in questo sistema abbiamo più incognite che equazioni. Ricaviamo x_7 dalla prima equazione, x_6 dalla seconda, dalla terza abbiamo già il valore di x_5, e sostituiamo il tutto nella quarta equazione, ottenendo $x_4 - x_8 = 0.2$. Se proviamo ad assegnare a x_8 il valore 0.1 (un valore basso ci pare corretto per questo evento), otteniamo subito i seguenti valori per le incognite:

$$x_4 = 0.3, \quad x_5 = 0.4, \quad x_6 = 0.1, \quad x_7 = 0.1, \quad x_8 = 0.1.$$

La valutazione fatta è dunque coerente.

Ribadiamo che abbiamo trovato una soluzione, ma ce ne sono sicuramente altre (basterebbe, nel ragionamento di prima, mettere altri valori per x_8, tenendo conto che, per esempio come conseguenza della prima equazione, x_4 non può essere superiore a 0.4): quello che conta per concludere nel senso della coerenza è il fatto che ci sia almeno una soluzione.

In generale non è molto importante conoscere il significato degli eventi costituenti (anzi negli esercizi spesso non si dà nemmeno un esplicito significato agli eventi di cui si assegna la probabilità): quello che conta sono le assegnazioni di probabilità e le relazioni tra gli eventi dati.

Vediamo di seguito alcuni esercizi risolti che ci aiuteranno a focalizzare meglio il problema.

Esercizio 3.4. *Due eventi A e B formano i seguenti costituenti:*

$$I_1 = A \cap B, \quad I_2 = A^c \cap B, \quad I_3 = A^c \cap B^c.$$

Si chiede se l'assegnazione di probabilità

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

è coerente.

Risoluzione. La cosa importante da notare è che dal testo si desume che il quarto possibile costituente, costruito a partire dai due eventi dati, ovvero $A \cap B^c$ è vuoto, ovvero che A è contenuto in B. L'assegnazione fatta è dunque sicuramente incoerente, perché non rispetta la regola della monotonia: la probabilità di B deve essere più grande di quella di A. □

Esercizio 3.5. *Dati due eventi A e B verificare se l'assegnazione di probabilità*

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(A^c \cap B^c) = 0.2$$

è coerente.

Risoluzione. Nulla è detto nel testo sulla compatibilità o meno degli eventi A e B. A volte in casi come questi si sottintende che A e B siano compatibili e che le loro interrelazioni siano le più complesse possibili, ovvero che ci sia una parte in comune e che ciascuno dei due abbia una parte esterna all'altro. Tuttavia conviene esaminare tutti i casi che si possono presentare e che, in questo caso, sono i seguenti.

1. $A \cap B = \emptyset$ (A e B incompatibili).
2. $A \cap B \neq \emptyset \wedge A^c \cap B \neq \emptyset \wedge A \cap B^c \neq \emptyset$.
3. $B \subset A$.

Nel primo caso ci sono tre costituenti:

$$A^c \cap B = B, \quad A \cap B^c = A, \quad A^c \cap B^c.$$

Poiché la somma delle tre probabilità è 0.9, mentre dovrebbe essere 1, se ne deduce che l'assegnazione è incoerente.

Nel secondo caso ci sono quattro costituenti:

$$I_1 = A \cap B, \quad I_2 = A^c \cap B, \quad I_3 = A \cap B^c, \quad I_4 = A^c \cap B^c,$$

con

$$A = I_1 \cup I_3, \quad B = I_1 \cup I_2.$$

Le condizioni di coerenza si scrivono facilmente, con il solito significato dei simboli:

$$x_1 + x_3 = 0.4, \quad x_1 + x_2 = 0.3, \quad x_4 = 0.2, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

con l'aggiunta della solita condizione di non negatività.

Ricavando x_3 dalla prima, x_2 dalla seconda, x_4 dalla terza e sostituendo nella quarta si trova che deve essere $x_1 = -0.1$, che non è possibile. Dunque anche in questo caso si ha non coerenza.

Nel terzo caso ci sono tre costituenti:

$$I_1 = A \cap B = B, \quad I_2 = A \cap B^c, \quad I_3 = A^c \cap B^c,$$

con

$$A = I_1 \cup I_2, \quad B = I_1.$$

Le condizioni sono allora:

$$x_1 + x_2 = 0.4, \quad x_1 = 0.3, \quad x_3 = 0.2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

sempre con l'aggiunta della non negatività. Dalle prime tre si ricava

$$x_1 = 0.3, \quad x_2 = 0.1, \quad x_3 = 0.2,$$

palesemente incompatibili con la quarta equazione.

Si noti che in questo caso c'erano quattro equazioni in tre incognite: in un sistema del genere le possibilità di soluzione sono chiaramente molto ridotte.

Abbiamo voluto esaminare i vari casi possibili e svolgere in dettaglio tutti i calcoli: in realtà bastava una semplice considerazione "insiemistica" per concludere che l'assegnazione era comunque incoerente. Infatti, qualunque sia la situazione, si ha

$$\Omega = A \cup B \cup (A^c \cap B^c).$$

Poiché $P(\Omega) = 1$, mentre $P\big(A \cup B \cup (A^c \cap B^c)\big) \le 0.9$, l'assegnazione non può essere coerente. □

Esercizio 3.6. *Dati tre eventi A, B, C con A e C incompatibili, verificare se la valutazione di probabilità*

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0.4$$

è coerente.

Risoluzione. Poiché nulla è detto sulle relazioni tra A e B e tra B e C, supporremo che A e B, B e C siano compatibili. I costituenti[17] sono:

— $A \cap B \cap C = \emptyset$.

[17] Molti testi usano una notazione semplificata per i costituenti. Notando che si tratta sempre di fare intersezioni tra gli eventi in esame e i loro contrari, si potrebbe sopprimere il simbolo di intersezione e scrivere solo gli insiemi. Per esempio

$$A \cap B \cap C = ABC, \quad A^c \cap B \cap C = A^cBC, \quad A \cap B^c \cap C = AB^cC, \quad \dots$$

Tuttavia in questo testo continueremo ad usare la notazione completa.

— $A^c \cap B \cap C = I_1$.
— $A \cap B^c \cap C = \emptyset$.
— $A \cap B \cap C^c = I_2$.
— $A^c \cap B^c \cap C = I_3$.
— $A^c \cap B \cap C^c = I_4$.
— $A \cap B^c \cap C^c = I_5$.
— $A^c \cap B^c \cap C^c = I_6$.

Abbiamo rappresentato la situazione nella figura 3.2.

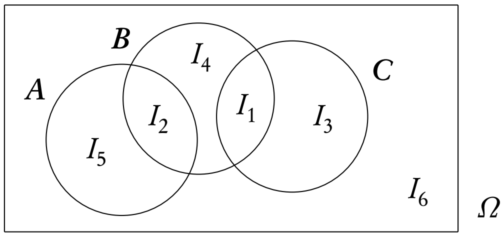


Figura 3.2.: *Eventi e costituenti per l'esercizio 3.6*

L'esame della figura 3.2 porta immediatamente a scrivere le seguenti equazioni, in cui abbiamo usato le notazioni ormai usuali.

$$\begin{cases} x_2 + x_5 = 0.4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0.4 \\ x_1 + x_3 = 0.4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3,4,5,6\} \end{cases} .$$

Sommando la prima e la terza e sostituendo nella quarta si ottiene $x_4 + x_6 = 0.2$. Se proviamo a prendere $x_4 = 0$, otteniamo $x_6 = 0.2$. Rimangono le seguenti condizioni

$$\begin{cases} x_2 + x_5 = 0.4 \\ x_1 + x_2 = 0.4 \\ x_1 + x_3 = 0.4 \end{cases} .$$

Se prendiamo $x_2 = 0.2$, dalla prima otteniamo $x_5 = 0.2$, dalla seconda $x_1 = 0.2$, dalla terza $x_3 = 0.2$. Abbiamo quindi trovato una (come al solito ce n'erano infinite altre) soluzione al sistema: l'assegnazione è coerente. □

Esercizio 3.7. *Dati tre eventi A, B, C, con $A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$, verificare se le assegnazioni di probabilità*

$$P(A) = \frac{1}{10}, \quad P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{5}{10}$$

sono coerenti.

Risoluzione. Se $A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$ se ne deduce che "non c'è nulla al di fuori dei tre eventi", o, come si dice, i tre eventi sono *esaustivi*, ovvero la loro unione fornisce l'evento certo[18]. Dunque si deve avere $P(A \cup B \cup C) = 1$, mentre

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9}{10} < 1.$$

L'assegnazione non è dunque coerente. □

Esercizio 3.8. *Dati tre eventi, A, E, H, con $A \subseteq E$, A e H incompatibili, stabilire se è coerente la seguente valutazione complessiva di probabilità:*

$$P(A \cup H) = 0.26, \quad P(H^c) = 0.89, \quad P(E) = 0.12.$$

(*Prova di Matematica, ISIA Roma,* 11/06/2009)

Risoluzione. Possiamo rappresentare la situazione con un diagramma di Venn, come nella figura 3.3, in cui abbiamo ipotizzato che E ed H siano compatibili, visto che non ci è data alcuna informazione contraria.

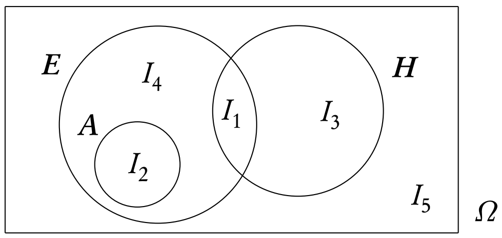


Figura 3.3.: *Eventi e costituenti per l'esercizio* 3.8

I costituenti si trovano nel modo solito e sono i seguenti.

1. $A \cap E \cap H = \emptyset$.
2. $A^c \cap E \cap H = I_1$.
3. $A \cap E^c \cap H = \emptyset$.
4. $A \cap E \cap H^c = I_2$.
5. $A^c \cap E^c \cap H = I_3$.
6. $A^c \cap E \cap H^c = I_4$.
7. $A \cap E^c \cap H^c = \emptyset$.
8. $A \cap E \cap H = I_5$.

I dati del problema si traducono, con il solito significato dei simboli, nelle condizioni:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.26, \quad x_2 + x_4 + x_5 = 0.89, \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0.12, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$

oltre a quella di non negatività. Sostituendo la prima nella quarta si trova $x_4 + x_5 = 0.74$. Dalla seconda si trova ora $x_2 = 0.15$, che è incompatibile con la terza, dalla quale si deduce che sia x_1 che x_2 che x_4 non possono superare 0.12. L'assegnazione dunque non è coerente. □

[18] Attenzione: questo non significa affatto che sono una partizione dell'evento certo!

Osservazione 3.9. È opportuno segnalare che in questi problemi di valutazione della coerenza non abbiamo alcun interesse a sapere come le probabilità assegnate ai vari eventi siano state valutate: quello che dobbiamo decidere è solo se le valutazioni date rispettano o no le condizioni necessarie perché possano costituire una valutazione coerente di probabilità. In altre parole si può dire che la conclusione che possiamo trarre, ad esempio, dalla risoluzione del problema 3.8 è: quelle valutazioni di probabilità, cioè quelle scommesse, sono illogiche solo perché non rispettano la condizione che in una scommessa non si può essere sicuri a priori di vincere o di perdere. Non ci chiediamo affatto come quelle valutazioni siano state ottenute.

Osservazione 3.10. Nella risoluzione dell'esercizio 3.8 abbiamo detto che, non essendoci fornita alcuna informazione relativamente agli eventi E ed H, abbiamo supposto che essi siano compatibili: se avessimo ritenuto E ed H incompatibili, avremmo avuto un costituente di meno, e quindi una condizione in più, ovvero $x_1 = 0$. Se già il sistema considerato non ha soluzioni, con una condizione in più le cose possono solo peggiorare, non migliorare. Dunque nulla sarebbe cambiato relativamente alla coerenza.

Esercizio 3.9. *Un dispositivo contiene tre parti rotanti, M_1, M_2, M_3. È noto che se M_1 ruota, ruota anche M_2 e che se M_2 ruota, ruota anche M_3. Sia A_i l'evento "la parte M_i ruota", con $i \in \{1,2,3\}$. Determinare l'insieme dei costituenti relativi a questi tre eventi e come deve essere scelta $P(A_2)$ affinché la valutazione di probabilità con $P(A_1) = 1/4$, $P(A_3) = 3/5$ sia coerente. Se a è uno dei valori per $P(A_2)$ che rendono la valutazione coerente, trovare le probabilità dei costituenti.*

Risoluzione. Il tipo di funzionamento del dispositivo implica che $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$. I costituenti (non vuoti) sono allora solo

— $I_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1$.
— $I_2 = A_1^c \cap A_2 \cap A_3$.
— $I_3 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$.
— $I_4 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$.

La monotonia della probabilità implica che

$$\frac{1}{4} \leq P(A_2) \leq \frac{3}{5}.$$

Detto a un numero reale che soddisfi queste condizioni si ha:

$$P(I_1) = P(A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(I_2) = a - \frac{1}{4}, \quad P(I_3) = \frac{3}{5} - a, \quad P(I_4) = \frac{2}{5}.$$ □

Esercizio 3.10. *Un'ispezione sanitaria in un'azienda deve valutare la probabilità di insorgenza di 2 diverse malattie professionali (che indichiamo con M_1 e M_2), dopo 5 anni di lavoro. La conclusione a cui giunge il team ispettivo è che la probabilità che un soggetto abbia la malattia M_1 è 0.1, la probabilità che abbia la malattia M_2 è 0.2, mentre è 0.7 la probabilità che lo stesso sia sano. Si chiede se la valutazione è coerente.*

Risoluzione. Indichiamo con A l'evento "un dipendente ha contratto la malattia M_1", con B l'evento "un dipendente ha contratto la malattia M_2", con S l'evento "il dipendente è sano". Questa situazione è rappresentata nella figura 3.4.

È evidente che $A \cap S = \emptyset$ e che $B \cap S = \emptyset$, mentre $A \cap B$ potrebbe anche non essere vuoto (se il dipendente ha contratto entrambe le malattie). Per i costituenti si trova

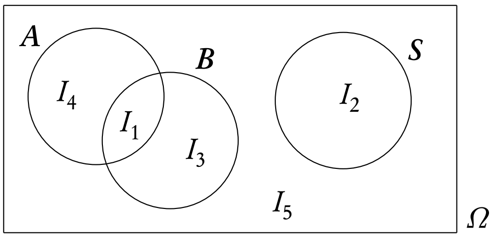


Figura 3.4.: *Eventi dell'esempio 3.10 e relativi costituenti*

- $A \cap B \cap S = A^c \cap B \cap S = A \cap B^c \cap S = \emptyset$.
- $A \cap B \cap S^c = I_1$.
- $A^c \cap B^c \cap S = I_2$.
- $A^c \cap B \cap S^c = I_3$.
- $A \cap B^c \cap S^c = I_4$.
- $A^c \cap B^c \cap S^c = I_5$.

Le probabilità assegnate si traducono nelle seguenti condizioni.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0.1 \\ x_1 + x_3 = 0.2 \\ x_2 = 0.7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0.1 - x_1 \\ x_3 = 0.2 - x_1 \\ x_2 = 0.7 \\ x_1 + 0.7 + 0.2 - x_1 + 0.1 - x_1 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\} \end{cases}.$$

Dall'ultima equazione si trae $x_5 = x_1$. Se prendiamo, per esempio, $x_5 = x_1 = 0.05$, possiamo trovare valori ammissibili per x_2, x_3, x_4. La valutazione è coerente. □

3.7. Il problema di de Méré

Prima di chiudere questa parte sui fondamenti del calcolo delle probabilità, ritorniamo sul problema di de Méré, cui abbiamo accennato nella pagina 37: è più probabile ottenere almeno un 6 lanciando quattro volte un dado, oppure un doppio 6 lanciando ventiquattro volte due dadi? Ci dilungheremo un po' su questo problema che si trova discusso in molti testi di probabilità. Nell'ovvia ipotesi che i dadi non siano truccati possiamo applicare l'approccio combinatorio per risolverlo. Esaminiamo dunque le due situazioni.

1. Quattro lanci di un dado danno luogo a 6^4 possibili uscite, tante quante sono le disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a 4 a 4. Di queste sono sfavorevoli tutte quelle che prevedono l'uscita solo dei numeri da 1 a 5 in tutti i lanci, ovvero 5^4. Ne restano $6^4 - 5^4$ di favorevoli. La probabilità dell'evento in esame si può dunque valutare come segue:

$$\frac{6^4 - 5^4}{6^4} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.517747.$$

2. In ogni lancio di due dadi ci sono 36 possibili risultati, cioè tanti quante sono le coppie di numeri da 1 a 6, ovvero le disposizioni con ripetizione di 6 oggetti a due a due. Se i lanci sono 24, ci saranno 36^{24} casi possibili. Poiché il doppio 6 si può presentare una sola volta su 36, in ogni lancio ci saranno 35 casi sfavorevoli e in 24 lanci 35^{24} casi sfavorevoli. Ne restano $36^{24}-35^{24}$ di favorevoli. La probabilità dell'evento in esame si può dunque valutare come segue:
$$\frac{36^{24}-35^{24}}{36^{24}} = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.491404.$$

La seconda probabilità è, seppure di poco, inferiore alla prima e, a lungo andare, può portare a perdite consistenti nel gioco (soprattutto per un giocatore incallito come pare fosse il de Méré). Infatti se scommetto sul primo evento (almeno un 6 su quattro lanci), posso pagare più di 0.5 per vincere 1, quindi se pago 0.5 a lungo andare posso vincere cifre anche consistenti. Se scommetto sul secondo evento dovrei pagare un po' meno di 0.5 per vincere 1, quindi se pago 0.5 a lungo andare posso perdere cifre anche consistenti. Probabilmente il cavaliere de Méré aveva notato che il numero di persone disposte a giocare con lui su quattro lanci di un dado andava sempre più diminuendo, e quindi propose un diverso tipo di gioco che riteneva avere le stesse probabilità di successo: il fatto che cominciava invece a perdere lo indusse a scrivere a Pascal per chiedere delucidazioni.

È possibile che de Méré avesse fatto il seguente ragionamento intuitivo: un dado può cadere in 6 modi diversi e 4 lanci corrispondono ai 4/6, ovvero ai 2/3, dei lanci possibili. Due dadi possono cadere in 36 modi diversi e 24 lanci corrispondono sempre ai due terzi dei lanci possibili. Quindi 4 lanci di un dado o 24 lanci di due dadi dovrebbero essere equivalenti per garantirmi la probabilità di vincere.

Tenendo conto dei calcoli che abbiamo sopra riportato possiamo notare che se nel primo evento avessimo considerato tre lanci avremmo ottenuto, per la probabilità di successo,
$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{3} \simeq 0.421296$$
e quindi troppo poco per essere ragionevolmente sicuri di vincere, a lungo andare, scommettendo 0.5. Se nel secondo evento avessimo invece considerato 25 lanci avremmo ottenuto la seguente probabilità di successo:
$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25} \simeq 0.505532$$
e ora si che avremmo potuto continuare a scommettere 0.5 con la ragionevole speranza, a lungo andare, di guadagnarci.

3.8. Probabilità condizionata e teorema delle probabilità composte

Per introdurre l'importante concetto di probabilità condizionata consideriamo un esempio.

Esempio 3.12. Supponiamo che in un gioco di lancio successivo di due dadi un giocatore scommetta 0.5 sull'evento $E =$"esce un punteggio maggiore o uguale a 7". La probabilità di questo evento può essere calcolata combinatoriamente, valutando che ci sono 21 casi favorevoli su 36 casi possibili. Basta esaminare le tabelle 3.1 dove abbiamo riportato sulla sinistra i possibili risultati dei lanci e sulla destra il punteggio complessivo corrispondente. Si ha dunque $P(E) = 21/36 = 7/12 \simeq 0.58$. Tenendo conto

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Tabella 3.1.: *Lancio di due dadi e punteggi corrispondenti*

di questo calcolo la scommessa pare azzardata (anche se è comunque coerente dal punto di vista delle condizioni tipiche della probabilità) e probabilmente nessun banco la accetterebbe.

Se il primo dado realizza 1 sarà ancora conveniente per il giocatore mantenere la scommessa o gli converrà cercare di convincere il banco a farsi restituire la posta (richiesta che sarà quasi sicuramente respinta!) rinunciando alla scommessa? Il problema è che, *essendosi verificato* l'evento, che possiamo indicare con H, "al primo lancio esce 1", la situazione è completamente diversa: c'è ora una sola possibilità di vincita per il giocatore, in quanto per avere il punteggio di 7 dovrebbe uscire necessariamente il 6: la probabilità in questa nuova situazione si è ridotta ad $1/6 \simeq 0.17$. Attenzione: *non* è corretto affermare che la probabilità dell'evento E si è ridotta a 0.17, in quanto 0.17 è la probabilità di un diverso evento, che indicheremo con $E|H$, che si può formulare con la proposizione "in un lancio successivo di due dadi si ottiene il punteggio 7 se dopo il primo lancio si è ottenuto 1".

È importante segnalare che l'evento $E|H$ *non* è l'intersezione tra gli eventi E ed H. Infatti $E\cap H$ è vero quando sono veri sia E che H ed è falso in tutti gli altri casi, ma questo quando ancora non si sa nulla sull'esito della prova. Nel caso di $E|H$, invece, si sa già che H si è verificato: perché $E\cap H$ sia vero occorre che siano veri entrambi, senza avere certezza su nessuno dei due, perché $E|H$ sia vero basta che sia vero E, in quanto H è sicuramente vero. Basta provare a calcolare la probabilità $P(E\cap H)$ per rendersi conto di questo. L'evento $E\cap H$ è individuato dalla proposizione "esce un punteggio maggiore o uguale a 7 e contemporaneamente un 1 al primo lancio". Rivedendo la tabella 3.1 ci si rende immediatamente conto che per questo evento c'è un solo caso possibile, ovvero la coppia $(1,6)$: la probabilità è dunque $1/36$, molto meno della probabilità dell'evento $E|H$.

La situazione qui descritta è molto comune e tipica nelle applicazioni del calcolo delle probabilità, anzi la regola che stabiliremo fa aumentare enormemente le possibilità di applicazione del calcolo delle probabilità: in pratica equivale a dire che la valutazione della probabilità di un evento che, lo ricordiamo, è una misura del grado di fiducia sul verificarsi dello stesso, si può modificare[(19)] "apprendendo dall'esperienza".

Per capire ancora meglio il problema consideriamo due ulteriori esempi.

Esempio 3.13. Uno studente intende affrontare un test costituito da tre domande del tipo Vero/Falso e intende rispondere a caso, visto che non ha avuto tempo di prepararsi. Supposto che si superi il test solo rispondendo correttamente a tutte le tre domande, si chiede la probabilità di superare il test valutata

[19] Ritorneremo ancora su questo aspetto trattando il teorema di Bayes.

prima dell'inizio della prova e nel caso che, invece, lo studente riesca durante la prova a ottenere le risposte corrette alle prime due domande da un compagno.

Indichiamo con E l'evento "le tre risposte sono esatte", con H l'evento "le prime due risposte sono esatte", con $E|H$ l'evento "le tre riposte sono esatte sapendo che le prime due lo sono". Dobbiamo valutare le probabilità $P(E)$ e $P(E|H)$. Per E abbiamo 8 casi possibili (tante quante sono le disposizioni con ripetizione dei 2 oggetti $\{V, F\}$ a 3 a 3, mentre di casi favorevoli ce n'è solo 1, dunque $P(E) = 1/8$. Nel secondo caso rimangono solo due casi possibili con un caso favorevole, dunque $P(E|H) = 1/2$. A differenza dell'esempio precedente in questo caso si è verificato un aumento della probabilità di superamento del test, cosa del resto anche intuitivamente evidente.

Anche in questo secondo esempio notiamo che la probabilità di $E|H$ è diversa da quella di $E \cap H$. Infatti l'evento $E \cap H$ è individuato dalla proposizione "le tre risposte sono esatte e contemporaneamente le prime due risposte sono esatte", il che equivale a dire[20] che $E \cap H = E$. Dunque $P(E \cap H) = P(E) = 1/8 \neq P(E|H) = 1/2$.

Esempio 3.14. Consideriamo un'urna con 12 palline identiche contrassegnate con i numeri da 1 a 12 e l'evento $E =$"estrazione di una pallina contrassegnata con un numero divisibile per 3". La probabilità di E può essere valutata combinatoriamente come $4/12$, ovvero $1/3$, in quanto i numeri divisibili per 3 sono proprio 4 su 12. Consideriamo poi l'evento $H =$"estrazione di una pallina con un numero pari". Ci chiediamo qual è la probabilità dell'evento E se sappiamo che si è verificato l'evento H, probabilità che indichiamo con $P(E|H)$. Possiamo ancora fare una valutazione combinatoria in quanto se sappiamo che è uscito un numero pari significa che ci sono 6 casi possibili residui ovvero uno dei numeri $2, 4, 6, 8, 10, 12$, mentre i casi favorevoli sono soltanto 2, ovvero uno dei numeri $6, 12$. La probabilità richiesta è ancora $2/6 = 1/3$. In questo caso l'informazione aggiuntiva *non* ha mutato la valutazione di probabilità.

È opportuno segnalare che anche in questo caso la probabilità $P(E|H)$ non coincide con la probabilità $P(E \cap H)$. Quest'ultima infatti si riferisce al verificarsi contemporaneo dei due eventi E ed H, ovvero al verificarsi dell'evento "esce un numero pari multiplo di 3", e corrisponde a $2/12$, ovvero $1/6$.

Gli eventi del tipo $E|H$ considerati negli esempi proposti si chiamano *eventi condizionati*. Precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 3.11. *Dati due eventi E ed H, con $H \neq \emptyset$, chiameremo* evento condizionato *$E|H$ l'evento che è vero se, essendo vero H è vero anche E, falso se, essendo vero H risulta falso E. Nel caso che H sia falso non ha interesse sapere se $E|H$ è vero o falso: si usa dire che, in questo caso $E|H$ è indeterminato. La scrittura $E|H$ si legge "E dato H" oppure "E condizionato ad H".*

La condizione $H \neq \emptyset$ equivale a dire che "non è noto a priori che H è falso": se infatti $H = \emptyset$ allora H sarebbe falso e, in base alla definizione data, non sarei più interessato a conoscere la verità o falsità dell'evento condizionato. L'evento H si può anche chiamare l'evento *condizionante*.

È immediato verificare che, nei tre esempi 3.12, 3.13 e 3.14, vale la seguente formula

$$P(E|H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)}. \tag{3.12}$$

Scambiando i ruoli di E ed H la formula si può scrivere anche

$$P(H|E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}. \tag{3.13}$$

[20]Questa cosa è abbastanza evidente perché $E \subset H$.

Si noti, nella (3.12), e analogo discorso vale per la (3.13), che il denominatore della frazione a secondo membro è minore o uguale a 1, essendo una probabilità. Ne segue che $P(E|H) \geq P(E \cap H)$.

Le formule (3.12) e (3.13), scritte nella forma

$$P(E \cap H) = P(H)P(E|H), \quad P(H \cap E) = P(E)P(H|E), \tag{3.14}$$

esprimono il *teorema delle probabilità composte* e possono esser molto utili per calcolare la probabilità dell'evento intersezione di due eventi.

Ricordiamo, a proposito delle (3.14), che $P(E \cap H) = P(H \cap E)$.

Per capire ancora meglio il significato di probabilità condizionata si esamini la seguente situazione, relativa ad un scommessa calcistica. Se A e B sono due squadre impegnate in una certa partita, valutare la probabilità di vincita di A con il numero $P(A)$ significa essere disposti a pagare la posta $P(A)$ per vincere 1 se la squadra A vince, o per perdere la posta se A perde o pareggia. Si può però anche scommettere sulla vittoria di A subordinata al fatto che una delle due squadre vinca. In questo caso, detto A l'evento "la squadra A vince" e H l'evento "una delle due squadre vince" la posta che sono disposto a scommettere è corretto indicarla con $P(A|H)$: se A vince e B perde allora ricavo 1, se A perde e B vince allora perdo la posta, mentre se le due squadre pareggiano la scommessa non è più valida e mi viene restituita la posta pagata. Nei primi due casi l'evento H si è verificato, nel terzo no.

Se l'evento condizionante H coincide con l'evento certo Ω, è chiaro che $P(E|\Omega) = P(E)$, ovvero si ritrova la probabilità non condizionata.

Segnaliamo anche che, in realtà, quando si parla di probabilità si dovrebbe sempre parlare di probabilità condizionata: anche per esempio nel caso di lancio di una moneta non truccata, se considero l'evento "testa" a cui assegno la probabilità $1/2$, si sottintende che l'evento "la moneta mostra una delle due facce" si è verificato, e che non succede che la moneta rimane invece verticale (cosa tecnicamente possibile: si pensi per esempio al lancio di una moneta su un terreno erboso per decidere la scelta di campo in una partita di calcio) o rotola in una posizione non raggiungibile. A rigore si dovrebbe dunque dire "probabilità di uscita di testa, con la condizione che la moneta non resti verticale". In una situazione come questa, nella pratica si sottintende il fatto che l'evento "la moneta mostra una delle due facce" abbia probabilità 1, o talmente vicina a 1, da poterlo considerare l'evento certo.

Esempio 3.15. Se da un mazzo di 40 carte se ne estraggono in successione due, senza rimettere la prima nel mazzo (il che equivale ad un'estrazione contemporanea delle due carte) qual è la probabilità di aver estratto due assi?

Si può ragionare nel seguente modo. Siano dati i due eventi

$H =$"la prima estratta è un asso",
$E =$"la seconda estratta è un asso".

La probabilità richiesta equivale a quella dell'evento $E \cap H$. Per calcolarla applichiamo la formula (3.14). $P(H)$ si calcola subito, combinatoriamente[21]: $P(H) = 4/40 = 1/10$. Se poi H è vero, i casi possibili e quelli favorevoli diminuiscono di uno, dunque $P(E|H) = 3/39 = 1/13$. Dunque

$$P(E \cap H) = P(H)P(E|H) = \frac{1}{10}\frac{1}{13} = \frac{1}{130}.$$

[21] Abbiamo già usato l'approccio combinatorio in diversi esempi per la valutazione della probabilità: è sottinteso che si ritiene che i casi possibili siano equiprobabili, altrimenti l'approccio non è utilizzabile.

Lo stesso risultato si poteva ottenere anche da un calcolo diretto dei casi favorevoli su quelli possibili. I primi sono le combinazioni di 4 oggetti a due a due, i secondi le combinazioni di 40 oggetti a due a due. Si ottiene

$$\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_{40}^2} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{40!}{38!\,2!}} = \frac{1}{130}.$$

Esercizio 3.11. *Si consideri un'urna contenente* 4 *palline bianche e* 6 *nere. Si estraggono successivamente, senza reimmissione,* 3 *palline. Sia* E_i, $i \in \{1,2,3\}$, *l'evento "l'*i*-esima pallina estratta è bianca". Calcolare*

1. $P(E_i)$, $i \in \{1,2,3\}$.
2. $P(E_1|E_2)$.

Risoluzione. Le probabilità $P(E_1)$, $P(E_2)$ e $P(E_3)$ sono uguali e si possono calcolare come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. I casi favorevoli si trovano pensando alle disposizioni di 3 oggetti, di cui uno (in uno dei tre posti) è una pallina bianca. Si può scegliere la pallina bianca da mettere nel posto prefissato in 4 modi diversi, restano poi due caselline da riempire e siccome ho sia palline bianche che nere a disposizione, per un totale di 9 palline, ci sono $9 \cdot 8$ possibilità. In totale $4 \cdot 9 \cdot 8 = 288$. I casi possibili sono le disposizioni di 10 oggetti a tre a tre, ovvero $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Dunque

$$P(E_i) = \frac{288}{720} = \frac{2}{5}.$$

Per rispondere alla seconda domanda calcoliamo prima $P(E_1 \cap E_2)$, ovvero la probabilità che alle prime due estrazioni esca una pallina bianca. Per la natura del problema possiamo sempre procedere combinatoriamente. Per i casi favorevoli possiamo pensare sempre a tre caselline da riempire in cui ai primi due posti possiamo scegliere due palline bianche su 4, mentre al terzo posto possiamo piazzare una delle restanti 8 palline:

$$\binom{4}{2} 8 = 48.$$

I casi possibili sono gli stessi di prima, ovvero 720. Si ha dunque

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}.$$

Se ne deduce

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{1}{6}.$$

□

Esercizio 3.12. *Ad un concorso letterario partecipano tre scrittori, che indichiamo con* A, B *e* C. *La probabilità di vincita del premio è, rispettivamente per i tre scrittori, dello* 0.40%, *dello* 0.35% *e dello* 0.25%. *Se il terzo scrittore si ritira dal concorso, calcolare le nuove probabilità di vincita dei primi due.*

Risoluzione. Indichiamo con A, B, C gli eventi "lo scrittore A (rispettivamente B, C) vince il concorso". È evidente che i tre eventi costituiscono una partizione dell'evento certo Ω. Se lo scrittore C si ritira significa che si è verificato l'evento C^c, che ha probabilità $1 - P(C) = 0.75$. Dobbiamo dunque calcolare

$P(A|C^c)$ e $P(B|C^c)$. Gli eventi $A\cap C^c$ e $B\cap C^c$ coincidono con gli eventi A e B (per rendersene facilmente conto conviene usare i diagrammi di Venn). Dunque

$$P(A|C^c)=\frac{P(A\cap C^c)}{P(C^c)}=\frac{0.40}{0.75}=0.5\overline{3}\simeq 0.53,\quad P(B|C^c)=\frac{P(B\cap C^c)}{P(C^c)}=\frac{0.35}{0.75}=0.4\overline{6}\simeq 0.47.\quad\square$$

Abbiamo visto, nell'esempio 3.14, che le ulteriori conoscenze che provengono dal verificarsi dell'evento H non modificano la probabilità di verificarsi dell'evento E, ovvero si ha $P(E|H)=P(E)$. Proviamo intanto che da qui segue anche che $P(H|E)=P(H)$. Infatti

$$P(H|E)=\frac{P(H\cap E)}{P(E)}=\frac{P(E\cap H)}{P(E)}=\frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}=\frac{P(H)P(E)}{P(E)}=P(H).$$

Dunque se il verificarsi di H non modifica la probabilità di E, il verificarsi di E non modifica la probabilità di H. Si dà allora la seguente definizione.

Definizione 3.12. *Dati due eventi E ed H se $P(E|H)=P(E)$, i due eventi si dicono* stocasticamente indipendenti *o semplicemente* indipendenti. *Se invece $P(E|H)\neq P(E)$ i due eventi si dicono* correlati *e precisamente* correlati positivamente *se $P(E|H)>P(E)$,* correlati negativamente *se $P(E|H)<P(E)$.*

Conseguenza importante dell'indipendenza di due eventi è il risultato seguente relativo alla probabilità dell'evento intersezione dei due eventi:

$$P(E\cap H)=P(E)P(H). \tag{3.15}$$

In sostanza la formula (3.15) può essere considerata come *definizione* di indipendenza (stocastica) di due eventi.

È molto importante distinguere il concetto di indipendenza da quello di incompatibilità. L'esercizio seguente rende evidente questo fatto.

Esercizio 3.13. *Se due eventi sono incompatibili e hanno probabilità maggiori di zero, provare che essi* non *sono indipendenti.*

Risoluzione. Si tratta di una semplice applicazione della formula (3.15): se E ed H sono incompatibili $P(E\cap H)=0$, e dunque non può essere $P(E\cap H)=P(E)P(H)$, in quanto $P(E)P(H)>0$. $\square$

Si tenga ben presente che, in base alla formula (3.15) l'indipendenza stocastica di due eventi è strettamente legata alla probabilità e *non* è solo una proprietà intrinseca degli eventi stessi. Chiariamo questo fatto con un esempio.

Esempio 3.16. Supponiamo di avere valutato, per l'esito della prossima partita dell'Udinese, equiprobabili i tre eventi possibili (vincita, pareggio, sconfitta), eventi che indichiamo con V, P, S. Ciascuno dei tre eventi avrà allora probabilità 1/3. Consideriamo poi gli eventi

— $A=V\cup P$, ovvero "l'Udinese vince o pareggia";
— $B=V\cup S$, ovvero "l'Udinese vince o viene sconfitto'.

Per il teorema delle probabilità totali si ha $P(A) = 2/3$ e $P(B) = 2/3$, dunque $P(A) \cdot P(B) = 4/9$. L'evento $A \cap B$ coincide con l'evento V e quindi ha probabilità $1/3$. Dunque

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B):$$

i due eventi A e B sono *dipendenti*. La cosa può apparire scontata in quanto questi due eventi hanno in comune l'evento "vincita". In effetti se calcoliamo la probabilità di $A|B$, ovvero la probabilità che l'Udinese vinca o pareggi, sapendo che può solo vincere o perdere, otteniamo $1/2$, in accordo con la formula della probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \neq P(A).$$

Supponiamo però di esaminare l'esperimento del lancio successivo di due monete, in cui conta anche l'ordine di uscita di testa o croce. Se valutiamo equiprobabili i quattro esiti possibili, ovvero TT, TC, CT e CC, ognuno di essi avrà probabilità $1/4$. Consideriamo ora nuovamente due eventi costruiti come prima, e precisamente

— $A = TT \cup TC$, ovvero "escono due teste oppure prima testa e poi croce";
— $B = TT \cup CT$, ovvero "escono due teste oppure prima croce e poi testa".

Sempre per il teorema delle probabilità totali si ha $P(A) = 1/2$ e $P(B) = 1/2$, dunque $P(A) \cdot P(B) = 1/4$. L'evento $A \cap B$ coincide con l'evento TT e quindi ha probabilità $1/4$. Dunque questa volta

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B):$$

i due eventi sono *indipendenti*, nonostante abbiano l'evento TT in comune. Anche questo risultato è in accordo con la formula della probabilità condizionata. Infatti la probabilità $P(A|B)$, ovvero la probabilità che escano due teste o prima testa e poi croce sapendo che possono solo uscire due teste oppure prima croce e poi testa è chiaramente $1/2$ e si ha

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A).$$

La differenza nei due casi è dovuta proprio alla diversa probabilità degli eventi in considerazione.

Proponiamo anche una utile riformulazione dello stesso esempio, per evidenziare ancora meglio quanto osservato, accennando solamente ai calcoli relativi.

Esempio 3.17. Consideriamo tre urne

1. la prima contenente una pallina bianca, una rossa e una nera;
2. la seconda contenente una pallina bianca, una rossa, una nera e una gialla;
3. la terza contenente una pallina bianca, una rossa, una nera, una gialla e una verde.

Indichiamo con B l'evento "estrazione di una pallina Bianca", con R ed N, gli analoghi con i colori rosso e nero. Le probabilità $P(B)$, $P(R)$ e $P(N)$ sono diverse per le tre urne. Precisamente si ha:

1. $P(B) = P(R) = P(N) = 1/3$ per la prima urna;
2. $P(B) = P(R) = P(N) = 1/4$ per la seconda urna;
3. $P(B) = P(R) = P(N) = 1/5$ per la terza urna.

Consideriamo poi gli eventi $E = B \cup N$ e $F = B \cup R$ e osserviamo che $E \cap F = B$ e quindi $P(E \cap F) = P(B)$. Per le tre urne, tenendo conto che B, R ed N sono incompatibili, si ha poi:

1. $P(E) = P(F) = 2/3 \quad \Rightarrow \quad P(E) \cdot P(F) = 4/9 \neq P(E \cap F)$;
2. $P(E) = P(F) = 2/4 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad P(E) \cdot P(F) = 1/4 = P(E \cap F)$;
3. $P(E) = P(F) = 2/5 \quad \Rightarrow \quad P(E) \cdot P(F) = 4/25 \neq P(E \cap F)$.

Quindi nel caso della prima e terza urna gli eventi non sono stocasticamente indipendenti, nel caso della seconda urna si, e ancora una volta ciò è legato al fatto che le probabilità degli eventi in considerazione sono diverse.

Anche in presenza di probabilità condizionate si può porre il problema della coerenza nelle assegnazioni di probabilità. Vediamo alcuni esercizi in proposito.

Esercizio 3.14. *Dati due eventi E ed H, stabilire se è coerente la seguente valutazione complessiva di probabilità:*

$$P(E \cap H^c) = 0.4, \quad P(H) = 0.2, \quad P(E|H) = 0.7.$$

(*Prova di Matematica, ISIA Roma,* 14/06/2007)

Risoluzione. I costituenti sono i seguenti.

— $E \cap H = I_1$.
— $E^c \cap H = I_2$.
— $E \cap H^c = I_3$.
— $E^c \cap H^c = I_4$.

Teniamo ora conto che

$$P(E \cap H) = P(H) \cdot P(E|H) = 0.2 \cdot 0.7 = 0.14, \quad \text{e che} \quad H = I_1 \cup I_2.$$

Con il solito significato dei simboli otteniamo il seguente sistema di condizioni per le probabilità dei costituenti.

$$\begin{cases} x_1 = 0.14 \\ x_3 = 0.4 \\ x_1 + x_2 = 0.2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases} .$$

Dalla terza equazione otteniamo subito $x_2 = 0.06$ e dalla quarta $x_4 = 0.4$: l'assegnazione è coerente. □

Esercizio 3.15. *Dati tre eventi A, E, H, con $E \subseteq A$, $E \subseteq H$, H e A indipendenti, valutare se la seguente valutazione complessiva di probabilità è coerente.*

$$P(E) = 0.2, \quad P(E \cap H) = 0.12, \quad P(E|H) = 0.3, \quad P(E \cap A) = 0.06, \quad P(E|A) = 0.3.$$

(*Simile alla Prova di Matematica, ISIA Roma,* 17/06/2010)

Risoluzione. Si ha, intanto,

$$P(E\cap H)=P(H)\cdot P(E|H),\quad \text{ovvero}\quad 0.12=P(H),0.3,\quad \text{da cui}\quad P(H)=0.4,$$

e analogamente

$$P(E\cap A)=P(A)\cdot P(E|A),\quad \text{ovvero}\quad 0.06=P(A),0.3,\quad \text{da cui}\quad P(A)=0.2.$$

Poiché A ed H sono indipendenti ne segue che

$$P(A\cap H)=P(A)\cdot P(H)=0.08.$$

Dobbiamo ora tenere conto che $E\subseteq A$ ed anche $E\subseteq H$, da cui $E\subseteq A\cap H$. Per la monotonia della probabilità dunque $P(E)\le P(A\cap H)$ e questo è in contrasto con l'assegnazione $P(E)=0.2$. La valutazione non è coerente. □

Osservazione 3.13. È utile osservare che, fissato H, la funzione che esprime la probabilità condizionata $P(E|H)$ è una distribuzione di probabilità, cioè è una funzione che associa ad ogni evento E un numero reale verificante gli assiomi tipici della probabilità. Verifichiamolo come utile esercizio.

1. Poiché $E\cap H\subseteq H$, si ha $P(E\cap H)\le P(H)$ e quindi
$$0\le\frac{P(E\cap H)}{P(H)}\le 1,$$
ovvero vale la (3.7).
2. $P(\emptyset|H)=\dfrac{P(\emptyset\cap H)}{P(H)}=\dfrac{P(\emptyset)}{P(H)}=0,\quad P(\Omega|H)=\dfrac{P(\Omega\cap H)}{P(H)}=\dfrac{P(H)}{P(H)}=1$, in conformità con la proprietà (3.8).
3. Se A e B sono due eventi incompatibili si ha
$$P\big((A\cup B)|H\big)=\frac{P\big((A\cup B)\cap H\big)}{P(H)}=\frac{P(A\cap H)+P(B\cap H)}{P(H)}=P(A|H)+P(B|H),$$
che esprime la proprietà additiva contenuta nella (3.9). Si noti che abbiamo usato la proprietà distributiva dell'unione rispetto al prodotto e il fatto che se A e B sono incompatibili, anche $A\cap H$ e $B\cap H$ lo sono.

3.9. Il teorema di Bayes

Riprendiamo in esame le formule (3.14) che riscriviamo per comodità:

$$P(E\cap H)=P(H)P(E|H),\quad P(H\cap E)=P(E)P(H|E).$$

Tenendo conto che $P(E\cap H)=P(H\cap E)$ deduciamo che

$$P(H)P(E|H)=P(E)P(H|E),$$

ovvero, se $P(E) > 0$,

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}. \tag{3.16}$$

Se teniamo ora conto che possiamo scrivere E come unione di due eventi disgiunti

$$E = E \cap \Omega = E \cap (H \cup H^c) = (E \cap H) \cup (E \cap H^c),$$

possiamo concludere che

$$P(E) = P(E \cap H) + P(E \cap H^c) = P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c). \tag{3.17}$$

La formula (3.16) assume la forma

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)}. \tag{3.18}$$

La (3.18) costituisce un caso particolare di un importante risultato del calcolo delle probabilità, noto come *Teorema di Bayes*.

Prima di dare la formulazione completa e l'interpretazione di questo teorema ne vediamo l'applicazione al problema della valutazione della probabilità relativa all'esperimento di estrazione di una moneta da una scatola con nove monete normali e una truccata, trattato nella pagina 35. Se indichiamo con H l'evento "esce la moneta con due teste", abbiamo già detto che la probabilità iniziale di questo evento è $1/10$. Abbiamo poi lanciato sei volte in aria la moneta estratta, ottenendo sei volte testa e ci eravamo chiesti come questo poteva modificare la probabilità inzialmente attribuita all'evento H. Indichiamo per questo con E l'evento "lanciando 6 volte la moneta estratta si ottiene sempre testa". Il problema è di valutare $P(H|E)$. La formula (3.18) può risolvere questo problema. Infatti già conosciamo $P(H) = 1/10$. L'evento $E|H$ è l'evento "esce 6 volte testa sapendo che è uscita la moneta con due teste" e dunque è l'evento certo, ovvero $P(E|H) = 1$. Per l'evento H^c si ha, facilmente, $P(H^c) = 1 - P(H) = 9/10$. Rimane da valutare la probabilità dell'evento $E|H^c$, ovvero "esce 6 volte testa sapendo che non è uscita la moneta truccata". Possiamo valutare questa probabilità combinatoriamente. Per i casi possibili si tratta di contare le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti (T e C) a 6 a 6, che sono in numero di $2^6 = 64$. C'è un solo caso favorevole (ovvero quello corrispondente a $TTTTTT$): la probabilità è $1/64$. Sostituendo questi numeri nella (3.18) si ottiene

$$P(H|E) = \frac{\frac{1}{10}1}{\frac{1}{10}1 + \frac{9}{10}\frac{1}{64}} = \frac{64}{73}.$$

La probabilità che la moneta estratta sia quella bacata è valutabile ora con un numero molto più alto che non quello iniziale di appena 0.1, come era logico attendersi. Si noti come questo valore di $64/73$ non sia facilmente ottenibile come una pura valutazione combinatoria o frequentista.

Riprendiamo nuovamente in esame la formula (3.16) e supponiamo di considerare, anziché un solo evento H, un insieme $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ di eventi che costituiscano una *partizione* dell'evento certo Ω. Si ha, per ogni H_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{P(E)}. \tag{3.19}$$

Si ha poi

$$E = E \cap \Omega = E \cap (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n) = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \cdots \cup (E \cap H_n),$$

ove gli insiemi dell'ultimo membro sono a due a due disgiunti. Dunque

$$P(E) = P\big((E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \cdots \cup (E \cap H_n)\big) = P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \cdots + P(E \cap H_n).$$

Quindi

$$P(E) = P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2) + \cdots + P(H_n)P(E|H_n). \tag{3.20}$$

La (3.20) si chiama anche formula di *disintegrazione*, in quanto spezza, disintegra, la probabilità di un evento nella somma delle probabilità di eventi a due a due incompatibili.

Utilizzando la (3.20) la (3.19) si scrive

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2) + \cdots + P(H_n)P(E|H_n)}, \tag{3.21}$$

formula che costituisce il *Teorema di Bayes*[22], fondamentale per la statistica moderna.

Per capire il senso di questo risultato cominciamo a considerare un esempio.

Esempio 3.18. Consideriamo due urne A e B di composizione nota: A contiene una pallina rossa e due palline bianche, B tre palline rosse e una nera. Si sceglie a caso un'urna dalla quale si estrae una pallina che risulta essere rossa. Si chiede qual è la probabilità che provenga dalla prima urna.

Diciamo H_1 l'evento "scelta della prima urna", H_2 l'evento "scelta della seconda urna". H_1 e H_2 sono disgiunti e esauriscono le possibilità di scelta delle urne, ovvero la loro unione è l'evento certo. Indichiamo poi con E l'evento "estrazione di una pallina rossa". Siamo dunque nella situazione prevista dalla (3.21): quella che dobbiamo valutare è proprio la probabilità dell'evento $H_1|E$, ovvero "scelta della prima urna, condizionata dall'uscita di una pallina rossa, ovvero dal verificarsi dell'evento E". Scriviamo la formula (3.21), applicata a questo caso:

$$P(H_1|E) = \frac{P(H_1)P(E|H_1)}{P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2)}.$$

Poiché $H_2 = H_1^c$ questa formula coincide con il caso particolare rappresentato dalla (3.18). Si ha

1. $P(H_1) =$ probabilità di scelta della prima urna: $1/2$;
2. $P(H_2) =$ probabilità di scelta della seconda urna: $1/2$;
3. $P(E|H_1) =$ probabilità che, avendo scelto la prima urna, la pallina estratta sia rossa: $1/3$;
4. $P(E|H_2) =$ probabilità che, avendo scelto la seconda urna, la pallina estratta sia rossa: $3/4$.

[22] Thomas Bayes (1702-1761), ministro presbiteriano britannico e matematico, formulò questo teorema, senza peraltro mai pubblicare il risultato. Il suo amico Richard Price lo scoprì tra le sue carte dopo la morte di Bayes nel 1761 e lo pubblicò. Tuttavia inizialmente questa pubblicazione rimase quasi sconosciuta, e Laplace ottenne per altra via un risultato simile, pubblicato nel 1774. Successivamente, anche a seguito di un viaggio di Price a Parigi, al lavoro di Bayes fu attribuito il giusto risalto.

Si ottiene

$$P(H_1|E) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}} = \frac{4}{13}.$$

Il calcolo di $P(H_2|E)$ è altrettanto immediato e si ottiene

$$P(H_2|E) = \frac{P(H_2)P(E|H_2)}{P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}} = \frac{9}{13}.$$

Come prevedibile

$$P(H_1|E) + P(H_2|E) = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1.$$

Possiamo riformulare l'esempio appena considerato con le seguenti parole: se l'evento E (estrazione di una pallina rossa) si è verificato, esso può essere stato *causato* o dalla scelta della prima urna o dalla scelta della seconda urna. La probabilità cercata si può pensare come la probabilità che la *causa* sia stata la scelta della prima anziché della seconda urna.

Questo esempio giustifica la terminologia comunemente adottata in relazione al teorema di Bayes, spesso citato come teorema sulla *probabilità delle cause* o anche *test di ipotesi*. Se E è un evento, e ciascuno degli eventi della partizione finita dell'evento certo costituita da $\{ H_1, H_2, \dots, H_n \}$ può essere considerato come una spiegazione o causa dell'evento E, la formula (3.21), fornisce la probabilità che la causa sia proprio l'evento H_i, $i \in \{ 1, 2, \dots, n \}$, note le probabilità $P(H_i)$ degli H_i e le probabilità condizionate $P(E|H_i)$. Viene spesso usata la seguente nomenclatura, che comunque non è condivisa da tutti: le $P(H_i)$ sono dette *probabilità a priori* (delle varie cause), le probabilità $P(E|H_i)$ sono dette *verosimiglianze*, mentre il risultato dell'applicazione della formula, ovvero $P(H_i|E)$ è detto *probabilità a posteriori* (della causa H_i). In molte situazioni le probabilità a priori e le verosimiglianze sono ricavate da dati statistici.

Vediamo un'applicazione tipica in campo medico.

Esempio 3.19. Un paziente presenta febbre altissima (l'evento E è "avere febbre altissima"). Il medico sa, per la sua esperienza e le statistiche note, che questo sintomo può essere causato da sole tre malattie H_1, H_2, H_3, e la letteratura gli fornisce le verosimiglianze per ciascuna, ovvero le probabilità che la febbre altissima sia causata da ciascuna di queste tre malattie:

$$P(E|H_1) = 0.80, \quad P(E|H_2) = 0.20, \quad P(E|H_3) = 0.30.$$

Se si fermasse a questi dati il medico dovrebbe curare in primis il paziente per la malattia H_1, decisamente più probabile, in presenza di quel sintomo. In realtà egli deve anche tenere in debito conto le probabilità di ciascuna di queste malattie, valutando il luogo in cui vive il paziente, la rarità delle varie malattie, l'incidenza delle stesse in base all'età o allo stile di vita del paziente, ecc. Supponiamo che questa valutazione porti il medico alle seguenti conclusioni

$$P(H_1) = 0.04, \quad P(H_2) = 0.70, \quad P(H_3) = 0.26.$$

Si tenga conto che gli H_1 sono una partizione dell'evento certo e quindi la somma delle loro probabilità (probabilità a priori) deve essere 1.

Con questi dati il medico è in grado di valutare la probabilità (a posteriori) delle varie malattie come causa del sintomo manifestato. Si ha:

1. $P(H_1)P(E|H_1) = 0.04 \times 0.80 = 0.032$;
2. $P(H_2)P(E|H_2) = 0.70 \times 0.20 = 0.140$;
3. $P(H_3)P(E|H_3) = 0.26 \times 0.30 = 0.078$.

Dunque
$$P(H_1|E) = 0.128, \quad P(H_2|E) = 0.560, \quad P(H_3|E) = 0.312.$$

Ancora una volta notiamo che, come deve essere, la somma delle tre probabilità è 1. In conclusione il medico comincerà a prescrivere una cura per la malattia H_2, nonostante fosse la più rara delle tre.

Notiamo che, anche se nella pratica il medico di base non fa in dettaglio questi calcoli, è proprio questo il modo di procedere che egli adotta, prendendo innanzitutto atto del sintomo manifestato e successivamente valutando tutti gli altri dati (anche in un colloquio con il paziente) atti a fornirgli le verosimiglianze e le probabilità a priori delle varie cause.

Qualche esercizio chiarirà ulteriormente il significato e la modalità d'uso della formula di Bayes.

Esercizio 3.16. *Da un'indagine su* 1000 *persone si sa che* 420 *posseggono il tipo di automobile A,* 500 *posseggono il tipo di automobile B, le restanti non posseggono automobili. Si sa che il* 10% *delle persone che posseggono l'auto A hanno anche una motocicletta, il* 70% *di quelle che hanno l'auto B hanno anche una motocicletta, l'*80% *di chi non ha l'auto possiede una motocicletta. Se una persona, estratta a caso, non ha la moto, determinare la probabilità che non abbia neppure l'auto.*

Risoluzione. Sia E l'evento "non possedere la moto". Indichiamo con H_1, H_2 e H_3 gli eventi "possedere l'auto A", "possedere l'auto B" e "non possedere automobili", rispettivamente. I dati del problema ci permettono di valutare che
$$P(H_1) = 0.42, \quad P(H_2) = 0.50, \quad P(H_3) = 0.08.$$

Sempre dai dati del problema possiamo valutare le seguenti probabilità condizionate
$$P(E|H_1) = 0.9, \quad P(E|H_2) = 0.3, \quad P(E|H_3) = 0.2.$$

La probabilità richiesta è allora data da
$$P(H_3|E) = \frac{P(H_3)P(E|H_3)}{P(H_1)P(E|H_1) + P(H_2)P(E|H_2) + P(H_3)P(E|H_3)} = \\ = \frac{0.08 \times 0.2}{0.42 \times 0.9 + 0.50 \times 0.3 + 0.08 \times 0.2} = 0.0294. \quad \square$$

Esercizio 3.17. *Un test per stabilire la presenza di una certa malattia ha un'affidabilità del* 97% *sia per i malati che per i sani. Se solo lo* 0.3% *della popolazione soffre di questa malattia, si calcoli la probabilità che una persona negativa al test sia effettivamente malata.* (*Prova di Matematica, ISIA Roma,* 14/06/2007)

Risoluzione. Innanzitutto osserviamo che dire che il test ha un'affidabilità del 97% sia per i malati che per i sani significa che se il test ha esito positivo c'è il 97% di probabilità di essere malato e il 3% di probabilità di essere sano, se il test ha esito negativo, il 3% di probabilità di essere malato e il 97% di probabilità di essere sano.

Indichiamo con E l'evento "il test ha esito negativo" e con H l'evento "il paziente è malato". Si ha

1. $P(H) = 0.003$: probabilità a priori di essere malato;
2. $P(H^c) = 0.997$: probabilità a priori di essere sano;
3. $P(E|H) = 0.03$: probabilità che il testo dia esito negativo, sapendo di essere malato;
4. $P(E|H^c) = 0.97$: probabilità che il test dia esito negativo, sapendo di essere sano.

La probabilità richiesta è allora $P(H|E)$, ovvero la probabilità di essere malato sapendo che il test ha dato esito negativo e, in base al teorema di Bayes, si trova

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{0.003 \times 0.03}{0.003 \times 0.03 + 0.997 \times 0.97} = 0.000093. \qquad \square$$

Esercizio 3.18. *In una scuola sono presenti tre aule informatica. A causa di un guasto elettrico nell'aula A il* 50% *dei computer si è rotto, nell'aula B solo l'*1%, *nell'aula C il* 10%. *Il tecnico contattato per risolvere i problemi riceve l'istruzione di cominciare dalla sala dove c'è il maggior numero di danni, ma il personale presente non è in grado di fornirgli l'informazione necessaria. Scelta un'aula a caso, il tecnico accende un computer e lo trova guasto. Qual è la probabilità di avere cominciato dall'aula giusta?*

Risoluzione. Sia E l'evento "il computer acceso non funziona", A l'evento "è l'aula A" e analogamente B e C con ovvio significato. Si ha

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3},$$

in quanto l'aula è scelta a caso. Si ha poi, dai dati del problema,

$$P(E|A) = 0.5, \quad P(E|B) = 0.01, \quad P(E|C) = 0.10.$$

Per il teorema di Bayes si ha allora

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C)} \simeq 0.82. \qquad \square$$

4. Numeri aleatori e loro previsione

Per questo credo che la ricerca sui gradi di probabilità sia estremamente importante. Così, quando non si potesse decidere con assoluta certezza una questione, si potrebbe almeno determinare il grado di probabilità alla luce dell'evidenza.
Gottfried Wilhelm von Leibniz, (1646-1716)

4.1. Numeri aleatori semplici

Introduciamo questo importante concetto proponendo alcuni esempi.

Esempio 4.1. Consideriamo l'esperimento del lancio di due dadi non truccati e i possibili esiti che sappiamo essere 36. La somma dei numeri delle due facce è un numero naturale n con $2 \le n \le 12$. Indichiamo con E_i l'evento il cui verificarsi determina l'uscita del numero i come somma delle facce. Indicando gli esiti con coppie ordinate, si ha

$$E_2 = \{(1,1)\}, \quad E_3 = \{(1,2),(2,1)\}, \quad E_4 = \{(3,1),(2,2),(1,3)\}, \ldots$$

Ogni numero naturale compreso tra 2 e 12 risulta essere univocamente associato a uno di questi eventi. Possiamo dunque pensare ad una funzione definita su questa famiglia di eventi e a valori nell'insieme dei numeri reali (anche se qui i valori possibili sono solo numeri naturali). Chiamiamo, come è tradizione, X questa funzione; avremo dunque

$$X(E_2) = 2, \quad X(E_3) = 3, \quad \ldots, \quad X(E_{12}) = 12.$$

L'insieme dei numeri ottenuti come somma delle due facce dei dadi può essere considerato come l'insieme dei "bersagli colpiti" dalla funzione X: questo insieme, che è un sottoinsieme del codominio della funzione, si chiama *insieme immagine* della funzione[1] e si indica con $\mathrm{Im}(X)$.

Poiché questi eventi hanno una probabilità di verificarsi (che possiamo valutare combinatoriamente, vista l'ipotesi che i dadi non siano truccati e che quindi tutti gli esiti siano equiprobabili), possiamo anche assegnare la stessa probabilità ai numeri corrispondenti agli eventi tramite la funzione X. Abitualmente si rappresenta tutta questa situazione in una tabella in cui si mettono sulla prima riga i valori di $\mathrm{Im}(X)$ e sulla seconda riga i corrispondenti valori della probabilità dell'evento corrispondente.

$\mathrm{Im}(X)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

[1]Ricordiamo che dati due insiemi A e B e una funzione f di A in B, abbiamo chiamato A *dominio* della funzione e B *codominio* della funzione. La denominazione di *insieme immagine* della funzione, invece, l'abbiamo riservata a quel sottoinsieme del codominio costituito dai "bersagli colpiti almeno una volta". Tuttavia ci preme segnalare che questa nomenclatura, seppure sia la più diffusa, non è universale e molti autori usano il nome codominio per indicare l'insieme immagine, mentre per l'insieme B usano semplicemente la denominazione "insieme di arrivo", o altre simili.

Notiamo che gli eventi E_i, in questo esempio, costituiscono una partizione dell'evento certo Ω e quindi la somma delle loro probabilità è 1, come si può controllare per calcolo diretto: sarà questa la situazione per noi più comune, anche se potremo considerare casi più complessi.

La funzione X si chiama *numero aleatorio semplice*, o *variabile casuale (semplice)*, ove l'aggettivo "semplice" (quasi sempre sottinteso) è usato per evidenziare il fatto che l'insieme degli eventi che costituiscono il dominio di X è finito. In seguito considereremo, seppure brevemente, situazioni in cui questa limitazione viene rimossa.

Può sembrare strano il fatto che per la "funzione" X venga utilizzata la nomenclatura di "numero aleatorio" o "variabile casuale". In realtà, come vedremo, quello che interessa nelle applicazioni è proprio il contenuto della tabella sopra riportata, ovvero il legame tra i valori di $\mathrm{Im}(X)$ e la relativa probabilità. Questo legame è esso stesso una funzione che si chiama *distribuzione di probabilità* del numero aleatorio, in analogia al concetto che abbiamo già introdotto nella pagina 52. Dunque i valori di $\mathrm{Im}(X)$ diventano le variabili di questa funzione.

Tradizionalmente in una tabella come quella sopra riportata si scrive direttamente X al posto di $\mathrm{Im}(X)$ e si indicano con x_i gli elementi di X, cioè di $\mathrm{Im}(X)$. Per indicare la probabilità corrispondente al generico valore x_i, ovvero la probabilità dell'evento E_i tale che $X(E_i) = x_i$, si scrive

$$P(X = x_i).$$

Ha interesse la rappresentazione grafica in un piano cartesiano di questa distribuzione di probabilità in cui si pongono sull'asse delle ascisse i valori x_i e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori $P(X = x_i)$. Si otterrà un grafico a punti come quello della figura 4.1.

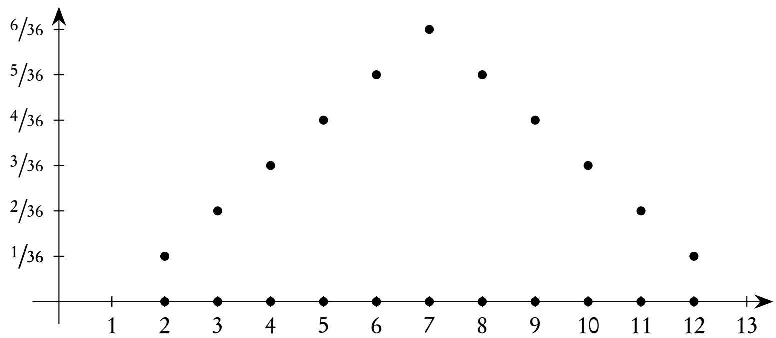


Figura 4.1.: *Distribuzione di probabilità dell'esempio* 4.1

Spesso, anziché rappresentare i punti del dominio e i corrispondenti punti del grafico cartesiano, si preferisce congiungere con un segmento i valori sull'asse delle ascisse con i corrispondenti punti del grafico cartesiano, ottenendo quello che si chiama un *grafico a canne*, come si può vedere nella figura 4.2.

Altre volte si usa un istogramma, disegnando, per ogni valore di x_i un rettangolo di base opportuna (e di solito tale da impedire la sovrapposizione dei rettangoli), centrata sui valori x_i, e di altezza $P(X = x_i)$, come nella figura 4.3.

Se introduciamo gli indicatori degli eventi E_i, possiamo scrivere il numero aleatorio X nella seguente forma compatta:

$$X = 2|E_2| + 3|E_3| + 4|E_4| + 5|E_5| + 6|E_6| + 7|E_7| + 8|E_8| + 9|E_9| + 10|E_{10}| + 11|E_{11}| + 12|E_{12}|.$$

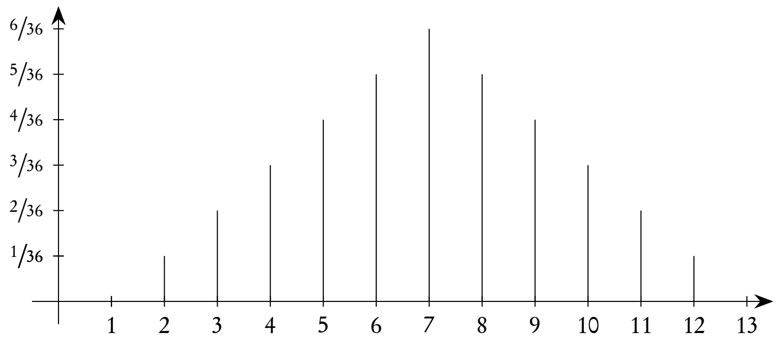


Figura 4.2.: *Distribuzione di probabilità dell'esempio 4.1, grafico a canne*

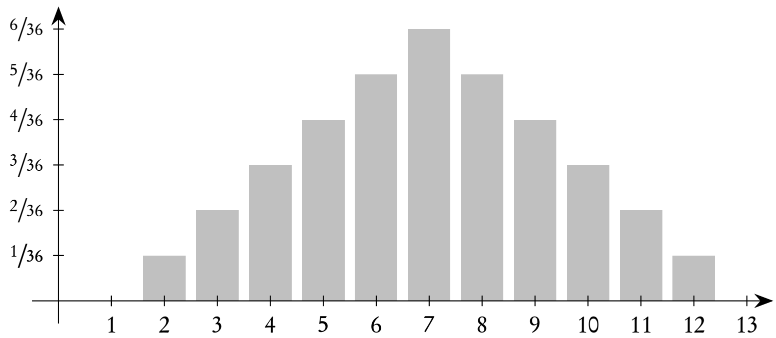


Figura 4.3.: *Distribuzione di probabilità dell'esempio 4.1, istogramma a barre*

Siccome gli eventi E_i costituiscono una partizione dell'evento certo, uno e uno solo di essi si presenterà, cioè uno e uno solo degli $|E_i|$ avrà valore 1, mentre tutti gli altri avranno valore 0, e dunque si ritrovano i valori di X (meglio sarebbe dire di $\mathrm{Im}(X)$) già considerati. In considerazione del fatto che gli E_i sono una partizione dell'evento certo, la scrittura considerata per il numero aleatorio si chiama scrittura in *forma canonica*

Esempio 4.2. Consideriamo l'esperimento del lancio di una moneta per due volte in successione e consideriamo i tre eventi $E_1 =$ "uscita di due croci", $E_2 =$ "uscita di una testa e una croce", $E_3=$ "uscita di due teste". A ciascuno di questi eventi associamo il numero aleatorio ottenuto moltiplicando il numero di teste per 100. Avremo la situazione rappresentata nella seguente tabella, dove abbiamo scritto X al posto di $\mathrm{Im}(X)$.

X	0	100	200
P	$1/4$	$2/4$	$1/4$

La scrittura compatta del numero aletaorio è

$$X = 0|E_1| + 100|E_2| + 200|E_3|.$$

Esempio 4.3. Consideriamo il prezzo unitario di un certo prodotto e le sue variazioni in un mese (di 30 giorni), supponendo di avere verificato che il prezzo ha avuto i seguenti valori per il numero di giorni indicati, nel mese in esame.

Prezzo	4.20	4.90	5.10	5.40
Numero giorni	5	12	3	10

.

Possiamo calcolare la frequenza relativa di ciascuno di questi prezzi, dividendo il numero di giorni per 30 e interpretarla come probabilità (frequentista) di questi prezzi. Avremo dunque un numero aleatorio rappresentato dalla seguente tabella

Prezzo	4.20	4.90	5.10	5.40
P	1/6	2/5	1/10	1/3

.

Esempio 4.4. Supponiamo di avere comprato due biglietti di una certa lotteria, in cui sono previsti 3 premi rispettivamente di 10000, 1000 e 100 euro. Indichiamo con A l'evento "vincita del primo premio", con B l'evento "vincita del secondo premio", con C l'evento "vincita del terzo premio". Possiamo considerare il numero aleatorio X così definito:

$$X = 10000|A| + 1000|B| + 100|C|.$$

È chiaro che questi eventi non costituiscono una partizione dell'evento certo: posso tranquillamente vincere due dei tre premi (cioè due degli eventi possono essere contemporaneamente veri) e posso anche non vincere nessun premio (cioè non è detto che uno degli eventi si verifichi). I valori possibili di questo numero aleatorio sono dunque

$$\operatorname{Im}(X) = \{ 10000, 1000, 100, 11000, 10100, 1100, 0 \},$$

e le probabilità dipendono dal numero di biglietti venduti.

Questo numero aleatorio non è scritto in forma canonica, ma si potrebbe riscriverlo in forma canonica, considerando gli eventi costituenti. Come sappiamo, con tre eventi i costituenti sono al massimo 8; in questo caso l'evento $A \cap B \cap C$ è vuoto perché con due biglietti è escluso che possa vincere i tre premi: restano 7 costituenti, e sono proprio 7 i valori possibili del numero aleatorio.

I costituenti sono i seguenti.

— $A \cap B^c \cap C^c = I_1$: "vinco solo il primo premio";
— $A^c \cap B \cap C^c = I_2$: "vinco solo il secondo premio";
— $A^c \cap B^c \cap C = I_3$: "vinco solo il terzo premio";
— $A \cap B \cap C^c = I_4$: "vinco il primo e il secondo premio";
— $A \cap B^c \cap C = I_5$: "vinco il primo e il terzo premio";
— $A^c \cap B \cap C = I_6$: "vinco il secondo e il terzo premio";
— $A^c \cap B^c \cap C^c = I_7$: "non vinco nessun premio".

Il numero aleatorio si può riscrivere in forma canonica come segue.

$$X = 10000|I_1| + 1000|I_2| + 100|I_3| + 11000|I_4| + 10100|I_5| + 1100|I_6| + 0|I_7|.$$

È chiaro che riscrivendolo in forma canonica possiamo facilmente pensare al numero aleatorio come ad una funzione definita su eventi e a valori nell'insieme dei numeri reali: ad ogni evento della partizione risulta associato un ben determinato numero reale, ovvero il numero che appare come coefficiente dell'indicatore nella scrittura del numero aleatorio stesso.

Possiamo ora dare una definizione formale.

Definizione 4.1 (Numero aleatorio semplice). *Dati n eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$, e n numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si chiama* numero aleatorio semplice *il numero X così definito*

$$X = x_1|E_1| + x_2|E_2| + \cdots + x_n|E_n|. \tag{4.1}$$

Se gli eventi E_i costituiscono una partizione dell'evento certo Ω, il numero definito dalla (4.1) si dice in forma canonica.

Nel caso generale i valori possibili per X sono le somme di alcuni (anche tutti) i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, incluso il numero 0, se nessuno degli eventi si verifica. Nel caso di numero espresso in forma canonica i valori possibili per X sono solo gli n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e il numero aleatorio si può pensare come una funzione definita sull'insieme degli eventi E_i e a valori in $\mathbb{R}$.

In termini intuitivi possiamo dire che un numero aleatorio è un numero di cui si conoscono i possibili valori, ma non quale valore esso assumerà esattamente, in quanto questo valore è legato al risultato di un esperimento casuale.

Se non diversamente precisato, i numeri aleatori saranno considerati sempre in forma canonica.

Se ad ogni evento E_i abbiamo assegnato una probabilità $P(E_i)$, possiamo assegnare questa probabilità anche ai valori x_i del numero stesso: per questo motivo abitualmente invece di scrivere $P(E_i)$ si scrive $P(X = x_i)$ e si legge "probabilità che X assuma il valore x_i". Quando i numeri in considerazione saranno in forma canonica, la somma di tutte le probabilità sarà 1. La funzione che ad ogni x_i associa la probabilità $P(E_i) = P(X = x_i)$ si chiama *distribuzione di probabilità*.

Nelle applicazioni in pratica si usa identificare il numero stesso (cioè la funzione) con l'insieme dei suoi valori[2] e quello che ha interesse è proprio la distribuzione di probabilità, per la quale si usano grafici come quelli proposti nell'esempio 4.1.

Osserviamo che, dato un evento E, si ha

$$|E| = 1|E| + 0|E^c|, \tag{4.2}$$

ovvero l'indicatore di un evento è un numero aleatorio semplice a due soli valori 1 e 0, scritto in forma canonica.

Prima di passare alla definizione di *previsione* di un numero aleatorio richiamiamo brevemente i concetti di *media aritmetica* e di *media aritmetica pesata*. Dati n numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si chiama media aritmetica (semplice) degli stessi il numero

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{4.3}$$

Se nei numeri di cui si deve calcolare la media ci sono parecchie ripetizioni, si può introdurre il concetto di *frequenza* di ciascun numero, che è esattamente il numero di ripetizioni, e modificare (solo nella forma, non nella sostanza) la scrittura della (4.3), per renderla più semplice. Per esempio se dobbiamo

[2] Questa identificazione è, in realtà, una "violenza al rigore", in quanto non è lecito identificare una funzione con l'insieme dei valori che essa può assumere, tuttavia nel caso in esame è utile e viene comunemente adottata.

calcolare la media dei numeri $2,5,7$, distribuiti in modo che il 2 capiti 5 volte (ovvero abbia frequenza 5 e scriveremo $f_1 = 5$), il 5 capiti 8 volte ($f_2 = 8$) e il 7 una volta ($f_3 = 1$), per la media otteniamo la formula

$$\overline{x} = \frac{5 \times 2 + 8 \times 5 + 1 \times 7}{5 + 8 + 1} = \frac{47}{14} \simeq 4.07.$$

La media scritta in questo modo si chiama media pesata, anche se, come già osservato, si tratta solo di una modifica di forma, non di significato. In generale si ha

$$\overline{x}_{\mathsf{P}} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}. \tag{4.4}$$

Il concetto di media pesata diventa particolarmente significativo invece se i numeri di cui si vuole calcolare la media non hanno tutti la stessa importanza: in questo caso si indicano con $p_1, p_2, \dots, p_n$ i "pesi" dei singoli numeri e la formula (4.4) assume la forma

$$\overline{x}_{\mathsf{P}} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \tag{4.5}$$

Se per esempio uno studente ha avuto 4, 6 e 7 come valutazioni in tre compiti in classe e il terzo voto, per qualche motivo, ha un'importanza doppia degli altri due, la media aritmetica più logica di questi voti è

$$\frac{4 + 6 + 2 \times 7}{4} = 6 \quad \text{(studente promosso)},$$

mentre una semplice media aritmetica avrebbe dato come valore

$$\frac{4 + 6 + 7}{3} = 5.\overline{6} \quad \text{(promozione incerta)}.$$

Possiamo ora dare la seguente definizione.

Definizione 4.2. *Dato un numero aleatorio X, definito dalla* (4.1), *si chiama* previsione *o anche* valore atteso *o ancora* speranza matematica, *il numero seguente:*

$$\mathbb{P}(X) = x_1 P(E_1) + x_2 P(E_2) + \cdots + x_n P(E_n), \tag{4.6}$$

dove $P(E_i)$ è la probabilità dell'evento E_i.

Se il numero aleatorio è dato in forma canonica la somma delle probabilità degli eventi che definiscono il numero aleatorio è 1 e quindi la (4.6) non esprime altro che la *media pesata* dei possibili valori del numero aleatorio, con pesi uguali alla probabilità. Come vedremo sugli esercizi, la cosa rimane vera anche se il numero non è dato in forma canonica.

Osserviamo innanzitutto che se X è il numero aleatorio dato dall'indicatore di un evento E si ha, vedi la (4.2),

$$\mathbb{P}(X) = P(E) + 0\,P(E^c) = P(E),$$

ovvero la previsione si riduce alla probabilità dell'evento. Questa osservazione è importante perché ci fornisce indicazioni sul significato della previsione di un numero aleatorio. Ricordiamo infatti che la probabilità di un evento è la somma che sono disposto a scommettere per ricevere un importo 1 se l'evento si verifica, un importo 0 se non si verifica: in questo caso, visto che la previsione è proprio la probabilità, possiamo dire che la previsione è la somma che sono disposto a pagare per ricevere il numero aleatorio $X = |E|$. Ma la cosa si può estendere anche al caso di un numero aleatorio più complesso. Consideriamo per esempio un numero aleatorio costruito con due eventi E_1 ed E_2:

$$X = x_1|E_1| + x_2|E_2|.$$

Consideriamo poi una scommessa, coerente, combinata sui due eventi. Notiamo che $x_1P(E_1)$ è la somma da pagare per ricevere l'importo x_1 se risulta vero E_1, e analogo per $x_2P(E_2)$. Dunque $x_1P(E_1)+x_2P(E_2)$, cioè $\mathbb{P}(X)$, è la somma da pagare per ricevere l'importo X, a seconda delle combinazioni dei valori di verità di E_1 ed E_2.

Esercizio 4.1. *Dati 3 eventi A, B, C, con A e C incompatibili e $B \subset C$, verificare che la valutazione di probabilità*

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.3, \quad P(C) = 0.5$$

è coerente. Detto poi X il numero aleatorio

$$X = |A| - 2|B| + 3|C|,$$

calcolarne i possibili valori, la forma canonica e la previsione, sia utilizzando la forma data che la forma canonica.

Risoluzione. Con riferimento alla figura 4.4, si verifica facilmente la coerenza e i seguenti valori per le probabilità dei 4 costituenti.

$$P(I_1) = 0.3, \quad P(I_2) = 0.2, \quad P(I_3) = 0.4, \quad P(I_4) = 0.1.$$

Tenendo conto che per eventi incompatibili l'indicatore di un evento è la somma degli indicatori dei due eventi (vedi l'esercizio 3.2), otteniamo

$$X = |I_3| - 2|I_1| + 3(|I_1| + I_2|) = |I_1| + 3|I_2| + |I_3| + 0|I_4|.$$

Da qui si deduce che i possibili valori sono allora $\{0, 1, 3\}$.

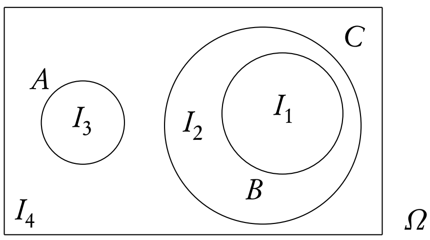


Figura 4.4.: *Costituenti per l'esercizio 4.1*

Calcoliamo la previsione di X, sia usando l'espressione data nel testo che la sua forma canonica.

$$\mathbb{P}(X) = 1\times 0.4 - 2\times 0.3 + 3\times 0.5 = 1.3, \quad \mathbb{P}(X) = 1\times 0.3 + 3\times 0.2 + 1\times 0.4 + 0\times 0.1 = 1.3.$$

La seconda forma rende evidente il fatto che si tratta di una media pesata, in quanto

$$0.3 + 0.2 + 0.4 + 0.1 = 1,$$

ovvero che la somma dei pesi è proprio 1, per cui può essere tralasciata nel denominatore. □

Esercizio 4.2. *Siano dati tre eventi A, B, C, con A e C incompatibili. Valutare se la seguente assegnazione di probabilità*

$$P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.4, \quad P(C) = 0.4, \quad P(A\cap B) = 0.1, \quad P(B\cap C) = 0.1$$

è coerente. Detto poi X il numero aleatorio

$$X = |A| + 2|B| + 3|C|$$

calcolarne i possibili valori e la previsione, sia utilizzando la forma data che la forma canonica.

Risoluzione. Con riferimento alla figura 4.5 si verifica facilmente la coerenza e i seguenti valori per le probabilità dei 6 costituenti.

$$P(I_1) = 0.1, \quad P(I_2) = 0.1, \quad P(I_3) = 0.3, \quad P(I_4) = 0.2, \quad P(I_5) = 0.2, \quad P(I_6) = 0.1.$$

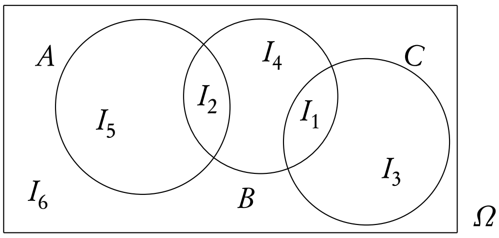


Figura 4.5.: *Costituenti per l'esercizio 4.2*

Si ha poi

$$|A| = |I_2| + |I_5|, \quad |B| = |I_1| + |I_2| + |I_4|, \quad |C| = |I_1| + |I_3|.$$

Il numero aleatorio X si può riscrivere nella forma

$$X = 1(|I_2| + |I_5|) + 2(|I_1| + |I_2| + |I_4|) + 3(|I_1| + |I_3|) = 5|I_1| + 3|I_2| + 3|I_3| + 2|I_4| + 1|I_5| + 0|I_6|.$$

I valori possibili per X sono allora $\{0, 1, 2, 3, 5\}$ e per la previsione si ha

$$\mathbb{P}(X) = 1\times 0.3 + 2\times 0.4 + 3\times 0.4 = 5\times 0.1 + 3\times 0.2 + 3\times 0.3 + 2\times 0.2 + 1\times 0.5 + 0\times 0.1 = 2.3.$$

Come previsto si ottiene lo stesso risultato nei due modi di calcolare la previsione. □

La previsione di un numero casuale, cioè sostanzialmente la media pesata dei valori possibili del numero stesso, è un valore che, in un certo senso, "sintetizza" il numero casuale stesso, come normalmente succede per la media di una serie di numeri. Tuttavia, nelle applicazioni, non è sufficiente la conoscenza di questo valore per sintetizzare efficacemente il numero stesso. Facciamo un esempio concreto per chiarire il problema. Se in una classe di 10 studenti i voti di un compito sono stati 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8, 9, 10, la media è 5.5; se 5 studenti hanno avuto 4 e 5 studenti hanno avuto 7, la media è ancora 5.5, ma la situazione è completamente diversa. Il numero 5.5 da solo, pur significativo, non fornisce informazioni sufficienti sulla "distribuzione" dei voti.

Per giungere all'introduzione di un ulteriore indice che qualifichi un numero aleatorio, diamo la definizione di *scarto dalla media*.

Definizione 4.3. *Dato il numero aleatorio X definito da*

$$X = x_1|E_1| + x_2|E_2| + \cdots + x_n|E_n|$$

e posto $M = \mathbb{P}(X)$, si chiamano scarti *dei valori x_i del numero aleatorio dalla media le quantità*

$$x_i - M. \tag{4.7}$$

Queste quantità precisano quanto un valore del numero aleatorio è distante dalla previsione dello stesso; inoltre se lo scarto è positivo il valore x_i è superiore alla media, se lo scarto è negativo il valore x_i è inferiore alla media.

Questi scarti sono a loro volta dei numeri casuali e ne potremmo considerare la media (sempre pesata usando come pesi le probabilità): si otterrebbe però sempre il valore 0, come si può provare considerando ad esempio un numero X determinato da due soli eventi ed espresso in forma canonica: $X = x_1|E_1|+x_2|E_2|$. Posto $M = \mathbb{P}(X)$, per la media degli scarti si ottiene, tenendo conto che $P(E_1)+P(E_2) = 1$:

$$(x_1 - M)P(E_1) + (x_2 - M)P(E_2) = [x_1P(E_1) + x_2P(E_2)] - M[P(E_1) + P(E_2)] = M - M \cdot 1 = 0$$

Per questo si usa considerare o la *varianza* o lo *scarto quadratico medio*, che risultano sufficienti in molte questioni e di cui ora daremo la definizione.

Definizione 4.4. *Dato il numero aleatorio X definito da*

$$X = x_1|E_1| + x_2|E_2| + \cdots + x_n|E_n|$$

e posto $M = \mathbb{P}(X)$, si chiama varianza *di X il numero*

$$\mathrm{var}(X) = (x_1 - M)^2P(E_1) + (x_2 - M)^2P(E_2) + \cdots + (x_n - M)^2P(E_n), \tag{4.8}$$

ovvero la previsione (media) del numero aleatorio

$$Y = (x_1 - M)^2|E_1| + (x_2 - M)^2|E_2| + \cdots + (x_n - M)^2|E_n|.$$

Si chiama scarto quadratico medio, *o anche* deviazione standard, *e si indica con σ_X, la radice quadrata della varianza*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}. \tag{4.9}$$

In conseguenza della formula (4.9) la varianza si indica anche con $\sigma^2(X)$.

Esempio 4.5. Si considerino due numeri casuali X e Y, dati in forma canonica ed espressi dalle seguenti tabelle.

X	9	12	15	18	21
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

,

Y	3	9	15	21	27
P	0.15	0.2	0.3	0.2	0.15

.

È facile verificare che

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 15,$$

mentre

$$\sigma(X) \simeq 3.3, \quad \sigma(Y) \simeq 7.6.$$

Il maggior valore di $\sigma(Y)$ rispetto a $\sigma(X)$, indica che i valori del numero aleatorio Y sono più "dispersi" rispetto a quelli del numero X.

4.2. Il modello Bernoulliano

Nelle applicazioni ricorrono frequentemente alcune situazioni, per le quali dunque è utile fare uno studio particolare. Tra queste accenniamo alla *distribuzione binomiale* o di *Bernoulli*, detta anche modello delle prove ripetute.

Immaginiamo di ripetere un certo numero n (abitualmente molto grande) di volte un esperimento che possa avere solo due esiti, che chiameremo *successo* e *insuccesso*. Come esempio possiamo considerare il lancio di un dado, in cui il successo sia dato dall'uscita del 6, l'insuccesso dall'uscita di un altro numero, oppure il lancio di una moneta in cui il successo sia l'uscita di testa e l'insuccesso l'uscita di croce. Il successo ha una certa probabilità, che indicheremo con p, l'insuccesso ha naturalmente la probabilità residua, cioè $q = 1 - p$. Con questo tipo di esperimento si può costruire il numero casuale che fornisce il numero di successi su un totale di n ripetizioni. Naturalmente si deve ritenere che le n ripetizioni siano indipendenti ed equiprobabili.

Formalmente, detto E_i l'evento "successo alla prova i-esima", vogliamo studiare il seguente numero casuale:

$$X = |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_n|, \tag{4.10}$$

nell'ipotesi che $P(E_i) = p$, per tutte le n prove e che $P(E_i|E_j) = P(E_i)$, cioè che l'esito della prova j non influenzi l'esito della prova i, cioè che gli eventi siano stocasticamente indipendenti. Questo numero casuale è detto *distribuzione binomiale* o di *Bernoulli*.

I valori di questo numero casuale sono $0, 1, 2, \dots, n$: si ottiene 0 se tutti gli E_i sono falsi, n se tutti sono veri. Questo numero casuale non è dato in forma canonica (ovviamente gli E_i non sono incompatibili: se fossero incompatibili non potrebbero essere indipendenti). Noi siamo interessati alla probabilità di ciascun valore, diciamolo k, con $0 \leq k \leq n$, del numero casuale, ovvero alla probabilità(3) $P(X = k)$. Per determinare questa probabilità, cioè la probabilità di k successi su n prove, dobbiamo esaminare come si realizza l'evento che porta al valore k del numero stesso. In proposito vale il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare.

[3]Attenzione a non confondere questa probabilità con la probabilità degli E_i che come già detto, è costantemente uguale a p.

Teorema 4.5. *Detto X il numero casuale "numero di successi su n prove indipendenti ed equiprobabili", la probabilità che il successo, che ha probabilità p su una prova, si presenti k ($\leq n$) volte è data da*

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \tag{4.11}$$

dove $q=1-p$ è la probabilità di insuccesso.

È chiaro che la somma di tutte le probabilità con k che va da 0 a n deve essere 1, e in effetti si può provare che è così.

Con riferimento al lancio di una moneta (non truccata) in cui il successo è l'uscita di testa, si ha, ovviamente, $p={}^1\!/_2=q$. Se ripetiamo il lancio 6 volte possiamo costruire la seguente tabella della funzione distribuzione di probabilità.

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$1/64$	$6/64$	$15/64$	$20/64$	$15/64$	$6/64$	$1/64$

Da qui si possono trarre alcune ulteriori informazioni. Per esempio la probabilità di ottenere almeno 4 successi è $P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)={}^{11}\!/_{32}$.

Per la distribuzione bernoulliana si può dimostrare che

$$\mathbb{P}(X)=np,\quad \sigma^2(X)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}. \tag{4.12}$$

Con riferimento all'esempio del lancio di un dado non truccato in cui il successo è l'uscita del 6, si ha $p={}^1\!/_6$ e quindi per esempio la media dell'uscita del 6 su 1200 lanci è $200=1200\cdot{}^1\!/_6=200$.

Poiché il numero n è in genere, nelle applicazioni, molto grande, il calcolo del coefficiente binomiale che compare nella formula (4.11) non è sempre agevole. Tuttavia in moltissime questioni interessano solo il valore medio (o la previsione) del numero aleatorio e lo scarto quadratico medio che si possono calcolare agevolmente.

Esempio 4.6. Se una macchina produce giornalmente 300 pezzi di cui il 2% difettosi, la media (o previsione) e lo scarto quadratico medio del numero di pezzi difettosi in una giornata sono

$$\mathbb{P}(X)=300\times 0.02=6,\quad \sigma(X)=\sqrt{300\times 0.002\times 0.98}\simeq 2.4.$$

Esempio 4.7. Determinare la probabilità che su 12 lanci di una moneta non truccata si ottengano esattamente 8 teste.

Si tratta di un esperimento tipo Bernoulli, con $n=12$, $p=q=1/2$, dunque

$$P(X=8)=\binom{12}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\simeq 0.121.$$

Esempio 4.8. Un tiratore colpisce un bersaglio 2 volte su 10. Qual è la probabilità che su 8 tiri colpisca esattamente 2 volte il bersaglio? E quella che lo colpisca almeno due volte?

Si tratta ancora una volta di un esperimento alla Bernoulli, con $p=0.2$, $q=0.8$ e $n=8$. Dunque

$$P(X=2)=\binom{8}{2}\cdot 0,2^2\cdot 0.8^6\simeq 0.29.$$

Per rispondere alla seconda domanda conviene calcolare $P(X=0)$ e $P(X=1)$ e poi usare la regola dell'evento contrario. Si ha

$$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0.8^8\simeq 0.17,\quad P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0.8^7\simeq 0.34.$$

Dunque

$$P(X\geq 2)=1-(0.17+0.34)=0.49.$$

4.3. Numeri aleatori discreti

Abbiamo finora considerato numeri aleatori semplici: essi possono essere sempre scritti nella forma compatta

$$X=\sum_{i=1}^{n}x_i|E_i|.$$

Questi numeri aleatori sono determinati da un insieme finito di eventi e possono essere sempre rappresentati in forma canonica, cioè con lo stesso tipo di scrittura, ma con gli eventi E_1 che costituiscono una partizione dell'evento certo. Si possono considerare anche numeri aleatori discreti non semplici, ma collegati ad un'infinità numerabile di eventi, nel qual caso si ritiene sempre che gli eventi costituiscano una partizione dell'evento certo. Potremo ancora scrivere

$$X=x_1|E_1|+x_2|E_2|+\cdots+x_n|E_n|+\ldots,$$

ma questa volta il numero di addendi è infinito. In realtà non ci sono problemi a fare questa somma, perché siccome gli eventi sono a due a due incompatibili, solo uno di essi al massimo ha indicatore non nullo e quindi la somma scritta ha solo formalmente infiniti addendi, in realtà ne ha al massimo uno (o addirittura nessuno se tutti gli eventi sono falsi).

Il problema dell'infinità di eventi si presenta però quando vogliamo calcolare la previsione di X. Con un numero aleatorio semplice avevamo un somma finita di addendi del tipo $x_iP(E_i)$ e non c'era alcun problema, ora potremmo anche avere una somma infinita di addendi di questo tipo, somma che si chiama *serie*: non avendo però trattato questo argomento nel nostro corso, rinunciamo a trattare questo tipo di numeri aleatori. Proponiamo solo un esempio per mostrare come il problema abbia comunque senso: infatti avendo a che fare con somme di infiniti addendi, spesso tutti positivi, potrebbe venire il sospetto che queste abbiano sempre valore infinito e che quindi non si possa nemmeno parlare di previsione di numeri aleatori di questo tipo.

Esempio 4.9. Sia X la variabile casuale che rappresenta il numero di lanci di un dado fino alla prima uscita del numero 6. Indichiamo con

- $E_1=$ "il 6 esce per la prima volta al primo lancio";
- $E_2=$ "il 6 esce per la prima volta al secondo lancio";
- ecc.

Si ha allora

$$X=1|E_1|+2|E_2|+3|E_3|+\ldots$$

Si ha poi

— $P(E_1) = \frac{1}{6}$ (una faccia su 6);

— $P(E_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$ (non è uscito il 6 al primo lancio e valuto la probabilità al secondo lancio);

— $P(E_3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$ (non è uscito il 6 né al primo lancio né al secondo e valuto la probabilità al terzo lancio);

— $P(E_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$ (non è uscito il 6 né al primo lancio, né al secondo, né al terzo e valuto la probabilità al quarto lancio);

— …

Per calcolare $\mathbb{P}(X)$ devo dunque calcolare

$$\mathbb{P}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \cdots = \frac{1}{6}\left(1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots\right).$$

Ora, per quanto strano possa sembrare, la somma degli infiniti addendi entro parentesi vale 36: dunque $\mathbb{P}(X) = 6$, ovvero entro 6 lanci dovrei ottenere il numero 6, cosa che appare[(4)] assolutamente ragionevole.

Per rendersi intuitivamente conto di come la somma di infiniti addendi positivi possa non "esplodere", si può osservare che il centesimo addendo della somma sarebbe circa

$$2.4 \times 10^{-7}$$

e il millesimo addirittura

$$1.4 \times 10^{-77},$$

ossia valori che, al crescere di n, decrescono in maniera decisamente rapida.

4.4. Numeri aleatori continui

Una ulteriore difficoltà si ha quando si vogliono considerare numeri aleatori che possano assumere tutti i valori compresi in un intervallo di numeri reali, o addirittura tutti i valori reali.

Per esempio se abbiamo un cilindro di ferro che fa da perno ad una ruota, l'usura del cilindro dopo un certo intervallo di tempo può avere un qualunque valore compreso tra poco più di 0 mm e qualche millimetro, per esempio 3 mm. Anche in questo caso si può parlare di numero aleatorio, perché, pur essendo definito l'insieme dei valori dell'usura del perno (il *range* dei valori), siamo in condizioni di incertezza sul valore effettivamente assunto o che prenderà l'usura stessa. Non ha però senso assegnare ad ogni valore del range una probabilità: non ha senso discriminare fra due diversi valori mediante gradi di fiducia, in quanto i valori stessi sono "troppo numerosi" e se riuscissimo a dare dei valori, la somma sarebbe certamente molto più grande di 1. Qui la situazione è completamente diversa rispetto ai

[4] Attenzione. Questo non significa che dopo 6 lanci sicuramente il 6 sarà uscito: potrebbe essere necessario aspettare anche migliaia di lanci!

numeri aleatori discreti non semplici: in quel caso si trattava si di una somma di infiniti addendi, ma la cardinalità dell'insieme degli addendi era *numerabile*, ora invece è la cardinalità del continuo, ovvero un numero decisamente intrattabile.

Riprendendo l'esempio dell'usura del cilindro non avrà alcun senso assegnare la probabilità che l'usura del cilindro sia esattamente 1.2 mm, o meglio dovremo assegnare il valore 0 a questa probabilità, mentre potrà avere un senso ben preciso l'assegnazione di una probabilità maggiore di 0 al fatto che l'usura sia compresa, per esempio, tra 1.15 e 1.25 mm, ovvero abbia dei valori appartenenti ad un intervallo intorno al numero 1.2. Poiché può succedere che questa probabilità per un intervallo intorno ad un certo numero sia completamente diversa da quella che si può avere intorno ad un altro numero, anche se con la stessa ampiezza di intervallo, abbiamo bisogno di un nuovo strumento per misurare quantitativamente questa differenza di comportamento. Una definizione rigorosa richiederebbe il concetto di limite, che esula dal contesto di questo corso. Possiamo però fare ugualmente una considerazione intuitiva, ma operativamente efficace.

Fissato un numero x nell'intervallo di valori che il numero aleatorio può assumere, consideriamo un intervallo di ampiezza h circondante il numero x stesso, intervallo che chiamiamo $I_{x,h}$: possiamo allora assegnare una probabilità all'intervallo di valori di ampiezza h, probabilità che possiamo indicare come $P(X \in I_{x,h})$. Il rapporto tra questa probabilità e l'ampiezza dell'intervallo è una densità e, se immaginiamo che il valore di h sia "infinitamente piccolo", possiamo associare questa densità al numero x: la chiameremo *densità di probabilita* del numero aleatorio X, in corrispondenza al valore x di X. Si tratta di una funzione, a valori positivi, che ha come dominio l'insieme dei valori possibili del numero aleatorio e che possiamo indicare, come al solito, con f.

Osservazione 4.6. Poiché la funzione f è ottenuta da un rapporto in cui il denominatore è "infinitamente piccolo", potrebbe venire il sospetto che questo rapporto diventi "infinitamente grande". Bisogna però tenere conto del fatto che anche il numeratore della frazione diventa infinitamente piccolo: si tratta del rapporto tra due quantità che "tendono a 0". Chi conosce la teoria dei limiti sa che questa situazione è perfettamente trattabile e può tranquillamente produrre un risultato "finito". Per tutti gli altri proponiamo un semplice esempio numerico che giustifichi, senza alcuna pretesa di rigore, questa affermazione. Consideriamo il rapporto tra le quantità $2^x - 1$ e x: al "tendere a zero di x" entrambe tendono a zero. Calcoliamo poi il loro rapporto per diversi valori di x sempre più vicini a 0 e riportiamo i risultati in una tabella.

$2^x - 1$	x	$(2^x - 1)/x$
1	1	1
0,071773462536293	0,1	0,717734625362931
0,006955550056719	0,01	0,695555005671888
0,000693387462581	0,001	0,693387462580741
0,000069317120376	0,0001	0,693171203764997
0,000006931495828	0,00001	0,693149582819963
0,000000693147421	0,000001	0,693147420793849
0,000000069314720	0,0000001	0,693147204078315
0,000000006931472	0,00000001	0,693147184094300

Come si evince dall'ultima colonna della tabella, all'avvicinarsi di x a 0 i valori del rapporto si stabilizzano vicino al valore 0.6931471806, che è, fino alla 10ª cifra decimale, il valore calcolabile con la teoria dei limiti.

Se, a partire da $f(x)$, vogliamo riottenere la probabilità che l'usura sia compresa nell'intervallo $I_{x,h}$, basterà moltiplicare $f(x)$ per h. Possiamo rappresentare in un grafico cartesiano la situazione: sull'asse delle ascisse i valori che può assumere X e sull'asse delle ordinate i valori di f, come nel caso dei numeri aleatori semplici, solo che allora sull'asse delle ordinate avevamo proprio i valori delle probabilità. Vediamo la situazione in corrispondenza a un dato valore di x, per esempio 1.2, e supponiamo che $f(x) = 0.3$. La probabilità di ottenere un valore compreso nell'intervallo $I_{1.2,h}$ è l'area evidenziata in grigio nella figura 4.6, dove si deve intendere che la base h del rettangolo sia "infinitamente piccola".

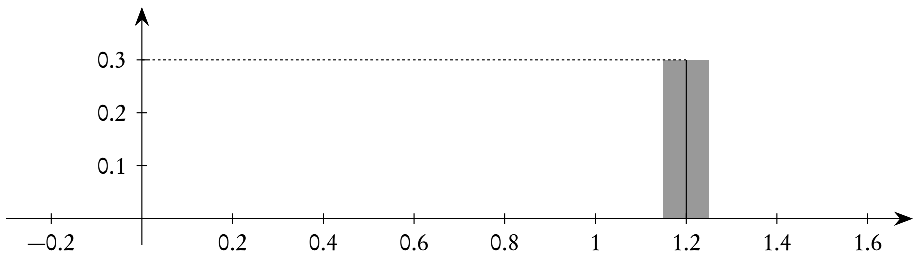


Figura 4.6.: *Probabilità e densità di probabilità per un numero aleatorio continuo, nell'intorno di un punto*

Se vogliamo avere la probabilità in corrispondenza a un insieme di valori possibili per X, disegnata l'intera funzione $f(x)$, basterà che consideriamo l'unione di tanti rettangoli di base "infinitamente piccola" centrati sui vari punti x e che sommiamo le aree di questi rettangoli: si otterrà l'area racchiusa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle x, nel tratto di valori di X in esame. Si veda la figura 4.7, dove è evidenziata la probabilità di ottenere un valore di usura compresa tra 0.4 e 1.6.

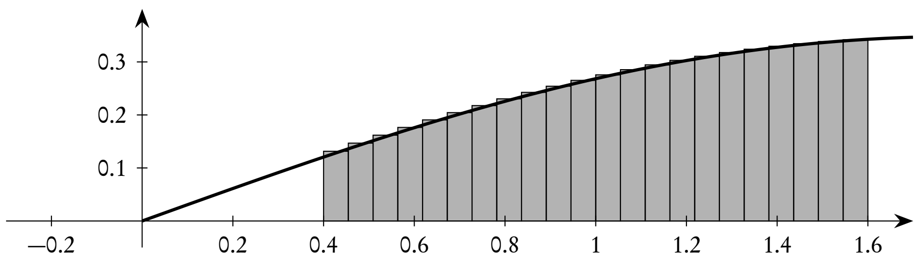


Figura 4.7.: *Probabilità e densità di probabilità per un numero aleatorio continuo, in un intervallo*

Chi conosce il calcolo integrale riconoscerà chiaramente in questa figura il procedimento che porta al calcolo di un integrale definito.

È chiaro che l'area totale racchiusa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse, nel tratto individuato dal dominio, rappresenta la probabilità dell'evento certo e quindi deve valere 1.

Possiamo concludere che in generale la densità di probabilità è una funzione che ha come dominio l'insieme di tutti i valori del numero aleatorio in considerazione, che assume solo valori positivi e, condizione essenziale, tale che l'area racchiusa tra il suo grafico e l'asse delle ascisse, nel tratto individuato dal dominio, valga 1, in quanto tale area rappresenta la probabilità dell'evento certo Ω.

In una variabile di questo tipo la probabilità di ciascuno dei valori del numero aleatorio è 0, mentre la probabilità che il numero aleatorio abbia valori compresi in un determinato intervallo è data dall'area racchiusa tra il grafico della funzione densità di probabilità e l'asse delle ascisse, in corrispondenza all'intervallo di valori in considerazione.

Anche per numeri aleatori continui si può parlare di previsione, o media, estendendo in maniera opportuna la definizione che abbiamo dato per i numeri aleatori discreti. Tuttavia, viste le limitazioni del nostro corso, non ne daremo una definizione formale. Nel caso della curva normale, di cui ci occuperemo brevemente, la media suddivide la curva di densità in due parti simmetriche una rispetto all'altra.

4.5. La curva normale

Nel caso dei numeri aleatori continui la situazione che si incontra più frequentemente nella applicazioni è quella della cosiddetta *curva normale* o *gaussiana*, dal nome del famoso matematico tedesco Carl Friedrich Gauss, di cui abbiamo già parlato in nota nella pagina 4, che la usò estesamente, anche se essa fu proposta la prima volta da Abraham de Moivre (1667-1754) nel 1733.

Questa curva è formalmente definita dalla seguente formula

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}, \tag{4.13}$$

dove m è la media, cioè la previsione, e σ lo scarto quadratico medio. Tuttavia in questa breve introduzione saremo solo interessati ad alcune proprietà "grafiche" di questa curva. In particolare ci interesseranno le caratteristiche seguenti.

1. La curva ha un andamento "a campana", come quello rappresentato nella figura 4.8.

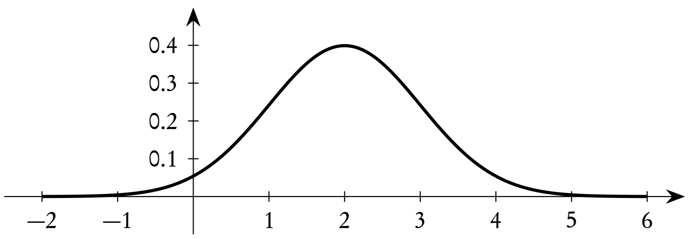


Figura 4.8.: *Esempio di curva normale*

2. La curva è simmetrica rispetto alla retta verticale $x = m$ e ha un massimo in corrispondenza di $x = m$ (m è la media o previsione della variabile casuale).
3. La curva è tanto più "stretta" e quindi con un massimo tanto più alto, quanto più σ è piccolo. Si veda la figura 4.9, dove sono rappresentate tre situazioni con $\sigma = 1, 2, 3$ rispettivamente.
4. La regione compresa tra $m - \sigma$ e $m + \sigma$, vedi la figura 4.10, ha un'area di 0.6826, ovvero la probabilità che un numero casuale con distribuzione gaussiana stia in questo intervallo è del 68.26%.
5. La regione compresa tra $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$, vedi la figura 4.10, ha un'area di 0.9544, ovvero la probabilità che un numero casuale con distribuzione gaussiana stia in questo intervallo è del 95.44%.

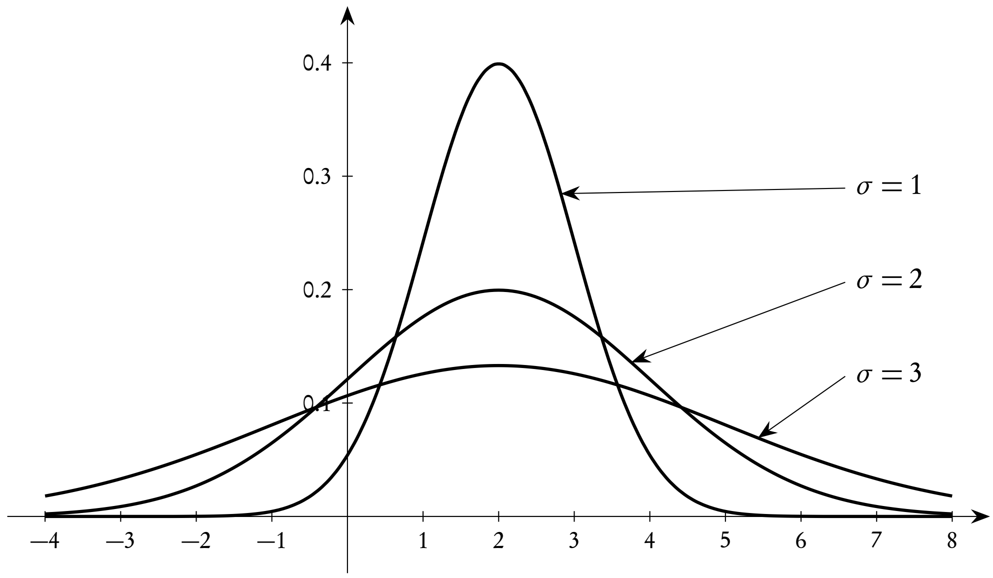


Figura 4.9.: *Curve normali con diversi valori di σ*

6. La regione compresa tra $m - 3\sigma$ e $m + 3\sigma$, vedi la figura 4.10, ha un'area di 0.9974, ovvero la probabilità che un numero casuale con distribuzione gaussiana stia in questo intervallo è del 99.74%.
7. Se s e d sono due punti simmetrici rispetto al valore medio, uno a destra e uno a sinistra, le regioni precedenti s e seguenti d si chiamano *code*. Come conseguenza del punto precedente possiamo concludere che la probabilità che un numero casuale con distribuzione gaussiana capiti in una delle due code distanti almeno 3 volte σ dalla media è dello 0.13%.
8. Le code distanti almeno 4 volte dalla media hanno area praticamente nulla, ovvero la probabilità che un numero casuale con distribuzione gaussiana stia in questo intervallo è praticamente 0.

Per uno studio accurato delle proprietà della curva normale e per sfruttarne le caratteristiche è necessario l'uso del calcolo integrale e di apposite tabelle standard. Tuttavia le poche informazioni che abbiamo fornito sono già sufficienti a trarre conclusioni in alcuni casi di interesse pratico.

Esempio 4.10. Le altezze di un gruppo di 600 persone hanno una distribuzione gaussiana. La media è risultata di 172 cm con uno scarto quadratico medio di 5 cm. Si chiede quante persone hanno un'altezza compresa tra 162 cm e 182 cm e quante invece hanno un'altezza maggiore di 187 cm.

Poiché 162 e 182 distano 10 dalla media, l'intervallo richiesto è tra $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$. Dunque le persone che hanno una statura compresa in questo intervallo sono il 95.44% del totale, ovvero

$$600 \times 0.9544 = 572.64 \simeq 573.$$

Il numero di persone con un'altezza superiore a 187 cm è dato dal numero di altezze che distano dalla media oltre 3σ, ovvero lo 0.13%

$$600 \times 0.0013 = 0.78 \simeq 1.$$

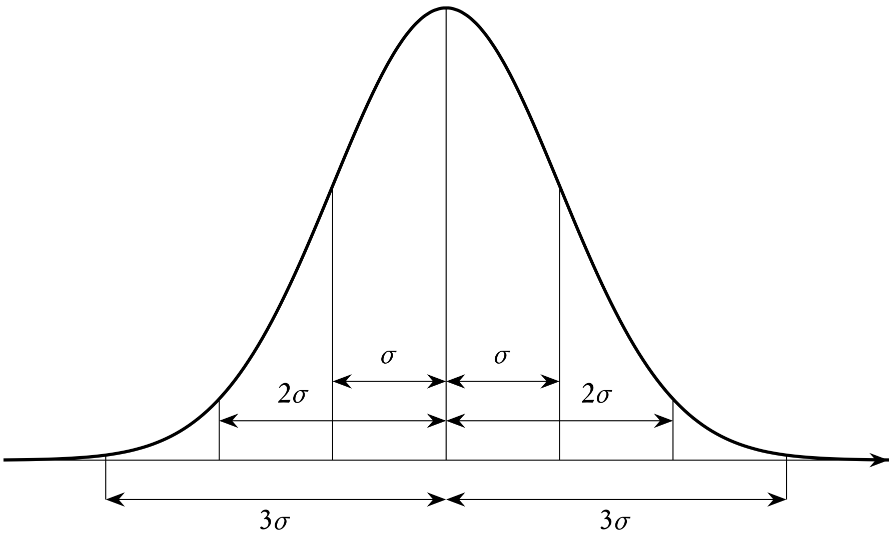


Figura 4.10.: *Proprietà della curva normale*

Se, nell'esempio appena trattato, avessimo voluto calcolare altri valori, per esempio il numero di persone con un'altezza compresa tra 184 e 186 centimetri, avremmo dovuto calcolare l'area di una opportuna regione piana: tutti i testi di probabilità e statistica propongono apposite tavole per questo calcolo, che non è possibile fare direttamente nemmeno facendo uso del calcolo integrale, a causa della forma della funzione di densità. Proponiamo, a titolo esemplificativo, un'estratto di una di queste tabelle, vedi la tabella 4.1, relativo alla funzione di valore medio 1, ovvero con $\sigma = 1$.

z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\mathcal{A}$	0.0398	0.0793	0.1179	0.1554	0.1915	0.2257	0.2580	0.2881	0.3159	0.3413
z	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$\mathcal{A}$	0.3643	0.3849	0.4032	0.4192	0.4332	0.4452	0.4554	0.4641	0.4713	0.4772
z	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$\mathcal{A}$	0.4821	0.4861	0.4893	0.4918	0.4938	0.4953	0.4965	0.4974	0.4981	0.4987
z	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
$\mathcal{A}$	0.4990	0.4993	0.4995	0.4997	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.500	0.500

Tabella 4.1.: *Aree sotto la curva normale di scarto quadratico medio* 1

Nella prima riga è riportata l'ampiezza, che abbiamo indicato con z secondo la tradizione, dell'intervallo che inizia dal valore m (che varia a seconda del tipo di funzione densità) e termina quindi nel valore $m + z$, limitandoci ai valori con una sola cifra decimale esatta; nella seconda riga sono riportate le aree delle corrispondenti regioni, ovvero le probabilità che il numero aleatorio abbia un valore compreso tra m e $m + z$. Nel caso di una densità di probabilità con $\sigma \neq 1$, basterà moltiplicare z per σ, per avere l'ampiezza richiesta. Tenendo conto della simmetria della densità di probabilità rispetto alla media, si possono dedurre le aree di interesse, sempre con l'approssimazione indicata. Tabelle più complete propongono approssimazioni con molte più cifre decimali esatte.

Ritornando all'esempio 4.10 poiché $0.2\sigma = 1\,\mathrm{cm}$ e $0.6\sigma = 3\,\mathrm{cm}$, se volessimo calcolare il numero di persone che ha un'altezza compresa tra $172-1=171$ e $172+3=175$ centimetri, basterebbe usare la tabella per dedurre che l'area, ovvero la probabilità è 0.0793, sulla sinistra di m e 0.2257 sulla destra di m, per un totale di 0.305: il numero di persone richiesto è

$$600 \times 0.305 = 183.$$

Come è evidente, i valori relativi alle regioni di semiampiezza σ, 2σ, 3σ che abbiamo riportato sopra sono proprio desunti da questa tabella.

Non insistiamo oltre su questo argomento, piuttosto segnaliamo che questo tipo di densità di probabilità è caratteristico dei più svariati fenomeni naturali, anzi l'appellativo "normale" che viene usato per riferirvisi è proprio legato al fatto che essa trova applicazioni in numerosissimi fenomeni fisici, biologici, ecc., come per esempio l'altezza delle persone in un determinato campione di popolazione (situazione che abbiamo trattato nell'esempio 4.10), la distribuzione degli errori[5] in un esperimento di misure ripetute di una data grandezza, la distribuzione di un dato marker in pazienti affetti da una malattia, e così via.

[5] Questo è forse l'uso più noto, tanto che spesso questa distribuzione è chiamata *distribuzione degli errori*.

5. Qualche applicazione

La teoria delle probabilità è in fondo soltanto senso comune ridotto a calcolo.
Pierre Simon Laplace, 1812

In questo capitolo proponiamo alcune applicazioni spesso ritenute *paradossali*[1] del calcolo delle probabilità. In realtà il fatto che la risoluzione dei problemi che tratteremo sia ritenuta paradossale è dovuta all'applicazione di schemi concettuali inadeguati ad un corretto approccio dei problemi stessi.

5.1. Il problema del compleanno

Il problema si può così formulare: *In una classe di n studenti, di cui nessuno nato il 29 febbraio, qual è la probabilità che due studenti siano nati lo stesso giorno dell'anno?*

Supponiamo naturalmente che $n \le 365$, altrimenti la risposta è certamente 1. Indichiamo con p_n la probabilità cercata e calcoliamola usando il calcolo combinatorio. In questo, come in molti altri problemi di probabilità, è più agevole calcolare la probabilità contraria, ovvero la probabilità che non ci siano due studenti nati lo stesso giorno.

Cominciamo a considerare il caso di $n = 2$: ci sono 365 giorni in cui può essere nato il primo studente e 364 giorni diversi in cui può essere nato il secondo. In totale ci sono 365^2 coppie di giorni e dunque la probabilità contraria risulta (casi favorevoli su casi possibili)

$$\frac{365 \times 364}{365^2} = \frac{364}{365} = \frac{364 \cdot 363!}{365 \cdot 363!} = \frac{364!}{365^{2-1} \cdot (365-2)!} \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - \frac{364!}{365^{2-1} \cdot (365-2)!}.$$

Con $n = 3$ si ha, in modo sostanzialmente identico,

$$\frac{365 \times 364 \times 363}{365^3} = \frac{364!}{365^{3-1} \cdot (365-3)!} \quad \Rightarrow \quad p_3 = 1 - \frac{364!}{365^{3-1} \cdot (365-3)!}.$$

In generale avremo

$$p_n = 1 - \frac{364!}{365^{n-1} \cdot (365-n)!}.$$

[1] Il termine paradosso deriva dal greco $\pi\alpha\varrho\alpha$ (contro) e $\delta o\xi\alpha$ (opinione) e indica una proposizione che appare inaccettabile perché in contrasto con un'opinione comune.

Usando un software di calcolo (potente, perché deve trattare fattoriali molto grandi!) si può provare a fare il calcolo con diversi valori di n. Si ottiene quanto segue.

n	p_n	n	p_n
2	0.00274	19	0.37912
3	0.00820	20	0.41144
4	0.01636	21	0.44369
5	0.02714	22	0.47570
6	0.04046	23	0.50730
7	0.05624	24	0.53834
8	0.07434	25	0.56870
9	0.09462	26	0.59824
10	0.11695	27	0.62686
11	0.14114	28	0.65446
12	0.16702	29	0.68097
13	0.19441	30	0.70632
14	0.22310	40	0.89123
15	0.25290	50	0.97037
16	0.28360	60	0.99412
17	0.31501	70	0.99916
18	0.34691	80	0.99991

Come si può notare, già con una classe di 23 studenti si supera il 50% di probabilità, con 80 si ha la quasi certezza. Qualche esempio concreto può verificare la bontà statistica di questo calcolo.

— Nella squadra del Brasile ai mondiali 2014 Jose' Paulo Bezerra Junior Paulinho e Givanildo Vieira de Souza, noto come Hulk, sono entrambi nati il 25/07, proprio su 23 convocati.
— Nella squadra della Sud Corea ai mondiali 2014, Kwak Tae-Hwi e Son Heung-Min sono nati entrambi l'8 luglio, ancora su 23 convocati.
— Nella squadra dell'Argentina ai mondiali 2014, Fernando Rubén Gago e Augusto Matías Fernández sono nati entrambi il 10 aprile, inoltre Sergio Germán Romero e Enzo Nicolás Pérez sono nati entrambi il 22 febbraio, ancora una volta su 23 convocati.

5.2. Il paradosso del secondo figlio

Il quesito, proposto nella sua formulazione iniziale da Martin Gardner su Scientific American, è: *Il signor Smith ha due bambini. Almeno uno dei due è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi?*

Intuitivamente la risposta sembra essere la seguente: se, poniamo, il primo bambino è maschio, la probabilità che anche il secondo lo sia è del 50%.

Il fatto è che, come lo stesso Gardner riconobbe, la domanda è posta in modo ambiguo: è facile pensare che con "almeno uno" si intenda "sicuramente uno che ho chiaramente individuato, ed eventualmente anche l'altro". Una possibile riformulazione equivalente, meno ambigua, è la seguente: "Il signor Smith ha due bambini. Non sono due femmine. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi"? Con questa formulazione si capisce subito che la probabilità è $1/3$, ovvero il $33.\overline{3}\%$. Infatti i casi possibili sono MM, MF, FM, di cui è favorevole solo il caso MM.

Questo problema è stato proposto, con una leggera variante, anche nel tema d'esame di maturità scientifica del giugno 2010, [vedi 3], suscitando numerose discussioni sulla stampa specializzata e sui siti web, dove molti autori hanno proposto proprio la soluzione del 50% che abbiamo indicato all'inizio.

Attenzione dunque a controllare bene la formulazione di un problema di probabilità!

5.3. Il paradosso di Monty Hall

Si tratta di una variante di un famoso paradosso proposto nel 1889 dal matematico francese Joseph Bertrand. Nella formulazione che porta il nome di Monty Hall si può così formulare: *Supponi di partecipare a un gioco a premi, in cui puoi scegliere tra tre porte. Dietro una di esse c'è un'automobile, dietro a ciascuna delle altre c'è una capra. Scegli una porta, diciamo la numero* 1, *e il conduttore del gioco a premi, che sa cosa si nasconde dietro ciascuna porta, ne apre un'altra, diciamo la* 3, *rivelando una capra. Quindi ti domanda: Vorresti scegliere la numero* 2*?*

La soluzione può essere illustrata come segue. Ci sono tre scenari possibili, ciascuno con probabilità $1/3$.

- Dietro la porta scelta dal giocatore c'è una capra (diciamo la capra numero 1). Il conduttore sceglie l'altra capra. Cambiando porta il giocatore vince.
- Dietro la porta scelta dal giocatore c'è sempre una capra (diciamo la capra numero 2). Il conduttore sceglie l'altra capra. Cambiando porta il giocatore vince.
- Dietro la porta scelta dal giocatore c'è un'automobile. Il conduttore sceglie una delle due capre. Cambiando porta il giocatore perde.

Dunque il giocatore, cambiando porta, vince in due casi su tre, ovvero ha probabilità $66.\overline{6}\%$ di vincere. La stessa descrizione porta invece a concludere che, mantenendo la scelta, la probabilità di vincita è $1/3$, ovvero la metà.

Una diversa strategia risolutiva si basa sull'applicazione del teorema di Bayes. Diciamo A_1 l'evento "l'automobile si trova dietro la porta 1", A_2 l'evento "l'automobile si trova dietro la porta 2", e C_3 l'evento "il conduttore seleziona una capra dietro la porta 3". La probabilità che ci interessa è $P(A_2|C_3)$, ovvero la probabilità di trovare l'auto dietro la porta 2, dopo aver cambiato scelta e sapendo che il conduttore ha svelato una capra dietro la porta 3. Per il teorema di Bayes si ha

$$P(A_2|C_3) = \frac{P(A_2)P(C_3|A_2)}{P(C_3)}.$$

La probabilità di A_2 è chiaramente $1/3$, la probabilità di C_3 è $1/2$, in quanto il conduttore deve scegliere una delle due porte dietro cui si trova una capra. La probabilità $P(C_3|A_2)$ (probabilità che il conduttore apra la porta 3, sapendo che l'auto è dietro la porta 2) è chiaramente 1, dato che al conduttore non rimane che scegliere l'unica porta dietro cui non si trova l'auto. Dunque

$$P(A_2|C_3) = \frac{1 \times (1/3)}{1/2} = \frac{2}{3},$$

con lo stesso risultato di prima.

5.4. Il paradosso dell'ispezione

Per questa situazione faremo solo una considerazione qualitativa, senza calcoli espliciti.

Consideriamo un laboratorio che usa un gran numero di strumenti identici, sottoposti ad usura che ne provoca la rottura dopo un certo tempo. Naturalmente al momento della rottura uno strumento viene sostituito: dunque nel laboratorio ad un certo momento saranno presenti sia strumenti relativamente "giovani" che strumenti molto più vecchi. Dopo un gran numero di prove il laboratorio ha misurato, statisticamente, per quanto tempo in media è possibile usare uno di quegli strumenti prima della rottura: questo numero si chiama vita media dello strumento. Supponiamo ora che un ispettore occasionale si presenti nel laboratorio e voglia valutare la vita media degli strumenti presenti: ebbene l'ispettore troverà, di norma, un tempo superiore a quello misurato a priori dal laboratorio.

La cosa si spiega perché, quando arriva l'ispezione, molti degli strumenti presenti nel laboratorio hanno superato la possibilità di rompersi per tutta la loro "vita" precedente l'ispezione. Quindi il campione su cui l'ispettore fa le misure presenta individui che, magari, hanno già superato la vita media teorica prevista, con conseguente allungamento della vita media per quella popolazione di strumenti.

Per fare un altro esempio consideriamo la popolazione di uno stato e supponiamo che sia stata misurata una vita media di 70 anni, tenendo conto degli indici di mortalità registrati allo stato civile per tutte le persone nate e vissute in quello stato. Se però esamino una persona, per esempio di 50 anni, di quella popolazione, la sopravvivenza prevista può essere più lunga della vita media calcolata, in quanto quella persona non può più morire ad un'età inferiore ai 50 anni. Questo fatto dunque allunga la vita media della popolazione se misurata da un ispettore occasionale che ne fa una misura in un certo periodo.

La formulazione standard di questo (apparente) paradosso, potrebbe essere di questo tipo: *Il tempo medio di vita di un individuo, come misurato in laboratorio, è inferiore al tempo misurato in media da un ispettore occasionale*.

5.5. Percorso casuale e rovina del giocatore

Un importante risultato della teoria della probabilità si può così formulare: *in un gioco equo tra due giocatori che disputano una serie di partite, se uno dei due è molto più ricco dell'altro, la rovina di quello che dispone inizialmente di un capitale molto inferiore è praticamente certa*. Questo risultato è anche noto come *teorema della rovina del giocatore* e si può anche esprimere con una formula: se un giocatore 1 dispone di un capitale C_1 e gioca con un giocatore 2, avente un capitale iniziale pari a C_2, la probabilità di rovina di 1, ovvero la probabilità che ad un certo punto del gioco il giocatore 1 abbia perso tutto il suo capitale è

$$P_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} :$$

da qui si capisce subito che se C_2 è molto più grande di C_1, tale probabilità si avvicina al valore 1.

Non abbiamo gli strumenti matematici per dimostrare questo risultato, ma possiamo capirne il senso in maniera intuitiva esaminando qualche situazione concreta.

Consideriamo un ubriacone inizialmente appoggiato ad un lampione per sostenersi. L'ubriacone può fare un passo in avanti o un passo indietro (ragioniamo per semplicità in una sola dimensione) in maniera completamente casuale: il suo percorso si chiama *percorso casuale*. Siccome i passi avanti e quelli indietro sono completamente casuali, dobbiamo aspettarci che, mediamente, il nostro amico non si allontani dal lampione. Ora questo è vero, ma solo a lungo termine: ci possono essere dei momenti in cui l'ubriacone è molto distante, in un verso o nell'altro, dal lampione.

Per fare un altro esempio consideriamo una successione di lanci di una moneta non truccata: poiché ciascuno dei due esiti ha probabilità $1/2$ ad ogni lancio, dobbiamo aspettarci che in ogni momento ci siano, grosso modo, lo stesso numero di esiti testa quanto quello di esiti croce. Ebbene questo è vero, ancora una volta, solo a lungo termine: ci possono essere dei momenti in cui il numero di teste uscite supera grandemente il numero di croci, o viceversa.

Se immaginiamo un giocatore che vince, poniamo, 1 euro ogni volta che esce testa e perde 1 euro ogni volta che esce croce, mediamente il giocatore non dovrebbe vincere nulla: se però in un certo istante il numero delle croci uscite è molto maggiore di quello delle teste (ovvero le perdite del giocatore sono molto maggiori delle vincite) il giocatore si troverà nella posizione di non poter proseguire il gioco se ha esaurito il suo capitale iniziale. Viceversa se il giocatore avesse a disposizione una somma illimitata, potrebbe sempre proseguire il gioco, essendo certo che, ad un certo punto, il numero delle teste uscite sarà maggiore di quello delle croci: naturalmente un tal giocatore dovrebbe sapersi fermare in questo momento, ma questo è un altro discorso! Il fatto è che, in una situazione effettiva, un giocatore gioca contro un banco (ad esempio in una sala da giochi) e il giocatore ha sicuramente a disposizione un capitale limitato, mentre il banco ne ha uno illimitato, per cui può tranquillamente "andare sotto" per un po', senza rovinarsi, a differenza del giocatore che, la prima volta che "va sotto", è spacciato.

Se poi, come succede nella realtà dei giochi d'azzardo, il gioco non è esattamente equo, le cose vanno ancora peggio per il giocatore. Per esempio nel gioco della roulette ogni puntata sul rosso o sul nero ha una probabilità leggermente minore di $1/2 = 18/36$, in quanto è presente lo 0 verde.

I percorsi casuali sono un modello in molte situazioni concrete, al di là dei problemi di gioco puro e semplice. Un esempio è dato dagli spostamenti in alto e in basso dei pacchetti azionari di una società quotata in borsa: per esempio se un'azienda ha una certa quotazione sul mercato, le sue azioni dovrebbero aumentare di prezzo quando l'economia cresce e l'azienda guadagna; purtroppo questo è vero solo in generale e sul lungo periodo, mentre per brevi periodi può succedere esattamente l'opposto e solo se uno ha un capitale sufficiente a superare i momenti di crisi non va in rovina.

Per concludere questo argomento, proponiamo un esempio legato all'esperienza di fisico dell'autore di questi appunti: il moto browniano. Se immergiamo una particella di polvere in un fluido in equilibrio, questa particella subirà degli urti da parte delle molecole del fluido che la faranno muovere in varie direzioni: se il fluido è in equilibrio ci si dovrebbe aspettare che, in media, la particella rimanga ferma al passare del tempo. Ebbene, si verifica invece che essa compie percorsi disordinati (come l'ubriacone), che la possono allontanare di molto dalla posizione di equilibrio, nella quale potrebbe anche non fare mai ritorno.

6. Cenno all'inferenza probabilistica

Per quanto ne sappiamo, è chiaro ormai che la probabilità di trovare vita intelligente su qualche altro pianeta è talmente scarsa da essere di poco superiore soltanto a quella di poter trovare vita intelligente qui sulla Terra.
Giovanni Soriano, Finché c'è vita non c'è speranza, 2010

Questo capitolo contiene un'introduzione, abbastanza informale, al problema dell'inferenza probabilistica. Per la natura di questo corso non abbiamo gli strumenti matematici necessari per una trattazione accurata dell'argomento: ci accontenteremo di considerazioni sostanzialmente intuitive, che rendono comunque il senso del concetto e mostrano l'importanza del *ragionamento incerto* nelle applicazioni.

6.1. Deduzione e induzione

La forma di ragionamento(1) valida nella cosiddetta *logica del certo*, ovvero la logica propriamente detta, è quella del *ragionamento deduttivo*. In sostanza con il ragionamento non si può giungere a conclusioni certe, se non provando che sono contenute in fatti già noti: il particolare deve discendere dal generale. Almeno in linea di principio in questo modo non si può giungere ad ampliare effettivamente il campo delle conoscenze: è solo possibile esplicitare qualche proprietà già implicitamente acquisita, ma non ancora evidente. In una teoria matematica, per esempio, tutti i teoremi dimostrati non sono altro che esplicitazione di proprietà già contenute negli assiomi. Il *ragionamento induttivo*, invece, basato sulla *logica dell'incerto*, ovvero sul Calcolo delle probabilità, permette di ampliare realmente le conoscenze e di raggiungere conclusioni generali, ma incerte, a partire da osservazioni particolari.

Un esempio, banale, per illustrare la differenza tra i due tipi di ragionamento potrebbe essere il seguente.

Ragionamento deduttivo

1. Nella pasticceria XX i dolci venduti sono tutti ottimi.
2. Sono andare a comprare dolci nella pasticceria XX.

Quindi

3. Ho comprato dolci ottimi.

Ragionamento induttivo

1. Mercoledì scorso nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
2. Giovedì scorso nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
3. Ieri, venerdì, nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.

(1) Alcuni dei concetti esposti in questo paragrafo sono desunti dal paragrafo 10.1 di [12].

4. Oggi nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.

Quindi

5. Domani, quando andrò nella pasticceria XX mi venderanno dolci ottimi.

È chiaro che la prima conclusione è *certa*, date le premesse, la seconda è *incerta*: c'è una probabilità che sia vera, alta secondo il grado di fiducia che posso avere acquisito in base alla mia esperienza, ma non uguale a uno. Inoltre, se per caso oggi mi servissero dolci scadenti il mio grado di fiducia e quindi la mia valutazione di probabilità sulla "bontà dei dolci", cambierebbe sicuramente.

Proponiamo un secondo esempio, preso dalla geometria, la "regina" delle teorie deduttive: "la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto".

Nella geometria di Euclide si ragiona sostanzialmente nel modo seguente: introduco i concetti di punto, retta, piano, ipotizzando che tra di essi valgano certe relazioni (assiomi). A questo punto posso *definire* un triangolo e, solo sulla base di quelle relazioni e senza riferimento ad alcuna situazione concreta, posso concludere che la somma degli angoli interni deve essere un angolo piatto. In sostanza il fatto che la somma degli angoli interni sia un angolo piatto è già contenuta negli assiomi, solo che la cosa non era esplicitamente evidenziata.

Un ragionamento induttivo potrebbe invece essere il seguente. Consideriamo un triangolo equilatero e utilizziamo piastrelle con questa forma per ricoprire un pavimento, costruendo con esse esagoni regolari (un classico ed elementare problema di tassellazione): siccome occorrono sei mattonelle triangolari per coprire un angolo giro, ciascuno degli angoli al centro deve essere un sesto dell'angolo giro: se ne deduce che la somma dei tre angoli del triangolo deve essere tre sesti di angolo giro, cioè un angolo piatto. Si veda la figura 6.1.

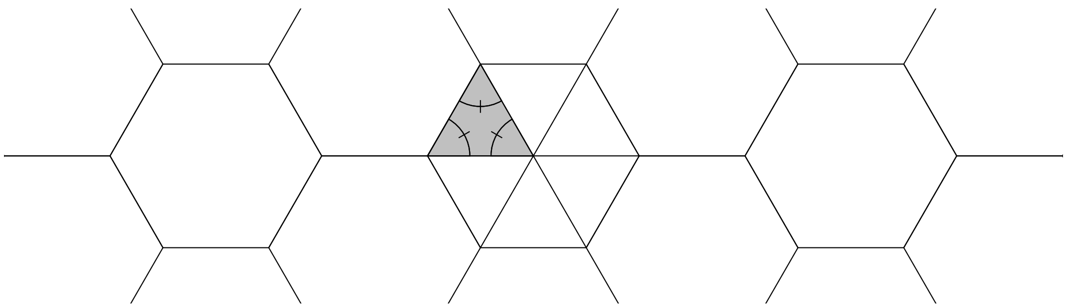


Figura 6.1.: *Somma degli angoli interni in un triangolo equilatero*

In modo analogo si può ragionare su un triangolo rettangolo (che è la metà di un rettangolo, in cui la somma degli angoli è banalmente quattro retti) o in un triangolo isoscele (basta dividerlo a metà in due triangoli rettangoli mediante l'altezza e poi togliere l'angolo piatto che si viene a formare a destra e sinistra dell'altezza): si veda la figura 6.2. Procedendo su questa strada si può anche considerare un triangolo qualunque, dividendolo in due triangoli rettangoli mediante una delle altezze che è sicuramente interna al triangolo stesso, ma è chiaro che si tratta di un procedimento basato su considerazioni visive di triangoli che possono cadere sotto la nostra esperienza sensibile.

Se seguiamo questo procedimento induttivo e consideriamo un triangolo enorme che abbia come vertici, per esempio, tre stelle fisse, non potremo avere alcuna certezza sul fatto che la somma degli

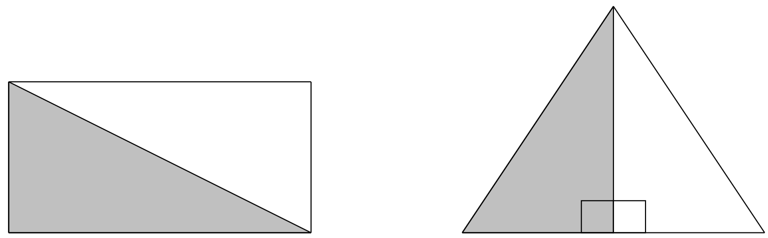


Figura 6.2.: *Somma degli angoli interni in triangoli rettangoli e isosceli*

angoli interni sia ancora un angolo piatto, e potremo solo attribuire a questo fatto una probabilità che misuri, come al solito, il nostro grado di fiducia sulla verità di questa affermazione.

Seguendo invece il ragionamento deduttivo non dovremo preoccuparci di questo fatto: se un oggetto è un triangolo (e dove abbia i tre vertici è del tutto ininfluente), allora la somma degli angoli interni *deve* essere un angolo piatto. Si noti che oggi noi sappiamo che a questo tipo di triangoli "enormi" non si può applicare la geometria di Euclide, ma questo è un altro problema: nella teoria euclidea è corretto dedurre che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, mentre il fatto che poi questo risultato possa essere applicato a oggetti del mondo reale è un problema di cui il geometra non si interessa affatto.

È anche opportuno segnalare il fatto che l'affermazione che, in una teoria deduttiva, i risultati via via ottenuti sono già contenuti negli assiomi, non implica affatto che non ci debba essere ricerca.

Infine è interessante notare che il concetto di *dimostrazione*, cardine delle teorie deduttive, è oggi soggetto a profonda revisione, e anche qui la logica dell'incerto ci mette lo zampino. Proponiamo due esempi per chiarire questo fatto.

Il teorema enorme

Si tratta di un famoso teorema di classificazione dei gruppi semplici. Non vogliamo entrare nei dettagli del suo contenuto, cosa che del resto sarebbe impossibile in questo contesto; quello che qui ci interessa segnalare è legato al nome con cui è spesso citato: il "teorema enorme", appunto. Si tratta senza dubbio del più grande teorema che la matematica abbia mai conosciuto: la dimostrazione originale occupa circa 15000 (si, proprio *quindicimila*) pagine sparse in oltre cinquecento articoli di riviste di matematica, e ha richiesto il contributo di un centinaio di matematici e quarant'anni circa di lavoro. Un gruppo di ricercatori sta oggi lavorando per ridurre questa sterminata mole di materiali a dimensioni più ragionevoli, ma pare che non si potrà andare al di sotto delle cinquemila pagine. La dimostrazione di questo teorema soddisfa nella sostanza l'idea che noi abbiamo di dimostrazione, ma è altamente improbabile che possa essere rifatta da una sola persona, seguendo rigorosamente il metodo del ragionamento ipotetico-deduttivo (nemmeno, probabilmente, se uno volesse fare solo questo nella sua vita!).

È interessante, a proposito di questo teorema, quanto scrive Michael Aschbacher, l'uomo che contribuì in maniera decisiva alla dimostrazione (citazione presa da [6]):

> Io sono scettico sulla possibilità che possa mai apparire in futuro una dimostrazione breve (di questo teorema) di qualsiasi tipo. Le dimostrazioni lunghe infastidiscono i matematici.

> Da un lato più la dimostrazione è lunga, maggiore è la probabilità di errore. La probabilità di errore nella dimostrazione del teorema della classificazione è praticamente uguale ad 1. D'altro canto la probabilità che non si riesca a correggere ogni singolo eventuale errore è praticamente zero, e poiché la dimostrazione è finita, la probabilità che il teorema sia sbagliato è prossima a zero. Con il passar del tempo e con la possibilità di assimilare la dimostrazione, il grado di affidabilità può solo aumentare. Forse è anche il caso di considerare la possibilità che esistano teoremi naturali fondamentali che possono essere formulati in modo conciso, ma che non ammettono una dimostrazione breve e semplice. Ho la sensazione che il teorema di classificazione sia uno di questi. Man mano che la matematica diventa più sofisticata, sarà sempre più probabile imbattersi in teoremi del genere.

Quello che ci interessa qui segnalare è il fatto che, in un contesto di stretta teoria deduttiva, si parli diffusamente di probabilità che una dimostrazione sia sbagliata, cosa che sarebbe stata impossibile nel testo di Euclide.

Per evitare che qualcuno pensi che un teorema del genere non ha alcun interesse pratico segnaliamo solo la sua importanza nella progettazione di sistemi di codici autocorrettori, cioè metodi per codificare le informazioni in grado di compensare le distorsioni e le perdite occasionali, argomento oggi di grandissima attualità.

Solo a titolo di curiosità, per chiarire almeno in parte una delle difficoltà della dimostrazione, rileviamo che nel corso dei lavori ci si è trovati a trattare un gruppo con

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \simeq 10^{53}$$

elementi!

Il teorema dei quattro colori

Questo teorema nasce da un problema squisitamente "grafico": quanti sono, al minimo, i colori necessari per colorare una qualunque carta geografica in modo che due regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore (tranne, ovviamente quando si toccano solo in un punto)? Questo problema nasce da un'osservazione quasi casuale di Francis Guthrie (il problema è, per questo, anche noto come problema di Guthrie) nel 1852 e diventa un problema "ufficiale" nel 1878, quando Arthur Cayley ne parla in una riunione della London Mathematical Society. La dimostrazione che quattro colori sono sempre sufficienti, dopo una lunga serie di insuccessi e di false[(2)] dimostrazioni (una delle più famose è quella di Alfred Bray Kempe, pubblicata nel 1879 e demolita da Percy John Heawood una decina d'anni dopo), avviene ad opera di due matematici dell'Università dell'Illinois, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, nel 1976.

La cosa interessante per noi non è la dimostrazione in sé, che non potremmo seguire, quanto il metodo utilizzato per arrivarci. Sorvolando sui dettagli e semplificando un po' (forse anche un po' troppo!), l'idea è questa: *mediante una serie di ragionamenti e deduzioni logiche si riduce la prova ad un numero finito* (purtroppo enorme) *di casi e si fanno fare i conti su questi casi ad un calcolatore*.

La cosa cruciale in questo modo di procedere è che il lavoro richiesto al calcolatore è tale che nessun essere umano potrà mai verificare a mano la correttezza del risultato: il concetto stesso di dimostrazione come noi lo abbiamo sempre pensato, viene a crollare. Come dice Keith Devlin, "La matematica, da quel momento, non è più la stessa. [...] L'intero concetto di dimostrazione matematica è improvvisamente

[2] Ancora una volta emerge il problema della probabilità che una dimostrazione matematica sia falsa!

cambiato e un'eventualità profilatasi minacciosamente fin dall'epoca dei primi sviluppi degli elaboratori elettronici, all'inizio degli anni cinquanta (del 1900), si è finalmente concretizzata: il calcolatore ha soppiantato il ricercatore nella costruzione di una parte di una dimostrazione matematica". È un po' come dire che la logica dell'incerto ha esteso le sue ramificazioni anche nella logica del certo!

Anche qui riteniamo giusto segnalare che questo teorema, che ha impegnato i matematici per oltre centovent'anni, è importante non solo per motivi teorici, ma anche per le sue numerose applicazioni, in particolare nella teoria dei grafi e in tutto quello che ne consegue nell'informatica.

Torniamo ora a considerare il ragionamento induttivo, osservando, anche sulla base degli esempi considerati, che un tale tipo di processo implica una gradualità, poiché le premesse riguardano un numero finito di casi e non la totalità dei casi: la conclusione che deriva dalle premesse è solo supposta e possiamo solo valutarne il grado di attendibilità, cioè la probabilità che essa sia vera.

Il campo dell'induzione si estende ad ogni ambito e ogni livello: dal vaglio di argomenti pro e contro l'attendibilità di diverse teorie scientifiche o pro e contro la colpevolezza di un indiziato di un crimine, ai metodi per ottenere valutazioni ragionevolmente precise di una grandezza mediante misure necessariamente imprecise.

Particolarmente istruttivo è pensare al processo con cui nuove concezioni o *ipotesi* scientifiche vengono formulate in base a intuizioni suggerite da qualche particolare fatto osservato e poi discusse in base a nuove risultanze che dovranno essere confrontate con le previsioni offerte dalla teoria.

A questo proposito si può fare riferimento al modo in cui la teoria della gravitazione universale è entrata nella teoria fisica moderna. In un libro(3) del 1752 William Stukeley, uno dei contemporanei di Newton, racconta la "storia della mela" riferendo di un colloquio avuto con Sir Isaac Newton ai piedi di un melo.

> Mi raccontò che era nella stessa situazione quando gli venne l'idea della gravitazione. Osservando una mela cadere, si chiese: perché scende sempre perpendicolare al terreno?. Era la Terra ad attrarla. Ci deve essere una forza di attrazione nella materia.

La storia fu poi arricchita di particolari curiosi, come per esempio il fatto che la mela cadde in testa a Newton, invece di cadergli a fianco.

L'osservazione della caduta della mela, assieme ad altre osservazioni, portò Newton alla formulazione dell'ipotesi della gravitazione universale. Sulla base di questa ipotesi furono fatte delle previsioni, per esempio sul moto parabolico di un proiettile, sul moto dei pianeti attorno al sole, ecc. e, successivamente, da tutti gli scienziati furono fatti numerosi esperimenti e calcoli per verificare queste previsioni, esperimenti che hanno modificato le valutazioni di probabilità sulla veridicità dell'ipotesi, aumentandole notevolmente fino ai tempi più recenti e indebolendole(4) solo per esempio dopo l'avvento della teoria della relatività generale.

Possiamo schematizzare questo processo con un paradigma logico induttivo che può essere sintetizzato come segue.

1. Sono stati osservati dei fatti, indichiamoli con le lettere $A, B, \ldots$ (caduta della mela), e identifichiamoli con degli eventi.

[3] *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life*, di cui recentemente (2010) la Royal Society ha messo a disposizione la versione digitale.
[4] In realtà più che di indebolimenti della probabilità di veridicità, si tratta di precisazioni sull'ambito di validità dell'ipotesi stessa.

2. Per spiegare tali fatti viene avanzata (o vengono avanzate) delle ipotesi (legge di gravitazione universale), che possiamo denotare con le lettere H_1, H_2, ecc., e possiamo ancora identificare con eventi alla cui veridicità attribuiamo una certa probabilità $P(H_1)$, $P(H_2)$, ... Tali ipotesi implicano anche il verificarsi di altri eventi D, E, ecc., (moto dei proiettili, moto dei pianeti) le cui probabilità indichiamo con $P(D|H_1)$, $P(D|H_2)$, $P(E|H_1)$, ecc.
3. Effettuiamo degli esperimenti per osservare D, E, ..., e aggiorniamo, di conseguenza, le valutazioni di probabilità delle ipotesi. Per questa valutazione abbiamo a disposizione il teorema di Bayes.

Il passaggio chiave è dunque la nozione e la valutazione di probabilità condizionata e l'uso dello schema induttivo di Bayes per incorporare ogni nuova informazione acquisita sperimentalmente (o magari anche accidentalmente).

Il ragionamento induttivo dunque ci insegna come imparare dall'esperienza, senza creare dal nulla un'opinione, ma aggiornando opinioni precedentemente formulate. Naturalmente il risultato finale non ci permette di decidere definitivamente per un'ipotesi: non si può mai essere certi, nell'accettare una spiegazione plausibile, che non ce ne sia un'altra almeno altrettanto plausibile. Nel caso della gravitazione universale la teoria di Newton è plausibile per un gran numero di fenomeni, ma altrettanto lo è, per gli stessi fenomeni e molti altri, la teoria della relatività generale. Il fatto poi che la teoria della relatività generale sia compatibile con più fenomeni non ci induce affatto a ritenere completamente falsa la teoria di Newton.

6.2. Inferenza e teorema di Bayes

Come risulta dall'ampia introduzione del paragrafo precedente, lo strumento fondamentale dell'inferenza è il teorema di Bayes. Ne vediamo qui di seguito una semplice applicazione concreta, che, nella sostanza, non è altro che una risoluzione commentata di un esercizio sul teorema di Bayes.

Seguendo una linea proposta[5] in [10], consideriamo il seguente esempio.

Un giudice deve decidere a proposito del seguente problema. In città ci sono due aziende di taxi, TaxiVerdi e TaxiBlu, che usano veicoli verdi e blu rispettivamente. L'85% dei taxi sono di Taxi Verdi. In una sera nebbiosa un taxi provoca un incidente ma non si ferma per gli accertamenti del caso. Un testimone dichiara che esso era blu. Per accertare l'affidabilità del testimone, il giudice lo sottopone a dei test, da cui emerge che, in condizioni analoghe a quelle dell'incidente, il testimone riconosce correttamente il colore del taxi nell'80% delle volte. Cosa può concludere il giudice su questa base?

Chiamiamo D_B l'evento costituito dalla dichiarazione del testimone secondo cui il colore del taxi era blu, e consideriamo le due possibili ipotesi: $H_V =$ "il responsabile dell'incidente è un taxi verde" e $H_B =$ "il responsabile dell'incidente è un taxi blu" e possiamo considerare $H_B = H_V^c$, in quanto ci sono solo due ipotesi possibili. Potremo dunque usare la formula (3.18). Dai dati in possesso del giudice, abbiamo che

$$P(H_V) = 0.85, \quad P(H_B) = 0.15.$$

Dai risultati dei test a cui il testimone è stato sottoposto possiamo calcolare le probabilità condizionate che, con la dichiarazione D_B, il taxi sia effettivamente blu e che, con la stessa dichiarazione, il taxi sia

[5] Questo esempio è in realtà adattato da I.Hacking, *An Introduction to Probability and inductive Logic*, Cambridge University Press, 2001

invece verde.

$$P(D_B|H_B) = 0.8, \quad P(D_B|H_V) = 0.2.$$

Riportiamo per comodità la citata formula di Bayes

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)},$$

dove ora $H = H_B$, $H^c = H_V$ e $E = D_B$. Otteniamo

$$P(H_B|D_B) = \frac{P(H_B)P(D_B|H_B)}{P(H_B)P(D_B|H_B) + P(H_V)P(D_B|H_V)} = \frac{0.15 \times 0.8}{0.15 \times 0.8 + 0.85 \times 0.2} = 0.414,$$

e dunque

$$P(H_V|D_B) = 0.586.$$

Nonostante la dichiarazione del testimone, il giudice dovrà ritenere più probabile che il taxi responsabile dell'indicente fosse verde.

Che cosa succederebbe se si presentasse un secondo testimone, con la stessa affidabilità del primo, il quale dichiara ancora che il taxi era blu?

Chiamando D'_B l'evento costituito dalla dichiarazione del nuovo testimone, potremo riapplicare la stessa formula di prima, tenendo però conto che la dichiarazione del primo testimone ha ora modificato le probabilità $P(H_B)$ e $P(H_V)$: dovremo assumere come nuove probabilità per queste ipotesi i risultati del calcolo[(6)] precedente, le possiamo chiamare $P'(H_B)$ e $P'(H_V)$. Per le probabilità $P(D'_B|H_B)$ e $P(D'_B|H_v)$ invece non cambia nulla: le verosimiglianze della dichiarazione del secondo testimone sono identiche a quelle del primo. Si ottiene:

$$P(H_B|D'_B) = \frac{P'(H_B)P(D'_B|H_B)}{P'(H_B)P(D'_B|H_B) + P'(H_V)P(D'_B|H_V)} = \frac{0.414 \times 0.8}{0.414 \times 0.8 + 0.586 \times 0.2} = 0.739,$$

e dunque

$$P(H_V|D'_B) = 0.261.$$

Dobbiamo ora ritenere che, nonostante la molto maggior diffusione dei taxi verdi, la concordanza di due testimoni indipendenti farà ritenere al giudice molto più probabile che il taxi responsabile dell'incidente fosse blu.

Sempre seguendo [10], consideriamo un secondo esempio.

Consideriamo l'esperimento del lancio successivo, per tre volte, di una moneta e supponiamo che si verifichi l'evento $E =$ "si presenta una sola volta testa". Ci chiediamo: qual è la probabilità che la moneta sia corretta?

Cominciamo con l'osservare che il problema di calcolare la probabilità che esca una sola volta testa, *sapendo* che la moneta è corretta, può essere facilmente risolto per esempio usando la regola di Bernoulli con $p = 1/2$ (ricordiamo che p è la probabilità di successo in un solo lancio) e quindi $q = 1 - p = 1/2$:

$$P(E) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3}{8}.$$

[6] Usando le nomenclature riportate nella pagina 74, in sostanza quelle che erano probabilità a posteriori delle cause dopo la dichiarazione del primo testimone, diventano ora probabilità a priori per valutare le probabilità dopo la dichiarazione del secondo testimone.

In un approccio frequentista avremmo potuto fare un esperimento, per esempio mediante simulazione al computer, ripetendo un elevato numero di volte l'esperimento di 3 lanci successivi di una moneta: si otterrà un valore che, a lungo andare, si avvicina a 3/8.

In ogni caso si tratta di un problema di tipo deduttivo: si ipotizza la struttura dell'esperimento cioè il fatto che la moneta sia corretta e che i tre lanci siano indipendenti e se ne deduce la probabilità: esattamente 3/8 con la formula di Bernoulli, circa 3/8 con il metodo frequentista.

Il problema che noi ci siamo posti è esattamente il problema inverso: avendo ottenuto una T in tre lanci, qual è la probabilità che la moneta sia corretta?

Poiché, per come è posto il problema, non sappiamo nulla sulla moneta, possiamo solo assumere che la probabilità che la moneta sia corretta è identificata dal valore di p che compare nella formula di Bernoulli: se $p = 1/2$ la moneta è corretta, se $p \neq 1/2$ la moneta non è corretta, e sarà tanto meno corretta quanto più p si allontana da $1/2$.

Sicuramente avremo $0 < p < 1$, in quanto è uscita una volta testa e quindi p non può essere 0; per contro sono uscite due croci e quindi p non può essere 1. Per semplificare il problema possiamo assumere come ipotesi che i valori di p siano solo $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$, $p_5 = 0.5$, $p_6 = 0.6$, $p_7 = 0.7$, $p_8 = 0.8$, $p_9 = 0.9$, ovvero 9 valori. Indichiamo con H_i, $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, le ipotesi corrispondenti a questi valori. Non sapendo nulla sulla moneta ci converrà assumere che ciascuna di queste ipotesi abbia, *a priori*, la stessa probabilità: $1/9 \simeq 0.111$. Per poter applicare la formula di Bayes, questa volta nella forma generale (3.21), dobbiamo ancora valutare le probabilità $P(E|H_i)$ (le *verosimiglianze*), ovvero le probabilità che esca una sola volta testa in tre lanci, sapendo il valore della probabilità che esca testa in un lancio. Potremo chiaramente utilizzare la formula di Bernoulli, sostituendo a p, successivamente, i valori che abbiamo scelto.

Riportiamo intanto, per semplicità, la formula di Bayes, adattandola a questo caso:

$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{P(H_1)P(E|H_1) + \cdots + P(H_9)P(E|H_9)} = \frac{P(E|H_i)}{P(E|H_1) + \cdots + P(E|H_9)},$$

in quanto essendo $P(H_i) = 0.111$ per tutti i valori di i, si può semplificare.

Calcoliamo ora le verosimiglianze usando la formula

$$P(E|H_i) = \binom{3}{1} p_i^1 (1 - p_i)^{3-1}.$$

Troveremo, nell'ordine, i seguenti risultati sostituendo a p_i, successivamente, i valori indicati:

0.243, 0.384, 0.441, 0.432, 0.375, 0.288, 0.189, 0.096, 0.027.

L'applicazione della formula di Bayes porta ora ai seguenti risultati finali per le probabilità delle singole ipotesi:

$P(H_1\|E)$	$P(H_2\|E)$	$P(H_3\|E)$	$P(H_4\|E)$	$P(H_5\|E)$	$P(H_6\|E)$	$P(H_7\|E)$	$P(H_8\|E)$	$P(H_9\|E)$
0.098	0.155	0.178	0.175	0.152	0.116	0.076	0.039	0.011

Come era prevedibile l'ipotesi più plausibile è intorno a $p = 0.3$. Notiamo che, nei limiti dell'errore dovuto agli arrotondamenti, la somma di tutte queste probabilità è 1, come ci si deve aspettare. Anche qui, come nell'esempio precedente, potremmo chiederci che cosa succede ripetendo nuovamente l'esperimento di lancio, e ottenendo ancora 1 volta testa su 3 lanci. Basterà riapplicare la stessa formula, sostituendo ai valori di $P(H_i)$ i nuovi valori trovati: questa volta le probabilità $P(H_i)$ non sono tutte uguali e quindi non potremo semplificare. Come nell'esempio precedente le verosimiglianze saranno invece inalterate. Rifacendo i calcoli si ottiene la seguente tabella:

$P(H_1\|E)$	$P(H_2\|E)$	$P(H_3\|E)$	$P(H_4\|E)$	$P(H_5\|E)$	$P(H_6\|E)$	$P(H_7\|E)$	$P(H_8\|E)$	$P(H_9\|E)$
0.069	0.172	0.227	0.218	0.164	0.097	0.042	0.011	0.001

Come si vede la concentrazione attorno a 0.3 aumenta ancora. Notiamo anche qui che, nei limiti dell'errore dovuto agli arrotondamenti, la somma di tutte queste probabilità è 1, come ci si deve aspettare.

A. Schema riassuntivo

Questa appendice contiene uno schema riassuntivo dei capitoli 3, 4, 5 e 6 di questa dispensa, utile per un veloce ripasso dei concetti essenziali.

I contenuti e gli esempi sono esattamente quelli già proposti nei citati capitoli, ai quali si rimanda per ogni necessario approfondimento e chiarificazione.

A.1. Incertezza e sua valutazione

Nel trattare la logica proposizionale abbiamo introdotto, vedi la definizione 1.1, il concetto di proposizione o enunciato come una affermazione che assume uno ed un solo valore di verità: vero o falso. Nello studio del calcolo delle probabilità dobbiamo invece trattare affermazioni delle quali non si sa se a priori se siano vere o false: ci troviamo di fronte a uno stato di conoscenza parziale e non completa del fenomeno in esame e possiamo solo pensare ad una valutazione che misuri il nostro grado di fiducia nel verificarsi o meno di un certo evento. Esempi tipici, alcuni dei quali già citati parlando di logica proposizionale, sono le frasi: "*Se lancio una moneta esce testa*", "*Se lancio un dado esce il sei*", "*Domani pioverà*", "*Il primo nato a Pordenone nell'anno* 2016 *sarà un maschio*", "*Alle prossime olimpiadi in Brasile l'Italia vincerà* 10 *medaglie*". Parleremo anche di fenomeni *casuali* o *incerti*. Abitualmente si pensa a situazioni di incertezza solo per fenomeni futuri, in quanto è tipicamente per tali eventi che non si sa dire se sono veri o falsi. In realtà ciò che conta è solo la mancanza di informazioni su un evento: è sicuramente casuale il risultato del prossimo incontro di calcio tra la Roma e la Lazio, ma il fenomeno rimane casuale anche dopo che si è verificato, se non ne siamo venuti a conoscenza.

Prestare la massima attenzione a quanto abbiamo detto: l'evento è comunque un fatto che è vero o falso cioè è, in linea di principio una "proposizione" nel senso della logica proposizionale di cui abbiamo parlato, solo che noi non disponiamo dell'informazione adeguata per decidere sul valore di verità della stessa. In sostanza vogliamo studiare situazioni in cui l'informazione necessaria per valutare la verità o falsità di una proposizione non ci è nota, per un qualche motivo (evento che deve ancora accadere, evento già accaduto ma di cui non conosciamo l'esito).

Una osservazione importante sul ragionamento probabilistico: esso è, essenzialmente, un ragionamento induttivo e non deduttivo come la maggior parte delle "tradizionali" teorie matematiche, e questo risulterà evidente man mano che ci addentreremo nello studio. Per ora cerchiamo di far capire che cosa intendiamo con questa affermazione proponendo un esempio, preso da un testo di Romano Scozzafava [vedi 14]. Supponiamo di avere una scatola contenente dieci monete di cui nove normali, cioè con una faccia testa e una croce, e una truccata, cioè con due facce entrambe testa. Se estraiamo una moneta da questa scatola è del tutto ragionevole pensare, prima di effettuare l'estrazione, che la probabilità di estrarre quella truccata è $1/10$, anche senza avere ancora un'idea chiara di che cosa voglia dire probabilità. Se a posteriori controlliamo la moneta possiamo subito scoprire se si tratta o no di quella truccata. Supponiamo però di voler fare un ulteriore esperimento su questa moneta estratta, senza esaminarla: la lanciamo in aria sei volte e controlliamo quale faccia mostra la moneta una volta caduta sul pavimento.

Se si ottiene sei volte testa è chiaro che dovremo ragionevolmente pensare che la probabilità che la moneta sia quella truccata è maggiore di 1/10, anche se ancora non ne abbiamo la certezza(1). E' possibile calcolare questo "incremento di probabilità". Qui osserviamo solo che questo modo di procedere è chiaramente induttivo: abbiamo migliorato le nostre conoscenze facendo degli esperimenti, ovvero abbiamo "appreso dall'esperienza", come dice sempre Romano Scozzafava nel libro citato.

Prima di concludere questa introduzione al calcolo delle probabilità ci preme segnalare un fatto molto importante: lo studio del calcolo delle probabilità non porta *mai* ad eliminare l'incertezza, ma semplicemente a *gestire l'incertezza*. In molte situazioni se dovessimo attendere di avere l'informazione che ci manca prima del verificarsi di un evento, o perché sull'evento non abbiamo sufficienti conoscenze, non potremmo compiere alcuna azione.

Esempi classici sono quelli della valutazione sul tipo di guasto meccanico di un mezzo, oppure quello della diagnosi medica di una malattia: se un medico giudica che un paziente, sulla base dei sintomi descritti, potrebbe avere tre malattie diverse, valuterà la diversa probabilità di ciascuna e si muoverà di conseguenza. Naturalmente farà fare al paziente ulteriori test i cui risultati potranno modificare la valutazione precedente di probabilità. In ogni caso non rimane escluso il fatto che il paziente abbia la malattia che il medico ha giudicato la meno probabile, e non potremo addebitare al medico un errore di valutazione: se tutte e tre le malattie richiedessero l'assunzione di farmaci molto debilitanti, nessun dottore ci prescriverebbe l'assunzione contemporanea dei farmaci per le tre malattie, con il rischio che il cocktail di farmaci ci porti alla morte. Parimenti nessun medico aspetterebbe di avere la certezza assoluta sulla malattia, ancora una volta con il rischio di aggravamento e, magari, di impossibilità di cura.

A.2. Approccio classico e frequentista

Per iniziare l'argomento del calcolo delle probabilità cominciamo con il proporre una veloce trattazione dei due approcci più comuni al problema: l'approccio classico o combinatorio e l'approccio frequentista, segnalando fin da subito che la stragrande maggioranza dei casi concreti non si lascia inquadrare in nessuno dei due.

Per poter parlare di probabilità dobbiamo innanzitutto precisare che la probabilità si riferisce a un *evento*, concetto che ora introduciamo solo a livello intuitivo. Evento è "qualcosa che accade", come risultato di un "esperimento" (e anche la parola esperimento ha un significato molto generico): il risultato del lancio di un dado, il fatto che una squadra vinca una partita, che il terzo estratto su una ruota del lotto in una certa data sia il 27, che la percentuale di polveri sottili nell'aria di Pordenone un determinato giorno superi o no il limite di legge, ecc. Sostanzialmente possiamo dire che *evento* è un concetto primitivo e che a noi interessa sapere che cosa si può fare con gli eventi. Torneremo un po' più in dettaglio su questo concetto in seguito. Per ora ci interessa il fatto che la probabilità opera sugli eventi, associando a ogni evento di una certa famiglia un numero: potremo dire che la probabilità è una *funzione* a valori reali definita su una famiglia di eventi e scrivere $P(E)$ se E è un evento e la funzione viene denominata, come è abitudine, con P. Una definizione rigorosa richiederà naturalmente una più precisa definizione di evento e una indagine su quali debbano essere le caratteristiche di questa funzione.

Esaminiamo ora un po' più da vicino l'esperimento del lancio di un dado (non truccato). In questo caso possiamo concordare abbastanza facilmente sul fatto di chiamare evento "semplice" o "elementare"

[1] Anche se può sembrare paradossale, potrebbe benissimo succedere che anche con centinaia di lanci l'esito sia sempre testa, senza che si possa avere la certezza che la moneta sia quella truccata.

l'uscita di un numero compreso tra 1 e 6, ovvero il possibile risultato di un lancio; potremo poi chiamare evento anche, per esempio, l'uscita di un numero pari, o di un numero dispari, o di un numero appartenente all'insieme $\{2,5\}$. In sostanza potremo considerare l'insieme dei numeri da 1 a 6 come l'insieme dei casi possibili e chiamare evento un qualunque suo sottoinsieme, contenente h di questi 6 numeri. In questo caso i diversi casi possibili sono a due a due *incompatibili*, nel senso che se si presenta uno di essi è escluso che si possa presentare uno qualunque degli altri. Potremo anche ritenere, se il dado non è truccato, che tutti questi casi siano *equiprobabili*, nel senso intuitivo[2] del termine. Il fatto che tutti i casi possibili siano equiprobabili ci fa ritenere abbastanza logico che la probabilità di ciascuno sia $1/6$ e che quindi la probabilità di un generico evento E sia data da $h/6$, dove h è il numero di casi possibili che costituiscono E.

Il numero di tutti i casi possibili varia a seconda dell'esperimento: è 2 nel caso del lancio di una moneta (Testa o Croce), 90 in un'estrazione al gioco del lotto. Detto n il numero dei casi possibili (che riteniamo equiprobabili e a due a due incompatibili) e h il numero degli elementi che costituiscono un evento E (casi favorevoli), potremo dire che la probabilità di E può essere *valutata* dal seguente numero:

$$P(E)=\frac{h}{n}. \tag{A.1}$$

Abbiamo volutamente usato la parola *valutata*, in quanto non può trattarsi di una definizione di probabilità: questo schema non si applica sicuramente a tutti i casi di interesse e poi richiede il concetto di equiprobabilità che, a questo punto, non può essere definito senza ambiguità e deve essere solo accettato a livello intuitivo.

Questo approccio[3] alla probabilità si chiama *approccio combinatorio* o *classico* e si usa brevemente richiamare parlando di rapporto fra i casi favorevoli e i casi possibili di un evento.

È chiaro che l'ipotesi di equiprobabilità non sarà sempre soddisfatta: un esempio elementare è il lancio di una puntina da disegno. Qui ci sono due casi possibili, come nel lancio di una moneta, ovvero la puntina cade con la "punta in su" o con la "punta in giù", ma i due casi non sono equiprobabili e anzi potremo avere risultati diversi a seconda del tipo di puntina in esame.

Esempio A.1. Consideriamo il lancio contemporaneo di due dadi non truccati. Si chiede di valutare la probabilità che la somma delle due facce sia 5.

È abbastanza facile rendersi conto che il numero dei casi possibili in questo esperimento è 36, corrispondente a quante sono le coppie ordinate che si costruiscono con i numeri da 1 a 6. La somma 5 si ottiene con le coppie $(1,4)$, $(4,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$, cioè i casi favorevoli sono 4. La probabilità richiesta è dunque

$$P=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Si noti che, sulla base della formula (3.1), il numero $P(E)$ è sicuramente un numero reale che soddisfa la condizione

$$0\le P(E)\le 1. \tag{A.2}$$

[2] Si noti che non abbiamo ancora definito che cosa sia la probabilità, e quindi parlare, a questo punto, di equiprobabilità sarebbe, a rigore, scorretto: è per questo che il concetto di equiprobabilità è introdotto salo a livello intuitivo.

[3] Questa "definizione" di probabilità è dovuta a Pierre Simon Laplace (1749-1827), grande fisico matematico francese del periodo napoleonico. Autore tra l'altro dell'importantissimo trattato *Mécanique Céleste*, che pose i fondamenti dei moderni studi di meccanica. Per quanto riguarda la probabilità il suo contributo principale è l'*Essai philosophique sur les probabilités*, dove si ritrova formalmente la definizione classica di probabilità.

Tra tutti gli eventi relativi ad un certo esperimento ce ne interessano in particolare due, l'evento *certo* e l'evento *impossibile*. Il primo si ha quando i casi favorevoli coincidono con i casi possibili, il secondo quando non si ha alcun caso favorevole. Essi si indicano tradizionalmente con Ω e con $\emptyset$. In particolare il secondo simbolo è lo stesso usato per l'insieme vuoto e sta proprio a significare che ci sono 0 casi favorevoli.

Esempio A.2. Nel lancio di un dado la frase "esce un numero compreso tra 1 e 6" esprime l'evento certo, la frase "esce il numero 7" esprime l'evento impossibile. Si noti che l'evento certo può essere espresso anche da molte altre frasi, come per esempio "esce un numero minore di 10", e ciò vale anche per l'evento impossibile, espresso per esempio anche dalla frase "esce un numero irrazionale".

Per un classico esempio preso dal gioco del lotto, la frase "esce una cinquina tale che la somma dei suoi numeri è maggiore di 10" esprime l'evento certo, la frase "esce una cinquina tale che la somma dei suoi numeri è minore di 15" esprime l'evento impossibile.

Si noti che davanti a "evento certo" e "evento impossibile" abbiamo usato l'articolo determinativo: per ogni esperimento possiamo ritenere che ci sia un solo evento certo e un solo evento impossibile (come già per l'unicità dell'insieme vuoto nella teoria degli insiemi): anche se l'evento certo e l'evento impossibile, come ogni evento, possono essere espressi da più proposizioni, sia l'evento certo che l'evento impossibile sono unici.

Per concludere questa sommaria trattazione dell'approccio classico alla probabilità facciamo alcune osservazioni riassuntive che ci saranno utili in seguito.

In tutti gli esempi che possiamo considerare facciamo un "esperimento" (lancio di una moneta, lancio di un dado, estrazione dei numeri al lotto, ecc.) che può presentare diversi esiti.

- Nel lancio di una moneta si possono avere due esiti, che possiamo chiamare T (Testa) o C (Croce), ovvero gli esiti costituiscono un insieme di cardinalità 2: $\{\,T, C\,\}$.
- Nel lancio contemporaneo di due monete l'insieme degli esiti ha cardinalità 4: $\{\,TT, TC, CT, CC\,\}$.
- Nel caso del lancio di un dado l'insieme degli esiti ha cardinalità 6: $\{\,1, 2, 3, 4, 5, 6\,\}$.
- Nel caso dell'estrazione dei numeri al lotto l'insieme degli esiti ha cardinalità 90, tanti quanti sono i possibili estratti.

Possiamo chiamare questi insiemi *spazi campionari* o *spazi dei risultati*. In casi come questi possiamo dire che gli eventi non sono in realtà che sottoinsiemi di questi spazi campionari: l'evento "testa o croce" nel lancio simultaneo di due monete è il sottoinsieme $\{\,TC, CT\,\}$ dell'insieme sopra descritto. La valutazione di probabilità che abbiamo dato con la formula (3.1) può essere riscritta dicendo che $P(E)$ è il rapporto tra la cardinalità dell'insieme che rappresenta l'evento E e la cardinalità dello spazio campionario. Lo spazio campionario stesso è l'evento certo, il suo sottoinsieme vuoto è l'evento impossibile. Gli elementi dello spazio dei campioni, cioè gli esiti possibili dell'esperimento, sono essi stessi degli eventi, che possiamo chiamare *eventi elementari*.

Cambiamo ora le carte in tavola e consideriamo un esperimento in cui l'approccio combinatorio della probabilità non ci porta da nessuna parte, ovvero in sostanza non ci permette di valutare la probabilità di un evento a partire dallo spazio campionario e dal sottoinsieme che individua l'evento stesso nello spazio campionario. Precisamente esaminiamo l'esperimento di lancio di una puntina da disegno, considerando la possibilità che una volta giunta al suolo la puntina si presenti "a punta in su" o "a punta in giù". Se ripetessimo quanto già detto con il lancio di una moneta dovremmo concludere che, essendo due i casi possibili (che chiameremo, per semplicità G=*Giù* e S=*Su*), sia il caso G che il caso S dovrebbero avere una probabilità di 1/2 (un caso favorevole su due possibili), ma nessuno di noi sarebbe disposto a scommettere su questo: il "grado di fiducia" sull'uscita di G è sicuramente diverso da quello sull'uscita di S. Come potremmo, in un caso come questo, riuscire a *valutare* la probabilità che in un lancio della puntina esca il caso G o il caso S? In genere in una situazione come questa si procede ad effettuare un numero di prove *abbastanza grande*[4], supponiamo 1000. Se in queste è uscito, supponiamo, 600 volte il caso G e 400 volte il caso S, potremo ragionevolmente assumere come probabilità che in un nuovo lancio la probabilità di G sia 600/1000, ovvero 3/5, mentre la probabilità di S sia 400/1000, ovvero 2/5.

Si noti una profonda differenza con il caso combinatorio: non stiamo più contemplando *a priori* un insieme di casi possibili e di casi favorevoli, calcolando la cardinalità di due insiemi, ma stiamo facendo una serie di prove ripetute, per giungere, *a posteriori*, a una valutazione di probabilità. Naturalmente le 1000 prove che abbiamo effettuato devono essere fatte in *identiche condizioni*: si dice che le prove devono essere *ripetibili*.

Se, facendo un certo esperimento, stiamo esaminando uno dei possibili esiti di quell'esperimento o un evento (insieme di esiti) ed eseguiamo delle prove ripetute diremo che abbiamo avuto un *successo* se si è ottenuto quell'esito o quell'evento, un *insuccesso* nel caso contrario.

Con questa nomenclatura, potremo dire che in una situazione in cui abbiamo fatto una successione di n prove ripetibili, o analoghe, di un esperimento, e se abbiamo ottenuto k successi per un esito o per un evento, la probabilità che un nuovo evento E dello stesso tipo sia anche lui un successo è valutata dal numero

$$P(E)=\frac{k}{n}, \tag{A.3}$$

ovvero è data dal numero di successi sul numero totale di prove effettuate. Chiameremo questo numero *frequenza relativa*.

Per essere più precisi, in questa definizione occorrerebbe fare il limite di questo rapporto, quando il numero di prove tende all'infinito: nella pratica ci accontentiamo di un numero di prove "molto grande", espressione che accettiamo come intuitivamente evidente.

Questo tipo di valutazione della probabilità si chiama *approccio frequentista* o *statistico* e si usa richiamare parlando brevemente di rapporto tra successi e totale delle prove.

Alcune situazioni tipiche in cui si può usare questo approccio sono le seguenti.

- Se in un'urna ci sono 20 palline, di cui un certo numero non noto sono bianche e le restanti nere, per valutare la probabilità che estraendo una pallina essa sia bianca (*bianca* è il successo), possiamo fare un centinaio di estrazioni (con reimmissione della pallina estratta nell'urna) e contare il numero di successi, valutando poi la probabilità di successo con la (3.3).
- Se vogliamo valutare la probabilità che il primo nato a Pordenone il 1 gennaio 2016 sia un maschio (*maschio* è il successo), possiamo consultare i registri comunali delle nascite, contare il numero di successi su un totale, per esempio, di 1000 nascite e usare ancora la (3.3).

Dunque condizione indispensabile perché questo approccio si possa usare è che si possano eseguire quante prove si vogliano su un evento, o che siano disponibili tavole statistiche relative ad un certo

[4]E, in questa fase, non precisiamo che cosa voglia dire "abbastanza grande".

fenomeno. Importanti applicazioni si hanno in medicina, in psicologia, in economia, nella meccanica quantistica, e in generale in tutte le scienze nelle quali si possono utilizzare metodi statistici.

Notiamo che anche in questo caso si può parlare di evento certo e evento impossibile, con le stesse parole e le stesse proprietà già viste nel caso combinatorio. Inoltre anche in questo caso vale la (3.2), cioè la probabilità è un numero compreso tra 0 ed 1 (0 solo per l'evento impossibile, 1 solo per l'evento certo).

A.3. Approccio soggettivo

Esaminiamo ora alcuni problemi in cui si richiede di calcolare una probabilità, valutando l'applicabilità dei due approcci proposti.

- Qual è la probabilità per un dato studente del corso ISIA di superare l'esame di matematica al prossimo appello?
- Qual è la probabilità che domenica prossima la mia squadra favorita vinca la partita di calcio in programma?
- Qual è la probabilità che un nuovo modello di moto abbia successo?

Risulta immediatamente evidente che l'approccio classico non è applicabile. Nel primo caso infatti ci porterebbe a concludere che la probabilità è 1/2 (1 caso favorevole su 2 casi possibili), cosa che non tiene assolutamente conto di altri fattori, come per esempio il livello di preparazione dello studente stesso. Parimenti non è applicable il metodo frequentista: non ha nessun senso far ripetere allo studente molte volte lo stesso esame per vedere qual è la probabilità di superamento (anche perché, appena superato l'esame lo studente si guarderebbe bene dal ripeterlo solo per fare una valutazione di probabilità!). Discorsi analoghi si possono fare negli altri due casi.

In casi come questi è abbastanza logico (e lo si fa intuitivamente senza pensarci) *stimare* la probabilità in base allo stato d'informazione che si possiede del problema in esame. Ebbene si può assumere proprio questa idea come definizione, per ora solo qualitativa, di probabilità.

Definizione A.1. *La probabilità di un evento è la misura del* grado di fiducia *che un individuo* coerente*, in base alle proprie opinioni e alle informazioni di cui dispone, attribuisce al verificarsi dell'evento.*

È chiaro che questa stima è sostanzialmente *soggettiva* in quanto sia le opinioni che le informazioni possedute possono differire grandemente da individuo a individuo. Per questo motivo questo approccio alla probabilità si chiama approccio *soggettivo* o *soggettivista*. È importante segnalare fin da subito che l'aggettivo "soggettivo" non deve far pensare alla totale arbitrarietà nella valutazione della probabilità di un evento, come vedremo tra poco: è per questo che, nella definizione A.1, si fa riferimento a un individuo *coerente*.

È opportuna una ulteriore precisazione sull'aggettivo *soggettivo* che abbiamo utilizzato (e che, formalmente, è il contrario di *oggettivo*). Con il termine "soggettivo" intendiamo innanzitutto sottolineare il fatto che la valutazione di probabilità è fatta dall'individuo (il soggetto che esprime la valutazione) e non è propria dell'"oggetto", cioè dell'evento che stiamo esaminando. Per esempio lanciando un dado non truccato il soggetto valuta ad 1/6 la probabilità di uscita del 5; la probabilità di questo evento rimane sempre di 1/6 se, dopo il lancio, copriamo con un panno il dado senza potere vedere l'esito dello stesso:

il numero $1/6$ dipende dal soggetto che valuta, non dall'oggetto della valutazione (la faccia del dado che uscirà o che è uscita).

Storicamente poi l'aggettivo *soggettivo* è stato applicato all'approccio alla probabilità che stiamo ora introducendo: tuttavia, in termini formali, anche gli approcci combinatorio e frequentista, sono *soggettivi* e anzi, come avremo modo di rimarcare, possono essere considerati casi particolari di questo. Sarebbe meglio usare, per questo approccio alla probabilità, un denominazione come *probabilità generalizzata*; tuttavia, in omaggio alla tradizione, continueremo ad usare la denominazione *probabilità soggettiva*.

Cerchiamo ora di formalizzare in termini quantitativi o operativi la definizione precedente. Che cosa significa che io stimo all'80% la probabilità che la mia squadra favorita vinca la partita di calcio in programma domenica prossima? L'idea base, dovuta a Bruno de Finetti (1906-1985), è basata sul concetto di scommessa (scommessa ipotetica naturalmente): stimare una probabilità dell'80% significa essere disposti a pagare 80 (euro, dollari, sterline, ecc.) per ricevere 100 nel caso la squadra vinca, ovvero in caso di esito positivo dell'evento, o anche, equivalentemente, essere disposti a pagare una quota $p = 0.8$ per ricevere una somma 1 in caso di esito positivo dell'evento. Possiamo riformulare la definizione precedente nel seguente modo.

Definizione A.2. *La probabilità di un evento E è la somma p che un individuo* coerente *ritiene corretto pagare per ricevere la somma* 1 *al verificarsi dell'evento.*

A.4. Eventi e probabilità

Una definizione di *evento* che ben riassume i vari casi considerati su può formulare come segue.

Definizione A.3. *Un* evento *è una proposizione ben definita, ovvero non ambigua, che può risultare* vera *o* falsa*, senza che sia possibile stabilire a priori quale delle due situazioni si verifica, ovvero in cui è presente incertezza su quale sia il valore di verità.*

Nella sostanza il concetto di evento può essere considerato come un concetto primitivo: quello che conta è che l'evento può risultare vero o falso. È una situazione simile a quella del concetto di insieme: quello che conta è poter stabilire se un oggetto appartiene o no all'insieme.

Chiameremo *indicatore di un evento E*, e lo indicheremo con $|E|$ il numero 1 se E è vero, il numero 0 se E è falso:

$$|E| = \begin{cases} 1, & \text{se } E \text{ è vero;} \\ 0, & \text{se } E \text{ è falso,} \end{cases} \tag{A.4}$$

non essendo noto a priori quale dei due valori $|E|$ assume.

Attenzione: il simbolo usato per l'indicatore di un evento è identico a quello del valore assoluto di un numero, anche se qui il valore assoluto non centra per nulla!

Esempi.

— Se lancio una moneta esce testa.
— Estraendo due palline da un'urna contenente palline bianche e nere, escono due palline nere.
— Il prossimo nato a Pordenone sarà una femmina.
— Il candidato X vince le prossime elezioni a sindaco di Pordenone.

- La nuova vettura prodotta da FCA sarà un successo commerciale.
- Il logo che un dato studio di design ha prodotto per un'azienda sarà effettivamente adottato dal committente.
- Il risultato dell'ultima partita di calcio giocata tra due squadre A e B dello stato di Mirabilandia è stato 3 a 0 a favore di A.

Come casi limite di evento, si chiama evento *certo* un evento il cui indicatore è solamente 1, evento *impossibile* un evento il cui indicatore è solamente 0. Nella pratica, anche con riferimento agli esempi considerati, possiamo pensare agli eventi come sottoinsiemi dell'evento "universale" o evento certo, che indichiamo con Ω, come già detto. Useremo tutta la simbologia già usata per gli insiemi, in particolare quella basata sui diagrammi di Venn.

Potremo parlare di "evento A contenuto nell'evento B", intendendo che la verità di A implica la verità di B. Per esempio in un lancio di dadi l'evento "Esce il 2" implica l'evento "Esce un numero pari". Si scrive $A \subseteq B$, o, se A è sicuramente diverso da B, $A \subset B$.

Analogamente potremo parlare di unione o intersezione di eventi, di evento contrario (o complementare), e così via.

La probabilità, come già accennato, è una funzione definita sugli eventi e a valori nell'insieme dei numeri reali: nel caso combinatorio la si può costruire con calcoli basati sui casi favorevoli e casi possibili, nel caso frequentista facendo molte prove ripetute di uno stesso esperimento, in casi più complessi tenendo conto di tutte le possibili informazioni che l'individua che valuta la probabilità possiede. Perché la probabilità sia coerentemente definita occorre che siano verificate le seguenti proprietà:

(A.5) $0 \leq P(E) \leq 1, \ \forall E \in \mathcal{F}.$

(A.6) $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0.$

(A.7) $P\big(E_1 \cup \cdots \cup E_n\big) = P(E_1) + \cdots + P(E_n)$, se $E_1, \dots, E_n$ sono a due a due incompatibili.

Le prime due proprietà le abbiamo già viste nell'approccio combinatorio e frequentista, la terza può essere dedotta dal principio di coerenza e comunque noi la assumiamo.

Una immediata conseguenza del teorema delle probabilità totali si ha nel caso di eventi che costituiscano una partizione dell'evento certo, cosa che succede in molti casi di interesse. In questo caso gli eventi E_i, oltre ad essere a due a due incompatibili (e ciascuno diverso dall'evento impossibile) godono anche della proprietà che la loro unione è l'evento certo, con probabilità 1. Si conclude subito con il seguente teorema.

Teorema A.4 (probabilità in una partizione dell'evento certo). *Se un insieme di eventi E_i costituisce una partizione dell'evento certo Ω si ha*

$$P\big(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\big) = 1. \tag{A.8}$$

A.5. Valutazione della coerenza nelle assegnazioni di probabilità

Abbiamo detto che una assegnazione coerente di probabilità su una famiglia $\mathcal{F}$ di eventi deve soddisfare le regole espresse dalle (3.7), (3.8) e (3.9). In particolare la più stringente di queste condizioni è la terza, ovvero la proprietà additiva della probabilità per eventi incompatibili. Tuttavia nella maggior parte dei casi noi non ci troviamo in situazioni in cui siamo ricondotti a trattare solo eventi incompatibili e dobbiamo comunque valutare la coerenza delle assegnazioni di probabilità che possiamo dare a ciascun evento sulla base delle informazioni in nostro possesso (e, naturalmente, della nostra valutazione su queste informazioni). Vediamo qualche esempio concreto per capire la situazione.

Esempio A.3. In un lancio di dadi consideriamo gli eventi "$A =$ esce un numero dispari" e "$B =$ esce un numero pari". Se non sappiamo che il dado è truccato, possiamo metterci a valutare le probabilità di ciascuno degli eventi esaminando, per esempio, un gran numero di lanci. Se giungiamo alla conclusione che ciascuno dei due eventi ha probabilità di 0.6, possiamo subito affermare che si tratta di una conclusione incoerente, in quanto $0.6+0.6 = 1.2 > 1$ e questo è in contrasto con il teorema delle probabilità totali, che si può leggere anche, brevemente, dicendo che la somma delle probabilità di eventi incompatibili deve essere essa stessa una probabilità, cioè deve essere non superiore a 1.

Esempio A.4. Riprendendo in esame l'esempio precedente, se riconsideriamo l'evento "$A =$ esce un numero dispari" e modifichiamo l'evento B in "esce un multiplo di 3", allora l'assegnazione di probabilità 0.6 a ciascuno dei 2 eventi non è, di per sè, incoerente: possiamo solo, in questo momento, concludere che non abbiamo implementato un metodo per valutarne la coerenza.

Per risolvere problemi come quello proposto nell'esempio A.4, riprendiamo in esame il concetto di partizione di un insieme costruita mediante i costituenti relativi ad un certo numero di sottoinsiemi dati. Poiché abbiamo, nella sostanza, identificato gli eventi con sottoinsiemi dell'evento certo Ω, tutto quanto detto a proposito degli insiemi vale, con le stesse parole, per gli eventi. Se, dati n eventi E_1, E_2, $\dots$, E_n, riusciamo ad assegnare la probabilità, rispettando le ormai note regole, ai singoli costituenti, è chiaro che, usando il teorema delle probabilità totali riusciremo anche ad assegnare la probabilità, in maniera coerente, ai casi di nostro interesse.

Riesaminiamo, alla luce di questa osservazione, l'esempio A.4. Tenendo conto che $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, troviamo che $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,6\}$, da cui otteniamo $4 = 2^2$ costituenti.

1. $I_1 = A\cap B = \{3\}$;
2. $I_2 = A\cap B^c = \{1,5\}$;
3. $I_3 = A^c\cap B = \{6\}$;
4. $I_4 = A^c\cap B^c = \{2,4\}$.

Se assegnamo

$$P(I_1) = 0.4, \quad P(I_2) = 0.2, \quad P(I_3) = 0.2, \quad P(I_4) = 0.2,$$

otteniamo

$$P(A) = P(I_1\cup I_2) = 0.4+0.2 = 0.6, \quad P(B) = P(I_1\cup I_3) = 0.4+0.2 = 0.6,$$

concludendo che la scelta era perfettamente legittima. Notiamo che una assegnazione di probabilità di questo tipo non è assolutamente spropositata. Essa può per esempio corrispondere ad un dado truccato in modo tale che la faccia 3 compaia il 40% delle volte, la faccia 6 il 20% e le altre 4 facce il 10%: per ottenere[5] questo basta mettere pesetti opportuni dietro le facce con il 3 e con il 6.

Tuttavia questo metodo non è praticamente realizzabile. Per rendercene conto riprendiamo un'altra volta in esame l'esempio A.4. Se il giocatore di dadi è un buon matematico potrebbe anche avere fatto

[5]Naturalmente questo esempio non vuole essere un incentivo a truccare i dadi in un eventuale gioco!

un ragionamento come quello che abbiamo indicato sui costituenti degli eventi, ma la cosa è abbastanza "improbabile". Se dunque, per un qualunque motivo, il giocatore ha valutato che $P(A) = P(B) = 0.6$, e questi sono gli unici dati in nostro possesso, quali strumenti abbiamo a disposizione per valutare *a tavolino*, senza ulteriori analisi di frequenze dei risultati, se la scelta è o no coerente?

Naturalmente possiamo costruirci i costituenti, come sopra riportato, ma non abbiamo strumenti per valutare la loro probabilità. Possiamo però porre, genericamente,

$$x_1 = P(I_1), \quad x_2 = P(I_2), \quad x_3 = P(I_3), \quad x_4 = P(I_4).$$

Avremo

$$P(A) = P(I_1 \cup I_2) = x_1 + x_2 = 0.6, \quad P(B) = P(I_1 \cup I_3) = x_1 + x_3 = 0.6.$$

Dobbiamo inoltre tenere conto che

$$P(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4) = P(\Omega) = 1, \quad \text{ovvero} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$

con l'ulteriore condizione che

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

La condizione che le singole probabilità siano minori o uguali a 1 è implicita nel fatto che sono non negative e che la loro somma è 1.

Dunque la valutazione della coerenza della scelta effettuata dipenderà dalla risoluzione del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0.6 \\ x_1 + x_3 = 0.6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}.$$

Se il sistema ha soluzioni la scelta è coerente, altrimenti no.

Consideriamo un ulteriore esempio.

Esempio A.5. Consideriamo i seguenti tre eventi, a cui assegnamo la stessa probabilità di 0.4.

- E_1 = "la prossima domenica l'Udinese vince la partita".
- E_2 = "la prossima domenica l'Udinese segna esattamente 2 goal".
- E_3 = "la prossima domenica l'Udinese non segna".

Possiamo osservare che E_1 ed E_2 possono avere qualcosa in comune in comune, mentre E_3 non ha nulla in comune né con E_1, né con E_2. Graficamente possiamo rappresentare la situazione con il diagramma di Venn rappresentato nella figura A.1. I costituenti si ottengono al solito modo.

- $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = I_1 = \emptyset$.
- $E_1^c \cap E_2 \cap E_3 = I_2 = \emptyset$.
- $E_1 \cap E_2^c \cap E_3 = I_3 = \emptyset$.
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3^c = I_4$.
- $E_1^c \cap E_2^c \cap E_3 = I_5$.
- $E_1^c \cap E_2 \cap E_3^c = I_6$.

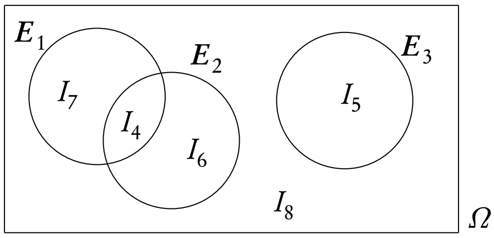


Figura A.1.: *Eventi dell'esempio A.5 e relativi costituenti*

— $E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c = I_7$.
— $E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c = I_8$.

Si ha poi:

$$E_1 = I_4 \cup I_7, \quad E_2 = I_4 \cup I_6, \quad E_3 = I_5.$$

Detto a parole i costituenti (non vuoti) sono individuati dalle seguenti proposizioni.

— I_4 = "la prossima domenica l'Udinese vince segnando 2 goal".
— I_5 = "la prossima domenica l'Udinese non segna".
— I_6 = "la prossima domenica l'Udinese segna due goal ma non vince" (una bella sfortuna!).
— I_7 = "la prossima domenica l'Udinese vince e segna più di due goal" (se non segnasse non potrebbe vincere!).
— I_8 = "la prossima domenica l'Udinese segna più di 2 goal ma non vince lo stesso" (il massimo della sfortuna!).

L'assegnazione di probabilità che abbiamo fatto sarà coerente se, dette x_4, x_5, x_6, x_7 e x_8 le incognite probabilità dei costituenti, si ha

$$\begin{cases} x_4 + x_7 = 0.4 \\ x_4 + x_6 = 0.4 \\ x_5 = 0.4 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{cases}.$$

Anche in questo sistema abbiamo più incognite che equazioni. Ricaviamo x_7 dalla prima equazione, x_6 dalla seconda, dalla terza abbiamo già il valore di x_5, e sostituiamo il tutto nella quarta equazione, ottenendo $x_4 - x_8 = 0.2$. Se proviamo ad assegnare a x_8 il valore 0.1 (un valore basso ci pare corretto per questo evento), otteniamo subito i seguenti valori per le incognite:

$$x_4 = 0.3, \quad x_5 = 0.4, \quad x_6 = 0.1, \quad x_7 = 0.1, \quad x_8 = 0.1.$$

La valutazione fatta è dunque coerente.

Ribadiamo che abbiamo trovato una soluzione, ma ce ne sono sicuramente altre (basterebbe, nel ragionamento di prima, mettere altri valori per x_8, tenendo conto che, per esempio come conseguenza della prima equazione, x_4 non può essere superiore a 0.4): quello che conta per concludere nel senso della coerenza è il fatto che ci sia almeno una soluzione.

In generale non è molto importante conoscere il significato degli eventi costituenti (anzi negli esercizi spesso non si dà nemmeno un esplicito significato agli eventi di cui si assegna la probabilità): quello che conta sono le assegnazioni di probabilità e le relazioni tra gli eventi dati.

A.6. Due esempi apparentemente paradossali

A.6.1. Il problema del compleanno

Il problema si può così formulare: *In una classe di n studenti, di cui nessuno nato il 29 febbraio, qual è la probabilità che due studenti siano nati lo stesso giorno dell'anno?*

Supponiamo naturalmente che $n \leq 365$, altrimenti la risposta è certamente 1. Indichiamo con p_n la probabilità cercata e calcoliamola usando il calcolo combinatorio. In questo, come in molti altri problemi di probabilità, è più agevole calcolare la probabilità contraria, ovvero la probabilità che non ci siano due studenti nati lo stesso giorno.

Cominciamo a considerare il caso di $n = 2$: ci sono 365 giorni in cui può essere nato il primo studente e 364 giorni diversi in cui può essere nato il secondo. In totale ci sono 365^2 coppie di giorni e dunque la probabilità contraria risulta (casi favorevoli su casi possibili)

$$\frac{365 \times 364}{365^2} = \frac{364}{365} = \frac{364 \cdot 363!}{365 \cdot 363!} = \frac{364!}{365^{2-1} \cdot (365-2)!} \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - \frac{364!}{365^{2-1} \cdot (365-2)!}.$$

Con $n = 3$ si ha, in modo sostanzialmente identico,

$$\frac{365 \times 364 \times 363}{365^3} = \frac{364!}{365^{3-1} \cdot (365-3)!} \quad \Rightarrow \quad p_3 = 1 - \frac{364!}{365^{3-1} \cdot (365-3)!}.$$

In generale avremo

$$p_n = 1 - \frac{364!}{365^{n-1} \cdot (365-n)!}.$$

Usando un software di calcolo (potente, perché deve trattare fattoriali molto grandi!) si può provare a fare il calcolo con diversi valori di n. Si ottiene quanto segue.

n	p_n	n	p_n
2	0.00274	19	0.37912
3	0.00820	20	0.41144
4	0.01636	21	0.44369
5	0.02714	22	0.47570
6	0.04046	23	0.50730
7	0.05624	24	0.53834
8	0.07434	25	0.56870
9	0.09462	26	0.59824
10	0.11695	27	0.62686
11	0.14114	28	0.65446
12	0.16702	29	0.68097
13	0.19441	30	0.70632
14	0.22310	40	0.89123
15	0.25290	50	0.97037
16	0.28360	60	0.99412
17	0.31501	70	0.99916
18	0.34691	80	0.99991

Come si può notare, già con una classe di 23 studenti si supera il 50% di probabilità, con 80 si ha la quasi certezza. Qualche esempio concreto può verificare la bontà statistica di questo calcolo.

— Nella squadra del Brasile ai mondiali 2014 Jose' Paulo Bezerra Junior Paulinho e Givanildo Vieira de Souza, noto come Hulk, sono entrambi nati il 25/07, proprio su 23 convocati.
— Nella squadra della Sud Corea ai mondiali 2014, Kwak Tae-Hwi e Son Heung-Min sono nati entrambi l'8 luglio, ancora su 23 convocati.
— Nella squadra dell'Argentina ai mondiali 2014, Fernando Rubén Gago e Augusto Matías Fernández sono nati entrambi il 10 aprile, inoltre Sergio Germán Romero e Enzo Nicolás Pérez sono nati entrambi il 22 febbraio, ancora una volta su 23 convocati.

A.6.2. Il paradosso del secondo figlio

Il quesito, proposto nella sua formulazione iniziale da Martin Gardner su Scientific American, è: *Il signor Smith ha due bambini. Almeno uno dei due è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi?*

Intuitivamente la risposta sembra essere la seguente: se, poniamo, il primo bambino è maschio, la probabilità che anche il secondo lo sia è del 50%.

Il fatto è che, come lo stesso Gardner riconobbe, la domanda è posta in modo ambiguo: è facile pensare che con “almeno uno” si intenda “sicuramente uno che ho chiaramente individuato, ed eventualmente anche l'altro”. Una possibile riformulazione equivalente, meno ambigua, è la seguente: “Il signor Smith ha due bambini. Non sono due femmine. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi”?

Con questa formulazione si capisce subito che la probabilità è $1/3$, ovvero il $33.\overline{3}\%$. Infatti i casi possibili sono MM, MF, FM, di cui è favorevole solo il caso MM.

Questo problema è stato proposto, con una leggera variante, anche nel tema d'esame di maturità scientifica del giugno 2010, [vedi 3], suscitando numerose discussioni sulla stampa specializzata e sui siti web, dove molti autori hanno proposto proprio la soluzione del 50% che abbiamo indicato all'inizio.

Attenzione dunque a controllare bene la formulazione di un problema di probabilità!

A.7. Probabilità condizionata

Facciamo un breve cenno all'importante concetto di probabilità condizionata, considerando un esempio.

Esempio A.6. Supponiamo che in un gioco di lancio successivo di due dadi un giocatore scommetta 0.5 sull'evento $E =$"esce un punteggio maggiore o uguale a 7". La probabilità di questo evento può essere calcolata combinatoriamente, valutando che ci sono 21 casi favorevoli su 36 casi possibili. Basta esaminare le tabelle A.1 dove abbiamo riportato sulla sinistra i possibili risultati dei lanci e sulla destra il punteggio complessivo corrispondente. Si ha dunque $P(E) = 21/36 = 7/12 \simeq 0.58$. Tenendo conto di questo calcolo la scommessa pare azzardata (anche se è comunque coerente dal punto di vista delle condizioni tipiche della probabilità) e probabilmente nessun banco la accetterebbe.

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Tabella A.1.: *Lancio di due dadi e punteggi corrispondenti*

Se il primo dado realizza 1 sarà ancora conveniente per il giocatore mantenere la scommessa o gli converrà cercare di convincere il banco a farsi restituire la posta (richiesta che sarà quasi sicuramente respinta!) rinunciando alla scommessa? Il problema è che, *essendosi verificato* l'evento, che possiamo indicare con H, "al primo lancio esce 1", la situazione è completamente diversa: c'è ora una sola possibilità di vincita per il giocatore, in quanto per avere il punteggio di 7 dovrebbe uscire necessariamente il 6: la probabilità in questa nuova situazione si è ridotta ad $1/6 \simeq 0.17$. Attenzione: *non* è corretto affermare che la probabilità dell'evento E si è ridotta a 0.17, in quanto 0.17 è la probabilità di un diverso evento, che indicheremo con $E|H$, che si può formulare con la proposizione "in un lancio successivo di due dadi si ottiene il punteggio 7 se dopo il primo lancio si è ottenuto 1".

È importante segnalare che l'evento $E|H$ *non* è l'intersezione tra gli eventi E ed H. Infatti $E \cap H$ è vero quando sono veri sia E che H ed è falso in tutti gli altri casi, ma questo quando ancora non si sa nulla sull'esito della prova. Nel caso di $E|H$, invece, si sa già che H si è verificato: perché $E \cap H$ sia vero occorre che siano veri entrambi, senza avere certezza su nessuno dei due, perché $E|H$ sia vero basta che sia vero E, in quanto H è sicuramente vero. Basta provare a calcolare la probabilità $P(E \cap H)$ per rendersi conto di questo. L'evento $E \cap H$ è individuato dalla proposizione "esce un punteggio maggiore o uguale a 7 e contemporaneamente un 1 al primo lancio". Rivedendo la tabella A.1 ci si rende immediatamente conto che per questo evento c'è un solo caso possibile, ovvero la coppia $(1,6)$: la probabilità è dunque $1/36$, molto meno della probabilità dell'evento $E|H$.

Si possono considerare esempi in cui l'aumento di conoscenze aumenta la probabilità, altri in cui la probabilità non viene alterata. Quello che qui ci preme segnalare è che la situazione descritta è molto comune e tipica nelle applicazioni del calcolo delle probabilità, anzi la regola che è possibile stabilire per casi come questi fa aumentare enormemente le possibilità di applicazione del calcolo delle probabilità: in pratica equivale a dire che la valutazione della probabilità di un evento che, lo ricordiamo, è una misura del grado di fiducia sul verificarsi dello stesso, si può modificare "apprendendo dall'esperienza", come abbiamo detto fin dall'inizio.

A.8. Cenno all'inferenza probabilistica

La forma di ragionamento[6] valida nella cosiddetta *logica del certo*, ovvero la logica propriamente detta, è quella del *ragionamento deduttivo*. In sostanza con il ragionamento non si può giungere a conclusioni certe, se non provando che sono contenute in fatti già noti: il particolare deve discendere dal generale. Almeno in linea di principio in questo modo non si può giungere ad ampliare effettivamente il campo delle conoscenze: è solo possibile esplicitare qualche proprietà già implicitamente acquisita, ma non ancora evidente. In una teoria matematica, per esempio, tutti i teoremi dimostrati non sono altro che esplicitazione di proprietà già contenute negli assiomi. Il *ragionamento induttivo*, invece, basato sulla *logica dell'incerto*, ovvero sul Calcolo delle probabilità, permette di ampliare realmente le conoscenze e di raggiungere conclusioni generali, ma incerte, a partire da osservazioni particolari.

Un esempio, banale, per illustrare la differenza tra i due tipi di ragionamento potrebbe essere il seguente.

Ragionamento deduttivo

1. Nella pasticceria XX i dolci venduti sono tutti ottimi.
2. Sono andare a comprare dolci nella pasticceria XX.

Quindi

3. Ho comprato dolci ottimi.

Ragionamento induttivo

1. Mercoledì scorso nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
2. Giovedì scorso nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
3. Ieri, venerdì, nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
4. Oggi nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.

Quindi

5. Domani, quando andrò nella pasticceria XX mi venderanno dolci ottimi.

[6] Alcuni dei concetti esposti in questo paragrafo sono desunti dal paragrafo 10.1 di [12].

È chiaro che la prima conclusione è *certa*, date le premesse, la seconda è *incerta*: c'è una probabilità che sia vera, alta secondo il grado di fiducia che posso avere acquisito in base alla mia esperienza, ma non uguale a uno. Inoltre, se per caso oggi mi servissero dolci scadenti il mio grado di fiducia e quindi la mia valutazione di probabilità sulla "bontà dei dolci", cambierebbe sicuramente.

Proponiamo un secondo esempio, preso dalla geometria, la "regina" delle teorie deduttive: "la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto".

Nella geometria di Euclide si ragiona sostanzialmente nel modo seguente: introduco i concetti di punto, retta, piano, ipotizzando che tra di essi valgano certe relazioni (assiomi). A questo punto posso *definire* un triangolo e, solo sulla base di quelle relazioni e senza riferimento ad alcuna situazione concreta, posso concludere che la somma degli angoli interni deve essere un angolo piatto. In sostanza il fatto che la somma degli angoli interni sia un angolo piatto è già contenuta negli assiomi, solo che la cosa non era esplicitamente evidenziata.

Un ragionamento induttivo potrebbe invece essere il seguente. Consideriamo un triangolo equilatero e utilizziamo piastrelle con questa forma per ricoprire un pavimento, costruendo con esse esagoni regolari (un classico ed elementare problema di tassellazione): siccome occorrono sei mattonelle triangolari per coprire un angolo giro, ciascuno degli angoli al centro deve essere un sesto dell'angolo giro: se ne deduce che la somma dei tre angoli del triangolo deve essere tre sesti di angolo giro, cioè un angolo piatto. Si veda la figura A.2.

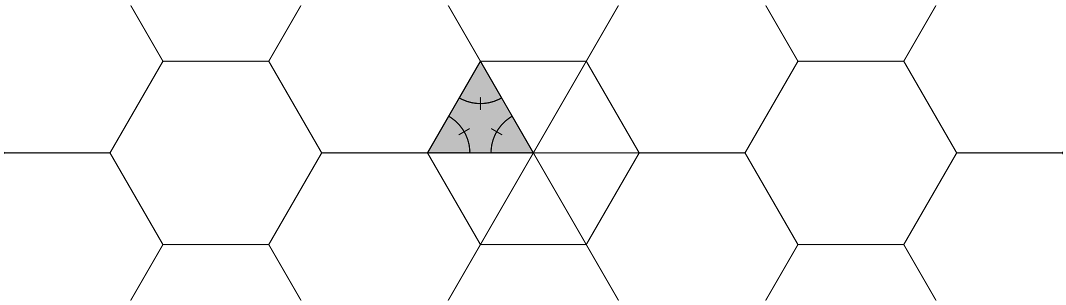


Figura A.2.: *Somma degli angoli interni in un triangolo equilatero*

In modo analogo si può ragionare su un triangolo rettangolo (che è la metà di un rettangolo, in cui la somma degli angoli è banalmente quattro retti) o in un triangolo isoscele (basta dividerlo a metà in due triangoli rettangoli mediante l'altezza e poi togliere l'angolo piatto che si viene a formare a destra e sinistra dell'altezza): si veda la figura A.3. Procedendo su questa strada si può anche considerare un triangolo qualunque, dividendolo in due triangoli rettangoli mediante una delle altezze che è sicuramente interna al triangolo stesso, ma è chiaro che si tratta di un procedimento basato su considerazioni visive di triangoli che possono cadere sotto la nostra esperienza sensibile.

Se seguiamo questo procedimento induttivo e consideriamo un triangolo enorme che abbia come vertici, per esempio, tre stelle fisse, non potremo avere alcuna certezza sul fatto che la somma degli angoli interni sia ancora un angolo piatto, e potremo solo attribuire a questo fatto una probabilità che misuri, come al solito, il nostro grado di fiducia sulla verità di questa affermazione.

Seguendo invece il ragionamento deduttivo non dovremo preoccuparci di questo fatto: se un oggetto è un triangolo (e dove abbia i tre vertici è del tutto ininfluente), allora la somma degli angoli interni *deve* essere un angolo piatto. Si noti che oggi noi sappiamo che a questo tipo di triangoli "enormi" non si

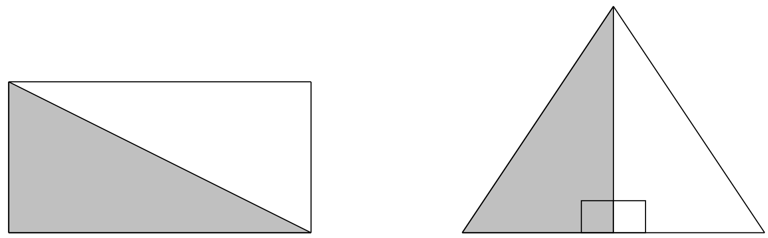


Figura A.3.: *Somma degli angoli interni in triangoli rettangoli e isosceli*

può applicare la geometria di Euclide, ma questo è un altro problema: nella teoria euclidea è corretto dedurre che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, mentre il fatto che poi questo risultato possa essere applicato a oggetti del mondo reale è un problema di cui il geometra non si interessa affatto.

È anche opportuno segnalare il fatto che l'affermazione che, in una teoria deduttiva, i risultati via via ottenuti sono già contenuti negli assiomi, non implica affatto che non ci debba essere ricerca.

Infine è interessante notare che il concetto di *dimostrazione*, cardine delle teorie deduttive, è oggi soggetto a profonda revisione, e anche qui la logica dell'incerto ci mette lo zampino. Proponiamo due esempi per chiarire questo fatto.

Il teorema enorme

Si tratta di un famoso teorema di classificazione dei gruppi semplici. Non vogliamo entrare nei dettagli del suo contenuto, cosa che del resto sarebbe impossibile in questo contesto; quello che qui ci interessa segnalare è legato al nome con cui è spesso citato: il "teorema enorme", appunto. Si tratta senza dubbio del più grande teorema che la matematica abbia mai conosciuto: la dimostrazione originale occupa circa 15000 (si, proprio *quindicimila*) pagine sparse in oltre cinquecento articoli di riviste di matematica, e ha richiesto il contributo di un centinaio di matematici e quarant'anni circa di lavoro. Un gruppo di ricercatori sta oggi lavorando per ridurre questa sterminata mole di materiali a dimensioni più ragionevoli, ma pare che non si potrà andare al di sotto delle cinquemila pagine. La dimostrazione di questo teorema soddisfa nella sostanza l'idea che noi abbiamo di dimostrazione, ma è altamente improbabile che possa essere rifatta da una sola persona, seguendo rigorosamente il metodo del ragionamento ipotetico-deduttivo (nemmeno, probabilmente, se uno volesse fare solo questo nella sua vita!).

È interessante, a proposito di questo teorema, quanto scrive Michael Aschbacher, l'uomo che contribuì in maniera decisiva alla dimostrazione (citazione presa da [6]):

> Io sono scettico sulla possibilità che possa mai apparire in futuro una dimostrazione breve (di questo teorema) di qualsiasi tipo. Le dimostrazioni lunghe infastidiscono i matematici. Da un lato più la dimostrazione è lunga, maggiore è la probabilità di errore. La probabilità di errore nella dimostrazione del teorema della classificazione è praticamente uguale ad 1. D'altro canto la probabilità che non si riesca a correggere ogni singolo eventuale errore è praticamente zero, e poiché la dimostrazione è finita, la probabilità che il teorema sia sbagliato è prossima a zero. Con il passar del tempo e con la possibilità di assimilare

> la dimostrazione, il grado di affidabilità può solo aumentare. Forse è anche il caso di considerare la possibilità che esistano teoremi naturali fondamentali che possono essere formulati in modo conciso, ma che non ammettono una dimostrazione breve e semplice. Ho la sensazione che il teorema di classificazione sia uno di questi. Man mano che la matematica diventa più sofisticata, sarà sempre più probabile imbattersi in teoremi del genere.

Quello che ci interessa qui segnalare è il fatto che, in un contesto di stretta teoria deduttiva, si parli diffusamente di probabilità che una dimostrazione sia sbagliata, cosa che sarebbe stata impossibile nel testo di Euclide.

Per evitare che qualcuno pensi che un teorema del genere non ha alcun interesse pratico segnaliamo solo la sua importanza nella progettazione di sistemi di codici autocorrettori, cioè metodi per codificare le informazioni in grado di compensare le distorsioni e le perdite occasionali, argomento oggi di grandissima attualità.

Solo a titolo di curiosità, per chiarire almeno in parte una delle difficoltà della dimostrazione, rileviamo che nel corso dei lavori ci si è trovati a trattare un gruppo con

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \simeq 10^{53}$$

elementi!

Il teorema dei quattro colori

Questo teorema nasce da un problema squisitamente "grafico": quanti sono, al minimo, i colori necessari per colorare una qualunque carta geografica in modo che due regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore (tranne, ovviamente quando si toccano solo in un punto)? Questo problema nasce da un'osservazione quasi casuale di Francis Guthrie (il problema è, per questo, anche noto come problema di Guthrie) nel 1852 e diventa un problema "ufficiale" nel 1878, quando Arthur Cayley ne parla in una riunione della London Mathematical Society. La dimostrazione che quattro colori sono sempre sufficienti, dopo una lunga serie di insuccessi e di false[7] dimostrazioni (una delle più famose è quella di Alfred Bray Kempe, pubblicata nel 1879 e demolita da Percy John Heawood una decina d'anni dopo), avviene ad opera di due matematici dell'Università dell'Illinois, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, nel 1976.

La cosa interessante per noi non è la dimostrazione in sé, che non potremmo seguire, quanto il metodo utilizzato per arrivarci. Sorvolando sui dettagli e semplificando un po' (forse anche un po' troppo!), l'idea è questa: *mediante una serie di ragionamenti e deduzioni logiche si riduce la prova ad un numero finito* (purtroppo enorme) *di casi e si fanno fare i conti su questi casi ad un calcolatore*.

La cosa cruciale in questo modo di procedere è che il lavoro richiesto al calcolatore è tale che nessun essere umano potrà mai verificare a mano la correttezza del risultato: il concetto stesso di dimostrazione come noi lo abbiamo sempre pensato, viene a crollare. Come dice Keith Devlin, "La matematica, da quel momento, non è più la stessa. [...] L'intero concetto di dimostrazione matematica è improvvisamente cambiato e un'eventualità profilatasi minacciosamente fin dall'epoca dei primi sviluppi degli elaboratori elettronici, all'inizio degli anni cinquanta (del 1900), si è finalmente concretizzata: il calcolatore ha soppiantato il ricercatore nella costruzione di una parte di una dimostrazione matematica". È un po' come dire che la logica dell'incerto ha esteso le sue ramificazioni anche nella logica del certo!

[7] Ancora una volta emerge il problema della probabilità che una dimostrazione matematica sia falsa!

Anche qui riteniamo giusto segnalare che questo teorema, che ha impegnato i matematici per oltre centovent'anni, è importante non solo per motivi teorici, ma anche per le sue numerose applicazioni, in particolare nella teoria dei grafi e in tutto quello che ne consegue nell'informatica.

Torniamo ora a considerare il ragionamento induttivo, osservando, anche sulla base degli esempi considerati, che un tale tipo di processo implica una gradualità, poiché le premesse riguardano un numero finito di casi e non la totalità dei casi: la conclusione che deriva dalle premesse è solo supposta e possiamo solo valutarne il grado di attendibilità, cioè la probabilità che essa sia vera.

Il campo dell'induzione si estende ad ogni ambito e ogni livello: dal vaglio di argomenti pro e contro l'attendibilità di diverse teorie scientifiche o pro e contro la colpevolezza di un indiziato di un crimine, ai metodi per ottenere valutazioni ragionevolmente precise di una grandezza mediante misure necessariamente imprecise.

Particolarmente istruttivo è pensare al processo con cui nuove concezioni o *ipotesi* scientifiche vengono formulate in base a intuizioni suggerite da qualche particolare fatto osservato e poi discusse in base a nuove risultanze che dovranno essere confrontate con le previsioni offerte dalla teoria.

A questo proposito si può fare riferimento al modo in cui la teoria della gravitazione universale è entrata nella teoria fisica moderna. In un libro[8] del 1752 William Stukeley, uno dei contemporanei di Newton, racconta la "storia della mela" riferendo di un colloquio avuto con Sir Isaac Newton ai piedi di un melo.

> Mi raccontò che era nella stessa situazione quando gli venne l'idea della gravitazione. Osservando una mela cadere, si chiese: perché scende sempre perpendicolare al terreno?. Era la Terra ad attrarla. Ci deve essere una forza di attrazione nella materia.

La storia fu poi arricchita di particolari curiosi, come per esempio il fatto che la mela cadde in testa a Newton, invece di cadergli a fianco.

L'osservazione della caduta della mela, assieme ad altre osservazioni, portò Newton alla formulazione dell'ipotesi della gravitazione universale. Sulla base di questa ipotesi furono fatte delle previsioni, per esempio sul moto parabolico di un proiettile, sul moto dei pianeti attorno al sole, ecc. e, successivamente, da tutti gli scienziati furono fatti numerosi esperimenti e calcoli per verificare queste previsioni, esperimenti che hanno modificato le valutazioni di probabilità sulla veridicità dell'ipotesi, aumentandole notevolmente fino ai tempi più recenti e indebolendole[9] solo per esempio dopo l'avvento della teoria della relatività generale.

Possiamo schematizzare questo processo con un paradigma logico induttivo che può essere sintetizzato come segue.

1. Sono stati osservati dei fatti, indichiamoli con le lettere A, B, ... (caduta della mela), e identifichiamoli con degli eventi.
2. Per spiegare tali fatti viene avanzata (o vengono avanzate) delle ipotesi (legge di gravitazione universale), che possiamo denotare con le lettere H_1, H_2, ecc., e possiamo ancora identificare con eventi alla cui veridicità attribuiamo una certa probabilità $P(H_1)$, $P(H_2)$, ... Tali ipotesi implicano anche il verificarsi di altri eventi D, E, ecc., (moto dei proiettili, moto dei pianeti) le cui probabilità indichiamo con $P(D|H_1)$, $P(D|H_2)$, $P(E|H_1)$, ecc.

[8] *Memoirs of Sir Isaac Newton's Life*, di cui recentemente (2010) la Royal Society ha messo a disposizione la versione digitale.

[9] In realtà più che di indebolimenti della probabilità di veridicità, si tratta di precisazioni sull'ambito di validità dell'ipotesi stessa.

3. Effettuiamo degli esperimenti per osservare D, E, ..., e aggiorniamo, di conseguenza, le valutazioni di probabilità delle ipotesi. Per questa valutazione abbiamo a disposizione i teoremi del calcolo delle probabilità.

Il passaggio chiave è dunque la nozione e la valutazione di probabilità condizionata e l'uso dello schema induttivo per incorporare ogni nuova informazione acquisita sperimentalmente (o magari anche accidentalmente).

Il ragionamento induttivo dunque ci insegna come imparare dall'esperienza, senza creare dal nulla un'opinione, ma aggiornando opinioni precedentemente formulate. Naturalmente il risultato finale non ci permette di decidere definitivamente per un'ipotesi: non si può mai essere certi, nell'accettare una spiegazione plausibile, che non ce ne sia un'altra almeno altrettanto plausibile. Nel caso della gravitazione universale la teoria di Newton è plausibile per un gran numero di fenomeni, ma altrettanto lo è, per gli stessi fenomeni e molti altri, la teoria della relatività generale. Il fatto poi che la teoria della relatività generale sia compatibile con più fenomeni non ci induce affatto a ritenere completamente falsa la teoria di Newton.

B. Come è stata progettata questa dispensa

L'invenzione dell'arte tipografica è stata una gran brutta trovata! La natura aveva saggiamente disposto che le sciocchezze degli uomini fossero passeggere, ed ecco che i libri le rendono immortali.
Montesquieu (1689-1755)

Poiché questa dispensa è rivolta a studenti di un corso di Design, ci è parso utile fornire almeno alcune sommarie indicazioni su come è stata progettata e sulle scelte grafiche di realizzazione.

Il software utilizzato per il testo e per tutte le figure "matematiche" è LaTeX 2_ε, che ormai è diventato lo standard nella produzione di questo tipo di materiali.

LaTeX è un linguaggio utilizzato per la composizione di testi, in particolare, ma non solo, di testi scientifici, e permette di ottenere risultati professionali: impaginazione, tabelle, grafici, note, bibliografia e tutto quello che comunemente trovate su un testo può essere realizzato direttamente sul proprio computer, con un po' di fatica iniziale per apprendere i rudimenti, fatica decisamente compensata dalla qualità dei prodotti che si riescono ad ottenere.

La differenza fondamentale tra LaTeX e gli altri software di videoscrittura è che questi ultimi si basano sul paradigma WYSIWYG (What You See Is What You Get: cioè che vedi è ciò che ottieni), mentre con LaTeX il paradigma è WYSIWYM ((What You See Is What You Mean: ciò che vedi è ciò che tu intendi ottenere). Si tratta di un vero e proprio linguaggio di programmazione, orientato alla produzione di testi scritti, anche se il suo apprendimento non richiede certo le fatiche comunemente previste per studiare linguaggi come C, Java, Basic o simili.

La cosa importante di questo approccio è che, una volta progettata la struttura del testo che si vuole produrre, ci si può concentrare sui contenuti, lasciando al software il compito di fare il resto. La necessità di una accurata programmazione preliminare della struttura, lungi dall'essere una complicazione, garantisce invece uniformità di risultati e la possibilità di cambiare integralmente la struttura stessa senza intervenire sui contenuti.

Un esempio di quanto importante sia l'uniformità nella presentazione grafica di un testo è legata allo stile dei titoli, sottotitoli, ecc. La quasi totalità dei software di videoscrittura permette oggi la definizione di opportuni stili, cosa che dovrebbe risolvere alla radice il problema. Purtroppo però la facilità con cui si può "cambiare in corsa" uno stile, produce effetti spesso disastrosi dal punto di vista estetico. In un software come LaTeX, invece, la modifica di stile di un titolo o sottotitolo, una volta impostato il valore di default per quel documento, non è praticamente possibile su un singolo caso, cosa che sconsiglia chiunque dal farlo. Per contro la modifica globale è invece sostanzialmente elementare.

C'è inoltre un'altra importante considerazione da fare. La quasi totalità delle persone che scrivono dispense e articoli in formato pdf da distribuire in rete *non* è costituita da tipografi professionisti e quindi non conosce le regole di base di una buona composizione tipografica. LaTeX, a questo proposito, è di enorme aiuto, in quanto propone una vasta classe di modelli (detti *classi* di documento) predefiniti che soddisfano tutte le esigenze, anche quelle più sofisticate: scelto un modello e qualche semplice opzione all'interno del modello, tutto il resto sarà praticamente automatico. È abbastanza interessante quanto scrive, a questo proposito, Peter Wilson, un esperto di LaTeX, nonché di composizione tipografica, in *The Memoir Class for Configurable Typesetting*, un manuale d'uso per una categoria di classi di documento da produrre con LaTeX.

> L'essenza di un libro ben stampato è che non si fa notare al primo, o addirittura al secondo o successivo, sguardo di chiunque non abbia un occhio allenato. Se la vostra prima reazione nello sfogliare un libro è di fare un'esclamazione di meraviglia osservando il layout, allora il libro è molto probabilmente mal progettato, se mai è stato progettato. La stampa di qualità è raffinata, non stridente.
>
> Con l'avvento del desktop publishing molti autori hanno la tentazione di progettare da soli i loro testi. Sembra molto facile farlo. Basta scegliere alcune delle migliaia di font disponibili, usarne uno per i titoli, uno per il testo principale, un altro per le didascalie, decidere le dimensioni dei caratteri, e la cosa è fatta.
>
> Tuttavia, come scrivere è un'abilità che bisogna apprendere, anche comporre tipograficamente un testo è un'arte che si deve apprendere e su cui bisogna esercitarsi. Ci sono centinaia di anni di esperienza racchiusi nel buon design di un libro. Essi non possono essere trascurati con leggerezza e molti autori che progettano i loro libri non conoscono alcune delle conquiste più importanti, per non parlare del fatto che quello che fanno è esattamente in antitesi con esse. Un esperto può infrangere le regole, ma allora sa che ha delle buone ragioni per farlo.
>
> ...Se un libro grida 'guardami', questo è un avviso, e un pessimo avviso, per chi l'ha progettato.

In effetti se si controlla, in genere in seconda di copertina, l'elenco delle persone che hanno contribuito alla realizzazione di un testo, si può trovare una lunga serie di voci: l'autore o gli autori (che sono responsabili dei contenuti), gli esperti di progettazione grafica (in genere diversi per la copertina e le pagine interne), gli esperti di composizione tipografica e di impaginazione, i realizzatori dei disegni tecnici, i realizzatori delle altre immagini, una serie di revisori dei testi, di revisori linguistici, di correttori di bozze, ecc. Tutto questo testimonia i problemi che ci si trova ad affrontare nello scrivere un testo: è per questo che è meglio affidarsi ad un software professionale e non tentare di fare da sè. Non è quasi mai vero che "chi fa da sè per tre".

Di seguito alcune indicazioni più spicciole sui motivi che dovrebbero spingere a usare in particolare questo software.

— LaTeX è un software completamente gratuito, in continua evoluzione grazie al lavoro di migliaia di appassionati sparsi in tutto il mondo e, nel suo motore, è uno dei pochi software virtualmente "bug free".
— LaTeX è un software multipiattaforma: poiché il sorgente è un semplice file di testo (che addirittura potrebbe limitarsi a usare i caratteri ASCII di base), esso può essere letto con qualunque sistema operativo. In tempi in cui i sistemi elettronici di archiviazione stanno prendendo sempre più piede, avere un prodotto i cui contenuti saranno sicuramente leggibili anche in un lontano futuro[1] è

[1] È noto a tutti che un documento digitale prodotto con un certo software non è in generale leggibile da un altro software e questo può creare notevoli problemi di "recupero dei contenuti di un file", problemi che sono sempre accuratamente trattati dalle varie normative: vedi ad esempio lo standard PDF/A (pdf Archiviabile), previsto dalla normativa ISO 19005-1 : 2005, proprio per garantire la futura leggibilità dei documenti pdf sostitutivi dei documenti cartacei.

una condizione di privilegio non secondaria. I documenti scritti in LaTeX producono direttamente output in pdf e volendo addirittura in PDF/A.

— LaTeX può essere usato anche per disegnare, fare tabelle e grafici, fare presentazioni, produrre file pdf con animazioni, ecc.

— LaTeX rende estremamente facile il lavoro a più mani, ovvero il lavoro collaborativo per la produzioni di documenti complessi: poiché ciascun collaboratore deve solo preoccuparsi dei contenuti, non ci saranno problemi di alcun genere nell'assemblare i vari file prodotti, e ci sarà l'assoluta certezza di uniformità di stile.

A proposito dell'uso di LaTeX per disegnare e produrre grafici è opportuno segnalare che questo fatto ha degli enormi vantaggi rispetto alla produzione di disegni e grafici mediante appositi software dedicati. Anche se i software dedicati possono produrre output altamente professionali e con estrema rapidità, rimane il grosso problema dei font utilizzati. Come si può constatare sfogliando questa dispensa, per esempio nella pagina 13, tutti grafici di contenuto matematico contengono sempre del testo ed è opportuno che il tipo di font utilizzato e le dimensioni dello stesso siano identiche a quelle del testo. La cosa è automatica se il grafico è prodotto con LaTeX, mentre risulta difficile o quasi sempre impossibile se il grafico è prodotto con un programma esterno. Inoltre, un eventuale cambio di font o di dimensioni dello stesso viene gestita automaticamente se il grafico è prodotto con LaTeX, mentre richiede una nuova elaborazione se il grafico è prodotto con un programma esterno.

La questione del "cambio in corsa" di font è particolarmente importante per le formule matematiche. Se un software di videoscrittura si appoggia ad un'applicazione esterna per produrre le formule matematiche, un cambio di font nel testo non si rifletterà in un analogo cambio nelle formule; se invece, come accade in LaTeX, la scrittura delle formule matematiche è incorporata nello stesso software, non ci saranno problemi.

Un'altra piccola, ma significativa, chicca che può fornire di default LaTeX: il problema delle legature. Una spaziatura variabile più corretta tra i caratteri comporta alcuni inconvenienti. Ad esempio, per comporre in maniera corretta le due lettere "f" ed "i", la "i" dovrebbe trovarsi strettamente legata alla "f", ma il problema è che questo provocherebbe sia una collisione tra il punto sopra la "i" e la stessa "f", sia una sovrapposizione (anche parziale) tra la grazia presente all'estremità superiore della "i" e il trattino situato a metà della "f". Per ovviare a questo inconveniente si includono caratteri supplementari all'interno delle collezioni di fonts: le cosiddette *legature*. In questo modo la stringa "fi" composta da due caratteri viene sostituita all'occorrenza da un unico carattere (la legatura), disegnato appositamente, che evita sia la sovrapposizione, che la collisione maldestra tra le due lettere "f" ed "i". Problema simile per "f" ed "l". Oggigiorno la maggior parte dei font include i caratteri di legatura "ﬁ", "ﬂ", "ﬀ", "ﬃ", "ﬄ". Si veda la figura B.1.

f i	f l	f f	f f i	f f l
ﬁ	ﬂ	ﬀ	ﬃ	ﬄ

Figura B.1.: *Legature*

E veniamo ad alcune indicazioni sulla struttura vera e propria che è stata scelta per questo documento e su alcune scelte di carattere personale.

Riportiamo qui di seguito con un certo dettaglio queste scelte, anche per mostrare quali sono i problemi che ci si trova a dover affrontare nel progettare con criterio un testo.

1. La classe di documento scelta (sostanzialmente il modello base del documento) si chiama *scrbook* e prevede alcune cose standard.
   - I capitoli hanno, quando serve, una numerazione progressiva, seguita dal titolo del capitolo, senza l'esplicita dicitura "Capitolo n."
   - I paragrafi hanno una numerazione costituita dal numero del capitolo seguito da un punto e poi dal numero progressivo del paragrafo. E così per i sottoparagrafi. Divisioni più fini non sono numerate.
   - Seguendo la prassi, alcuni capitoli non hanno una numerazione (Premessa, Notazioni utilizzate, Bibliografia). Le appendici, inoltre hanno una numerazione speciale con lettere dell'alfabeto, anziché numeri.
   - Le dimensioni e lo stile dei caratteri dei vari titoli (capitoli, paragrafi, ecc.) sono scelti in automatico una volta impostata la dimensione del font utilizzato.
   - Le pagine iniziali (il *frontmatter*) prima dell'inizio vero e proprio del testo, e cioè le pagine di copertina, gli indici, la premessa, hanno una numerazione separata dal testo vero e proprio in numeri romani minuscoli.
   - Gli indici (generale, analitico, delle figure) sono prodotti e formattati in automatico, con l'indicazione che il numero di pagina deve comparire accanto ad ogni voce, senza la presenza di puntini e non allineato a destra, come succede spesso.
2. Il modello di documento prevede poi la scelta di alcune opzioni.
   - La famiglia e la dimensione dei caratteri (*Garamond* e 11 pt).
   - Le dimensioni della pagina (A4).
   - Il fatto che il documento sarà stampato in fronte retro.
   - Il fatto che i capitoli si aprano sempre sulla pagina destra (cioè sulla pagina dispari).
   - Le dimensioni della pagina, che vengono scelte in modo semiautomatico, indicando solo quanto si vuole che la pagina sia riempita. In questa scelta si indica anche un eventuale margine per la rilegatura. Le dimensioni della pagina sono calcolate facendo in modo che, aprendo il testo ad un certo punto con una pagina stampata a sinistra e una a destra, i margini bianchi sinistro, centrale (che è doppio) e destro sia identici.
   - Il tipo di testatine e di pié di pagina e il fatto che esse siano separate dal testo mediante una linea di spessore 0.4 pt. Le testatine e i pié di pagina sono diversi per le pagine pari e per le pagine dispari (le pagine pari si aprono a sinistra, quelle dispari a destra). Le testatine contengono il titolo del capitolo (estrema sinistra), del paragrafo (estrema destra), del volume (al centro sia a sinistra che a destra); i pié di pagina contengono il numero di pagina (all'esterno sinistro e destro), un riferimento al sito web dell'autore (al centro sia della pagina pari che della pagina dispari), il nome dell'autore (al centro sia a sinistra che a destra). La pagina iniziale di ogni capitolo non contiene testatine.
   - La scelta del modo come sono scritte le didascalie delle figure e delle tabelle.
3. Si è poi provveduto ad alcune indicazioni sul modo di scrivere le formule matematiche, sulla posizione (a sinistra) del numero progressivo delle formule che hanno la necessità di numerazione.

4. Un'altra scelta riguarda lo stile degli elenchi puntati o numerati. In particolare per gli elenchi puntati si è scelto di sostituire il "punto elenco" con una linea "—", secondo le regole dello stile italiano [vedi 9]. Per gli elenchi numerati il numero progressivo è scritto in carattere tondo e non corsivo.
5. Si è poi scelto uno stile per la redazione e composizione della bibliografia, in cui le varie voci compaiono con una numerazione progressiva tra parentesi quadre e le citazioni riportano, sempre tra parentesi quadre, questo numero.
6. Si è scelto che i riferimenti ipertestuali sia tra parti del testo che a link esterni siano evidenziati solo dal colore Royal Blue del testo. A proposito dei riferimenti ipertestuali essi sono generati in modo completamente automatico dal software. Analogo discorso per i riferimenti incrociati e i vari rimandi da una parte all'altra del testo.
7. Nel testo non si è mai fatto uso del grassetto, in accordo con quanto affermato da Peter Wilson e riportato più sopra: il corsivo è ampiamente sufficiente per evidenziare quello che serve.
8. Un'ultima scelta, consentita dal software in uso, è la *microgiustificazione*. In sostanza per ogni riga viene fatta una valutazione sulla possibilità di adattare gli spazi tra le parole e tra le lettere in modo da evitare, per quanto possibile, la divisione delle parole a fine riga.

Naturalmente a tutto questo va aggiunto il lavoro di redazione dei contenuti, di realizzazione di grafici e di immagini, di composizione grafica della copertina e dell'ultima di copertina, di ricerca e studio delle fonti bibliografiche, ma questo è un lavoro che nessun software può fare in automatico!

Buona lettura di questa dispensa!

Notazioni utilizzate

Le notazioni utilizzate in questo testo sono quelle di default nel sistema tipografico LaTeX 2_ε, notazioni che, nella maggior parte dei casi, concordano con quelle previste dalla normativa UNI CEI ISO 80000-2 : 2013. Nella tabella che segue abbiamo riportato, per ragioni di completezza, anche alcuni simboli che non sono stati esplicitamente utilizzati in questo testo.

Segnaliamo inoltre che, nella numerazione dei teoremi, definizioni, osservazioni, ecc., abbiamo scelto di usare una numerazione progressiva per capitolo. Altri testi usano invece numerazioni progressive separatamente per i teoremi, le definizioni, ecc. Si tratta naturalmente solo di una questione di gusto personale.

La scrittura di un testo contenente molta matematica è sempre un'impresa ardua e che richiede molto tempo e fatica. Un aiuto indispensabile è fornito da un sistema di composizione come quello che abbiamo adottato (e che costituisce ormai lo standard de facto per i testi scientifici). Per chi fosse interessato a conoscere LaTeX 2_ε segnaliamo che si tratta di un sistema di composizione tipografica di livello professionale e assolutamente gratuito. Tutte le informazioni utili si possono trovare sul sito ufficiale della comunità degli sviluppatori, `http://www.ctan.org/` e, in lingua italiana, sul sito degli Utilizzatori italiani di TeX e LaTeX, `http://www.guitex.org`. Alcuni manuali introduttivi e consigli per iniziare si trovano anche sul sito personale dell'autore, `http://www.batmath.it`.

Osservazioni

Come già detto, le notazioni usate in questo testo sono quelle previste dalla normativa ufficiale UNI CEI ISO 80000-2 : 2013. Questa normativa in realtà è obbligatoria per chi usa la matematica per motivi tecnici: fisici, ingegneri, ecc. Non esiste obbligo alcuno per i "matematici puri". Riteniamo tuttavia opportuno adeguarsi, indipendentemente dagli obblighi ufficiali, per ragioni di uniformità: in tempi in cui i documenti possono circolare con estrema facilità e in cui i software di calcolo diventano sempre più diffusi, è opportuno evitare, per quanto possibile, ogni possibile ambiguità. Ancora più evidente l'importanza di adeguarsi agli standard in un testo rivolto agli studenti di un corso di design del prodotto.

Elenco delle notazioni

"," - "."	Separatore decimale. Le regole prescrivono l'uso della virgola come separatore decimale nelle lingue diverse dall'inglese, dove invece si deve usare il punto. Tuttavia in questo testo abbiamo preferito fare uno strappo e usare il punto.
$p \wedge q$	p "et" q, congiunzione logica.
$p \vee q$	p "or" q, disgiunzione logica.
$\neg p$	"not" p, negazione.
$p \Rightarrow q$	p implica q.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$p \Leftrightarrow q$	p è equivalente a q.
$\forall$	Per ogni, quantificatore universale.
$\exists$	Esiste, quantificatore esistenziale.
$\exists!$, $\exists^1$	Esiste un solo.
A, B,	Simboli per gli insiemi o per gli eventi.
$x \in A$, $A \ni x$	x appartiene ad A.
$x \notin A$, $A \not\ni x$	x non appartiene ad A.
$\{\, x \in A \mid \mathscr{P}(x) \,\}$	Insieme degli x di A per cui vale la proprietà $\mathscr{P}(x)$.
$\operatorname{card} A$, $\lvert A \rvert$	Cardinalità dell'insieme A.
$B \subseteq A$, $A \supseteq B$	B è un sottoinsieme di A oppure A è un soprainsieme di B; sono tollerate anche le scritture $B \subset A$ e $A \supset B$, ma in questo caso per i sottoinsiemi propri si deve usare $B \subsetneq A$ oppure $B \supsetneq A$. La scrittura $B \subseteq A$ nel caso di eventi si legge B implica A.
$B \subset A$, $A \supset B$	B è un sottoinsieme proprio di A.
$A \cup B$	Unione di insiemi oppure unione di eventi.
$A \cap B$	Intersezione di insiemi oppure intersezione di eventi.
$A \setminus B$	Differenza di insiemi.
$A \vartriangle B$	Differenza simmetrica di due insiemi.
(a, b)	Coppia ordinata; se si usa la virgola come separatore decimale, e se a o b sono numeri con la virgola, va usato il ";" al posto della virgola come separatore della coppia.
$A \times B$	Prodotto cartesiano di insiemi.
$\complement_U A$	Complementare dell'insieme A rispetto all'insieme U.
A^c	Simbolo alternativo per il complementare dell'insieme A rispetto all'insieme universo che è sottinteso. Questo simbolo è usato in particolare per indicare l'evento contrario all'evento A.
$a \overset{\text{def}}{=} b$, $a := b$, $a =_{\text{def}} b$	a è uguale a b per definizione.
$a \propto b$	a è proporzionale a b.
$a \approx b$	a è circa uguale a b.
$a \ll b$	a è molto minore di b.
$a \gg b$	a è molto maggiore di b.
$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{P}$	Insieme dei naturali (compreso lo zero), degli interi, dei razionali, dei reali, dei complessi, dei primi; si possono usare anche i simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, e noi in questo testo abbiamo sempre usato questi; $\mathbf{N}^*$ oppure $\mathbb{N}^*$ indica i naturali senza lo zero (scritture analoghe per gli altri insiemi); $\mathbb{Z}^+$ indica gli interi maggiori o uguali a zero (scritture analoghe per gli altri insiemi); per indicare altre restrizioni si possono usare scritture del tipo $\mathbf{N}_{\geq 3}$, con ovvio significato.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$	Intervallo di reali chiuso, aperto a sinistra, aperto a destra, aperto; la normativa prevede anche i simboli $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) per gli intervalli aperti a sinistra, aperti a destra, aperti: ritengo che questi simboli vadano evitati, soprattutto l'ultimo per la confusione che può sorgere con il simbolo di coppia di reali.
$]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$	Intervallo inferiormente illimitato chiuso, intervallo inferiormente illimitato aperto.
$[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$	Intervallo superiormente illimitato chiuso, intervallo superiormente illimitato aperto.
$a \cdot b$, ab	Simboli usati per la moltiplicazione con operandi letterali.
3×5	Simbolo per la moltiplicazione con operandi numerici. Tuttavia a volte si usa anche il punto centrato come per gli operandi letterali.
A, B, ...	Simbolo per i punti.
AB || CD, r || s	La retta AB è parallela alla retta CD, la retta r è parallela alla retta s.
AB $\perp$ CD, r $\perp$ s	La retta AB è perpendicolare alla retta CD, la retta r è perpendicolare alla retta s.
$\overline{\mathsf{AB}}$	Segmento di estremi A e B.
$d(\mathsf{A},\mathsf{B})$	Distanza tra A e B, lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$. Per la lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ si usa anche la notazione $\lvert\overline{\mathsf{AB}}\rvert$, anche se non prevista nella normativa ISO.
$\mathsf{A}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{B}$	Angolo di vertice O, individuato dalle semirette OA ed OB.
$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(\mathsf{ABC}\dots)$	Area, area della figura di vertici A, B, C, ...
$2p$	Perimetro di un poligono.
$n!$	Fattoriale di n.
$\mathsf{C}_n^k = \binom{n}{k}$	Combinazioni (semplici) di n oggetti di classe k, ovvero coefficienti binomiali.
${}^{\mathsf{R}}\mathsf{C}_n^k$	Combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k.
V_n^k	Disposizioni ("variazioni") semplici di n oggetti di classe k.
${}^{\mathsf{R}}\mathsf{V}_n^k$	Disposizioni ("variazioni") con ripetizione di n oggetti di classe k.
P_n	Permutazioni di n oggetti distinti.
$\mathsf{P}_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$	Permutazioni di n oggetti, di cui n_1 uguali tra di loro, n_2 uguali tra di loro, $\dots n_k$ uguali tra di loro.
$\lvert a\rvert$, $\operatorname{abs} a$	Valore assoluto di a.
$\operatorname{sgn} a$	Segno del numero reale a, definito come segue: $\operatorname{sgn} a = -1$ per $a < 0$, $\operatorname{sgn} a = 0$ per $a = 0$, $\operatorname{sgn} a = 1$ per $a > 0$.
$\min(a,b)$	Minimo di a e b.
$\max(a,b)$	Massimo di a e b.
$\sin x$, $\cos x$	Le funzioni seno e coseno.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$\tan x$	La funzione tangente; evitare la scrittura $\operatorname{tg} x$.
$\cot x$	La funzione cotangente; evitare la scrittura $\operatorname{ctg} x$.
$\sec x$	La funzione secante.
$\csc x$, $\operatorname{cosec} x$	La funzione cosecante.
$\arcsin x$	La funzione arcoseno.
$\arccos x$	La funzione arcocoseno.
$\arctan x$	La funzione arcotangente; evitare la scrittura $\operatorname{arctg} x$.
$\operatorname{arccot} x$	La funzione arcocotangente; evitare la scrittura $\operatorname{arcctg} x$.
$\operatorname{arcsec} x$	La funzione arcsecante.
$\operatorname{arccsc} x$	La funzione arccosecante; evitare la scrittura $\operatorname{arccosec} x$.
$\sinh x$	La funzione seno iperbolico.
$\cosh x$	La funzione coseno iperbolico.
$\tanh x$	La funzione tangente iperbolica.
$\operatorname{arsinh} x$	La funzione inversa del seno iperbolico.
$\operatorname{arcosh} x$	La funzione inversa del coseno iperbolico.
$\operatorname{artanh} x$	La funzione inversa della tangente iperbolica.
$f: A \to B$	Funzione di dominio A e codominio B (B non è l'insieme delle immagini).
$f: x \mapsto f(x)$	La funzione f manda $x \in A$ su $f(x) \in B$; $f(x)$ è un'espressione (di natura qualsiasi) che fornisce il valore della funzione f su x.
e^x, $\exp x$	Esponenziale di x in base e.
a^x, $\exp_a x$	Esponenziale di x in base a.
$\log x$	Logaritmo di x, da usare quando non è necessario precisare la base; da notare che in molti testi (e spesso anche nelle calcolatrici e nei software) questa scrittura è usata per il logaritmo in base 10; purtroppo la stessa scrittura è usata anche in alcuni testi per il logaritmo naturale: è meglio attenersi alla norma ufficiale.
$\ln x$, $\log_{\mathrm{e}} x$	Logaritmo di x in base e.
$\lg x$, $\log_{10} x$	Logaritmo di x in base 10.
$\log_a x$	Logaritmo di x in base a.
$\operatorname{lb} x$, $\log_2 x$	Logaritmo binario (in base 2).

Alfabeto greco

Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	α	A	nu (ni)	ν	N
beta	β	B	csi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	ro	ϱ	R
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	ϑ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	I	fi	φ	Φ
cappa	$\varkappa$	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu (mi)	μ	M	omega	ω	Ω

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph $\aleph$

Bibliografia

[1] A. D. Aczel. *Chance. Dai giochi d'azzardo agli affari (di cuore)*. Milano: Raffaello Cortina, 2005.

[2] G. Avondo-Bodino. *Elementi di calcolo delle probabilità*. Bologna: Zanichelli, 1974.

[3] L. Battaia. «Esame di Stato 2010, seconda prova scritta per i Licei Scientifici a indirizzo sperimentale». In: *Archimede* 4 (2010) (cit. alle pp. 99, 126).

[4] M. Benzi. *Il ragionamento incerto*. Milano: Franco Angeli, 1997.

[5] R. Courant e H. Robbins. *Che cos'é la matematica?* Torino: Boringhieri, 1971.

[6] K. Devlin. *Dove va la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 1994 (cit. alle pp. 105, 129).

[7] M. Emmer. *La perfezione visibile*. Roma-Napoli: Edizioni Theoria, 1991.

[8] A. Fawer. *Improbable*. Bologna: Feltrinelli, 2006 (cit. a p. 36).

[9] R. Lesina. *Il nuovo manuale di stile*. Bologna: Zanichelli, 1994 (cit. a p. 137).

[10] L. Mari. *Inferenza statistico probabilistica*. 2015. URL: `http://www.liuc.it/person/lmari/adss/6.Inferenza_statistico_probabilistica.pdf` (cit. alle pp. 108, 109).

[11] P. Negrini e M. Ragagni. *Probabilità*. Faenza RA: Edizioni C.E.L.I., 1991.

[12] C. Rossi. «Inferenza statistica». In: *Probabilità e statistica nella scuola liceale*. A cura di Ministero della Pubblica Istruzione. Lugo di Romagna: Liceo Scientifico Statale "G. Ricci Curbastro", 1999 (cit. alle pp. 103, 127).

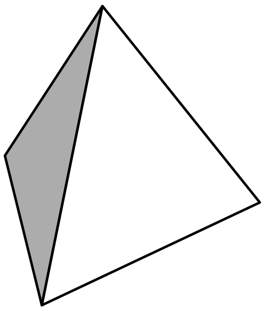
[13] R. Scozzafava. *Incertezza e probabilitá. Significato, valutazione, applicazioni della probabilitá soggettiva*. Bologna: Zanichelli, 2001.

[14] R. Scozzafava. *Primi passi in probabilitá e statistica. Teoria ed esercizi*. Padova: Zanichelli/Decibel, 2000 (cit. alle pp. 35, 113).

[15] J. Toscano. *Training autoegeno in probabilità*. Padova: Zanichelli/Decibel, 2008.

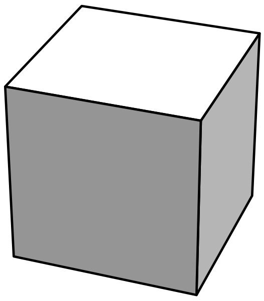
Indice analitico

In ultima di copertina: *I cinque solidi platonici*.



Introduzione alla probabilità

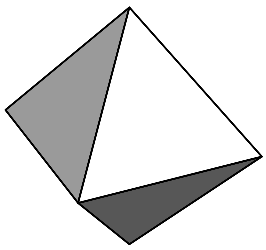
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone



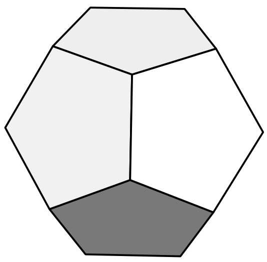
Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.1 del 3 ottobre 2020



Questi appunti sono rivolti agli studenti del primo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. Contengono solo un sunto degli argomenti svolti a lezione a partire dall'Anno Accademico 2015-2016.



Luciano Battaia
Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.