Programma di Analisi Matematica II

Università degli Studi di Trieste - Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Industriale - Sede di Pordenone

Anno Accademico 2010/2011

dott.Luciano Battaia

Serie numeriche e di funzioni

Richiami sulle successioni e le serie numeriche nei reali. Serie numeriche nei complessi. Serie di funzioni. Convergenza semplice, convergenza uniforme, convergenza totale. Convergenza uniforme e continuita. Derivazione e integrazione per serie. Serie di potenze nei reali. Lemma di Abel. Raggio di convergenza. Insieme di convergenza. Derivazione e integrazione nelle serie di potenze. Serie di Taylor. Sviluppabilità in serie di potenze, funzioni analitiche. Gli sviluppi delle funzioni elementari. Le funzioni esponenziale, seno e coseno nei complessi. Le formule di Eulero. Forma esponenziale dei complessi. Periodicità dell'esponenziale complesso. Le serie di Fourier. Alcuni richiami di algebra lineare. Relazioni di ortogonalità e base in $\mathbb{R}^{]-\pi,\pi]}$. Sviluppo di Fourier e teorema di convergenza puntuale. Periodo arbitrario. Forma complessa dello sviluppo di Fourier. Esempi di uso degli sviluppi di Fourier, in particolare con riguardo alle serie di somma $\pi^2/6$, $\pi^2/12$ e $\pi/4$.

Lo spazio $\mathbb{R}^n$

La struttura metrica di $\mathbb{R}^n$. Distanza euclidea e proprietà. Palle aperte e chiuse. Intorni di un punto e proprietà degli intorni. Insiemi aperti. Punti di accumulazione. Punti di aderenza. Insiemi chiusi. Chiusura di un insieme. Proprietà degli aperti. Punti di frontiera e frontiera di un insieme. Ricoprimenti aperti e insiemi compatti. Esempi di insiemi chiusi e limitati ma non compatti. Compatti in $\mathbb{R}^n$. Insiemi compatti per successioni in uno spazio metrico. Funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Limiti e continuità. Continuità e componenti di una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$. Limite all'infinito. Limite infinito per campi scalari. Unicità del limite. Limite delle restrizioni. Permanenze del segno per campi scalari. Immagine di un compatto tramite una funzione continua. Funzioni uniformemente continue e proprietà connesse. Connessione per archi e teorema di connessione. Richiami sulla struttura lineare di $\mathbb{R}^n$. Norma e prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Forme lineari. Teorema di Riesz.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$

Derivate direzioni e derivate parziali per campi scalari e vettoriali. Derivate direzionali. Derivate di ordine superiore. Funzioni di classe C^k. Teorema di Schwartz. Funzioni differenziabili e differenziale (sia per campi scalari che vettoriali). Gradiente di un campo scalare. Piano tangente. Teorema del differenziale totale. Matrice jacobiana per campi vettoriali. Funzioni composte e differenziabilità. Matrice jacobiana e composizione di funzioni. Il differenziale secondo per campi scalari. Matrice Hessiana. Simmetria della matrice Hessiana per funzioni differenziabili. Formula di Taylor (al secondo ordine) per campi scalari.

Curve di $\mathbb{R}^n$ e superfici di $\mathbb{R}^2$, parte prima

Parametrizzazione e sostegno di curve in $\mathbb{R}^n$. Curve equivalenti. Curve semplici, chiuse, regolari. Vettore e versore tangente. Retta tangente. Curve in equazione cartesiana. Teorema di Dini per le curve del piano. Teorema di Dini per le curve dello spazio. Superfici dello spazio. Superfici equivalenti. Linee coordinate su una superficie. Superfici regolari, semplici. Vettore normale e piano tangente. Superfici in equazione cartesiana. Teorema di Dini per le superfici dello spazio. Cenno al teorema di Dini nel caso generale. Insiemi di livello e proprietà. Massimi e minimi vincolati. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e suo significato: esame dettagliato dei casi delle curve nel piano e nello spazio e delle superfici dello spazio. Cenno al caso generale.

Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$

Rettangoli di $\mathbb{R}^n$. Somme integrali inferiori e superiori. Funzioni integrabili secondo Riemann in un rettangolo. Proprietà fondamentali dell'integrale. Teoremi di riduzione per integrali doppi e tripli. Integrabilità delle funzioni continue su rettangoli. Insiemi misurabili del piano e dello spazio e loro misura. Esempio di insieme non misurabile. Integrali su insiemi limitati e misurabili. Insiemi trascurabili. Integrali su insiemi normali. Teoremi di riduzione per integrali su insiemi normali. Significato fisico dell'integrale: massa, baricentro, momento di inerzia. Cambio di variabile negli integrali. Il caso delle coordinate polari, sferiche, cilindriche. Integrali generalizzati su insiemi non limitati e per funzioni non limitate.

Curve di $\mathbb{R}^n$ e superfici di $\mathbb{R}^2$, parte seconda

Integrali di linea e superficie di campi scalari. Lunghezza di una curva e area di una superficie. Parametrizzazione d'arco e proprietà. Integrali di campi vettoriali. Lavoro e flusso. I teoremi di Pappo-Guldino.

Campi vettoriali

Campi conservativi. Potenziale di un campo. Divergenza e rotore. Insiemi semplicemente connessi. Campi irrotazionali. Teorema della divergenza nel piano e nello spazio. Il teorema di Stokes nel piano e nello spazio.

Equazioni differenziali

Motivazioni, esempi e generalità. Ordine di un'equazione. Equazioni ordinarie e alle derivate parziali. Problema di Cauchy. Esistenza e unicità delle soluzioni. Equazioni in forma normale. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine e omogenee. Equazioni lineari del primo ordine e non omogenee. Equazioni di ordine superiore. Equazioni lineari e proprietà. Matrice Wronskiana. Equazioni lineari a coefficienti costanti e omogenee. Equazioni non omogenee e ricerca di un integrale particolare. Equazioni riducibili a lineari o a variabili separabili mediante sostituzioni.

N.B.

Sono espressamente richieste solo le dimostrazioni fatte a lezione.