LUCIANO BATTAIA

MATEMATICA DI BASE

2 - *Esercizi e quesiti a risposta multipla*

www.batmath.it

Matematica di Base
2 - Esercizi e quesiti a risposta multipla

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 6 marzo 2023

La matematica è una meravigliosa apparecchiatura spirituale
fatta per pensare in anticipo tutti i casi possibili.
Robert Musil

Indice

Premessa

In questo secondo volume della serie dedicata alla "Matematica di base" sono proposti esercizi completamente risolti su tutti gli argomenti fondamentali e una raccolta di quesiti a risposta multipla, con indicazione della risposta corretta.

Salvo poche eccezioni non sono proposti esercizi inutilmente complicati, quanto piuttosto esercizi utili a ripassare le proprietà fondamentali.

La suddivisione in capitoli è solo indicativa: trattandosi di esercizi di riepilogo, spesso sono coinvolti diversi argomenti.

Questo manuale è frutto del lavoro di oltre quaranta anni di insegnamento nella scuola media superiore e nei corsi universitari di Analisi matematica, Geometria, Meccanica razionale, Fisica matematica, Matematica e statistica, Matematica generale, Istituzioni di analisi superiore, Matematica di base, delle università di Padova, Udine e Trieste, e tiene anche conto dell'esperienza maturata nella gestione del sito web `www.batmath.it`, e nei relativi rapporti con le migliaia di utenti dello stesso. Come ogni testo di matematica, anche questo non può essere esente da errori, imperfezioni, lacune: chiunque abbia qualcosa da segnalare è pregato di usare l'indirizzo di mail collegato al già citato sito web dell'autore.

Per ulteriori chiarimenti si rimanda alla premessa al volume primo.

1 Numeri. Algebra elementare

Esercizio 1.1. *Trovare* 3 *numeri reali* a*,* b *e* c *tali che per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *valga la seguente identità*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c).$$

Il polinomio a primo membro ammette radici reali?

Risoluzione. Si tratta di un quesito estremamente interessante: il polinomio che compare a primo membro non è facilmente scomponibile in termini elementari in quanto è di quarto grado e non ha, come vedremo, radici reali, in particolare non ne ha di razionali come si può constatare immediatamente (le uniche ammissibili sarebbero ± 1 che non vanno bene). Ricordiamo che questo polinomio compare nella scomposizione di $x^5 - 1$:

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Per risolvere il quesito basta eseguire la moltiplicazione dei due polinomi a secondo membro e poi uguagliare i coefficienti dei polinomi a primo e secondo membro (principio di identità dei polinomi); si ottiene:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab + 2c = 1 \\ ac + bc = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases}.$$

La risoluzione di questo sistema porta ai seguenti valori:

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ c = 1 \vee a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ c = 1.$$

La simmetria tra a e b era naturalmente prevedibile visto il tipo di scomposizione richiesto. A questo punto è facile concludere che il polinomio di quarto grado non ha radici reali, in quanto non ne hanno i due fattori di secondo grado in cui il polinomio è stato scomposto. □

Esercizio 1.2. *Si consideri il polinomio*

$$P(x) = x^3 - hx^2 - x + h,\ h \in \mathbb{R}.$$

1. *Dire per quali valori di* h*,* $x = h$ *è radice di* $P(x)$*;*
2. *dire quali sono i valori di* h *per i quali* $x = h$ *è radice multipla di* $P(x)$*.*

Risoluzione. Il polinomio dato si scompone in

$$P(x) = (x^2 - 1)(x - h) = (x - 1)(x + 1)(x - h).$$

Se ne deduce subito che h è sempre radice del polinomio stesso, e che è radice multipla (doppia) per $h = \pm 1$. □

Esercizio 1.3. *Determinare le condizioni su $a \in \mathbb{R}$ affinché il polinomio*

$$P(x) = x^4 + (a-1)x^2 - a$$

abbia quattro radici reali e distinte e calcolare le radici.

Risoluzione. L'esercizio può essere risolto in diversi modi. Il più elementare è, forse, il seguente. Si tratta di risolvere l'equazione

$$x^4 + (a-1)x^2 - a = 0,$$

cercando le condizioni perché abbia quattro soluzioni reali e distinte. L'equazione considerata è una biquadratica. Occorrerà dunque che l'equazione di secondo grado nell'incognita t

$$t^2 + (a-1)t - a = 0$$

abbia due radici reali, distinte e strettamente positive. Perché succeda questo occorre che il discriminante sia strettamente positivo e che i coefficienti presentino due variazioni (cosiddetta "*Regola di Cartesio*").

$$\Delta = (a-1)^2 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2,$$

che è strettamente positivo per $a \neq -1$. Essendo il primo coefficiente del trinomio positivo, si avranno due variazioni se $a - 1 < 0 \wedge -a > 0$, cioè se $a < 0$. Tenendo conto della condizione sul discriminante si conclude che il polinomio proposto ha quattro radici reali e distinte se

$$a \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[.$$

Le radici richieste sono

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1-a \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-a \pm |a+1|}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-a \pm (a+1)}{2}},$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la presenza del doppio segno $\pm$ davanti al valore assoluto rende inutile il valore assoluto stesso. Semplificando, si trovano le radici:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\sqrt{-a},\ x_4 = \sqrt{-a}.$$

Un modo decisamente più elegante di procedere poteva essere il seguente. Il polinomio

$$t^2 + (a-1)t - a = t^2 - (1-a)t - a$$

si può scomporre ("*regola di somma e prodotto:* $t^2 - st + p$") in

$$(t-1)(t+a).$$

Dunque il polinomio dato si scompone in

$$(x^2-1)(x^2+a),$$

e ora la conclusione trovata sopra è immediata, come pure il calcolo delle radici. □

Esercizio 1.4. *Semplificare l'espressione*

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{(x+1)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} : \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}},$$

dopo averne trovato il dominio.

Risoluzione. Le condizioni per il dominio si possono compendiare nella disequazione

$$x^2 - 1 > 0,$$

che ha come soluzioni $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Per semplificare l'espressione conviene portare la quantità $(x+1)$ dentro la radice quadrata per poter poi rifurre tutte le radici allo stesso indice. Si ha

$$x+1 = \begin{cases} \sqrt{(x+1)^2}, & \text{se } x \geq -1; \\ -\sqrt{(x+1)^2}, & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Si ha dunque, anche tenendo conto del dominio già trovato,

$$f(x) = \sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = \sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \text{se } x > 1,$$

$$f(x) = -\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = -\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \text{se } x < -1.$$

□

Esercizio 1.5. *Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti relazioni è vera.*

1. $\sqrt{7} - \sqrt{5} > \sqrt{5} - \sqrt{3}$;
2. $\sqrt{7} - \sqrt{5} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$;
3. $\sqrt{7} - \sqrt{5} < \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Risoluzione. In genere il confronto tra due numeri reali non è per niente semplice e si può fare a livello elementare riconducendo il confronto stesso, se possibile, a quello tra numeri interi. In presenza di radicali ciò avviene di solito per successivi elevamenti ad opportune potenze, prestando attenzione al segno dei numeri stessi. Si può supporre vera la prima delle tre relazioni proposte, dopodiché si ha:

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} > \sqrt{5} - \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{7} + \sqrt{5} > 2\sqrt{5}.$$

A questo punto si è in presenza di una disuguaglianza tra numeri positivi che può essere elevata al quadrato:

$$7 + 3 + 2\sqrt{21} > 20 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{21} > 10,$$

disuguaglianza che può essere nuovamente elevata al quadrato, ottenendo $84 > 100$, palesemente falsa. Se ne deduce che la risposta vera è la 3. □

Esercizio 1.6. *Dimostrare che*

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Risoluzione. Si può procedere, almeno parzialmente, come nell'esercizio 1.5. Cominciamo con l'elevare al quadrato ambo i membri (si tratta di una disuguaglianza tra numeri positivi):

$$\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^2 < \left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{3}} < \left(\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{\sqrt{3}} < \left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{\sqrt{2}},$$

ovvero

$$2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}.$$

Se ora eleviamo a $\sqrt{3}$ ambo i membri otteniamo

$$\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} < \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad 8 < 3^{\sqrt{6}},$$

che risulta vera in quanto $\sqrt{6} > 2$ e quindi

$$3^{\sqrt{6}} > 3^2 = 9.$$ □

Esercizio 1.7. *Se la somma di due numeri è uguale a* 1*, dimostrare che la loro differenza coincide con la differenza dei loro quadrati.*

Risoluzione. $a + b = 1 \Rightarrow a - b = 1 \cdot (a - b) = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. □

Esercizio 1.8. *Determinare i numeri reali a e b in modo che il polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 - x + 1$ sia divisibile per il polinomio $Q(x) = x^2 + bx + 2$.*

Risoluzione. Eseguiamo la divisione euclidea del polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +ax^2 & -x & +1 & x^2+bx+2 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -bx^3 & -2x^2 & & & x^2-bx+(a-2+b^2) \\ \cline{1-5}
 & -bx^3 & +(a-2)x^2 & -x & +1 & \\
 & +bx^3 & +b^2x^2 & +2bx & & \\ \cline{2-5}
 & & (a-2+b^2)x^2 & +(2b-1)x & +1 & \\
 & & -(a-2+b^2)x^2 & -(a-2+b^2)bx & -2(a-2+b^2) & \\ \cline{3-5}
 & & & (-b^3+4b-ab-1)x & 5-2a-2b^2 &
\end{array}$$

$P(x)$ risulta divisibile per $Q(x)$ se

$$\begin{cases} -b^3 + 4b - ab - 1 = 0 \\ 5 - 2a - 2b^2 = 0 \end{cases}.$$

Il sistema è di facile risoluzione e fornisce la seguente coppia di valori per i parametri a e b:

$$a = \frac{37}{18}, \quad b = \frac{2}{3}.$$ □

Esercizio 1.9. *Semplificare la rappresentazione del numero*

$$c=\left(6^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+4^{\frac{1}{3}}}.$$

Risoluzione. Si ha:

$$\begin{aligned}c&=\left(6^{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+4^{\frac{1}{3}}}\\&=\sqrt{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}\sqrt{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}}\\&=\sqrt{\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}\right)}\\&=\sqrt{\left(\sqrt[3]{6}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=2,\end{aligned}$$

ove abbiamo utilizzato la formula per la differenza di due cubi:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

□

Esercizio 1.10. *Dimostrare che se* $1\leq x\leq 2$ *allora l'espressione* $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ *è identicamente uguale a 2.*

Risoluzione. Cominciamo con il determinare il dominio della espressione considerata.

$$\begin{cases}x-1\geq 0\\x+2\sqrt{x-1}\geq 0\\x-2\sqrt{x-1}\geq 0\end{cases}.$$

Dalla prima si ottiene $x\geq 1$; se $x\geq 1$ la seconda è sicuramente verificata (somma di due numeri positivi); riscriviamo la terza nella forma $x\geq 2\sqrt{x-1}$: si può elevare al quadrato perché ambo i membri sono positivi; si ottiene, dopo riordino, $x^2-4x+4\geq 0$ ovvero $(x-2)^2\geq 0$ che è sempre vera. Dunque il dominio è $[1,+\infty[$.

Per verificare quanto richiesto ci sono diverse strategie. Su può osservare che i due radicandi sono, nell'ordine, il quadrato di $\sqrt{x-1}+1$ e $\sqrt{x-1}-1$. Si ha poi

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}&=\sqrt{\left[\sqrt{x-1}+1\right]^2}+\sqrt{\left[\sqrt{x-1}-1\right]^2}=\\&=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\\&=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|.\end{aligned}$$

Se, inoltre, è anche $x\leq 2$, allora $\sqrt{x-1}-1\leq 0$, per cui

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right|=-(\sqrt{x-1}-1)=-\sqrt{x-1}+1,$$

donde la facile conclusione.

Osservato che l'espressione proposta è sicuramente positiva, si può elevare al quadrato ottenendo, dopo semplificazione,

$$2x+2\sqrt{x^2-4x+4}=2(x+\sqrt{(x-2)^2})=2(x+|x-2|)=2(x+2-x)=4,$$

dove abbiamo tenuto conto che $|x-2|=2-x$ se $x\le 2$. Questo prova quanto richiesto. □

Esercizio 1.11. *Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale*

$$f(x)=\frac{2x^4+3x^3+3x-2}{x^3+2x^2+x+2}.$$

Risoluzione. Scomponiamo il numeratore e il denominatore: questo ci permetterà sia di trovare il dominio che di semplificare la funzione. Si ha

$$\frac{2x^4+3x^3+3x-2}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{2(x^2-1)(x^2+1)+3x(x^2+1)}{x^2(x+2)+(x+2)}=\frac{(x^2+1)(2x^2+3x-2)}{(x^2+1)(x+2)}.$$

Il trinomio $2x^2+3x-2$ ha le due radici $x=-2$ e $x={}^2/_2$ e si può dunque scomporre come segue.

$$2x^2+3x-2=2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+2)(2x-1).$$

Se ne deduce che si ha

$$\frac{2x^4+3x^3+3x-2}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{(x^2+1)(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)(x+2)}.$$

Il dominio è allora $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. In questo dominio la funzione data si riduce a

$$f(x)=2x-1.$$

□

Esercizio 1.12. *Sia a un numero reale maggiore di* 1*. Ordinare in modo crescente i seguenti numeri*

$$\left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23}\quad;\quad\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\quad;\quad\frac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}}\quad;\quad\frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{5/4}}}.$$

Risoluzione. Conviene scrivere tutti i numeri proposti in forma di potenza.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{-2/3}<\left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23}=a^{23/30}<\frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{5/4}}}=a^{9/8}<\frac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}}=a^{43/24}.$$

□

Esercizio 1.13. *Stabilire per quali valori dei coefficienti $a,b\in\mathbb{R}$ il seguente polinomio*

$$P(x)=x^3+x^2+ax+b$$

ammette $x=-1$ come radice doppia.

Risoluzione. Affinché -1 sia radice deve essere $P(-1) = -1 + 1 - a + b = 0$, ovvero $a = b$. Il polinomio $x^3 + x^2 + ax + a$ si scompone in $(x+1)(x^2+a)$. Questo polinomio ha -1 come radice doppia se -1 è radice di $x^2 + a$, ovvero se $a = -1$. I valori richiesti sono allora $a = b = -1$. □

Esercizio 1.14. *Semplificare l'espressione*

$$f(x) = \left(\frac{\dfrac{2x}{x^3-3}+1}{\dfrac{x^3-3}{2x}+1} + 1 \right) : (x^2+x+3)$$

fino a ridurla ad una frazione razionale ridotta ai minimi termini.

Risoluzione. Troviamo innanzitutto il dominio.

$$\begin{cases} x^3 - 3 \neq 0 \\ x^2 + 2x + 3 \neq 0 \\ \dfrac{x^3-3}{2x} + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^3+2x-3}{2x} \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Il trinomio $x^3 + 2x - 3$ ha 1 come radice e quindi si compone in $(x-1)(x^2+x+3)$, da cui si deduce che non ci sono altre radici reali. Il dominio è allora

$$\mathbb{R} \setminus \left\{0,\ 1,\ \sqrt[3]{3}\right\}.$$

Si ha poi

$$f(x) = \left(\frac{\dfrac{2x}{x^3-3}+1}{\dfrac{x^3-3}{2x}+1} + 1 \right) : (x^2+x+3) = \left(\frac{\dfrac{2x+c^3-3}{x^3-3}}{\dfrac{x^3-3+2x}{2x}} + 1 \right) : (x^2+x+3) =$$
$$= \left(\frac{2x}{x^3-3} + 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2+x+3} = \frac{x^3+2x-3}{x^3-3} \cdot \frac{1}{x^2+x+3} = \frac{x-2}{x^3-3}.$$

L'uguaglianza è naturalmente valida all'interno del dominio trovato.

□

Esercizio 1.15. *Dato il polinomio*

$$P(x) = x^2 + (2\lambda - 1)x + 3 - 5\lambda,$$

per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto?

Risoluzione. La somma delle radici del trinomio $ax^2 + bx + c$ è $-b/a$, il prodotto è c/a. Queste formule valgono anche se le radici sono complesse; noi però siamo interessati solo a radici reali, per cui dovremo controllare che il discriminante sia non negativo.

Si trova facilmente

$$-(2\lambda - 1) = 3 - 5\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3},$$

valore accettabile perché il discriminante del trinomio è positivo. □

Esercizio 1.16. *Determinare i valori di a e b tali che il polinomio*

$$P(x) = x^4 + bx^3 + (a+b)x^2 + 5x - b$$

sia divisibile per $x^2 + x + 3$.

Risoluzione. Eseguiamo la divisione euclidea tra il polinomio $P(x)$ e il polinomio $x^2 + x + 3$. Si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & bx^3 & +(a+b)x^2 & +5x & -b & x^2+x+3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -3x^2 & & & x^2+(b-1)x+(a-2) \\ \cline{1-5}
 & (b-1)x^3 & +(a+b-3)x^2 & +5x & -b & \\
 & -(b-1)x^3 & -(b-1)x^2 & -3(b-1)x & & \\ \cline{2-5}
 & & (a-2)x^2 & +(8-3b)x & -b & \\
 & & -(a-2)x^2 & -(a-2)x & -3a+6 & \\ \cline{3-5}
 & & & (10-3b-a)x & -b-3a+6 &
\end{array}$$

Il polinomio $P(x)$ è divisibile per il polinomio $x^2 + x + 3$ se il resto della divisione è nullo. Dunque

$$\begin{cases} 10 - 3b - a = 0 \\ -b - 3a + 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = 1 \land b = 3. \qquad \square$$

Esercizio 1.17. *Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2k - 1$ ha una radice doppia? Per ogni valore trovato scomporre il polinomio in fattori.*

Risoluzione. Sia a la radice doppia e b l'ulteriore[1] radice. Il polinomio si potrà scomporre in

$$p(x) = (x-a)^2(x-b) = x^3 + (-2a-b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2 b.$$

Deve essere dunque verificato il sistema

$$\begin{cases} -2a - b = -3 \\ 2ab + a^2 = 4 \\ -a^2 b = 2k - 1 \end{cases}$$

Questo sistema (pur essendo di sesto grado) è di facile soluzione e fornisce le seguenti soluzioni

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ k = 1/2 \end{cases} \quad \lor \quad \begin{cases} a = 8/3 \\ b = 2/3 \\ k = -5/54 \end{cases}.$$

Per $k = 1/2$ si ha

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = (x-2)^2 x,$$

mentre per $k = -5/54$ si ha

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - \frac{32}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{8}{3}\right). \qquad \square$$

[1] Se il polinomio ha una radice doppia (che dobbiamo presumere reale, visto il contesto in cui operiamo), deve avere anche un'altra radice reale in quanto, essendo a coefficienti reali, le radici complesse si presentano sempre a coppie.

Esercizio 1.18. *Verificare che i due seguenti numeri sono razionali e reciproci:*

$$p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+2} - \frac{2\left(\sqrt{2}+3\right)}{9\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{6} - \sqrt{3},$$

$$q = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2+2-4\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right).$$

Risoluzione. Eseguiamo i calcoli indicati.

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{-1} - \frac{2}{9}\,\frac{3\sqrt{2}+4+9+6\sqrt{2}}{1} + \sqrt{6} - \sqrt{3} = \\ &= -\cancel{\sqrt{6}} + 2\sqrt{2} + \cancel{\sqrt{3}} - 2 - \frac{18\sqrt{2}+26}{9} + \cancel{\sqrt{6}} - \cancel{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\cancel{18\sqrt{2}} - 18 - \cancel{18\sqrt{2}} - 26}{9} = -\frac{44}{9}. \\ q &= \frac{4-2\sqrt{3}}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{9+\cancel{4\sqrt{5}}+2-\cancel{4\sqrt{5}}} - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{8+\cancel{4\sqrt{3}}-\cancel{4\sqrt{3}}-6}{4}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{44}. \end{aligned}$$

Dunque i due numeri sono proprio razionali e reciproci. □

Esercizio 1.19. *Scomporre in fattori il polinomio* $P(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 80$ *e usare la scomposizione per semplificare la funzione razionale*

$$f(x) = \frac{P(x)}{2x^2 + 9x - 5}.$$

Risoluzione. Per scomporre in fattori il polinomio $P(x)$ si devono trovare i divisori del termine noto (80); essi sono

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 16, \pm 20, \pm 40, \pm 80\}.$$

Si verifica facilmente che 4 è radice di $P(x)$. Eseguendo la divisione tra $P(x)$ e $x-4$ si trova il quoziente $x^2 - x - 20$, quoziente che è facilmente scomponibile in $(x-4)(x+5)$. Dunque

$$P(x) = (x-4)^2(x+5).$$

Il denominatore è di secondo grado ha le radici -5 e $1/2$, dunque si ha

$$2x^2 + 9x - 5 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5) = (2x-1)(x+5).$$

La frazione data si semplifica in

$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{2x-1}.$$

Visto il tipo di quesito si poteva osservare che almeno una delle radici del denominatore doveva anche essere radice del numeratore: si sarebbe trovata la radice -5, senza bisogno di trovare tutti i divisori del termine noto. □

Esercizio 1.20. *Posto $a = 15$ e $b = \sqrt{213} + 2\sqrt[3]{1620 - 111\sqrt{213}}$, trovare quale delle seguenti relazioni è corretta:*

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b\,.$$

Risoluzione. Abitualmente il confronto tra due reali positivi come quelli proposti si fa elevando entrambi ad opportune potenze, in modo da ridursi a confrontare numeri naturali. Si verifica immediatamente che la cosa non è semplice in questo caso, a causa della presenza, in b, di due radicali di indice diverso: l'elevazione di b ad una qualunque potenza ne complica notevolmente la scrittura. L'idea è quella di sottrarre sia ad a che a b il numero $\sqrt{213}$ e confrontare i due numeri, ancora positivi, così ottenuti, elevandoli entrambi al cubo, in modo da semplificare sensibilmente la scrittura del secondo. Si ottiene, dopo facili semplificazioni,

$$\left(a - \sqrt{213}\right)^3 = \left(15 - \sqrt{213}\right)^3 = 12960 - 888\sqrt{213},$$
$$\left(b - \sqrt{213}\right)^3 = \left(2\sqrt[3]{1620 - 111\sqrt{213}}\right)^3 = 12960 - 888\sqrt{213}.$$

I due numeri dati sono dunque uguali. □

Esercizio 1.21. *Verificare che il numero*

$$\alpha = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

è un intero positivo.

Risoluzione. Elevando al cubo e semplificando si ottiene

$$\alpha^3 = 40 + 6\left(\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}\right),$$

ovvero

$$\alpha^3 = 40 + 6\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha^3 - 6\alpha - 40 = 0.$$

Il numero proposto è dunque radice di un polinomio di terzo grado. Questo polinomio ha come unica soluzione intera 4. Dividiamo il polinomio per $\alpha - 4$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
\alpha^3 & & -6\alpha & -40 & \alpha - 4 \\ \cline{5-5}
-\alpha^3 & +4\alpha^2 & & & \alpha^2 + 4\alpha + 10 \\ \cline{1-4}
 & 4\alpha^2 & -6\alpha & -40 & \\
 & -4\alpha^2 & +16\alpha & & \\ \cline{2-4}
 & & 10\alpha & -40 & \\
 & & -10\alpha & +40 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Questo implica che il polinomio non ha altre radici reali e dunque $\alpha = 4$. □

Esercizio 1.22. *Dati i polinomi a coefficienti reali*

$$f(x)=x^3+bx^2+ax+b-1 \quad e \quad g(x)=x^3+(a+1)x^2+2bx+a\,,$$

determinare a e b in modo che

$$\operatorname{MCD}\big(f(x),g(x)\big)=x^2+x+1\,.$$

Risoluzione. Eseguiamo la divisione del primo polinomio per x^2+x+1.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +bx^2 & +ax & +b-1 & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & -x & & x \\ \cline{1-4}
 & (b-1)x^2 & +(a-1)x & +b-1 &
\end{array}$$

Se $a=1\wedge b=1$, $f(x)$ risulta divisibile per x^2+x+1. Con questi valori anche $g(x)$ risulta divisibile per x^2+x+1 e x^2+x+1 è proprio il $\operatorname{MCD}\big(f(x),g(x)\big)$. Se invece $b\neq 1$ proseguiamo nella divisione.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +bx^2 & +ax & +b-1 & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & -x & & x+(b-1) \\ \cline{1-4}
 & (b-1)x^2 & +(a-1)x & +b-1 & \\
 & -(b-1)x^2 & -(b-1)x & -(b-1) & \\ \cline{2-4}
 & & (a-b)x & &
\end{array}$$

Deve dunque essere $a=b$. Con questa condizione eseguiamo la divisione di $g(x)$ per x^2+x+1.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -(a+1)x^2 & +2ax & +a & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & -x & & x \\ \cline{1-4}
 & ax^2 & +(2a-1)x & +a &
\end{array}$$

Se $a=0$, $g(x)$ non risulta divisibile per x^2+x+1. Se $a\neq 0$ proseguiamo nella divisione.

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -(a+1)x^2 & +2ax & +a & x^2+x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & -x & & x+a \\ \cline{1-4}
 & ax^2 & +(2a-1)x & +a & \\
 & -ax^2 & -ax & -a & \\ \cline{2-4}
 & & (a-1)x & &
\end{array}$$

Si conclude che $a=1$. Quindi l'unica coppia che soddisfa la condizione richiesta è $a=1\wedge b=1$.

□

Esercizio 1.23. *Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la seguente funzione razionale:*

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+4x-12}{x^4-5x^2-36}\,.$$

Risoluzione. Il numeratore della frazione si scompone osservando che ha la radice $x = 3$ e dividendolo per $x - 3$. Il denominatore si può scomporre nello stesso modo osservando che ha le radici $x = \pm 3$, oppure osservando che l'equazione

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

è una biquadratica. Posto $x^2 = t$ si trova

$$t^2 - 5t - 36 = (t - 9)(t + 4).$$

Dunque

$$x^4 - 5x^2 - 36 = (x^2 - 9)(x^2 + 4).$$

Si conclude ora facilmente che il dominio è $x \neq \pm 3$ e che la frazione, nel dominio, si semplifica in

$$f(x) = \frac{1}{x+3}.$$

□

Esercizio 1.24. *Determinare a e b in modo che il polinomio a coefficienti reali*

$$P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$$

abbia $x = 1$ come radice doppia. Per questi valori semplificare la frazione

$$\frac{x^3 + ax^2 + x + b}{x^4 + 2x^2 - 3}.$$

Risoluzione. Eseguiamo la divisione due volte in successione di $P(x)$ per $x - 1$. Possiamo applicare la regola di Ruffini (anche se non è indispensabile).

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & a & 1 & b \\
1 & & 1 & a+1 & a+2 \\
\hline
 & 1 & a+1 & a+2 & a+2+b \\
1 & & 1 & a+2 & \\
\hline
 & 1 & a+2 & 2a+4 &
\end{array}$$

Deve dunque essere

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \\ 2a + 4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -2 \wedge b = 0.$$

□

Esercizio 1.25. *Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il polinomio*

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$$

è divisibile per $x^2 + x - 2$?

Risoluzione. Il polinomio $x^2 + x - 2$ si scompone in $(x - 1)(x + 2)$, in quanto ha le radici 1 e -2. $P(x)$ ha la radice 1 per ogni valore di a, mentre ha la radice -2 se $4 - a^2 = 0 \vee 4 - a - 1 = 0$, ovvero $a = \pm 2 \vee a = 3$. □

Esercizio 1.26. *Trovare le coppie di numeri interi relativi successivi tali che, sottraendo al loro prodotto la loro somma moltiplicata per* 51, *si ottenga* 51.

Risoluzione. Detti x e $x + 1$ i due interi, si deve avere

$$x(x+1) - 51(x + x + 1) = 51, \quad \text{da cui} \quad x^2 - 101x - 102 = 0.$$

Si trova subito $x = -1$ e $x = 102$. Le due coppie richieste sono dunque $(-1, 0)$ e $(102, 103)$. □

Esercizio 1.27. *Calcolare l'espressione*

$$(3 + 2|x|)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

per $x = -\sqrt{2}$ *e verificare che si ottiene un numero intero.*

Risoluzione. Si ha

$$\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}-1}} = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} = 1.$$ □

Esercizio 1.28. *Stabilire per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *il polinomio*

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + (2k - 1)x^2 + kx + 1$$

è divisibile per $x^2 + x + 1$*. Per ogni valore di* k *trovato scomporre in fattori il polinomio.*

Risoluzione. Eseguiamo la divisione tra $P(x)$ e $x^2 + x + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +2x^3 & +(2k-1)x^2 & +kx & +1 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2+x+(2k-3) \\ \cline{1-5}
 & x^3 & +(2k-2)x^2 & +kx & +1 & \\
 & -x^3 & -x^2 & -x & & \\ \cline{2-5}
 & & (2k-3)x^2 & +(k-1)x & +1 & (*) \\
 & & -(2k-3)x^2 & -(2k-3)x & -2k+3 & \\ \cline{3-5}
 & & & (-k+2)x & -2k+4 &
\end{array}
$$

Al livello segnato con $(*)$ abbiamo supposto $k \neq 3/2$, in quanto per questo valore di k il resto della divisione non sarebbe stato nullo. Affinché il resto della divisione sia nullo occorre che $k = 2$. Per questo valore di k, come indica la divisione che abbiamo eseguito, si ha

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^2.$$ □

Esercizio 1.29. *Dato il polinomio*

$$P(x) = (k+3)x^2 + kx + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che, dette x_1 e x_2 le radici di P, si abbia

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Risoluzione. La condizione data si può riscrivere come

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}.$$

Teniamo ora conto che

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-k}{k+3} \quad \text{e} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{k+3}.$$

Sostituendo nella condizione data e semplificando troviamo la seguente equazione nell'incognita k:

$$k^3 + 7k^2 + 7k - 6 = 0.$$

Cerchiamo innanzitutto le sue soluzioni razionali (anzi intere visto che il coefficiente del termine di grado massimo è 1), che appartengono all'insieme

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}.$$

Si verifica facilmente che solo $k = -2$ verifica l'equazione. Eseguiamo ora la divisione di k^3+7k^2+7k-6 per $k+2$, per esempio con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 7 & 7 & -6 \\ -2 & & -2 & -10 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

L'equazione si scompone in

$$(k+2)(k^2 + 5k - 3) = 0,$$

da cui si trovano le due ulteriori soluzioni

$$k_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

□

Esercizio 1.30. *Dati i due numeri*

$$a = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \quad e \quad b = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

stabilire se a e b sono entrambi razionali, entrambi irrazionali o di tipo diverso. Nell'ultima eventualità si precisi quale è razionale e quale non lo è.

Risoluzione. Si possono usare le formule dei radicali doppi. Si ha

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+2}{2}}-\sqrt{\frac{422}{2}}=\sqrt{3}-1.$$

Dunque

$$a=2 \text{ (razionale).,} \quad b=2\sqrt{3} \text{ (irrazionale).}$$ □

Esercizio 1.31. *Trovare due numeri reali a e b tali che*

$$\begin{cases} a+b & = & -6 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} & = & \dfrac{2}{105} \end{cases}.$$

Risoluzione. Si può riscrivere il sistema dato nella forma

$$\begin{cases} a+b & = & -6 \\ ab & = & -315 \end{cases}.$$

Per la risoluzione si può sia ricavare per esempio a dalla prima equazione e sostituirlo nella seconda, ottenendo una equazione di secondo grado, oppure cercare direttamente le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$t^2-(a+b)t+ab=0.$$

Si ottiene $a=15$, $b=-21$ (oppure $b=15$, $a=-21$). □

Esercizio 1.32. *Trovare i coefficienti a, $b\in\mathbb{R}$ del trinomio*

$$P(x)=ax^2+bx+1, \quad x\in\mathbb{R},$$

sapendo che è divisibile per $x-1$ e il resto della divisione per $x-2$ è pari a 9.

Risoluzione. Se $P(x)$ è divisibile per $x-1$ significa che 1 è radice, ovvero $P(1)=0$; se il resto della sua divisione per $x-2$ è 9, significa che $P(2)=9$. Si deve dunque avere

$$a+b+1=0 \wedge 4a+2b+1=9,$$

da cui si trae subito $a=5\wedge b=-6$. □

Esercizio 1.33. *Ridurre ai minimi termini la funzione razionale*

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^4-x^2-12}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Conviene scomporre prima il denominatore (polinomio biquadratico). Si trovano facilmente come radici di t^2-t-12 i reali 4 e -3. Il denominatore si scompone in

$$x^4-x^2-12=(x^2-4)(x^2+3)=(x-2)(x+2)(x^2+3).$$

Per il dominio si avrà $x \neq \pm 2$. Sarà poi logico cercare le radici del polinomio al numeratore tra quelle del denominatore. Si vede facilmente che -2 è radice. Eseguendo la divisione per $x+2$, per esempio con la regola di Ruffini, si ottiene

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & & -2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array},$$

da cui $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = (x+2)(x^2+3)$. La frazione si semplifica in

$$\frac{1}{x-2}.$$

□

Esercizio 1.34. *Trovare il massimo comun divisore tra i due polinomi*

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6 \quad e \quad Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Si può applicare il metodo delle divisioni successive. Si ha, successivamente,

- $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 1(2x^3 + 3x^2 - 8x - 12) + (-2x^2 + x + 6)$;
- $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = (-x-2)(-2x^2 + x + 6)$.

Poiché l'ultimo resto è zero, si considera il penultimo resto. Possiamo anche scriverlo, come è tradizione, con primo coefficiente 1:

$$x^2 - \frac{x}{2} - 3.$$

Si poteva anche provare a scomporre i due polinomi. Il primo ha la radice -1. Eseguendo la divisione per $x+1$ si ottiene

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 1 & -7 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

ovvero

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x+1)(2x^2 - x - 6) \quad \Rightarrow \quad 2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 2(x+1)(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Il secondo ha la radice 2. Eseguendo la divisione per $x-2$ si ottiene

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 3 & -8 & -12 \\ 2 & & 4 & 14 & 12 \\ \hline & 2 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

ovvero

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = (x+2)(2x^2 - x - 6) \quad \Rightarrow \quad 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 2(x-2)(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Se ne deduce ancora che il massimo comun divisore è

$$(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right) = x^2 - \frac{x}{2} - 3.$$

□

Esercizio 1.35. *Determinare i valori h, $k \in \mathbb{R}$ tali che il polinomio*

$$P(x) = x^4 + hx^3 - 4x^2 - 2x + k\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia divisibile per $x^2 - 1$; trovare il polinomio quoziente e scomporlo in fattori.

Risoluzione. Affinché $P(x)$ sia divisibile per $x^2 - 1$ deve avere le radici ± 1. Dunque deve essere

$$1 + h - 4 - 2 + k = 0 \land 1 - h - 4 + 2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 2 \land k = 3.$$

Per ottenere il polinomio quoziente possiamo eseguire due successive divisioni per $x - 1$ e per $x + 1$, oppure direttamente per $x^2 - 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 2 & -4 & -2 & 3 \\
1 & & 1 & 3 & -1 & -3 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\
-1 & & -1 & -2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & 0 &
\end{array}$$

Il polinomio quoziente è $x^2 + 2x - 3$ che si scompone facilmente in $(x - 1)(x + 3)$. □

Esercizio 1.36. *Dato il polinomio*

$$P(x) = x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ una radice è $x = 1$, per quali valori di a tale radice è doppia e nei due casi scomporre il polinomio in fattori.

Risoluzione. Il numero 1 è radice se

$$1 - (a + 3) + (3a + 2) - 2a = 0,$$

equazione vera per ogni valore di a. Dividendo il polinomio per $x - 1$ si ottiene

$$\begin{array}{r|ccc|c}
 & 1 & -a-3 & 3a+2 & -2a \\
1 & & 1 & -a-2 & 2a \\
\hline
 & 1 & -a-2 & 2a & 0
\end{array}$$

ovvero

$$P(x) = (x - 1)\big(x^2 - (a + 2)x + 2a\big).$$

Il polinomio $x^2 - (a + 2)x + 2a$ ha le radici a e 2, quindi si ha la scomposizione finale di $P(x)$in

$$P(x) = (x - 1)(x - a)(x - 2).$$

Da qui si deduce anche che 1 è radice doppia se $a = 1$ e in questo caso la scomposizione del polinomio è

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 2).$$ □

Esercizio 1.37. *Trovare $x, y \in \mathbb{R}$ tali che la somma dei loro quadrati sia 10 e il prodotto dei loro cubi sia -27.*

Risoluzione. Si deve avere

$$x^2 + y^2 = 10 \wedge (xy)^3 = -27 \quad \Rightarrow \quad (x+y)^2 - 2xy = 10 \wedge xy = -3,$$

ovvero

$$(x+y)^2 = 4 \wedge xy = -3 \quad \Rightarrow \quad x + y = \pm 2 \wedge xy = -3.$$

A questo punto i due sistemi sono di facile risoluzione e si trovano le seguenti coppie di valori

$$(3,-1);\ (-1,3);\ (1,-3);\ (-3,1).$$

□

Esercizio 1.38. *Trovare le coppie di numeri reali tali che la somma è 6 e la somma dei cubi è 72.*

Risoluzione. Detti x e y i due numeri, si deve avere $x + y = 6 \wedge x^3 + y^3 = 72$. Poiché

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y),$$

la seconda condizione equivale a $xy = 8$. A questo punto si trovano facilmente le coppie soluzione $(4,2)$ e $(2,4)$. □

Esercizio 1.39. *Dato il polinomio*

$$P(x) = x^3 - ax^2 - x + a, \quad x \in \mathbb{R},$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, trovare a per cui $P(x)$ ha una radice doppia.

Risoluzione. Se il polinomio ha una radice doppia, diciamola α, deve avere anche una seconda radice, diciamola β; di conseguenza si deve scomporre in

$$(x-\alpha)^2(x-\beta) = x^3 - (2\alpha+\beta)x + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta.$$

Per il principio di identità dei polinomi si deve avere

$$\begin{cases} a = 2\alpha + \beta \\ -1 = 2\alpha\beta + \alpha^2 \\ a = -\alpha^2\beta \end{cases}.$$

Sostituendo il valore di a dalla prima equazione nella terza e mettendo a sistema con la seconda, si ottiene

$$\begin{cases} 2\alpha\beta + \alpha^2 + 1 = 0 \\ 2\alpha + \beta + \alpha^2\beta = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{-\alpha^2 - 1}{2\alpha} \\ 2\alpha + \dfrac{-\alpha^2 - 1}{2\alpha} + \alpha^2 \dfrac{-\alpha^2 - 1}{2\alpha} = 0 \end{cases}.$$

L'ultima equazione semplificata e riordinata diventa

$$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 1.$$

Si trova poi, di conseguenza, $\beta = \mp 1$ e $a = \pm 1$. □

Esercizio 1.40. *Scrivere tutte le condizioni di esistenza e semplificare la seguente espressione*

$$\frac{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}{\sqrt{a-\dfrac{1}{a}}}\cdot\left(\frac{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}}{1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}}+\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}\right),\quad a\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. La prima condizione è $a>0$. A questo punto, essendo

$$a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a},$$

basterà che $a^2-1>0$. Si deve dunque avere, intanto, $a>1$. L'unica condizione ulteriore sarebbe $a-\sqrt{a^2-1}\neq 0$, ovviamente verificata se $a>1$. Per il dominio si ha dunque $a>1$. Con queste condizioni si ha

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a}}}\cdot\left(\frac{\dfrac{\sqrt{a^2-1}-a}{\sqrt{a^2-1}}}{\dfrac{\sqrt{a^2-1}+a}{\sqrt{a^2-1}}}+\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a^2-1}-a}{\sqrt{a^2-1}+a}+\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\left(\frac{-\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)^2+\left(\sqrt{a^2-1}+a\right)^2}{a^2-\left(\sqrt{a^2-1}\right)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\left(4a\sqrt{a^2-1}\right)=4a.$$

□

Esercizio 1.41. *Stabilire per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ il polinomio*

$$P(x)=x^4+x^3-(a+2)x^2-ax+2a,\quad x\in\mathbb{R},$$

ammette radici multiple e per quali valori di a ammette solo due radici reali.

Risoluzione. Riscriviamo il polinomio nella forma

$$x^4+x^3-2x^2-ax^2-ax+2a=x^2(x^2+x-2)-a(x^2+x-2)=(x^2-a)(x^2+x-2)=(x^2-a)(x-1)(x+2).$$

Da qui si deduce facilmente che per $a<0$ le uniche radici reali sono -2 e 1, se $a=0$, 0 è una radice doppia, se $a=4$, -2 è radice doppia, se $a=1$, 1 è radice doppia. □

Esercizio 1.42. *Dati i due polinomi a coefficienti reali dipendenti da un parametro*

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (k^3+k^2-5k+3)x^3+(k-1)x^2+2x-k \\ g(x) & = & (k^2+2k-3)x^3-(2k+1)x^2+kx-1 \end{array},\quad x\in\mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ il grado di f è minore del grado di g.

Risoluzione. Scomponiamo i coefficienti dei termini di grado 3 di f e di g. Per quanto riguarda f il polinomio $p(k) = k^3 + k^2 - 5k + 3$ ha la radice 1 e dunque lo possiamo dividere per $k - 1$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

Otteniamo $k^3+k^2-5k+3 = (k-1)(k^2+2k-3) = (k-1)^2(k+3)$. Si ha poi $k^2+2k-3 = (k-1)(k+3)$. Dunque

- se $k = 1$ $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = -3x^2 + x - 1$;
- se $k = -3$ $f(x) = -4x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = 5x^2 - 3x - 1$;
- se $k \notin \{-3, 1\}$, f e g hanno grado 3.

Il polinomio f ha grado minore di g solo se $k = 1$. □

Esercizio 1.43. *Determinare i numeri $k \in \mathbb{R}$ tali che le soluzioni x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ dell'equazione*

$$(k+1)x^2 - kx - 1 = 0$$

soddisfino la condizione

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Risoluzione. Intanto deve essere $k \neq -1$. Affinché poi si abbia $\Delta \geq 0$ deve essere $k^2 + 4k + 4 \geq 0$ ovvero $(k+2)^2 \geq 0$, che risulta sempre vera. Basta poi ricordare le note relazioni tra i coefficienti di un polinomio di secondo grado e le sue radici per ottenere

$$\frac{k}{k+1} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{2} = 0,$$

da cui $k = 1$. □

Esercizio 1.44. *Determinare per quali valori reali di a il polinomio $x^4 + x^3 - ax^2 + (a+1)x + 2$ è divisibile per il polinomio $x^2 + ax + 1$.*

Risoluzione. Eseguiamo la divisione tra i due polinomi.

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +x^3 & -ax^2 & +(a+1)x & +2 & x^2+ax+1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -ax^3 & -x^2 & & & x^2+(1-a)x+(a^2-2a-1) \\ \cline{1-5} & (1-a)x^3 & -(a+1)x^2 & +(a+1)x & +2 & \\ & -(1-a)x^3 & -a(1-a)x^2 & -(1-a)x & & \\ \cline{2-5} & & (a^2-2a-1)x^2 & +2ax & +2 & \\ & & x^2 & -a(a^2-2a-1)x & -(a^2-2a-1) & \\ \cline{3-5} & & & (-a^3+2a^2+3a)x & -a^2+2a+3 & \end{array}$$

Il resto della divisione si annulla se $-a^3 + 2a^2 + 3a = 0 \land -a^2 + 2a + 3 = 0$. Poiché

$$-a^3 + 2a^2 + 3a = -a(a+1)(a-3) \quad \text{e} \quad -a^2 + 2a + 3 = -(a+1)(a+3),$$

il resto si annulla solo per $a \in \{-1, 3\}$. □

2 Equazioni e disequazioni algebriche. Sistemi

Esercizio 2.1. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{4-|x|} \le \sqrt{-x^2+7x-6}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. La determinazione del dominio dei due membri conduce a

$$\begin{cases} 4-|x| \ge 0 \\ -x^2+7x-6 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 4 \\ 1 \le x \le 6 \end{cases} \Rightarrow 1 \le x \le 4\,.$$

A questo punto si può eliminare il valore assoluto sulla x (perché la x risulta sempre positiva nel dominio) ed elevare al quadrato (si tratta di una disuguaglianza tra numeri positivi); si ottiene una semplice disequazione di secondo grado. tenendo conto del dominio le soluzioni sono:

$$x \in [4-\sqrt{6}, 4].$$

□

Esercizio 2.2. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *la disequazione*

$$\frac{4+x}{|5-2x|} < 1\,.$$

Risoluzione. Trovato il dominio ($x \ne 5/2$), la disequazione si può scrivere nella forma

$$4+x < |5-2x|\,,$$

in quanto si possono moltiplicare ambo i membri per $|5-2x|$ che risulta (nel dominio) una quantità strettamente positiva. Distinguendo i due casi possibili per il valore assoluto si ottiene subito la soluzione:

$$x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup \left]9, +\infty\right[\,.$$

□

Esercizio 2.3. *Risolvere la disequazione irrazionale algebrica*

$$\sqrt{|x-1|+1} \ge \frac{x}{2}\,.$$

Risoluzione. Tra le varie soluzioni possibili la più semplice è quella per via grafica, elementare se si osserva che

$$\sqrt{|x-1|+1} = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } \ge 1 \\ \sqrt{2-x}, & \text{se } x < 1 \end{cases}\,.$$

Si veda la figura 2.1. Se ne deduce subito che l'insieme delle soluzioni è $]-\infty, 4]$. □

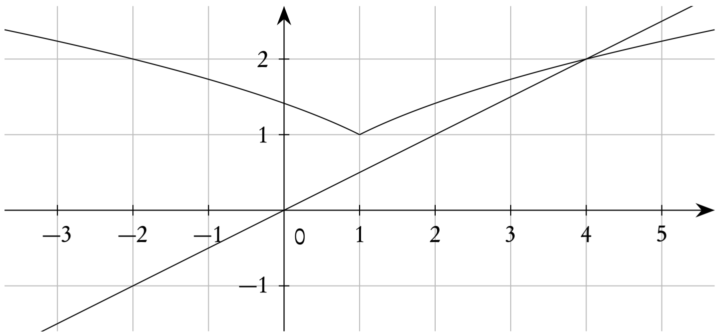


Figura 2.1: *Figura relativa all'esercizio 2.3*

Esercizio 2.4. *Data l'equazione*

$$x^2 - kx + k - 4 = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la somma dei quadrati delle soluzioni sia 11.

Risoluzione. Si deve ricordare che, se x_1 e x_2 sono le radici, si ha

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right),$$

con il solito significato dei simboli.

Impostando i calcoli si trova l'equazione in k:

$$k^2 - 2k - 3 = 0,$$

che ha per soluzioni $k = -1$ e $k = 3$, entrambe accettabili perché il discriminante relativo è positivo. □

Esercizio 2.5. *Determinare i numeri $k \in \mathbb{R}$ tali che il sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} < 1 \\ x - k^2(x-1) - x^2 > 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

non abbia soluzioni.

Risoluzione. La prima disequazione risulta verificata per $x < -3$ e per $x > 1$. La seconda risulta verificata per $-k^2 < x < 1$. Se si richiede che il sistema non abbia soluzioni occorrerà che l'intervallo delle soluzioni della seconda sia un sottointervallo di $[-3, 1]$, ovvero che $-3 \leq -k^2 \leq 1$. Si trova facilmente

$$-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}.$$ □

Esercizio 2.6. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{|4 - x^2| - 3x}{\sqrt{x^2 - 3x}} > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Determiniamo preventivamente il dominio della funzione a primo membro. Si deve avere

$$x^2-3x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<0 \vee x>3\,.$$

A questo punto, essendo il denominatore della frazione sempre strettamente positivo, basterà risolvere la disequazione

$$|4-x^2|-3x>0\,.$$

Poiché

$$|4-x^2|=\begin{cases} 4-x^2, & \text{se} \quad -2\le x\le 2 \\ -4+x^2, & \text{se} \quad x<-2 \vee x>2 \end{cases},$$

si possono distinguere due casi.

1. Se $-2\le x\le 2$, si ottiene

$$4-x^2-3x>0 \quad \Leftrightarrow \quad -4<x<1 \quad \Rightarrow \quad -2\le x<1\,.$$

2. Se $x<-2 \vee x>2$, si ottiene

$$-4+x^2-3x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1 \vee x>4 \quad \Rightarrow \quad x<-2 \vee x>4$$

L'unione dei casi 1 e 2 fornisce i valori $x<1 \vee x>4$. Tenendo infine conto del dominio, si conclude che le soluzioni della disequazione proposta sono:

$$x\in]-\infty,0[\, \cup\,]4,+\infty[\,. \qquad \square$$

Esercizio 2.7. *Risolvere la disequazione*

$$x^4+x^2-18|x|+16\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Conviene preventivamente osservare che il primo membro è simmetrico in x, dunque basterà risolvere la disequazione proposta per $x\ge 0$, ottenendo

$$p(x)=x^4+x^2-18x+16\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

È immediato verificare[(1)] che il polinomio p ha le radici 1 e 2. Eseguendo la divisione tra il polinomio p e $x-1$ e poi tra il quoziente e $x-2$ si trova la seguente scomposizione:

$$p(x)=x^4+x^2-18x+16=(x-1)(x-2)(x^2+3x+8)\,.$$

L'ultimo fattore è positivo, da cui si deduce, per $x\ge 0$, la seguente tabella dei segni:

[1] Le eventuali radici razionali del polinomio p sono ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16, valori ottenuti con la solita regola che riguarda i divisori del termine noto e del primo coefficiente.

$+/-$	0		1		2		$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x^2+3x+8	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
Complessivo	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Se si tiene conto della già citata simmetria, l'insieme delle soluzioni della disequazione proposta è

$$]-\infty,-2] \cup [-1,1] \cup [2,+\infty[\,.$$ □

Esercizio 2.8. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{\frac{9-x}{x+1}} < x-3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Il dominio comune dei due membri della disequazione si trova dalla condizione

$$\frac{9-x}{x+1} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad -1 < x \leq 9\,.$$

A questo punto si può osservare che se $x < 3$ la disequazione non può essere verificata, se $x \geq 3$, trattandosi di disuguaglianza tra numeri positivi, si può elevare al quadrato, e si ottiene:

$$\frac{9-x}{x+1} < (x-3)^2\,.$$

Si può ridurre allo stesso denominatore ed eliminare il denominatore (in quanto esso è strettamente positivo se $x \geq 3$); dopo semplificazione si ottiene:

$$x(x^2-5x+4) > 0 \Rightarrow x^2-5x+4 > 0 \text{ (x è strettamente positivo perché $x \geq 3$).}$$

Sempre tenendo conto che $x \geq 3$ e del dominio, si conclude che l'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$]4,9]\,.$$ □

Esercizio 2.9. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\sqrt{x+3}-2|x|}{|x|-1} > -2.$$

Risoluzione. Il dominio D richiede le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ |x|-1 \neq 0 \end{cases},$$

da cui si ottiene

$$D = [-3, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Portando tutto a primo membro, riducendo allo stesso denominatore e semplificando, la disequazione si può riscrivere nella forma

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{|x|-1} > 0.$$

Basterà trovare il segno del numeratore e del denominatore. Per il numeratore si ha:

$$\sqrt{x+3}-2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+3} > 2 \quad \Rightarrow \quad x+3 > 4 \quad \Rightarrow \quad x > 1,$$

dove abbiamo elevato al quadrato senza alcun problema, in quanto ambo i membri erano positivi. Per il denominatore si ha:

$$|x|-1 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1 \quad \Rightarrow \quad x < -1 \vee x > 1.$$

Possiamo riassumere i risultati nel solito grafico, che tiene subito conto anche del dominio trovato.

$+/-$	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$\sqrt{x+3}-2$		$\times$	$-$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	
$\lvert x\rvert-1$		$\times$	$+$	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	
$\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\lvert x\rvert-1}$		$\times$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	

Si deduce che la disequazione data è verificata in $S =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. □

Esercizio 2.10. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} > \sqrt{6-x}.$$

Risoluzione. La determinazione del dominio richiede le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in [1, 6].$$

A questo punto si possono elevare al quadrato ambo i membri, trattandosi, all'interno del dominio, di quantità positive. Dopo semplificazione e riordino si ottiene:

$$2\sqrt{x^2-1} > 6-3x.$$

Il primo membro è sempre positivo, il secondo può essere sia positivo che negativo: se è negativo la disequazione è verificata, se è positivo si può elevare nuovamente al quadrato, sempre naturalmente tenendo conto del dominio già trovato. Si avranno dunque due casi.

$$6-3x<0 \quad \cup \quad \begin{cases} 6-3x \geq 0 \\ 4(x^2-1) > 36-36x+9x^2 \end{cases},$$

ovvero

$$x>2 \quad \cup \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ 5x^2-36x+40<0 \end{cases}$$

Tenendo conto del dominio si trova facilmente

$$2<x\leq 6 \quad \cup \quad \frac{18-\sqrt{124}}{5}<x<2.$$

L'insieme di soluzioni della disequazione è dunque

$$\left]\frac{18-\sqrt{124}}{5},6\right].$$ □

Esercizio 2.11. *Risolvere l'equazione in* $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x-1}=\sqrt[3]{x-3}.$$

Risoluzione. Si deve innanzitutto avere $x-1\geq 0$, ovvero $x\geq 1$. A questo punto il primo membro è positivo: tale deve essere anche il secondo. Dunque $x\geq 3$. Con questa condizione si può elevare alla sesta ambo i membri, senza pericolo di introdurre soluzioni estranee.

$$(x-1)^3=(x-3)^2 \quad \Rightarrow \quad x^3-4x^2+9x-10=0.$$

Per risolvere questa equazione di terzo grado si possono cercare le eventuali radici razionali del polinomio a primo membro: si verifica facilmente che $x=2$ è radice. Si ha

$$x^3-4x^2+9x-10=0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x^2-2x+5)=0.$$

La soluzione $x=2$ non soddisfa la condizione $x\geq 3$, il trinomio x^2-2x+5 non ha radici. L'equazione proposta non ha alcuna soluzione reale.

Trattandosi di un'equazione si sarebbe anche potuto elevare direttamente alla sesta e poi verificare, a posteriori, che la soluzione $x=2$ non verificava l'equazione di partenza. Questo succede perché l'elevazione a una potenza pari (in questo caso alla sesta) di ambo i membri di un'equazione può introdurre soluzioni estranee. □

Esercizio 2.12. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$|x-2|-2|x+1|<1.$$

Risoluzione. Esaminiamo il segno dei due argomenti del valore assoluto, riportando i risultati in un grafico, dove abbiamo esplicitamente indicato in alto a sinistra che il grafico serve solo a "spezzare" i valori assoluti.

abs	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Dovremo distinguere tre casi: $]-\infty,-1[$, $[-1,2[$, $[2,+\infty[$. Avremo dunque

$$\begin{cases} x<-1 \\ -(x-2)-2(-x-1)<1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1\le x<2 \\ -(x-2)-2(x+1)<1 \end{cases} \cup \begin{cases} x\ge 2 \\ x-2-2(x+1)<1 \end{cases}.$$

La risoluzione dei tre sistemi è immediata e si ottiene

$$]-\infty,-3[\cup\left]-\frac{1}{3},2\right[\cup[2,+\infty[\quad=\quad]-\infty,-3[\cup\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[.$$ □

Esercizio 2.13. *Trovare due numeri reali x_1 e x_2 tali che la loro somma è pari al loro prodotto moltiplicato per $2\sqrt{2}$ e la somma dei lori quadrati vale 10.*

Risoluzione. Si tratta di risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2=2\sqrt{2}x_1x_2 \\ x_1^2+x_2^2=10 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite, di quarto grado: avremo al massimo quattro coppie di soluzioni. Per la risoluzione conviene osservare che

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

La seconda equazione del sistema, tenendo conto della prima, diventa

$$8(x_1x_2)^2-2x_1x_2-10=0,\quad \text{ovvero}\quad 4(x_1x_2)^2-x_1x_2-5=0,$$

che può essere interpretata come un'equazione di secondo grado nell'incognita x_1x_2. Si trovano le due soluzioni -1 e $5/4$. Le soluzioni del sistema sono dunque l'unione delle soluzioni dei due sistemi seguenti.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2\sqrt{2} \\ x_1x_2=-1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ x_1x_2=\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Questi sistemi possono essere risolti facilmente, per esempio per sostituzione. Si trovano le soluzioni:

$$\left\{x_1=-\sqrt{2}+\sqrt{3},\ x_2=-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right\},\quad \left\{x_1=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{30}}{4},\ x_2=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{30}}{4}\right\}$$

e quelle che si ottengono scambiando x_1 con x_2. □

Esercizio 2.14. *Risolvere la seguente disequazione in* $\mathbb{R}$

$$4|x^2-x|\geq 1.$$

Risoluzione. La disequazione è equivalente a

$$4(x^2-x)\geq 1 \quad \vee \quad 4(x^2-x)\leq -1.$$

Si tratta di due semplici disequazioni di secondo grado. Si ottiene facilmente:

$$x\in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \infty\right[.$$

□

Esercizio 2.15. *Dati i polinomi*

$$f(x)=9-4x^2 \quad e \quad g(x)=2x-1,$$

risolvere le disequazioni

$$1.\ \frac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \quad , \quad 2.\ f(x)g(x)\geq 0 \quad , \quad 3.\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}.$$

Risoluzione. Conviene trovare i segni dei due polinomi e utilizzarli per risolvere le disequazioni assegnate. Si ottiene facilmente la seguente tabella.

$+/-$	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$9-4x^2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

La disequazione 1. è verificata quando numeratore e denominatore hanno segni discordi, dunque

$$x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right[\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right[.$$

La disequazione 2. è verificata quando le due funzioni hanno segni concordi, dunque

$$x\in\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right].$$

Le soluzioni del sistema 3. si ricavano immediatamente dalla tabella dei segni; si ha

$$x\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[.$$

□

Esercizio 2.16. *Risolvere la seguente disequazione in* $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2-1} > x+2.$$

Risoluzione. Troviamo innanzitutto il dominio: $x^2-1 \geq 0$, ovvero $x \leq -1 \cup x \geq 1$. Se poi $x+2<0$, ovvero $x < -2$ la disequazione è banalmente verificata (un numero positivo è sempre maggiore di uno negativo). Se $x+2 \geq 0$ possiamo elevare al quadrato ambo i membri, ottenendo una semplice disequazione verificata per $x < -5/4$, e dunque, tenendo conto della condizione $x \geq -2$, $-2 \leq x < -5/4$. Riunendo le soluzioni trovate nei due casi si trova

$$x \in \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[.$$

$\square$

Esercizio 2.17. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$\sqrt{3x^2-8x+9}+2x > 3.$$

Risoluzione. Il trinomio $3x^2-8x+9$ è sempre positivo in quanto ha il discriminante negativo, per cui il dominio è tutto $\mathbb{R}$. Riscrivendo la disequazione nella forma

$$\sqrt{3x^2-8x+9} > -2x+3$$

si conclude che se $-2x+3<0$, cioè $x > 3/2$, la disequazione è banalmente verificata; se invece $x \geq 3/2$ si possono elevare ambo i membri al quadrato ottenendo una disequazione di secondo grado verificata per $x < -20 \vee x > 0$: tenendo conto della condizione $x \geq 3/2$ si trova $0 < x \leq 3/2$. In conclusione l'insieme di soluzioni è $]0, 3/2] \cup]3/2, +\infty[$ ovvero $x \in]0, +\infty[$. $\square$

Esercizio 2.18. *Per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *il seguente sistema non ammette soluzioni?*

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-8x+9}+2x > 3 \\ x^2-2kx+k^2-1 \leq 0 \end{cases}.$$

Risoluzione. La seconda disequazione, riscritta nella forma $(x-k)^2-1 \leq 0$ è verificata per $-1+k \leq x \leq 1+k$. Tenendo conto del risultato dell'esercizio 2.17, si trova che il sistema non ha alcuna soluzione se e solo se $k+1 \leq 0$, ovvero $k \leq -1$. $\square$

Esercizio 2.19. *Risolvere la seguente equazione in* $\mathbb{R}$.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}} = \frac{x^3}{2x^2-x-1}.$$

Risoluzione. Cerchiamo innanzitutto il dominio. Si deve avere intanto $x \neq 0$. Poi, essendo

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x},$$

deve essere $x \neq -1$. Essendo poi

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1},$$

deve essere anche $x \neq -1/2$. Infine affinché $2x^2-x-1 \neq 0$ deve essere anche $x \neq 1$.

A questo punto eseguendo i calcoli e semplificando l'equazione si riduce a

$$x^3-3x^2+x+2=0.$$

Il trinomio a primo membro ha 2 come radice e si può dunque scomporre in $(x-2)(x^2-x-1)=0$. Le altre due radici si trovano facilmente con la formula delle equazioni di secondo grado. Se ne deduce che l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è

$$\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right\}.$$

□

Esercizio 2.20. *Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni?*

$$\begin{cases} (x+1)^2(x^2-6x+9) \leq 0 \\ kx^2-2\sqrt{k}x+1 \leq 0 \end{cases}.$$

Risoluzione. Osservato che deve essere $k \geq 0$, il sistema si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} (x+1)^2(x-3)^2 \leq 0 \\ (\sqrt{k}x-1)^2 \leq 0 \end{cases}.$$

La prima disequazione ha solo le soluzioni $x=-1$ e $x=3$, la seconda ha solo la soluzione $1/\sqrt{k}$, se $k>0$, non ha soluzioni se $k=0$. Poiché $1/\sqrt{k}>0$, il sistema ha soluzioni solo se $1/\sqrt{k}=3$, ovvero $k=1/9$ e l'unica soluzione del sistema è $x=3$. □

Esercizio 2.21. *Risolvere la seguente disequazione:*

$$||x-1|-2| \leq 2x+3.$$

Risoluzione. Poiché

$$|x-1|=\begin{cases} -x+1, & \text{se } x<1 \\ x-1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases},$$

la disequazione data è equivalente a

$$\begin{cases} x<1 \\ |-x-1| \leq 2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ |x-3| \leq 2x+3 \end{cases}.$$

Si ha poi

$$|-x-1|=\begin{cases} x+1, & \text{se } x>-1 \\ -x-1, & \text{se } x\leq -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x-3|=\begin{cases} -x+3, & \text{se } x<3 \\ x-3, & \text{se } x\geq 3 \end{cases}.$$

Se ne deduce che la disequazione data è equivalente a

$$\begin{cases} x<1 \\ x\leq -1 \\ -x-1\leq 2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x<1 \\ x>-1 \\ x+1\leq 2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 1 \\ x<3 \\ -x+3\leq 2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq 3 \\ x-3\leq 2x+3 \end{cases}.$$

Si ottiene facilmente

$$\left[-\frac{4}{3},-1\right] \cup \left]-1,1\right[\cup \left[1,3\right[\cup \left[3,+\infty\right[= \left[-\frac{4}{3},+\infty\right[. \qquad \square$$

Esercizio 2.22. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *l'equazione seguente:*

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{4x^2+7x-2}{2x^2+x-3}.$$

Risoluzione. Troviamo innanzitutto il dominio. Deve essere intanto $x\neq 0$. Successivamente riscriviamo il primo membro in modo da valutare le eventuali semplificazioni, tenendo conto man mano delle condizioni necessarie. Si ha

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=\frac{1}{\dfrac{-1}{x-1}}=1-x,$$

da cui segue che deve essere anche $x\neq 1$. Per il secondo membro si ha l'ulteriore condizione $x\neq -3/2$. A questo punto possiamo scrivere l'equazione del testo nella forma

$$1-x=\frac{4x^2+7x-2}{2x^2+x-3}.$$

Semplificando si ottiene

$$2x^3+3x^2+3x+1=0.$$

Cerchiamo le eventuali radici razionali del polinomio a primo membro, che devono appartenere all'insieme

$$\left\{-1,+1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}.$$

Dopo aver verificato che $-1/2$ è radice, si decompone il polinomio dividendolo per $(x+1/2)$. Si ottiene

$$2x^3+3x^2+3x+1=(2x+1)(x^2+x+1).$$

Poiché x^2+x+1 ha il discriminante negativo non ci sono altre soluzioni reali dell'equazione assegnata oltre a $x=-1/2$. $\square$

Esercizio 2.23. *Data l'equazione di secondo grado*

$$(\lambda+1)x^2-\lambda x+2-\lambda=0,$$

determinare per quali valori di $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ammette radici reali. Se x_1 e x_2 sono le radici reali dell'equazione, determinare per quali valori di $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ si ha che

$$(x_1+x_2)^2-x_1x_2+1>0.$$

Risoluzione. L'equazione ha radici reali se il discriminante è non negativo.

$$\Delta\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2-4(\lambda+1)(2-\lambda)=5\lambda^2-4\lambda-8\geq 0.$$

Si trova facilmente

$$\lambda\leq\frac{2-2\sqrt{11}}{5}\quad\vee\quad\lambda\geq\frac{2+2\sqrt{11}}{5}.$$

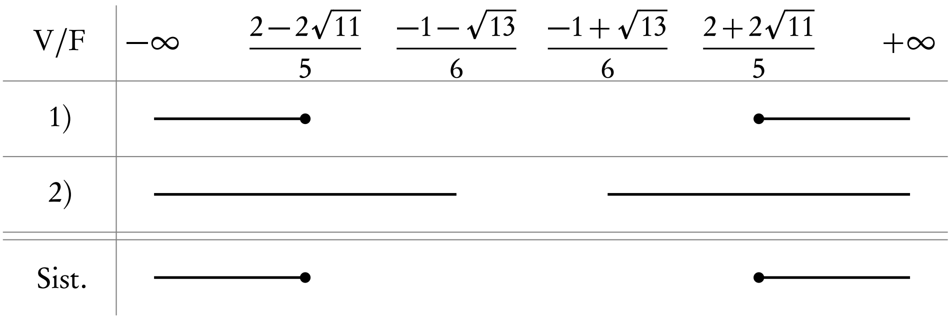
La somma delle radici del trinomio di secondo grado ax^2+bx+c è $-b/a$, mentre il prodotto delle stesse è c/a. Si deve dunque avere

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}-\frac{2-\lambda}{\lambda+1}+1>0,\quad\text{ovvero}\quad\frac{3\lambda^2+\lambda-1}{(\lambda+1)^2}>0.$$

Si trova facilmente

$$\lambda<\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\quad\vee\quad\frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Dobbiamo però tenere conto delle condizioni di realtà già trovate. Possiamo costruire il seguente diagramma.



La condizione richiesta è dunque verificata per

$$\lambda\leq\frac{2-2\sqrt{11}}{5}\quad\vee\quad\lambda\geq\frac{2+2\sqrt{11}}{5}.$$ □

Esercizio 2.24. *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\sqrt{\frac{|x+1|+2x-1}{x-3}}>1.$$

Risoluzione. In una disequazione come questa bisognerebbe partire dalla ricerca del dominio, dato dalla condizione
$$\frac{|x+1|+2x-1}{x-3} \geq 0.$$
Osserviamo però che elevando al quadrato otteniamo la disequazione
$$\frac{|x+1|+2x-1}{x-3} > 1$$
che è più restrittiva: basterà dunque risolvere quest'ultima. Si ha
$$\frac{|x+1|+2x-1}{x-3} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|x+1|+x+2}{x-3} > 0.$$
Poiché $|x-1| = 1-x$ se $x < 1$, mentre $|x-1| = x-1$ se $x \geq 1$, la disequazione data è equivalente a
$$\begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{3}{x-3} > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{2x+1}{x-3} > 0 \end{cases}.$$
Il primo sistema non ha soluzioni, il secondo è verificato per $x > 3$. □

Esercizio 2.25. *Trovare le soluzioni della seguente equazione irrazionale:*
$$\sqrt{\sqrt{x^2+8}-2} = x\,.$$
Risoluzione. Il dominio è costituito da tutti i reali, in quanto
$$\sqrt{x^2+8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2.$$
Se $x < 0$ l'equazione non ha soluzioni, se $x \geq 0$ possiamo elevare al quadrato due volte di seguito ottenendo, dopo semplificazione,
$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$$
Si tratta di un'equazione biquadratica che ha come soluzioni $x = \pm 1$. Solo $x = 1$ è accettabile.

Trattandosi di un'equazione si sarebbe anche potuto elevare al quadrato direttamente senza fare alcuna considerazione e verificando alla fine se le soluzioni trovate erano accettabili anche per l'equazione di partenza: ogni elevazione al quadrato può infatti introdurre soluzioni estranee. È però decisamente più elegante seguire la procedura indicata, che diventa indispensabile quando si deve invece risolvere una disequazione in cui sono necessari elevamenti al quadrato. □

Esercizio 2.26. *Trovare le soluzioni della seguente equazione:*
$$\sqrt{(x^2-1)^3} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\,.$$

Risoluzione. Osservato che deve essere

$$x^2-1\geq 0, \quad \text{ovvero} \quad x\leq -1 \vee x\geq 1,$$

si può riscrivere l'equazione nella forma

$$(x^2-1)^{3/2}=(x^2-1)^{2/3}.$$

Quest'equazione può essere verificata se e solo se

$$x^2-1=0 \quad \vee \quad x^2-1=1$$

ovvero $x=\pm 1 \vee x=\pm\sqrt{2}$. □

Esercizio 2.27. *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2.$$

Risoluzione. Si deve avere, intanto, $2-x>0$, ovvero $x<2$. A questo punto portando tutto a primo membro e semplificando si ottiene

$$\frac{2+x-2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}<0.$$

Poiché, per $x<2$, il denominatore è strettamente positivo, si ottiene

$$2+x-2\sqrt{2-x}<0 \quad \text{ovvero} \quad 2\sqrt{2-x}>2+x.$$

Se $x<-2$ la disequazione è sicuramente verificata, se $x\geq 2$ si può elevare al quadrato, ottenendo

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ x^2+8x-4<0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -2\leq x<-4+2\sqrt{5}.$$

La disequazione proposta è dunque vericata per $x<-4+2\sqrt{5}$.

□

Esercizio 2.28. *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x-1}}-\frac{3x}{2x-4}+\frac{11}{6}>0.$$

Risoluzione. Cominciamo con il trovare il dominio:

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ x-1\neq 0 \\ 1-\dfrac{1}{x-1}\neq 0 \\ 2x-4\neq 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad x\neq 0 \wedge x\neq 1 \wedge x\neq 2.$$

La disequazione data si può semplificare in

$$\frac{8x^2-22x-6}{6x(x-2)}>0.$$

A questo punto si costruisce il solito grafico di segno, dove abbiamo tenuto conto fin dall'inizio del dominio trovato.

$+/-$	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		1		2		3		$+\infty$
$8x^2-22x-6$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$6x(x-2)$		$+$	$+$	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	
$\frac{8x^2-22x-6}{6x(x-2)}$		$+$	0	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	

La disequazione risulta dunque verificata per

$$x \in \left]-\infty,-\frac{1}{4}\right[\cup \left]0,1\right[\cup \left]1,2\right[\cup \left]3,+\infty\right[.$$

Si noti come la condizione $x \neq 1$, indispensabile per la validità della disequazione nella sua forma originaria, "scompare" con le successive semplificazioni: è indispensabile determinare il dominio prima di eseguire qualunque calcolo. □

Esercizio 2.29. *Risolvere la seguente equazione:*

$$\sqrt{\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}}=\sqrt{x}\,.$$

Risoluzione. Il dominio richiede semplicemente $x>1$. A questo punto si può elevare al quadrato e successivamente semplificare.

$$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=x \quad \Rightarrow \quad x=x\sqrt{x-1}.$$

Si ottengono le soluzioni $x=0$ (non accettabile) e $x=2$. □

Esercizio 2.30. *Verificare che l'equazione* $x^3-x^2-x-2=0$ *ha una soluzione intera e risolvere il seguente sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} \big||x|-1\big| \geq 2 \\ x(x^2-1)>x^2+2 \end{cases}.$$

Risoluzione. Le uniche soluzioni intere possibili per l'equazione data sono $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$, anzi, visto per il primo coefficiente è 1, queste sono anche le uniche soluzioni razionali possibili. Si verifica facilmente che 2 è soluzione. A questo punto dividiamo il polinomio a primo membro per $x-2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -x & -2 & x-2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+x+1 \\
\cline{1-4}
 & x^2 & -x & -2 & \\
 & -x^2 & +2x & & \\
\cline{2-4}
 & & x & -2 & \\
 & & -x & +2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Se ne deduce che

$$x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1).$$

Esaminiamo ora la prima disequazione del sistema proposto. Vista la simmetria rispetto allo scambio di x con $-x$, la possiamo risolvere solo per $x \geq 0$, ottenendo

$$|x-1| \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x-1 \leq -2 \vee x-1 \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \emptyset \vee x \geq 3.$$

Tenendo conto della simmetria si conclude che la prima disequazione è verificata per

$$x \leq -3 \vee x \geq 3.$$

La seconda disequazione si può riscrivere come

$$x^3 - x^2 - x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x^2+x+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2.$$

Il sistema risulta dunque verificato per $x \geq 3$. □

Esercizio 2.31. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{\sqrt{x-1}+1} \leq \sqrt{x^2-2x+2}.$$

Risoluzione. Per il dominio basta la condizione $x \geq 1$. Si può ora elevare al quadrato ambo i membri (in quanto positivi).

$$\sqrt{x-1}+1 \leq x^2-2x+2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-1} \leq x^2-2x-1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-1} \leq (x-1)^2.$$

Eleviamo nuovamente al quadrato e osserviamo che conviene porre $x-1=t$ ($t \geq 0$), da cui si ottiene

$$t^4 - t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t(t-1)(t^2+t+1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t(t-1) \geq 0,$$

in quanto (t^2+t+1) è sempre strettamente positivo. Tenendo conto che $t \geq 0$ si conclude che deve essere

$$t=0 \quad \vee \quad t \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x=1 \quad \vee x \geq 2.$$ □

Esercizio 2.32. *Risolvere l'equazione*

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x-4}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}-1\,.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ x-4\neq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 0\leq x<4\vee x>4.$$

Posto ora $\sqrt{x}=t$ si ottiene facilmente $t=1$, da cui $x=1$. □

Esercizio 2.33. *Data l'equazione*

$$2x^2+(k+1)x-k=0\,,$$

Determinare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ l'equazione ha radici reali x_1 e x_2 tali che

$$x_1^2+x_2^2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\,.$$

Risoluzione. La condizione data si può riscrivere nella forma

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\,.$$

Tenendo conto delle note relazioni fra i coefficienti di un polinomio di secondo grado ax^2+bx+c e la somma e il prodotto delle radici:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\,,\quad x_1x_2=\frac{c}{a}\,,$$

si ottiene, dopo semplificazione,

$$k^3+6k^2-3k-4=0.$$

Il polinomio a primo membro ha la radice $k=1$. Eseguiamo la sua divisione per $k-1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
k^3 & +6k^2 & -k & -4 & k-1 \\ \cline{5-5}
-k^3 & +k^2 & & & k^2+7k+4 \\ \cline{1-4}
 & 7k^2 & -3k & -4 & \\
 & -7k^2 & +7k & & \\ \cline{2-4}
 & & 4k & -4 & \\
 & & -4k & +4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Dunque

$$k^3+6k^2-3k-4=(k-1)(k^2+7k+4).$$

Tenendo conto di questa scomposizione si ottengono le due ulteriori radici

$$k_{2,3}=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Se si tiene conto del fatto che si deve avere

$$\Delta=k^2+10k+1\geq 0,$$

si trova che solo il valore $k=1$ risulta accettabile. □

Esercizio 2.34. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$*:*

$$\sqrt{\sqrt{x}-1}\geq\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}.$$

Risoluzione. Troviamo innanzitutto il dominio.

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}-1\geq 0 \\ x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}\geq 0 \end{cases}. \quad\Rightarrow\quad x\geq 1.$$

Eleviamo ora al quadrato ambo i membri, in quanto positivi, e riordiniamo.

$$2\sqrt{x}\geq 2x^2-3x+3.$$

Possiamo nuovamente elevare al quadrato in quanto i due membri sono ancora positivi. Si ottiene, dopo semplificazione,

$$4x^4-12x^3+21x^2-22x+9\leq 0.$$

Il polinomio a primo membro ha la radice doppia $x=1$. Mediante due successive divisioni per $x-1$, si ottiene

$$(x-1)^2(4x^2-4x+9)\leq 0,$$

che ha come unica soluzione $x=1$. □

Esercizio 2.35. *Risolvere l'equazione in* $\mathbb{R}$*:*

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x+3}{x^2-1}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x\neq\pm 1\wedge x\neq 0$. A questo punto semplificando e riordinando si ottiene

$$x^2-x-2=0,$$

che ha come unica soluzione accettabile $x=2$. □

Esercizio 2.36. *Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione*

$$\sqrt{x^2-5}+1 \leq x\,.$$

Risoluzione. Si deve intanto avere, per il dominio,

$$x^2-5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}.$$

Riscrivendo la disequazione nella forma

$$\sqrt{x^2-5} \leq x-1\,,$$

si osserva che se $x<1$ la disequazione non è verificata, se $x \geq 1$ si possono elevare al quadrato ambo i membri. Si ottiene, dopo semplificazione, $x \leq 3$ che, tenendo conto delle condizioni già esposte, permette di concludere che le soluzioni della disequazione proposta sono:

$$x \in \left[\sqrt{5},3\right].$$

□

Esercizio 2.37. *Dato il sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ x+y=2 \end{cases},$$

determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la soluzione (x,y) del sistema soddisfa la condizione $x=3y$.

Risoluzione. Il problema si può riformulare come ricerca dei valori di a affinché il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ x+y=2 \\ x=3y \end{cases},$$

di tre equazioni in due incognite abbia soluzioni. Dalle ultime due equazioni si trova facilmente l'unica soluzione

$$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Sostituendo nella prima si trova

$$a=\frac{5}{4}.$$

□

Esercizio 2.38. *Risolvere rispetto alla variabile $x \in \mathbb{R}$, assumendo $k \in \mathbb{R}$ come parametro, l'equazione*

$$kx=\sqrt{-k\big(1+|x|\big)}.$$

Per quali valori di k l'equazione è indeterminata?

Risoluzione. Per l'esistenza del radicale deve essere $k \leq 0$. Se $k=0$ l'equazione è indeterminata (cioè ha come soluzioni tutti i numeri reali). Se $k<0$ deve essere $x \leq 0$ (il secondo membro è positivo e tale deve essere anche il primo). Elevando al quadrato e osservando che, per $x \le 0$, si ha $|x| = -x$, si ottiene, dopo semplificazione,

$$kx^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2k}.$$

Solo la soluzione

$$x = \frac{1 - \sqrt{1-4k}}{2k}$$

è accettabile. □

Esercizio 2.39.

Per ogni intero $n > 1$, risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}+2} + \frac{2\sqrt[n]{x}+3}{\sqrt[n]{x}+3} = \frac{3}{2}.$$

Risoluzione. Se n è pari deve essere $x \ge 0$, se n è dispari deve essere

$$x \ne -2^n \quad \wedge \quad x \ne -3^n.$$

Posto poi $\sqrt[n]{x} = t$ si ottiene

$$\frac{1}{t+2} + \frac{2t+3}{t+3} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad t^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \vee t = -1.$$

Dunque se n pari, $x = 0$; se n dispari, $x \in \{-1, 0\}$. □

Esercizio 2.40. *Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione*

$$\sqrt{x^2 - x + 1} > 2x^2 - 1$$

Risoluzione. Il radicale è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$. Basterà allora distinguere due casi, a seconda del segno di $2x^2 - 1$.

$$2x^2 - 1 < 0 \quad \cup \quad \begin{cases} 2x^2 - 1 \ge 0 \\ x^2 - x + 1 > 4x^4 - 4x^2 + 1 \end{cases},$$

ovvero

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cup \quad \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 4x^4 - 5x^2 + x < 0 \end{cases}.$$

Il polinomio $4x^4 - 5x^2 + x$ si scompone facilmente in $x(x-1)(4x^2 + 4x - 1)$. Per la risoluzione del secondo sistema si può allora utilizzare il solito grafico, dove abbiamo da subito tenuto conto anche della prima disequazione.

$+/-$	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
x		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$4x^2+4x-1$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
prodotto		$+$	0	$-$	$-$						$-$	$-$	0	$+$	

Se ne deduce che le soluzioni sono

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cup \quad \left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2} < x \le -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cup \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 1 \right),$$

ovvero

$$x \in \left] -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[.$$

□

Esercizio 2.41. *Sono date le funzioni* $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ *e* $g(x) = |x + 1/2| - 3/2$*. Stabilire per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$ *si ha*

1. $f(x) > 0$ *e* $g(x) < 0$,
2. $f(x) > 0$ *oppure* $g(x) > 0$.

Risoluzione. Per la risoluzione conviene trovare preventivamente il segno delle due funzioni. La funzione f (dopo aver posto $x^2 = t$) si scompone in

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 1).$$

Se ne deduce che

$$x < -2 \lor x > 2 \Rightarrow f(x) > 0, \quad -2 < x < 2 \Rightarrow f(x) < 0, \quad x = \pm 2 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Per il segno di g risolviamo la disequazione

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| - \frac{3}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2} \lor x + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x < -2 \lor x > 1 .$$

Se ne deduce che

$$x < -2 \lor x > 1 \Rightarrow g(x) > 0, \quad -2 < x < 1 \Rightarrow g(x) < 0, \quad x \in \{-2, 1\} \Rightarrow g(x) = 0.$$

Conviene riportare questi risultati in un grafico di segno.

$+/-$	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Se ne deduce che non si ha mai "$f(x) > 0$ e $g(x) < 0$", mentre "$f(x) > 0$ oppure $g(x) > 0$" è verificata per $x < -2 \vee x > 1$. Si noti che la "e" della prima condizione significa "$\wedge$", mentre l'"oppure" della seconda condizione significa "$\vee$". □

Esercizio 2.42. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{5+4x} < 3 + |2x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Si deve avere $x \geq -5/4$ per l'esistenza del radicale, dopodiché si possono elevare al quadrato ambo i membri in quanto positivi.

$$5 + 4x < 9 + 6|2x| + 4x^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 12|x| - 4x + 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3|x| - x + 4 > 0.$$

Distinguendo due casi a seconda che $x \geq 0$ oppure $x < 0$ si perviene subito alla conclusione che, nel dominio trovato, la disequazione è sempre verificata. Se però si osserva che

$$x^2 + 3|x| - x + 4 = x^2 + 2|x| + 4 + (|x| - x),$$

si conclude senza alcun calcolo che si ha una somma di quattro addendi non negativi, e dunque la somma è addirittura ≥ 4. □

Esercizio 2.43. *Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni*

$$x^3 + kx + 2 = 0 \quad e \quad x^3 + x + 2k = 0$$

hanno una soluzione in comune?

Risoluzione. Sia α la soluzione comune delle due equazioni. Allora

$$\alpha^3 + k\alpha + 2 = \alpha^3 + \alpha + 2k \quad \Rightarrow \quad k(\alpha - 2) = \alpha - 2.$$

Se $k = 1$ non ci sono condizioni sul valore di α; per questo valore le due equazioni coincidono e si possono scomporre come segue

$$(x+1)(x^2 - x + 2) = 0.$$

Se ne deduce che hanno (solo) la soluzione $x = -1$, che è ovviamente comune.

Se $k \neq 1$, la soluzione α deve essere 2. Sostituendo in una delle due equazioni si trova facilmente $k = -5$. La due equazioni si scompongono come segue

$$(x-2)(x^2 + 2x - 1) = 0 \quad \text{e} \quad (x-2)(x^2 + 2x + 5) = 0.$$

Si ha dunque la conferma che entrambe hanno la soluzione $x = 2$. La prima equazione ha anche altre due soluzioni, e precisamente

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{5},$$

mentre la seconda non ne ha altre. □

Esercizio 2.44. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *la seguente disequazione*

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > -1\,.$$

Risoluzione. Si deve avere, per il dominio, $x \geq 0$. Dopodiché conviene riscrivere la disequazione nella forma

$$\sqrt{x} + 1 > \sqrt{x+3}.$$

Si possono elevare al quadrato ambo i membri in quanto positivi (nel dominio!). Si ottiene, dopo riordino,

$$\sqrt{x} > 1$$

che ha come soluzioni $x > 1$. □

Esercizio 2.45. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *il sistema di disequazioni*

$$\begin{cases} \sqrt{4-x^2} \leq 1 \\ 2+3x > \sqrt{x-2} \end{cases}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Essendo il dominio costituito solo da un punto, sostituendo si verifica subito che per esso entrambe le disequazioni sono verificate. La soluzione è dunque $x = 2$. □

Esercizio 2.46. *Risolvere l'equazione*

$$\frac{x}{1 + \dfrac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

nell'insieme dei numeri reali x per cui l'equazione ha significato.

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$x \neq -1 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq -\frac{1}{2}\,.$$

Si ha poi

$$\frac{x(x+1)}{x+2} = \frac{x+1}{2x+1}.$$

È possibile semplificare per $x+1$, tenendo conto del dominio trovato. Si trova, dopo semplificazione,

$$x^2 - 1 = 0, \quad \text{da cui} \quad x = \pm 1.$$

Solo la soluzione $x = 1$ è accettabile. □

Esercizio 2.47. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *la seguente equazione*

$$|9x^2-1|(x^2+1)=16x^2.$$

Risoluzione. Tenendo conto che $x^2+1 \geq> 0$, conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$|(9x^2-1)(x^2+1)|=16x^2.$$

Si ottiene dunque

$$(9x^2-1)(x^2+1)=\pm 16x^2 \quad \Rightarrow \quad 9x^4+24x^2-1=0 \vee 9x^4-8x^2-1=0.$$

Si tratta di due equazioni biquadratiche. Si ha

$$x^2=\frac{-12\pm\sqrt{153}}{9} \quad \vee\, x^2=\left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -1/9 \end{array} \right. .$$

Da qui si trova infine (x^2 deve essere non negativo)

$$x\in\left\{-1,\,1,\,\pm\sqrt{\frac{-12+\sqrt{153}}{9}}\right\}.$$

□

Esercizio 2.48. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *il sistema di disequazioni*

$$\begin{cases} (x-4)^3 \geq 0 \\ x(x-3)>4 \end{cases}.$$

Risoluzione. Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} x\geq 4 \\ x<-1 \vee x>4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>4.$$

□

Esercizio 2.49. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *l'equazione*

$$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{4x+5}.$$

Risoluzione. Per il dominio deve essere $x\geq -2$. Poiché il primo membro è positivo, tale deve essere anche il secondo, per cui saranno accettabili solo le soluzioni con $x\geq -5/4$. Elevando poi alla sesta potenza ambo i membri si ottiene, dopo riordino,

$$x^3-10x^2-28x-17=0.$$

Il polinomio a primo membro ha -1 come radice. Lo dividiamo per $x+1$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -10 & -28 & -17 \\ -1 & & -1 & 11 & 17 \\ \hline & 1 & -11 & -17 & 0 \end{array}$$

e otteniamo

$$(x+1)(x^2-11x-17)=0.$$

Da qui otteniamo le due soluzioni dell'equazione.

$$x \in \left\{-1, \frac{11+\sqrt{189}}{2}\right\}.$$

La radice

$$x=\frac{11-\sqrt{189}}{2}$$

è stata scartata in quanto minore di $-5/4$. Si tenga sempre ben presente che elevando ambo i membri di un'equazione a una potenza pari si possono introdurre soluzioni estranee. □

Esercizio 2.50. *Risolvere l'equazione in* $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x+2}=x-4\,.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \geq 2$. Poiché il primo membro è positivo, tale deve essere anche il secondo, dunque saranno accettabili solo le soluzioni con $x \geq 4$. Con questa condizione, elevando al quadrato si ottiene, dopo riordino,

$$x^2-9x+14=0\,,$$

che ha le soluzioni $x=2$ (da scartare) e $x=7$, accettabile. □

Esercizio 2.51. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$x^2+\frac{4\sqrt{2}x}{1-x^2}-4\sqrt{2}x>0\,.$$

Risoluzione. Si può riscrivere la disequazione nella forma

$$\frac{x^2(x^2-4\sqrt{2}x-1}{x^2-1}>0.$$

Si trova il segno di ciascuno dei tre fattori (due al numeratore e uno al denominatore) e si costruisce poi il solito grafico di segno. Per una soluzione tradizionale si dovrebbe trovare il dominio prima di procedere a qualunque semplificazione. Tuttavia in una caso come questo (in cui sono coinvolti solo polinomi), se non si procede a semplificazioni tra numeratore e denominatore delle frazioni, si può costruire direttamente il grafico di segno e da esso dedurre anche le condizioni di esistenza.

$+/-$	$-\infty$		-1		$2\sqrt{2}-3$		0		1		$2\sqrt{2}+3$		$+\infty$
x^2		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x^2-4\sqrt{2}x-1$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
frazione		$+$	$\times$	$-$	0	$+$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	

Le soluzioni sono allora date da $x \in]-\infty,-1[\, \cup\,]2\sqrt{2}-3,0[\, \cup\,]0,1[\, \cup\,]2\sqrt{2}+3,+\infty[$. □

Esercizio 2.52. *Risolvere la disequazione*

$$x^2-x \geq \sqrt{2x^3-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per l'esistenza del radicale si deve avere $2x^3-2x^2 \geq 0$, ovvero $x \in 0 \cup [1,+\infty[$. Poiché il secondo membro è non negativo, tale deve essere anche il primo, dunque $x \leq 0 \vee x \geq 1$. Se ne deduce che sono accettabili solo i valori di x tali che $x \in 0 \cup [1,+\infty[$. Elevando al quadrato, dopo aver scomposto i due membri, si ottiene

$$x^2(x-1)^2 \geq 2x^2(x-1) \quad \Rightarrow \quad x^2(x-1)(x-3) \geq 0.$$

Costruiamo il solito grafico di segno per quest'ultima disequazione.

$+/-$	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
prodotto		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tenendo conto delle condizioni indicate, si ha $x \in \{0,1\} \cup [3,+\infty[$. □

Esercizio 2.53. *Risolvere la disequazione*

$$|x^2-4|+4x<1\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

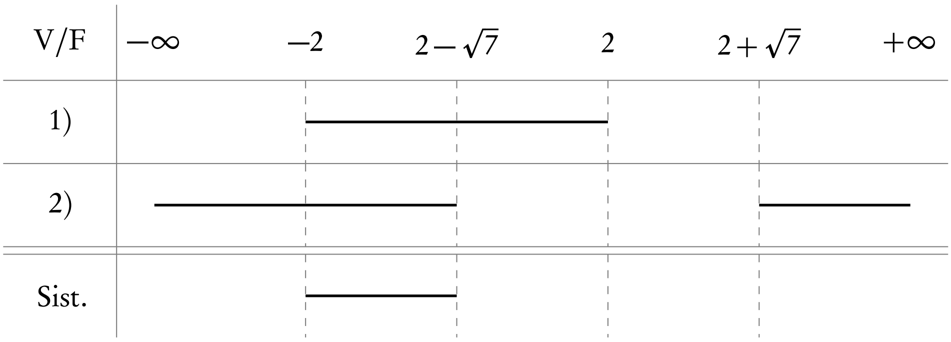
Risoluzione. Conviene distinguere due casi a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto:

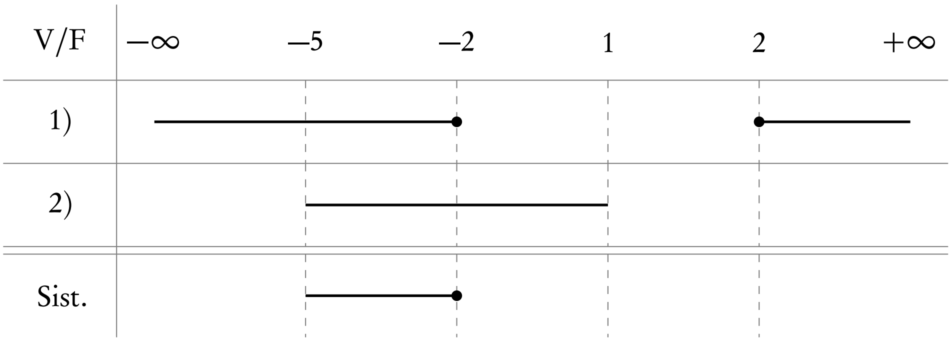
$$\begin{cases} -2<x<2 \\ -x^2+4+4x<1 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x\leq -2 \lor x\geq 2 \\ x^2-4+4x<1 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} -2<x<2 \\ x^2-4x-3>0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x\leq -2 \lor x\geq 2 \\ x^2+4x-5<0 \end{cases}.$$

Si tratta di due sistemi di immediata risoluzione. Riportiamo i soliti grafici.





La disequazione è verificata per $x\in]-5,2-\sqrt{7}[$. □

Esercizio 2.54. *Risolvere l'equazione irrazionale*

$$\left(\sqrt{x-\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)^2=4$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x\geq\sqrt{3}$. Eseguendo i calcoli indicati e semplificando si ottiene

$$\sqrt{x^2-3}=2-x.$$

Se $x\leq 2$ si eleva al quadrato ottenendo $x={}^7\!/_4$. □

Esercizio 2.55. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$x-\sqrt{x^2-1}\le|x-1|.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x^2-1\ge 0$ ovvero $x\le -1\lor x\ge 1$. Conviene distinguere due casi a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto, e tenendo anche conto del dominio trovato.

$$\begin{cases} x\le -1 \\ x-\sqrt{x^2-1}\le -x+1 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} x\ge 1 \\ x-\sqrt{x^2-1}\le x-1 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x\le -1 \\ \sqrt{x^2-1}\ge 2x-1 \end{cases} \cup \quad \begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{x^2-1}\ge 1 \end{cases}.$$

La seconda disequazione del primo sistema è sempre verificata per $x\le -1$ (il primo membro è positivo, il secondo negativo); la seconda disequazione del secondo sistema si può tranquillamente elevare al quadrato (disuguaglianza tra numeri positivi). Si ottiene $x^2\ge 1$, ovvero $x\ge\sqrt{2}$ (tenendo conto della condizione $x\ge 1$). In conclusione si ha

$$x\in]-\infty,-1]\cup[\sqrt{2},+\infty[.$$

□

Esercizio 2.56. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{7x-4}{|2x-8|}>1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Posto $x\ne 4$ per il dominio, la disequazione si può riscrivere nella forma

$$7x-4>|2x-8|,$$

in quanto si possono moltiplicare ambo i membri per $|2x-8|$ che è strettamente positivo. Poiché il secondo membro è positivo, tale deve essere anche il primo: se ne deduce che deve essere $x\ge 4/7$. Si potrebbero considerare due casi a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto, ma, essendo una disuguaglianza tra due membri positivi, si può anche elevare al quadrato, approfittando del fatto che non si otterranno potenze superiore al 2. Si ottiene, dopo semplificazione,

$$45x^2-24x-48>0 \quad\Rightarrow\quad x<-\frac{4}{5}\lor x>\frac{4}{3}.$$

Tenuto conto della condizione posta e del dominio si trova

$$x\in\left]\frac{4}{3},4\right[\cup\,]4,+\infty[.$$

□

Esercizio 2.57. *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}\qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Il sistema si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ xy(x+y)=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{5}(x+y)=xy \\ \dfrac{6}{5}(x+y)(x+y)=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{5}(x+y)=xy \\ x+y=\pm 5 \end{cases}.$$

Si ha dunque

$$\begin{cases} xy=6 \\ x+y=5 \end{cases} \cup \begin{cases} xy=-6 \\ x+y=-5 \end{cases}$$

I due sistemi sono di immediata risoluzione e forniscono le seguenti coppie

$$(3,2),\ (1,-6),\ (2,3),\ (-6,1).$$

□

Esercizio 2.58. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$\frac{(x-2)(x^2+6x+9)}{2x^4-9x^2-5}<0.$$

Risoluzione. Si scompone innanzitutto il denominatore in

$$2x^4-9x^2-5=2(x^2-5)(2x^2+1).$$

Scritta ora la disequazione nella forma

$$\frac{(x-2)(x+3)^2}{2(x^2-5)(2x^2+1)}<0,$$

si tratta di trovare il segno di ciascuno dei fattori ($2(2x^2+1)$ può essere trascurato perché sempre strettamente positivo). Tracciamo il consueto grafico di segno.

+/−	$-\infty$		-3		$-\sqrt{5}$		2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x-2$		−	−	−	−	−	0	+	+	+	
$(x+3)^2$		+	0	+	+	+	+	+	+	+	
x^2-3		+	+	+	0	−	−	−	0	+	
frazione		−	0	+	×	+	0	−	×	+	

Si deduce facilmente il seguente insieme di soluzioni:

$$x\in]-\infty,-3[\cup]-3,-\sqrt{5}[\cup]2,\sqrt{5}[.$$

□

Esercizio 2.59. *Risolvere la disequazione*

$$|3+2x|-1<4x\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Si può riscrivere la disequazione nella forma

$$|3+2x|<4x+1.$$

Poiché il primo membro è positivo, tale deve essere anche il secondo, ovvero $x\geq -1/4$. Con questa condizione l'argomento del valore assoluto è sempre positivo e la disequazione diventa semplicemente

$$3+2x<4x+1 \quad\Rightarrow\quad 2x>2 \quad\Rightarrow\quad x>1.$$ □

Esercizio 2.60. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{x^2-1}-5>x\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x^2-1\geq 0$ ovvero $x\leq -1 \vee x\geq 1$. Riscritta la disequazione nella forma

$$\sqrt{x^2-1}>x+5,$$

si vede che se $x<-5$ essa è sicuramente verificata (un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo), se $x\geq -5$ si può elevare al quadrato, ottenendo, dopo riordino,

$$\begin{cases} x\geq -5 \\ 10x+26<0 \end{cases}.$$

La disequazione data ha allora come insieme di soluzioni

$$]-\infty,-5[\,\cup\left[-5,-\frac{13}{5}\right[=\left]-\infty,-\frac{13}{5}\right[.$$ □

Esercizio 2.61. *Risolvere l'equazione*

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x}\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$x\leq 4 \wedge x\geq -2 \wedge x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 0\leq x\leq 4.$$

Si può ora elevare al quadrato ottenendo, dopo semplificazione e riordino,

$$2\sqrt{(4-x)(x+2)}=x-6.$$

Poiché il primo membro è positivo mentre il secondo, nel dominio trovato, è negativo, non si ha alcuna soluzione. □

Esercizio 2.62. *Risolvere il sistema di equazioni*

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=0 \\ x^4+y^4+x^2+y^2-4=0 \end{cases},\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. La prima equazione richiede $x+y=0 \lor x^2+y^2=0$. x^2+y^2 vale 0 solo per $x=y=0$, coppia che non soddisfa la seconda equazione. Si deve dunque avere $x+y=0$, ovvero $x=-y$. Sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione biquadratica

$$x^4+x^2-2=0,$$

cha ha come soluzioni solo $x=\pm 1$. Le coppie soluzione del sistema sono allora $(-1,1)$ e $(1,-1)$. □

Esercizio 2.63. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} \geq -1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \geq -1 \ \land \ x \geq 1 \ \land \ x < 2$, ovvero $1 \leq x < 2$. In questo dominio la disequazione è sicuramente verificata perché il primo membro è positivo, mentre il secondo è negativo. □

Esercizio 2.64. *Risolvere la disequazione*

$$|x|-|x-1| < 1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Distinguiamo i vari casi, a seconda del segno degli argomenti del valore assoluto. Anche se in questo caso la situazione è molto semplice, conviene utilizzare un grafico.

abs	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	

Si devono dunque distinguere tre casi

$$\begin{cases} x<0 \\ -x+x-1<1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq x<1 \\ x+x-1<1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x-x+1<1 \end{cases},$$

ovvero

$$]-\infty,0[\,\cup\,[0,x,1[\,\cup\,\emptyset=]-\infty,1[.$$ □

Esercizio 2.65. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{3-x}{x^3-1} \geq \frac{2x+2}{x^2+x+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \neq \pm 1$. La disequazione si può riscrivere come

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3-x}{x^3-1}-\frac{2x+2}{x^2+x+1} \geq 0.$$

Eseguendo i calcoli e semplificando si ottiene

$$\frac{-x^2+2x}{(x-1)(x^2+x+1)} \geq 0.$$

Si può costruire la solita tavola dei segni, trascurando il fattore x^2+x+1 che è strettamente positivo.

$+/-$	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$-x^2+2x$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	$\times$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	
frazione		$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	

Si conclude che si ha $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0] \cup]1,2]$. □

Esercizio 2.66. *Al variare di $a \in \mathbb{R}$, determinare le soluzioni dell'equazione*

$$\frac{x^2+3a-15+a^2}{(x+a)(x-5)} - \frac{3}{x+a} - \frac{a}{x-5} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \neq -a \wedge x \neq 5$. Eseguiamo i calcoli indicati e semplifichiamo, ottenendo l'equazione

$$x^2-(a+3)x+3a=0,$$

che ha come soluzioni $x=a$ e $x=3$. Dobbiamo ora valutare come influiscono le condizioni del dominio.

- Se $a=0$, la soluzione $x=a=0$ non è accettabile, resta solo $x=3$.
- Se $a=5$, la soluzione $x=a=5$ non è accettabile, resta solo $x=3$.
- Se $a=-3$, la soluzione $x=3$ non è accettabile, resta solo $x=a=-3$.

In conclusione per le soluzioni si ha: se $a \in \{0,5\}$, $x=3$; se $a=-3$, $x=-3$; se $a \notin \{-3,0,5\}$, $x \in \{a,3\}$. □

Esercizio 2.67. *Risolvere la disequazione*

$$|x^2-x| \leq 2|x|-3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Consideriamo, in un grafico, il segno degli argomenti dei valori assoluti.

abs	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

Si hanno dunque tre casi.

$$\begin{cases} x<0 \\ x^2-x\leq -2x-3 \end{cases} \cup \begin{cases} 0\leq x<1 \\ -x^2+x\leq 2x-3 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-x\leq 2x-3 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x<0 \\ x^2+x+3\leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0\leq x<1 \\ x^2+x-3\geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-3x+3\leq 0 \end{cases}.$$

Nessuno dei tre sistemi ha soluzioni, per cui la disequazione data non ha nessuna soluzione. □

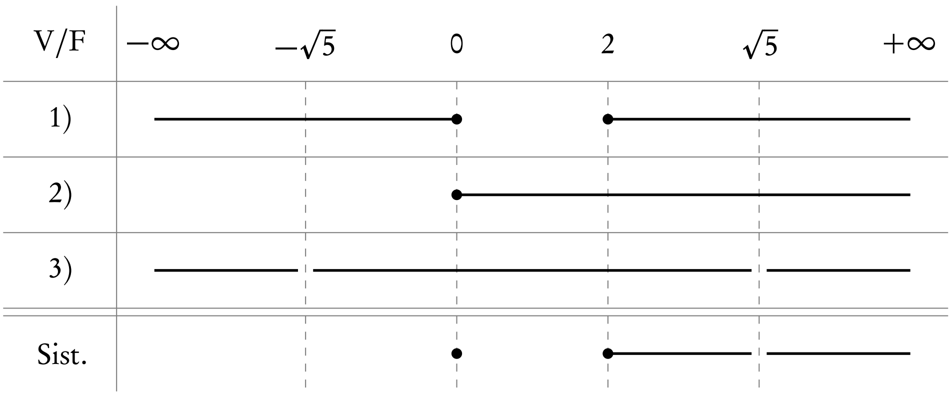
Esercizio 2.68. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-2x}}}{x^2-5}\leq 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} x^2-x\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq 0 \vee x\geq 2 \\ x-\sqrt{x^2-x}\geq 0 \\ x^2-5\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

Per la seconda disequazione, scrivendola nella forma $x\geq\sqrt{x^2-2x}$ si vede che se $x<0$ non ha soluzioni, se $x\geq 0$ si può elevare al quadrato e fornisce le soluzioni $x\geq 0$. Dunque



Il dominio è allora $x\in\{0\}\cup[2,\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},+\infty[$. Nel dominio il numeratore non è mai negativo e si annulla solo per $x=0$, il denominatore è negativo per $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$. Le soluzioni della disequazione sono dunque $x\in\{0\}\cup[2,\sqrt{5}[$. □

Esercizio 2.69. *Risolvere il sistema di equazioni*

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{12}{5} \end{cases}, \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Dalla seconda equazione si deduce che $xy\geq 0$, ovvero che x e y sono concordi; poiché la loro somma è positiva, essi devono essere entrambi positivi. Si ha poi $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, da cui $x^2+y^2=49-2xy$. Sostituendo nella seconda equazione, elevandola al quadrato e riordinando si ottiene

$$25(xy)^2+288(xy)-7056=0 \quad\Rightarrow\quad xy\in\left\{-\frac{588}{25},12\right\}.$$

Il primo valore, in quanto negativo, è da scartare; resta solo $xy=12$ che, a sistema con la prima equazione, fornisce subito le due coppie $(3,4)$ e $(4,3)$ come soluzioni del sistema. □

Esercizio 2.70. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{4-|3x-2|}{7x+4+\sqrt{x-1}}\leq 0.$$

Risoluzione. Per il dominio del radicale si deve avere $x\geq 1$; per questi valori il denominatore non si annulla mai ed è strettamente positivo. Basterà dunque che $4-|3x-2|\leq 0$, ovvero $|3x-2|\geq 4$. Questo significa

$$3x-2\leq -4 \lor 3x-2\geq 4 \quad\Rightarrow\quad x\leq -\frac{2}{3}\lor x\geq 2.$$

tenendo conto del dominio trovato si conclude che deve essere $x\geq 2$. □

Esercizio 2.71. *Risolvere l'equazione algebrica*

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}-\frac{x+2}{x+1}=\frac{2x+1}{1-x-2x^2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Eseguiamo tutte le operazioni indicate: a posteriori controlleremo per sostituzione diretta se le soluzioni ottenute sono accettabili. Si ottiene

$$\frac{x-1}{2x-1}-\frac{x+2}{x+1}+\frac{2x+1}{(2x-1)(x+1)}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+x-2=0.$$

Si ottengono le soluzioni $x=-2$ e $x=1$, delle quali solo la prima è accettabile. □

Esercizio 2.72. *Risolvere la disequazione*

$$|x^2+2x-3|\leq 2x+6, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per l'argomento del valore assoluto si ha

$$x \le -3 \lor x \ge 1 \Rightarrow x^2+2x-3 \ge 0; \qquad -3 < x < 1 \Rightarrow x^2+2x-3 < 0.$$

Quindi

$$\begin{cases} x \le -3 \lor x \ge 1 \\ x^2+2x-3 \le 2x+6 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 < x < 1 \\ -x^2-2x+3 \le 2x+6 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x \le -3 \lor x \ge 1 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 < x < 1 \\ x \le -3 \lor x \ge -1 \end{cases},$$

cioè

$$(\{-3\} \cup [1,3]) \cup [-1,1[\quad = \quad \{-3\} \cup [-1,3].$$

□

Esercizio 2.73. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{2\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+1 \le \sqrt{x+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \ge -1$. A questo punto si possono eseguire i calcoli indicati e eliminare il denominatore, in quanto strettamente positivo. Si ottiene, dopo riordino,

$$2\sqrt{x+1} \le x+1.$$

Se $x \ge -1$ si può elevare al quadrato (disuguaglianza tra quantità non negative):

$$4(x+1) \le (x+1)^2.$$

Se $x=-1$ la disequazione è verificata, se $x > -1$ si può dividere per $x+1$ che risulta strettamente positivo e si ottiene $x \ge 3$. Dunque per le soluzioni si ha $x \in \{-1\} \cup [3,+\infty[$. □

Esercizio 2.74. *Risolvere l'equazione irrazionale algebrica*

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}=2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Trattandosi di un'equazione si può anche evitare di trovare preventivamente il dominio, semplificare la scrittura elevando al quadrato e controllare a posteriori se le soluzioni trovate sono accettabili. Per elevare al quadrato conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{x}.$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene

$$4\sqrt{x}=5-x.$$

Una successiva elevazione al quadrato porge, dopo riordino,

$$x^2-26x+25=0,$$

da cui $x=1$ e $x=25$. Solo $x=1$ soddisfa anche l'equazione di partenza. □

Esercizio 2.75. *Risolvere la disequazione*

$$\left|x^2-1\right| \le 5x^2-2x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Distinguendo due casi a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto, si ottiene

$$\begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ x^2-1 \le 5x^2-2x \end{cases} \cup \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -x^2+1 \le 5x^2-2x \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x \le -1 \vee x \ge 1 \\ 4x^2-2x+1 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 6x^2-2x-1 \ge 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema è verificato per $x \le -1 \vee x \ge 1$, il secondo per

$$-1 < x \le \frac{1-\sqrt{7}}{6} \vee \frac{1+\sqrt{7}}{6} \le x < 1.$$

Le soluzioni della disequazione sono allora date da

$$x \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{6}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{6}, +\infty\right[.$$ □

Esercizio 2.76. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *la seguente equazione*

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}}{2}=1$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \ge -1$. Posto poi $\sqrt{x}=t$ si ottiene

$$\frac{t^2}{t+1}+\frac{t}{2}-1=0 \quad \Rightarrow \quad 3t^2-t-2=0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -2/3 \end{array} \right..$$

Solo $t=1$ è accettabile, e da qui si ottiene $x=1$. □

Esercizio 2.77. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *il sistema di disequazioni*

$$\begin{cases} (x-2)^3 < 0 \\ (x-2)(x+2) > 3x \end{cases}.$$

Risoluzione. Si ha

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2-3x-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -1 \vee x > 4 \end{cases}.$$

Il sistema è verificato (senza bisogno di grafici!) per $x < -1$ □

Esercizio 2.78. *Risolvere la seguente disequazione*

$$|x^2-4| \le 2x+4\,.$$

Risoluzione. Distinguendo due casi a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto, si ottiene

$$\begin{cases} x \le -2 \vee x \ge 2 \\ x^2 - 4 \le 2x + 4 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -2 < x < 2 \\ -x^2 + 4 \le 2x + 4 \end{cases},$$

ovvero

$$\begin{cases} x \le -2 \vee x \ge 2 \\ x^2 - 2x - 8 \le 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x^2 + 2x \ge 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema è verificato per $x \in \{-2\} \cup [2,4]$. Il secondo sistema è verificato per $x \in [0,2[$. La disequazione è dunque verificata per $x \in \{-2\} \cup [0,4]$. □

Esercizio 2.79. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{kx^2 - x}{x - 3} \ge 0$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. Trattandosi di una disequazione fratta, troviamo il segno del numeratore e del denominatore. Il denominatore ha un segno che non dipende da k.

$+/-$	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x$		$-$	0	$+$	

Per il numeratore si devono distinguere due casi.

1. Se $k = 0$ esso si riduce a $-x$ che ha il segno rappresentato nel grafico seguente:

$+/-$	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	

2. Se $k \ne 0$ il numeratore è di secondo grado, con discriminante $\Delta = 1 > 0$ e primo coefficiente k. Le due radici sono 0 e $1/k$. Esso ha ha dunque il segno rappresentato nei due grafici seguenti.

   a) Se $k < 0$ si ha

$+/-$	$-\infty$		$1/k$		0		$+\infty$
$kx^2 - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   b) Se $k > 0$ si ha

$+/-$	$-\infty$		0		$1/k$		$+\infty$
kx^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Per costruire il grafico complessivo, nei casi $k<0$ e $k=0$ non ci sono problemi, nel caso $k>0$ dovremo ancora valutare se $1/k<3$ (cioè $k>1/3$) oppure $1/k=3$ (cioè $k=1/3$) oppure $1/k>3$ (cioè $0<k<1/3$). In conclusione si hanno le situazioni seguenti.

1. $k<0$

$+/-$	$-\infty$		$1/k$		0		3		$+\infty$
kx^2-x		$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
frazione		$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$	$-$	

In questo caso le soluzioni sono $x\le 1/k \vee 0\le x<3$.

2. $k=0$

$+/-$	$-\infty$		0		3		$+\infty$
kx^2-x $(=-x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
frazione		$-$	0	$+$	$\times$	$-$	

In questo caso le soluzioni sono $0\le x<3$.

3. $0<k<1/3$

$+/-$	$-\infty$		0		3		$1/k$		$+\infty$
kx^2-x		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
frazione		$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	

In questo caso le soluzioni sono $0\le x<3 \vee x\ge 1/k$.

4. $k = {}^1\!/_3$

$+/-$	$-\infty$		0		$3 = {}^1\!/_k$		$+\infty$
$kx^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	z	$+$		
frazione		$-$	0	$+$	$\times$	$+$	

In questo caso le soluzioni sono $0 \le x < 3 \vee x > 3$.

5. $k \ge {}^1\!/_3$.

$+/-$	$-\infty$		0		${}^1\!/_k$		3		$+\infty$
$kx^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x - 3$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
frazione		$-$	0	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	

In questo caso le soluzioni sono $0 \le x \le {}^1\!/_k \vee x > 3$.

Si noti come la risoluzione di questo esercizio non comporti particolari problemi ne di calcolo ne di impostazione teorica. Bisogna solo prestare la massima attenzione a esaminare accuratamente le diverse possibilità, man mano che si presentano. □

3 Geometria e trigonometria

Esercizio 3.1. *È dato un triangolo equilatero* ABC *di lato l in un piano α. Detto* G *il suo baricentro, sia* d *la retta per* G *ortogonale ad α. Calcolare*

1. *a che distanza da α deve trovarsi un punto* $\mathsf{D} \in \mathsf{d}$ *perché il triangolo* ABD *sia anch'esso equilatero;*
2. *la distanza di* C *da* D.

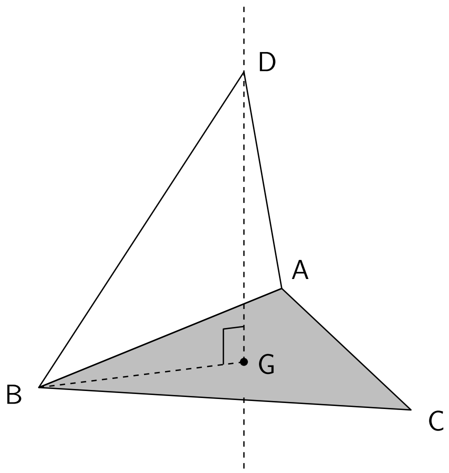


Figura 3.1: *Figura relativa all'esercizio* 3.1

Risoluzione. Per la soluzione del problema si può osservare la figura 3.1 e tenere conto che il triangolo BGC deve essere retto in G, con $|\overline{\mathsf{BD}}| = l$, mentre $|\overline{\mathsf{BG}}|$ deve essere i due terzi dell'altezza del triangolo. Si trovano i seguenti valori:
1. $|\overline{\mathsf{DG}}| = \sqrt{2/3}\, l$; 2. $|\overline{\mathsf{CD}}| = l$. □

Esercizio 3.2. *Internamente tangenti a un cerchio $\mathcal{C}$ di centro* O *e raggio R vi sono due cerchi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di raggio r, i quali sono pure tangenti tra loro. Quanto vale il rapporto r/R se la retta dei centri di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dista $R/2$ da* O*?*

Risoluzione. Il problema si può risolvere (si veda la figura 3.2) osservando che $|\overline{\mathsf{AT}}| = R/2$ (dato del problema), $|\overline{\mathsf{TC}_2}| = r$, $|\overline{\mathsf{AC}_2}| = R - r$ (per la condizione di tangenza tra due cerchi, la retta AC_2 deve passare per il punto di tangenza). Nel triangolo ATC_2 si ottiene allora

$$|\overline{\mathsf{AT}}|^2 + |\overline{\mathsf{TC}_2}|^2 = |\overline{\mathsf{AC}_2}|^2 .$$

Da qui si ottiene subito

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{8}.$$

□

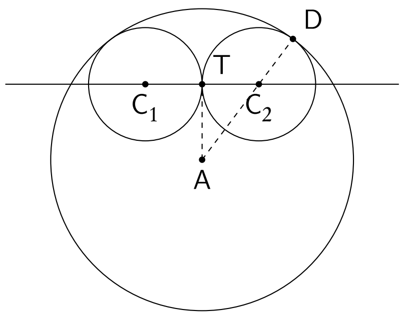


Figura 3.2: *Figura relativa all'esercizio* 3.2

Esercizio 3.3. *Calcolare l'area del trapezio* ABCD *sapendo che* $|\overline{AB}| = 3a$, *che gli angoli in* A *e* D *sono retti, che* $A\widehat{B}C = \pi/3$ *e che* $\cos B\widehat{A}C = \sqrt{2}/2$.

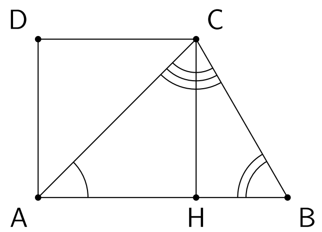


Figura 3.3: *Figura relativa all'esercizio* 3.3

Risoluzione. L'angolo $B\widehat{A}C$ misura chiaramente $\pi/4$ e quindi l'angolo $A\widehat{C}B$ $5\pi/12$. Si può applicare il teorema dei seni al triangolo ABC per determinare $\overline{CB}$ e successivamente trovare $\overline{CH} = \overline{AD} = \overline{DC}$ nel triangolo rettangolo CHB. Si ottiene, seppure con un po' di fatica nei calcoli, il seguente valore per l'area:

$$\frac{162-72\sqrt{3}}{8}a^2 \simeq 4.662a^2. \qquad \square$$

Esercizio 3.4. *In un triangolo* ABC *la mediana* $\overline{AM}$ *relativa al lato* $\overline{BC}$ *ha lunghezza* 1, $\alpha = M\widehat{A}C = \pi/12$ $\big(\sin(\pi/12) = (\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2})\big)$ *e* $\beta = A\widehat{M}B = \pi/3$. *Calcolare la lunghezza di* $\overline{AB}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.4.

Risulta $A\widehat{M}C = 2\pi/3$ e $B\widehat{C}A = \pi/4$, donde (teorema dei seni per MCA)

$$\frac{|\overline{AM}|}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{|\overline{AC}|}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{|\overline{MC}|}{\sin\alpha} \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{|\overline{AC}|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|\overline{MC}|}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}.|\overline{AC}| = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad |\overline{MC}|\,(=|\overline{MB}|) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Se ne ricava che

$$|\overline{AC}| = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad |\overline{MC}|\,(=|\overline{MB}|) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

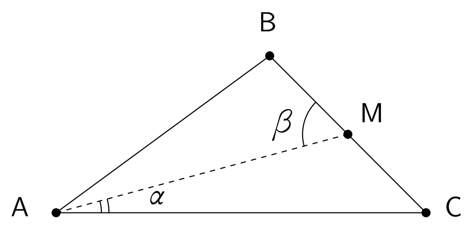


Figura 3.4: *Figura relativa all'esercizio* 3.4

Applicando Carnot ad AMB si trova poi

$$|\overline{\mathsf{AB}}| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{10-4\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{10-4\sqrt{3}}}{2}. \qquad \square$$

Esercizio 3.5. *Un quadrato ed un esagono regolare hanno la stessa area. Quale dei due poligoni ha il maggior perimetro? Giustificare la risposta.*

Risoluzione. Se il lato, il perimetro e l'area del quadrato e, rispettivamente, dell'esagono sono

$$l_1, 2p_1, \mathcal{A}_1 \quad \text{e} \quad l_2, 2p_2, \mathcal{A}_2,$$

si ha

$$2p_1 = 4l_1, 2p_2 = 6l_2, \mathcal{A}_1 = l_1^2, \mathcal{A}_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, l_2^2.$$

Dunque

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \Rightarrow l_1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, l_2^2 \Rightarrow l_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\, l_2 \Rightarrow 2p_1 = 4l_1 = 4\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\, l_2 = \sqrt{24\sqrt{3}}\, l_2 > 6l_2 = 2p_2. \quad \square$$

Esercizio 3.6. *In un parallelepipedo rettangolo a base quadrata lo spigolo di base e l'altezza misurano* 12 *e* 20*. Trovare la tangente dell'angolo α che una diagonale del parallelepipedo forma con il piano della base.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.5.

Si ha

$$|\overline{\mathsf{AB}}| = 12\sqrt{2}.$$

Ne segue che, nel triangolo ABC,

$$|\overline{\mathsf{BC}}| = |\overline{\mathsf{AB}}| \tan\alpha,$$

da cui

$$\tan\alpha = \frac{5}{3\sqrt{2}}. \qquad \square$$

Esercizio 3.7. *Determinare il raggio di base x e l'altezza y di un cono la cui superficie totale è uguale a quella di una sfera di raggio R e il cui volume è uguale a quello di un'altra sfera di raggio $r = 1$. Discutere rispetto a R l'esistenza di soluzioni e trovarle.*

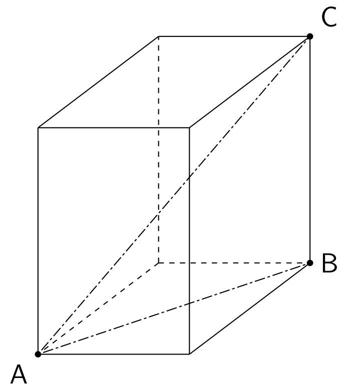


Figura 3.5: *Figura relativa all'esercizio* 3.6

Risoluzione. Le generatrici del cono hanno lunghezza

$$\sqrt{x^2+y^2}.$$

Tenendo conto delle formule per la superficie totale e il volume di un cono e di una sfera, si trova il seguente sistema

$$\begin{cases} \pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}=4\pi R^2 \\ \dfrac{1}{3}\pi x^2\cdot y=\dfrac{4}{3}\pi. \end{cases}$$

Ricavando x^2 dalla seconda e sostituendo nella prima si trova, dopo semplificazione, l'equazione risolvente

$$R^2x^4-2R^4x^2+2=0,$$

da cui si deduce quanto segue.

Per $R=\sqrt[6]{2}$ si ha una sola soluzione

$$x=\sqrt[6]{2},\quad y=2\sqrt[3]{4};$$

per $R>\sqrt[6]{2}$ si hanno le due soluzioni

$$x_1=\sqrt{\frac{R^3+\sqrt{R^6-2}}{R}},\quad y_1=\frac{4R}{R^3+\sqrt{R^6-2}}=2R\left(R^3-\sqrt{R^6-2}\right),$$

e

$$x_2=\sqrt{\frac{R^3-\sqrt{R^6-2}}{R}},\quad y_2=\frac{4R}{R^3-\sqrt{R^6-2}}=2R\left(R^3+\sqrt{R^6-2}\right).$$ □

Esercizio 3.8. *Dato un triangolo rettangolo di cateti* $|\overline{BC}|=a$ *e* $|\overline{AC}|=b$ *e ipotenusa* $|\overline{AB}|=c$*, dimostrare che*

$$a=(b+c)\tan\frac{\alpha}{2},$$

dove α *è l'angolo opposto al cateto* a*.*

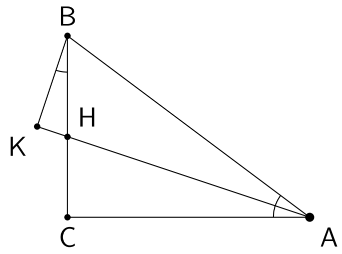


Figura 3.6: *Figura relativa al quesito 3.8*

Risoluzione. Se ABC è come nella figura 3.6, la retta per A e H è la bisettrice dell'angolo $\widehat{\mathsf{A}}$, e K è la proiezione ortogonale di B su tale bisettrice, si ha:

1. $|\overline{\mathsf{CH}}| = b\tan\dfrac{\alpha}{2}$;
2. $\mathsf{K}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{H} = \mathsf{C}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{H} = \dfrac{\alpha}{2}$;
3. $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{K} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$;
4. $|\overline{\mathsf{BK}}| = c\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = c\sin\dfrac{\alpha}{2}$;
5. $|\overline{\mathsf{BH}}| = \dfrac{|\overline{\mathsf{BK}}|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = c\tan\dfrac{\alpha}{2}$;
6. $a = |\overline{\mathsf{CB}}| = |\overline{\mathsf{CH}}| + |\overline{\mathsf{HB}}| = b\tan\dfrac{\alpha}{2} + c\tan\dfrac{\alpha}{2} = (b+c)\tan\dfrac{\alpha}{2}$,

che è quanto si voleva provare. □

Esercizio 3.9. *Del quadrilatero* ABCD *si sa che*

$$|\overline{\mathsf{AB}}| = 2|\overline{\mathsf{BC}}| = 4|\overline{\mathsf{CD}}| = 4l, \quad \mathsf{A}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{C} = 2\pi/3 \quad e \quad \mathsf{B}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{D} = \pi/2.$$

Calcolare, in funzione di l, $|\overline{\mathsf{AC}}|$, $|\overline{\mathsf{BD}}|$, *il coseno di* $\mathsf{D}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{A}$ *e quindi* $|\overline{\mathsf{DA}}|$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.7.

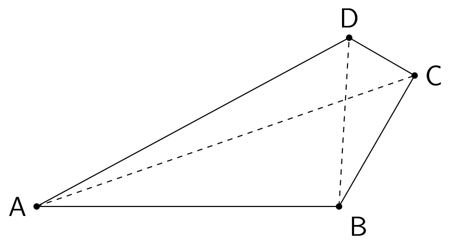


Figura 3.7: *Figura relativa all'esercizio 3.9*

Per il teorema del coseno si ha, nel triangolo ABC,

$$|\overline{\mathsf{AC}}| = \sqrt{(|\overline{\mathsf{AB}}|)^2 + (|\overline{\mathsf{BC}}|)^2 - 2|\overline{\mathsf{AB}}|\,|\overline{\mathsf{BC}}|\cos\mathsf{A}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{C}} = 2l\sqrt{7}$$

Il teorema di Pitagora applicato al triangolo BCD fornisce

$$|\overline{BD}| = l\sqrt{5}.$$

Sempre nel triangolo BCD si trova poi

$$\cos D\widehat{B}C = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BD}|} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin D\widehat{B}C = \frac{|\overline{DC}|}{|\overline{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Si ha poi

$$\cos D\widehat{B}A = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - D\widehat{B}C\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{5}}.$$

Infine applicando il teorema del coseno al triangolo DBA si trova

$$|\overline{DA}| = \sqrt{(|\overline{AB}|)^2 + (|\overline{DB}|)^2 - 2|\overline{AB}||\overline{DB}|\cos D\widehat{B}A} = l\sqrt{29 - 4\sqrt{3}}.$$

Si noti che il coseno dell'angolo $D\widehat{B}A$ è negativo, per cui l'angolo stesso risulta ottuso; in realtà misura circa 93.4°. □

Esercizio 3.10. *Le misure* $a = |\overline{BC}|$ *e* $b = |\overline{AC}|$ *di due lati di un triangolo* ABC *soddisfano le due relazioni*

$$a + b = 7 \quad e \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{12} \quad e \quad b > a,$$

inoltre $\sin\alpha = 3/5$ *essendo* $\alpha = B\widehat{A}C$, *e* $\overline{AB}$ *è il lato maggiore di* ABC. *Calcolare le misure* a, b *e* $c = |\overline{AB}|$ *di tutti i lati del triangolo e dire di che tipo di triangolo si tratta.*

Risoluzione. Osserviamo innanzitutto che, non essendo a il lato maggiore del triangolo, si deve avere $\alpha < \pi/2$. Parimenti si può osservare che anche l'angolo in $\widehat{B}$ deve essere acuto; l'unico angolo che può eventualmente essere ottuso è l'angolo in $\widehat{C}$. Si faccia riferimento alla figura 3.8, dove $\overline{CH}$ è l'altezza relativa al lato maggiore[1] c.

Si ha poi

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = 7 \\ ab = 12 \end{cases},$$

da cui, tenendo conto che $a < b$, $a = 3$ e $b = 4$.

Nel triangolo rettangolo ACH si trova

$$|\overline{CH}| = b\sin\alpha = \frac{12}{5}.$$

Possiamo ora trovare $|\overline{AH}|$ e $|\overline{HB}|$ nei triangoli AHC e BHC, usando il teorema di Pitagora. Si ha poi

$$c = |\overline{AH}| + |\overline{HB}| = \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 5.$$

Se ne deduce che $a^2 + b^2 = c^2$ e che dunque il triangolo è rettangolo. □

[1] A questo punto non sappiamo di che tipo di triangolo si tratta, ma la figura è sicuramente del tipo tracciato, viste le condizioni poste nel testo.

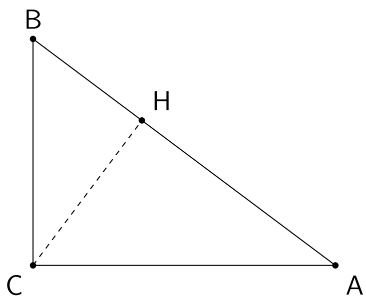


Figura 3.8: *Figura relativa all'esercizio* 3.10

Esercizio 3.11. *Nel quadrilatero* ABCD *gli angoli* $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ *misurano rispettivamente* $\pi/3$, $\pi/2$ *e* $7\pi/12$*; inoltre i lati* $\overline{BC}$ *e* $\overline{CD}$ *misurano entrambi* $l\sqrt{2}$*. Determinare le misure delle diagonali e il perimetro* $2p$ *del quadrilatero.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.9.

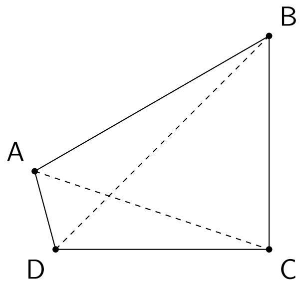


Figura 3.9: *Figura relativa all'esercizio* 3.11

Nel triangolo rettangolo BCD si trova facilmente, usando il teorema di Pitagora, $|\overline{BD}| = 2l$.

Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 2π, si trova che anche l'angolo $\widehat{A}$ misura $7\pi/12$. Il triangolo BCD è rettangolo ed isoscele quindi $D\widehat{B}C = \pi/4$. Ne deduciamo che $A\widehat{B}D = \pi/12$ e $B\widehat{D}A = \pi/3$.

Applicando il teorema dei seni al triangolo ABD si trova

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin B\widehat{D}A} = \frac{|\overline{BD}|}{\sin \widehat{A}} \quad \Rightarrow \quad |\overline{AB}| = \frac{2l\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} = l(3\sqrt{2}-\sqrt{6}),$$

e

$$\frac{|\overline{AD}|}{\sin D\widehat{B}A} = \frac{|\overline{BD}|}{\sin \widehat{A}} \quad \Rightarrow \quad |\overline{AD}| = 2l\,\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = l(4-2\sqrt{3}).$$

Per il perimetro $2p$ si trova dunque

$$2p = 4+5\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

La diagonale $\overline{AC}$ può essere trovata nel triangolo ABC utilizzando il teorema di Carnot. Si trova

$$|\overline{AC}| = l\sqrt{10}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

L'espressione di $|\overline{AC}|$ può essere semplificata usando la formula dei radicali doppi e si ottiene

$$|\overline{AC}| = l\sqrt{5}\big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big).$$

Osserviamo che il seno di $\pi/12$ e di $7\pi/12$ possono essere trovati usando, per esempio, le formule di addizione e sottrazione del seno:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right). \qquad \square$$

Esercizio 3.12. *Nel trapezio* $ABCD$ *la base maggiore* $\overline{AB}$ *è lunga* $3l$*, la base minore* $\overline{CD}$ *misura* $(3-\sqrt{3})l$*, la diagonale* $\overline{AC}$ *forma con la base maggiore un angolo di ampiezza* $\pi/4$ *e con il lato obliquo* $\overline{AD}$ *un angolo di* $\pi/12$*. Determinare le misure di* $\overline{AC}$*,* $\overline{AD}$*,* $\overline{CB}$ *e l'area del trapezio.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.10. A questo punto non conosciamo il tipo di trapezio di cui parla il problema. Solo dalla risoluzione risulterà che, in effetti, si tratta di un trapezio rettangolo in B e C.

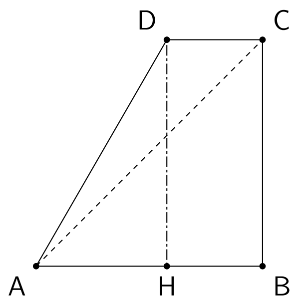


Figura 3.10: *Figura relativa all'esercizio* 3.12

Applicando il teorema dei seni al triangolo ACD, e ricordando che

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

si ottiene

$$|\overline{AC}| = \frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,l = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,l = 3\sqrt{2}\,l$$

$$|\overline{AD}| = \frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,l = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\,l = 2\sqrt{3}\,l\,.$$

Applicando Carnot al triangolo ABC si ottiene $|\overline{BC}| = 3l$. Essendo $B\widehat{A}D = \pi/3 = 60°$, per l'altezza $\overline{DH}$ di ABCD si ottiene

$$|\overline{DH}| = |\overline{AD}| \sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,l = 3l.$$

Se ne deduce che $|\overline{DH}| = |\overline{BC}|$, sicché ABCD è rettangolo in B e C. L'area di ABCD vale

$$\frac{3l + (3-\sqrt{3})l}{2}\cdot 3l = \frac{18-3\sqrt{3}}{2}\,l^2. \qquad \square$$

Esercizio 3.13. *Un triangolo* ABC *è acutangolo e si sa che l'angolo* $\alpha = \widehat{A}$ *misura* $\pi/3$ *e i lati* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *sono lunghi rispettivamente* $\sqrt{2}$ *e* $3-\sqrt{3}$. *Trovare le misure degli angoli* $\beta = \widehat{B}$ *e* $\gamma = \widehat{C}$ *e la lunghezza del lato* $\overline{AC}$.

Risoluzione. dal teorema dei seni si ricava

$$\frac{3-\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\gamma} \quad\Rightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Da qui si ricava, tenendo conto che γ deve essere acuto,

$$\gamma = \frac{5\pi}{12} \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

A questo punto si usa nuovamente il teorema dei seni per ottenere $|\overline{AC}|$.

$$\frac{|\overline{AC}|}{\sin\beta} = \frac{|\overline{BC}|}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad |\overline{AC}| = \sqrt{6}-\sqrt{2}. \qquad \square$$

Esercizio 3.14. *Il triangolo* PQR *è rettangolo in* Q *e ha i cateti di lunghezza* $|\overline{PQ}| = 14$ *e* $|\overline{QR}| = 48$. *Se* M *è il punto medio di* $\overline{PR}$, *determinare il coseno dell'angolo* $M\widehat{Q}P$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.11.

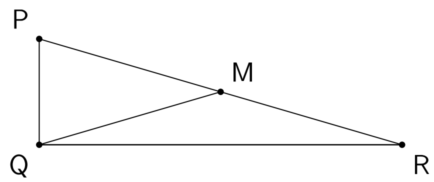


Figura 3.11: *Figura relativa all'esercizio 3.14*

Si ha, intanto,

$$|\overline{PR}| = \sqrt{14^2+48^2} = 50.$$

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa (il triangolo è inscrivibile in una semicirconferenza e quindi la mediana in questione è un raggio, mentre l'ipotenusa è un diametro). Dunque il triangolo MPQ è isoscele e l'angolo $M\widehat{Q}P$ è uguale a $M\widehat{P}Q$. Si ha dunque

$$\cos M\widehat{Q}P = \cos M\widehat{P}Q = \frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{PR}|} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}. \qquad \square$$

Esercizio 3.15. *Calcolare la differenza tra l'area dell'esagono regolare circoscritto a una circonferenza di raggio r e l'area del triangolo equilatero inscritto nella medesima circonferenza.*

Risoluzione. L'esagono regolare circoscritto ad una circonferenza è costituito da 6 triangoli equilateri di altezza r e quindi lato dato da

$$l=\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

L'area dell'esagono è allora

$$\mathcal{A}_6=6\frac{1}{2}\frac{2r}{\sqrt{3}}r=\frac{6r^2}{\sqrt{3}}=2r^2\sqrt{3}.$$

Il triangolo equilatero inscritto ha come lato una corda con angolo alla circonferenza di $\pi/3$, quindi $l=r\sqrt{3}$. Ne segue che l'altezza è

$$\frac{l}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{2}r.$$

L'area del triangolo è quindi

$$\mathcal{A}_3=\frac{1}{2}r\sqrt{3}\frac{3}{2}r=\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

La differenza richiesta è

$$\frac{5}{4}r^2\sqrt{3}.$$

□

Esercizio 3.16. *Qual è il minimo numero di quadrati di lato $l=3\sqrt{2}a$ la cui unione contiene un segmento di lunghezza $31a$?*

Risoluzione. È chiaro che converrà disporre i quadrati come nella figura 3.12, per ottenere segmenti più lunghi contenuti in un dato numero di quadrati. Inoltre il segmento più lungo sarà la "diagonale" di questa unione di quadrati.

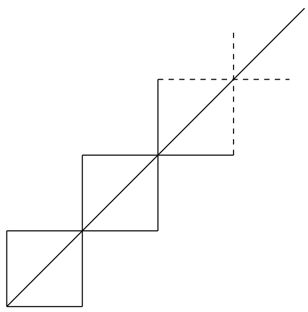


Figura 3.12: *Figura relativa all'esercizio 3.16*

Poiché $l=3\sqrt{2}a$, la diagonale di ciascun quadrato sarà $6a$. Con 5 quadrati il segmento più lungo contenuto misura $30a$, con 6 quadrati misura $36a$. Dunque occorrono 6 quadrati. □

Esercizio 3.17. *Il lato non obliquo $\overline{\mathsf{AD}}$ e la base minore $\overline{\mathsf{DC}}$ di un trapezio rettangolo* ABCD *hanno la stessa lunghezza l. Inoltre, i punti* M *e* H *sono rispettivamente il punto d'incontro delle diagonali e la sua proiezione ortogonale sulla base maggiore $\overline{\mathsf{AB}}$. Risolvere il triangolo* DMC *sapendo che $|\overline{\mathsf{MH}}|=(2/3)\,l$.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.13.

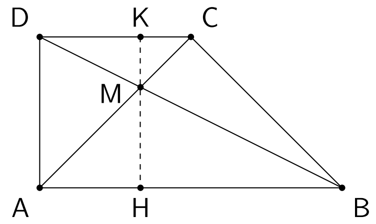


Figura 3.13: *Figura relativa all'esercizio* 3.17

Si ha facilmente
$$|\overline{AC}| = l\sqrt{2}.$$
Inoltre se $|\overline{MH}| = (2/3)\,l$, $|\overline{MC}| = (1/3)\,l$ e quindi
$$|\overline{AM}| = \frac{2}{3}|\overline{AC}| = \frac{2}{3}\,l\sqrt{2}, \quad |\overline{CM}| = \frac{1}{3}|\overline{AC}| = \frac{1}{3}\,l\sqrt{2}.$$

Gli angoli $D\widehat{A}C$, $B\widehat{A}C$, $D\widehat{C}A$ misurano $\pi/4$. Nel triangolo AMD si può trovare $|\overline{DM}|$ con il teorema di Carnot:
$$|\overline{DM}| = \sqrt{|\overline{DA}|^2 + |\overline{AM}|^2 - 2|\overline{DA}||\overline{AM}|\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{l^2 + \frac{8}{9}\,l^2 - 2\,l\,\frac{2}{3}\,l\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{l}{3}\sqrt{5}.$$

Dobbiamo ora trovare i due angoli in D e M del triangolo DMC. Possiamo usare il teorema dei seni per trovare, per esempio, $\sin C\widehat{D}M$:
$$\frac{|\overline{DM}|}{\sin D\widehat{C}M} = \frac{|\overline{MC}|}{\sin C\widehat{D}M} \quad \Rightarrow \quad \sin C\widehat{D}M = \frac{\frac{1}{3}\,l\sqrt{2}}{\frac{l}{3}\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Passiamo ora a trovare l'angolo $C\widehat{M}D$. Mentre gli angoli in D e in C sono sicuramente acuti, l'angolo in M appare ottuso: ne determiniamo il coseno che ci fornirà direttamente questa informazione. Basta applicare il teorema di Carnot al triangolo in esame. Si trova
$$\cos C\widehat{M}D = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$
con che abbiamo la conferma che l'angolo è ottuso. □

Esercizio 3.18. *La base maggiore* $\overline{AB}$ *di un trapezio rettangolo* ABCD *è quattro volte l'altezza e la base minore* $\overline{CD}$ *è lunga* $4l$. *Sapendo che il seno dell'angolo, diciamolo* α, *compreso tra la base maggiore e la diagonale minore è* $1/3$, *calcolare l'area e il perimetro del trapezio.*

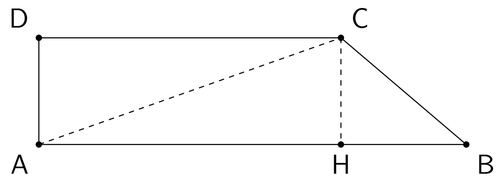


Figura 3.14: *Figura relativa all'esercizio 3.18*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.14.

Si ha, intanto,

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Anche l'angolo $A\widehat{C}D$ vale α. Nel triangolo ACD si ha allora

$$|\overline{AC}| = \frac{|\overline{DC}|}{\cos\alpha} = 3l\sqrt{2} \quad \text{e} \quad |\overline{DA}| = |\overline{AC}|\sin\alpha = l\sqrt{2}.$$

Ne segue

$$|\overline{AB}| = 4l\sqrt{2} \quad \text{e} \quad |\overline{HB}| = 4l(\sqrt{2}-1).$$

Nel triangolo HCB si può trovare $|\overline{CB}|$ con il teorema di Pitagora. Si trova

$$|\overline{CB}| = l\sqrt{50-32\sqrt{2}}.$$

In conclusione

$$2p = \left[4+5\sqrt{2}+\sqrt{50-32\sqrt{2}}\right]l\,; \quad \mathcal{A} = 2\left(2+\sqrt{2}\right)l^2.$$

□

Esercizio 3.19.

Su una semicirconferenza che ha diametro $\overline{AB}$ di lunghezza d, si prenda un punto P e lo si congiunga con gli estremi A e B del diametro. Sul lato $\overline{AP}$ si costruisca, esternamente al triangolo APB, il quadrato APQR. Se x è la misura dell'angolo $B\widehat{A}P$, determinare x in modo che l'area del trapezio ABQR valga $(3/4)\,d^2$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.15.

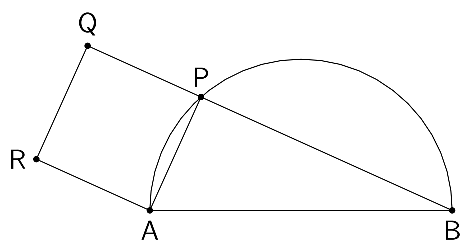


Figura 3.15: *Figura relativa all'esercizio 3.19*

Si ha
$$|\overline{AP}| = d\cos x, \quad |\overline{PB}| = d\sin x,$$
e quindi
$$\mathcal{A}_{ABQR} = \left(d\cos x\right)^2 + \frac{1}{2} d\cos x d\sin x.$$
Tenendo conto della condizione del testo si ottiene, dopo semplificazione, l'equazione
$$4\cos^2 x + 2\cos x\sin x - 3 = 0.$$
Si tratta di un'equazione riducibile a omogenea di secondo grado. Essa si può rendere lineare usando le formule, di duplicazione del seno e di bisezione del coseno,
$$\cos x\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$
Si ottiene
$$2\cos 2x + \sin 2x - 1 = 0,$$
che si può risolvere, per esempio, graficamente:
$$\begin{cases} 2X + Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad (X,Y) = (0,1) \vee (X,Y) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$
La seconda soluzione è da scartare, in quanto l'angolo x deve essere compreso tra 0 e $\pi/2$ e quindi $0 \le 2x \le \pi$; la prima fornisce
$$2x = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}.$$
□

Esercizio 3.20. *Siano* $|\overline{AB}| = c$ *e* $|\overline{AC}| = 2\sqrt{6}c$ *le misure dei cateti di un triangolo rettangolo. La bisettrice dell'angolo* $\gamma = A\widehat{C}B$ *incontra l'altezza relativa all'ipotenusa in un punto* M*; determinare* $|\overline{AM}|$ *in funzione di* c.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.16.

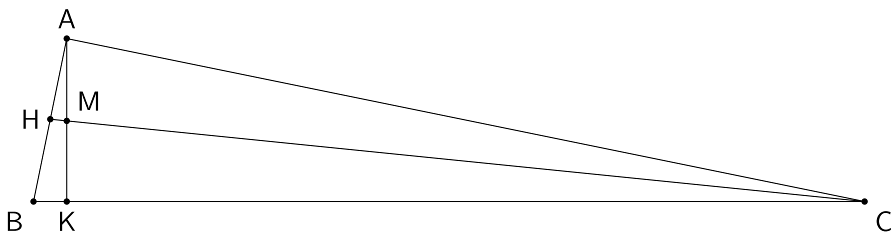


Figura 3.16: *Figura relativa all'esercizio* 3.20

Si ha, intanto,
$$|\overline{BC}| = 5 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Successivamente

$$\mathsf{A}\widehat{\mathsf{H}}\mathsf{M}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},\quad \mathsf{H}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{M}=\gamma,\quad \mathsf{A}\widehat{\mathsf{M}}\mathsf{H}=\pi-\gamma-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}=\mathsf{A}\widehat{\mathsf{H}}\mathsf{M}.$$

Il triangolo AHM è dunque isoscele e quindi $|\overline{\mathsf{AM}}|=|\overline{\mathsf{AH}}|$. Nel triangolo rettangolo AHC si trova

$$|\overline{\mathsf{AH}}|=|\overline{\mathsf{AC}}|\tan\frac{\gamma}{2}=|\overline{\mathsf{AC}}|\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}=2\sqrt{6}\,c\,\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}}=\left(10\sqrt{6}-24\right)c. \qquad \square$$

Esercizio 3.21. *Siano* A, B, C *e* D *i vertici consecutivi di un quadrilatero convesso inscritto nella circonferenza di diametro* $|\overline{\mathsf{BD}}|=9a$. *La tangente alla circonferenza nel punto* A *è perpendicolare alla retta* CD *e sia* E *il loro punto di incontro. Sapendo che*

$$|\overline{\mathsf{EA}}|=2a\sqrt{5},\quad \overline{\mathsf{ED}}+\overline{\mathsf{EC}}=\overline{\mathsf{BD}},$$

determinare il perimetro del quadrilatero ABCD.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.17.

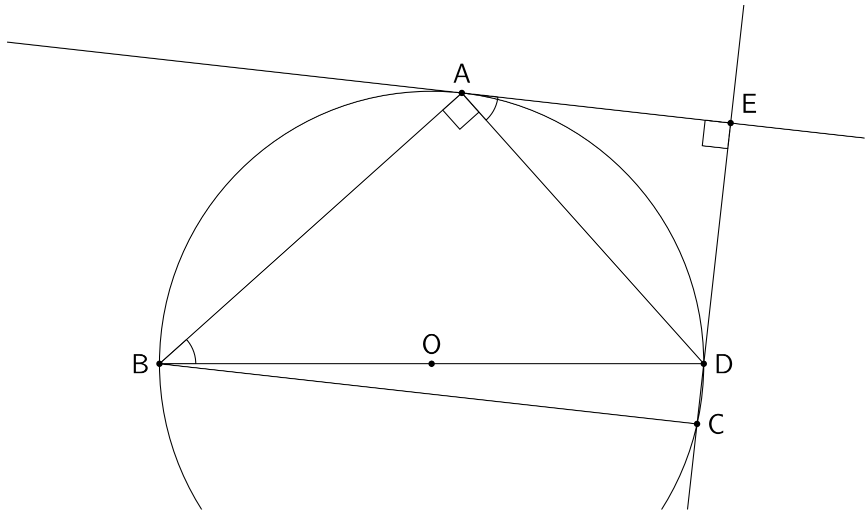


Figura 3.17: *Figura relativa all'esercizio* 3.21

Si comincia con l'osservare che i punti A e C devono stare da bande opposte rispetto al diametro se si vuole che il quadrilatero sia convesso. Si nota poi che gli angoli DAE e DBA sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (uno ha entrambi i lati secanti, uno ha un lato secante e uno tangente alla circonferenza). Di conseguenza i triangoli rettangoli BDA e DAE sono simili. Posto $|\overline{\mathsf{DE}}|=x$, dalla relazione dl testo si ricava $|\overline{\mathsf{EC}}|=9a-x$ e quindi $|\overline{\mathsf{DC}}|=9a-2x$. nel triangolo rettangolo ADE si trova

$$|\overline{\mathsf{AD}}|=\sqrt{20a^2+x^2}.$$

Per la similitudine dei triangoli BDA e DAE si ricava poi

$$|\overline{\mathsf{AB}}|:|\overline{\mathsf{AD}}|=|\overline{\mathsf{AE}}|:|\overline{\mathsf{DE}}| \quad\Rightarrow\quad |\overline{\mathsf{AB}}|=\frac{\sqrt{20a^2+x^2}\,2a\sqrt{5}}{x}.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD si trova, dopo semplificazione, la seguente equazione in x:

$$x^4 - 41a^2x^2 + 400a^4 = 0,$$

che ha come soluzioni

$$x = 5a \vee x = 4a.$$

La prima soluzione è da scartare, in quanto si otterrebbe per $|\overline{DC}|$ un valore negativo. Si ottiene a questo punto facilmente

$$|\overline{AD}| = 6a, \quad |\overline{AB}| = 3a\sqrt{5}, \quad |\overline{BC}| = 4a\sqrt{5}, \quad |\overline{DC}| = a,$$

da cui

$$2p = \left(7 + 7\sqrt{5}\right)a. \qquad \square$$

Esercizio 3.22. *Trovare l'area del trapezio rettangolo* ABCD *sapendo che* $|\overline{AB}| = 3a$, $\widehat{A} = \widehat{D} = \pi/2$, $\cos B\widehat{A}C = 1/\sqrt{13}$ *e* $\overline{CB} = 2\overline{HB}$, *essendo* H *la proiezione di* C *sulla base* $\overline{AB}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.18.

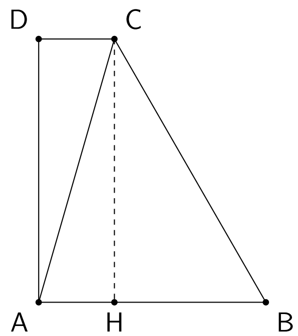


Figura 3.18: *Figura relativa all'esercizio* 3.22

Posto $|\overline{HB}| = x$, si ha $|\overline{CB}| = 2x$, $|\overline{HB}| = x\sqrt{3}$, $|\overline{AH}| = 3a - x$,

$$\tan H\widehat{A}C = \frac{x\sqrt{3}}{3a - x}.$$

D'altronde

$$\sin H\widehat{A}C = \sqrt{1 - \frac{1}{13}} = \sqrt{\frac{12}{13}}, \quad \Rightarrow \quad \tan H\widehat{A}C = 2\sqrt{3}.$$

Si ricava l'equazione in x:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3a - x} = 2\sqrt{3}, \quad \text{da cui} \quad x = 2a.$$

La base minore del trapezio è allora $|\overline{DC}| = a$, l'altezza $|\overline{CH}| = 2a\sqrt{3}$ e quindi l'area $4a^2\sqrt{3}$. $\square$

Esercizio 3.23. *In una circonferenza di diametro* $2r$ *si considerino due corde consecutive* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$, *di lunghezza rispettivamente* r *e* $2r/\sqrt{3}$, *tali che l'angolo* $A\widehat{B}C$ *sia ottuso. Calcolare la lunghezza della corda* $\overline{AC}$.

Risoluzione. Se la corda $\overline{\mathsf{AB}}$ ha lunghezza r, significa che il minore, diciamolo γ, dei due angoli alla circonferenza che insistono su di essa misura $\pi/6$; se la corda $\overline{\mathsf{BC}}$ ha lunghezza ${}^{2r}/\sqrt{3}$, significa che per il minore, diciamolo δ, dei due angoli alla circonferenza che insistono su di essa vale

$$\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\delta = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Il minore dei due angoli alla circonferenza che insistono sulla corda $\overline{\mathsf{AC}}$ misura $\gamma+\delta$ e si ha

$$|\overline{\mathsf{AC}}| = 2r\sin(\gamma+\delta) = 2r\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = r\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+1\right).$$ □

Esercizio 3.24. *Sia* C *il centro di un cubo di spigolo* $|\overline{\mathsf{AB}}| = l$. *Trovare gli angoli e i lati del triangolo* ABC.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.19.

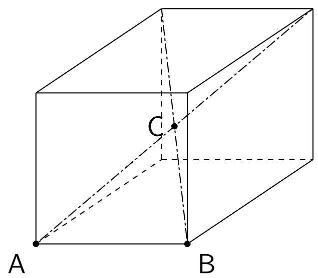


Figura 3.19: *Figura relativa all'esercizio* 3.24

I lati $\overline{\mathsf{AC}}$ e $\overline{\mathsf{CB}}$ del triangolo sono la metà della diagonale del cubo. La diagonale del cubo è ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come cateti una diagonale di una faccia e il lato del cubo, dunque misura $l\sqrt{3}$. Si ha dunque

$$|\overline{\mathsf{AC}}| = |\overline{\mathsf{BC}}| = l\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il coseno degli angoli interni di questo triangolo si può ora trovare con il teorema di Carnot:

$$\cos\widehat{\mathsf{A}} = \cos\widehat{\mathsf{B}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\widehat{\mathsf{C}} = \frac{1}{3}.$$

Si ricordi che, essendo in un triangolo ciascun angolo interno minore di π, la conoscenza del coseno dell'angolo individua univocamente l'angolo stesso. La conoscenza invece del seno (che deve essere positivo!) di un angolo interno non individua univocamente l'angolo in quanto ci sono due angoli entrambi uno acuto e uno ottuso che hanno lo stesso seno: determinando il seno bisogna precisare se l'anglo in questione è ottuso o acuto (come deve necessariamente essere per gli angoli del triangolo in esame).

Si tenga sempre ben presente che, quando in un problema geometrico si chiede di trovare un angolo, molto spesso si possono trovare solo le funzioni trigonometriche dello stesso (in generale una delle due funzioni seno o coseno e la precisazione del quadrante in cui si situa l'angolo): solo in pochi fortunati casi si potrà poi esprimere questo angolo in termini di multipli o sottomultipli di π, cioè solo in pochi casi si otterrà un "angolo notevole". □

Esercizio 3.25. *In un triangolo* ABC *si ha* $|\overline{AC}| = a$, $|\overline{BC}| = 2a$ *e* $A\hat{C}B = 2\pi/3$. *Calcolare* $|\overline{AB}|$ *e trovare il raggio della circonferenza circoscritta.*

Risoluzione. Con il teorema di Carnot si trova subito $|\overline{AB}| = a\sqrt{7}$. Per trovare il raggio della circonferenza circoscritta, indicata con $\mathcal{A}$ l'area del triangolo, si può usare la formula

$$r = \frac{|\overline{AC}||\overline{BC}||\overline{AB}|}{4\mathcal{A}} = a\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Alternativamente si può usare il teorema dei seni:

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin A\hat{C}B} = 2r,$$

da cui si ottiene lo stesso risultato di prima. □

Esercizio 3.26. *Ad un cerchio di centro* O *si conducono due tangenti dagli estremi di un suo diametro. Dette* A *e* B *le intersezioni con una terza tangente, dimostrare che il triangolo* AOB *è rettangolo. Inoltre, sapendo che* $|\overline{OA}| = 7$ *e* $|\overline{OB}| = 24$, *determinare il raggio del cerchio.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.20.

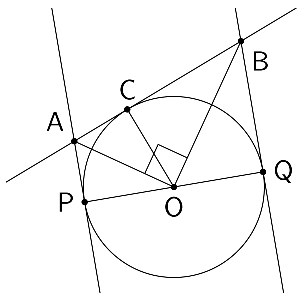


Figura 3.20: *Figura relativa all'esercizio* 3.26

I triangoli ACO e APO sono uguali perché hanno $\overline{AP} = \overline{AC}$ perché segmenti di tangenza, $\overline{AO}$ in comune e $\overline{PO} = \overline{CO}$ perché raggi. Dunque $P\hat{O}A = C\hat{O}A = \alpha$. Analogamente $B\hat{O}C = B\hat{O}Q = \beta$. Essendo $2\alpha + 2\beta = \pi$, si avrà

$$A\hat{O}B = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Con Pitagora si ottiene

$$|\overline{AB}| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25.$$

Il raggio della circonferenza non è altro che l'altezza relativa all'ipotenusa in questo triangolo. Indicando con $\mathcal{A}$ l'area del triangolo, si ha:

$$|\overline{\mathsf{OC}}| = \frac{2\mathcal{A}}{|\overline{\mathsf{AB}}|} = \frac{|\overline{\mathsf{AO}}||\overline{\mathsf{OB}}|}{|\overline{\mathsf{AB}}|} = \frac{168}{25}.$$

Si noti che il quadrilatero PQBA è la metà di un trapezio circoscritto ad una circonferenza. la proprietà dimostrata in questo esercizio vale dunque per i due triangoli individuati dai lati obliqui di un generico trapezio circoscritto ad una circonferenza e dal centro della circonferenza stessa. □

Esercizio 3.27. *Un trapezio isoscele di base maggiore $\overline{\mathsf{AB}}$ e base minore $\overline{\mathsf{CD}}$ è circoscritto a una circonferenza di centro* O. *Determinare il raggio della circonferenza, sapendo che l'angolo in* A *vale $\pi/3$ e che l'area del trapezio vale $24\sqrt{3}$.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.21.

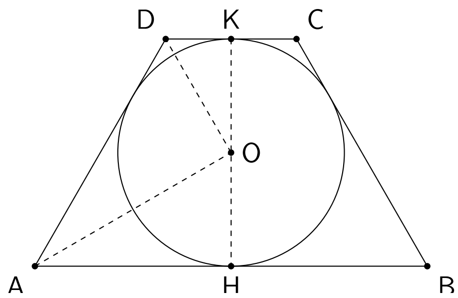


Figura 3.21: *Figura relativa all'esercizio 3.27*

Poniamo $|\overline{\mathsf{OH}}| = x$. Poiché $\mathsf{O\hat{A}H} = \pi/6$, $|\overline{\mathsf{AH}}| = x\sqrt{3}$. Inoltre $\mathsf{A\hat{D}C} = 2\pi/3$ e quindi $\mathsf{A\hat{D}C} = \pi/3$. Dunque

$$|\overline{\mathsf{DK}}| = x\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si deve allora avere

$$\frac{1}{2}\left(2x\sqrt{3} + \frac{2x\sqrt{3}}{3}\right)2x = 24\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$ □

Esercizio 3.28. *Sono dati due cerchi concentrici di raggi r e $R(r) = \sqrt{r^2 + |r^2 - ar|}$ con $0 \le r \le a$. Trovare per quali valori di r l'area della corona circolare è massima.*

Risoluzione. L'area della corona circolare è la differenza delle aree dei due cerchi:

$$\mathcal{A} = \pi|r^2 - ar|.$$

Se $0 \le r \le a$ ne segue che

$$0 \le r^2 \le ar, \quad \Rightarrow \quad |r^2 - ar| = ar - r^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} = \pi(ar - r^2).$$

Poiché al variare di r $\pi(ar - r^2)$ ha come grafico una parabola con concavità verso il basso, il massimo si raggiungerà in corrispondenza del vertice, ovvero con

$$r = \frac{a}{2}. \qquad \square$$

Esercizio 3.29. *Siano* ABC *un triangolo rettangolo in* A, *e* D *il punto del cateto* $\overline{\mathsf{AC}}$ *equidistante da* B *e* C. *Se* a *è la lunghezza dell'ipotenusa* $\overline{\mathsf{BC}}$ *e l'area* $\mathcal{A}$ *del triangolo* BCD *è pari a* $a^2/(4\sqrt{3})$, *determinare l'angolo* $\mathsf{A\widehat{B}D}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.22.

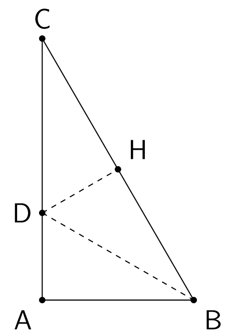


Figura 3.22: *Figura relativa all'esercizio* 3.29

Si ha

$$|\overline{\mathsf{DH}}| = \frac{2\mathcal{A}}{|\overline{\mathsf{BC}}|} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad |\overline{\mathsf{CH}}| = |\overline{\mathsf{HB}}| = \frac{a}{2}.$$

Ne segue

$$\tan \mathsf{D\widehat{C}H} = \tan \mathsf{D\widehat{B}H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{D\widehat{C}H} = \mathsf{D\widehat{B}H} = \frac{\pi}{6}.$$

Dunque

$$\mathsf{A\widehat{B}C} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{A\widehat{B}D} = \frac{\pi}{6}. \qquad \square$$

Esercizio 3.30. *Il triangolo* ABC *di lati* $|\overline{\mathsf{AC}}| = 3$, $|\overline{\mathsf{BC}}| = 4$ *e* $|\overline{\mathsf{AB}}| = 5$ *è inscritto in una circonferenza. Di ognuno dei due triangoli isosceli* BCD *con il vertice* D *sulla circonferenza calcolare il perimetro* $2p$ *e l'area* $\mathcal{A}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.23.

Essendo la terna 3, 4, 5 una terna pitagorica, il triangolo ABC è rettangolo in C. I triangoli isosceli $\mathsf{D_1BC}$ e $\mathsf{D_2BC}$ hanno il vertice nell'intersezione tra la circonferenza e l'asse della corda $\overline{\mathsf{BC}}$, asse che necessariamente passa per il centro. Dunque

$$\mathsf{D_2\widehat{D_1}B} = \frac{\mathsf{C\widehat{D_1}B}}{2} = \frac{\mathsf{C\widehat{A}B}}{2}.$$

Essendo

$$\sin \mathsf{C\widehat{A}B} = \frac{|\overline{\mathsf{AB}}|}{|\overline{\mathsf{BC}}|} = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \cos \mathsf{C\widehat{A}B} = \frac{|\overline{\mathsf{AC}}|}{|\overline{\mathsf{BC}}|} = \frac{3}{5},$$

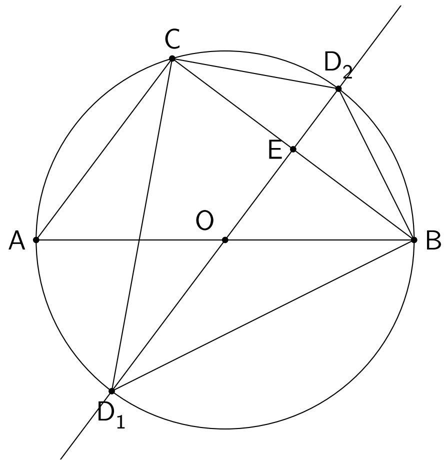


Figura 3.23: *Figura relativa all'esercizio* 3.30

si ha

$$\sin \mathsf{D_2}\widehat{\mathsf{D_1}}\mathsf{B} = \sqrt{\frac{1-\cos \mathsf{C}\widehat{\mathsf{D_1}}\mathsf{B}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Allora

$$|\overline{\mathsf{D_2B}}| = 5\frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad |\overline{\mathsf{D_1B}}| = 2\sqrt{5}.$$

I perimetri richiesti sono

$$2p_{\mathsf{CBD_1}} = 4+4\sqrt{5} \quad \text{e} \quad 2p_{\mathsf{CBD_2}} = 4+2\sqrt{5}.$$

Si ha poi, nel triangolo rettangolo $\mathsf{D_1BD_2}$:

$$|\overline{\mathsf{D_1E}}| = 4, \quad |\overline{\mathsf{D_2E}}| = 1.$$

Le aree richieste sono allora

$$\mathcal{A}_{\mathsf{CBD_1}} = 8, \quad \mathcal{A}_{\mathsf{CBD_2}1} = 2.$$ □

Esercizio 3.31. *Da un punto* O *esterno a una circonferenza di centro* C *si conducano la semiretta* OC *e la semiretta tangente nel punto* A*. Siano* $d = |\overline{\mathsf{OA}}|$ *e* $\alpha = \mathsf{A}\widehat{\mathsf{O}}\mathsf{C}$*. Sapendo che* $d = 6\sqrt{2}$ *e* $\sin\alpha = 1/3$*, calcolare il raggio* r *della circonferenza.*

Risoluzione. È sufficiente ricordare che il triangolo OAC è rettangolo in A. Si ha

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

da cui

$$r = |\overline{\mathsf{AC}}| = 6\sqrt{2}\tan\alpha = 3.$$ □

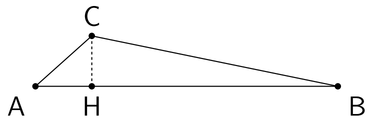


Figura 3.24: *Figura relativa all'esercizio 3.32*

Esercizio 3.32. *In un triangolo* ABC *si ha* $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2a$, $\sin\alpha = 2/3$ *e* $\sin\beta = 1/4$, *essendo* $\alpha = \mathsf{C}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{B}$ *e* $\beta = \mathsf{C}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{A}$, *con* α *e* β *acuti. Calcolare l'altezza* h *relativa ad* $\overline{\mathsf{AB}}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.24.
Si ha, intanto,

$$\mathsf{A}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{B} = \gamma = \pi - (\alpha + \beta) \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Poiché

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{e} \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

si ottiene

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{3}+1)}{12}.$$

Dal teorema dei seni si ottiene

$$\frac{|\overline{\mathsf{AB}}|}{\sin\gamma} = \frac{|\overline{\mathsf{CB}}|}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad |\overline{\mathsf{CB}}| = \frac{16a}{\sqrt{5}(2\sqrt{3}+1)}.$$

Nel triangolo rettangolo BCH si trova infine

$$|\overline{\mathsf{CH}}| = |\overline{\mathsf{CB}}|\sin\beta = \frac{4a}{(2\sqrt{3}+1)\sqrt{5}}.$$

□

Esercizio 3.33. *Determinare l'area della superficie di una piramide* $\mathcal{P}$ *che ha per base un triangolo equilatero* ABC *di lato* l *e vertice il punto* V *tale che* $\overline{\mathsf{VA}}$ *è l'altezza di* $\mathcal{P}$ *relativa alla base e* ABV *è un triangolo isoscele.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.25.
La base ABC ha area

$$\frac{1}{2}\, l\, \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

I triangoli AVB e AVC sono rettangoli e isosceli con area $l^2/2$. Il triangolo BVC è isoscele con base l e lati obliqui $l\sqrt{2}$. La sua altezza è allora

$$\sqrt{2l^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{7},$$

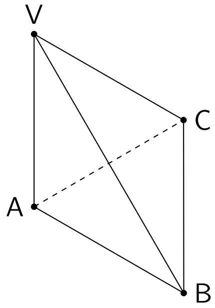


Figura 3.25: *Figura relativa all'esercizio* 3.33

e la sua area

$$\frac{l^2}{4}\sqrt{7}.$$

L'area della superficie della piramide è allora

$$l^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

□

Esercizio 3.34. *Sia* P *un punto esterno alla circonferenza* γ *di centro* O *e raggio* $r=1$*. Si traccino la semiretta* PT *tangente a* γ *in un punto* T *e l'altezza* $\overline{\mathsf{TH}}$ *del triangolo* OPT*. Dimostrare che* $|\overline{\mathsf{OH}}|=1/|\overline{\mathsf{OP}}|$.

Risoluzione. Si tratta di una semplice applicazione del primo teorema di Euclide al triangolo OPT: si ottiene subito $|\overline{\mathsf{OP}}|\cdot|\overline{\mathsf{OH}}|=|\overline{\mathsf{OT}}|\,(=1)$. □

Esercizio 3.35. *Nel triangolo* ABC *si ha* $|\overline{\mathsf{AB}}|=9\,\mathrm{cm}$, $|\overline{\mathsf{AC}}|=12\,\mathrm{cm}$ *e l'angolo* $\widehat{\mathsf{B}}$ *è doppio dell'angolo* $\widehat{\mathsf{C}}$*. Calcolare* $\cos\widehat{\mathsf{C}}$ *e* $|\overline{\mathsf{BC}}|$.

Risoluzione. Posto $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{B}=x$, si ha $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{C}=2x$. Il teorema dei seni fornisce subito l'equazione

$$\frac{|\overline{\mathsf{AB}}|}{\sin x}=\frac{|\overline{\mathsf{AC}}|}{\sin 2x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{12}{9}\quad\Rightarrow\quad\cos x=\frac{2}{3}.$$

Se ne deduce

$$\sin x=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Si ha poi

$$\sin \mathsf{B}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{C}=\sin(\pi-3x)=\sin 3x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=3\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{4}{9}-\frac{5\sqrt{5}}{27}=\frac{7\sqrt{5}}{27}.$$

Una nuova applicazione del teorema dei seni fornisce ora $|\overline{\mathsf{BC}}|$:

$$\frac{|\overline{\mathsf{AB}}|}{\sin \mathsf{B}\widehat{\mathsf{C}}\mathsf{A}}=\frac{|\overline{\mathsf{BC}}|}{\sin \mathsf{B}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{C}}\quad\Rightarrow\quad\frac{9}{\sqrt{5}/3}=\frac{|\overline{\mathsf{BC}}|}{7\sqrt{5}/27}\quad\Rightarrow\quad|\overline{\mathsf{BC}}|=7.$$

□

Esercizio 3.36. *Sia γ la circonferenza di centro C e raggio $r > 0$. Da un punto esterno O si traccino la retta secante OC, che interseca γ in A e B, e una delle due tangenti OD a γ in D. Se la distanza $d = |\overline{\mathsf{OC}}|$ è pari al diametro $2r$, calcolare l'area e il perimetro del triangolo ABD.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.26.

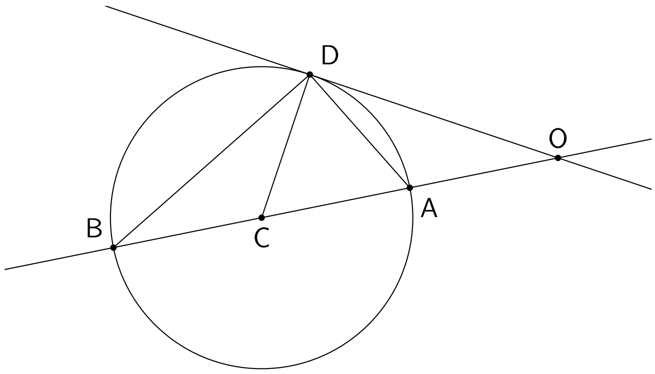


Figura 3.26: *Figura relativa all'esercizio* 3.36

Poiché il triangolo CDO è rettangolo e A è il punto medio dell'ipotenusa, $\overline{\mathsf{DA}}$ è la mediana relativa all'ipotenusa; dunque $|\overline{\mathsf{DA}}| = r$. Ne segue, nel triangolo ABC, anch'esso rettangolo, $|\overline{\mathsf{BD}}| = r\sqrt{3}$. Si conclude che

$$2p = (3+\sqrt{3})r; \quad \mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2.$$ □

Esercizio 3.37. *Di un triangolo ABC si sa che $|\overline{\mathsf{AB}}| = 6$, $\cos\beta = 3/5$ e $\cos\gamma = 4/5$, essendo α, β, γ gli angoli ai vertici A, B, C rispettivamente. Dopo aver dimostrato che il triangolo ABC è rettangolo, si calcolino le lunghezze dei lati $\overline{\mathsf{AC}}$ e $\overline{\mathsf{BC}}$.*

Risoluzione. Si ha:

$$\sin\beta = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \sin\gamma = \frac{3}{5}.$$

Dunque

$$\cos(\gamma+\beta) = \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma+\beta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

e il triangolo è rettangolo in A. È ora facile concludere che $|\overline{\mathsf{BC}}| = 10$, $|\overline{\mathsf{AC}}| = 8$.

Si noti che se il testo avesse dato, anziché il coseno degli angoli β e γ, il loro seno, $\sin\beta = 4/5$ e $\sin\gamma = 3/5$, sempre con $|\overline{\mathsf{AB}}| = 6$, non si sarebbe potuto concludere alcunché sul tipo di triangolo. La figura 3.27 mostra due triangoli entrambi soddisfacenti a queste condizioni, ma uno retto e l'altro no.

Nella figura 3.27 i due angoli in C sono uguali (e quindi hanno lo stesso seno), quelli in B sono supplementari (e quindi hanno lo stesso seno), i due angoli in A sono uno retto e l'altro acuto; i due segmenti $\overline{\mathsf{AB}}$ hanno inoltre la stessa lunghezza. □

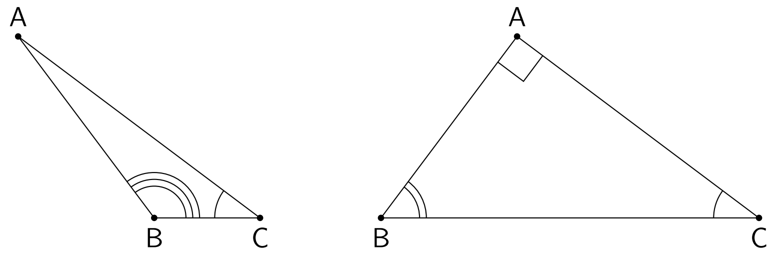


Figura 3.27: *Figura relativa ad una osservazione sull'esercizio 3.37*

Esercizio 3.38. *Due cerchi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di raggi R e r, con $R > r > 0$, hanno i centri* A *e* B *a distanza $d = R + r$. Si consideri la retta tangente a entrambi nei punti distinti* $\mathsf{C} \in \mathcal{C}_1$ *e* $\mathsf{D} \in \mathcal{C}_2$*. Calcolare l'area del quadrilatero* ABDC.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.28.

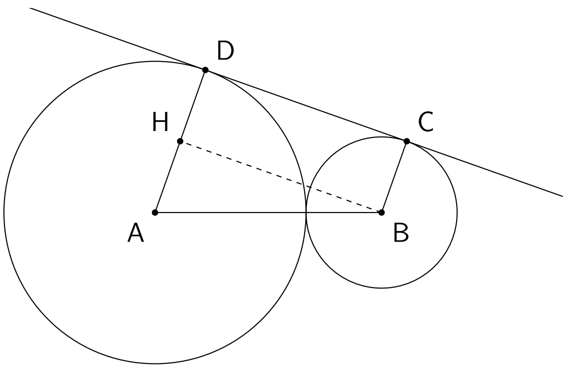


Figura 3.28: *Figura relativa all'esercizio 3.38*

Il quadrilatero in questione è un trapezio rettangolo di basi R ed r, e altezza $\overline{\mathsf{BH}}$ che si trova facilmente nel triangolo ABH dove $|\overline{\mathsf{AB}}| = R + r$ e $|\overline{\mathsf{AH}}| = R - r$. Si trova facilmente $\mathcal{A} = (R + r)\sqrt{Rr}$. □

Esercizio 3.39. *In un triangolo* ABC *si ha* $|\overline{\mathsf{AC}}| = a$, $|\overline{\mathsf{BC}}| = 2a$, $\mathsf{A}\hat{\mathsf{C}}\mathsf{B} = 2\pi/3$. *Condurre da* C *la perpendicolare al lato* $\overline{\mathsf{CB}}$ *fino a incontrare in* M *il lato* $\overline{\mathsf{AB}}$ *e calcolare le lunghezze di* $\overline{\mathsf{AM}}$, $\overline{\mathsf{BM}}$ *e* $\overline{\mathsf{CM}}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.29.

Applicando il teorema di Carnot al triangolo ABC si trova

$$|\overline{\mathsf{AB}}| = \sqrt{4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cos\frac{2\pi}{3}} = a\sqrt{7}.$$

Applicando poi il teorema dei seni sempre al triangolo ABC si trova, usando le solite convenzioni sui nomi degli angoli interni di un triangolo,

$$\frac{|\overline{\mathsf{AC}}|}{\sin\beta} = \frac{|\overline{\mathsf{AB}}|}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \quad \text{e quindi} \quad \cos\beta = \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

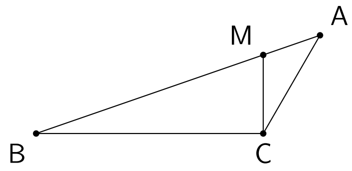


Figura 3.29: *Figura relativa all'esercizio 3.39*

A questo punto nel triangolo rettangolo BCM si trova

$$|\overline{BM}| = \frac{|\overline{BC}|}{\cos\beta} = \frac{4}{5}a\sqrt{7}.$$

Ne consegue

$$|\overline{AM}| = \frac{1}{5}a\sqrt{7} \quad \text{e} \quad |\overline{CM}| = \frac{2}{5}a\sqrt{3}.$$

□

Esercizio 3.40. *Le diagonali delle facce di un parallelepipedo rettangolo hanno lunghezze a, b e c. Quanto è lunga la diagonale principale?*

Risoluzione. Indichiamo con α, β e γ i tre spigoli del parallelepipedo, con

$$a = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}, \quad b = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}, \quad c = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

da cui

$$a^2+b^2+c^2 = 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2.$$

Poiché la diagonale principale d è data da

$$d = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

si ha

$$d = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

□

Esercizio 3.41. *Sia ABCD un quadrilatero convesso rettangolo in B con $|\overline{AB}| = 1$. La sua diagonale $\overline{AC}$ è perpendicolare al lato $\overline{CD}$ ed è bisettrice dell'angolo $B\hat{A}D = 2\alpha$. In funzione di α calcolare $|\overline{AD}|$, $|\overline{BD}|$ e l'area del quadrilatero.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.30.

Nel triangolo rettangolo ABC si ha

$$|\overline{AC}| = \frac{|\overline{AB}|}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{e} \quad |\overline{BC}| = |\overline{AB}|\tan\alpha = \tan\alpha.$$

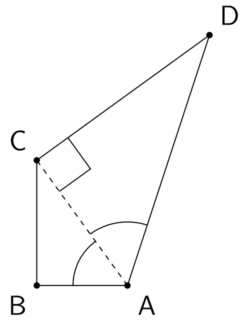


Figura 3.30: *Figura relativa all'esercizio* 3.41

Nel triangolo rettangolo ACD si ha poi

$$|\overline{AD}| = \frac{|\overline{AC}|}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{e} \quad |\overline{CD}| = |\overline{AC}|\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}.$$

L'area del quadrilatero ABCD è la somma delle aree di due triangoli rettangoli. Si ottiene

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\tan\alpha\left(1 + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right).$$

Il valore $|\overline{AD}|$ si può calcolare nel triangolo ABD con il teorema di Carnot. Si ottiene

$$|\overline{BD}| = \frac{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha - 3\cos^4\alpha}}{\cos\alpha}.$$ □

Esercizio 3.42. *Si consideri un cerchio di diametro* $|\overline{AB}| = 2r$*, la retta tangente* t *in* A*, e le due tangenti* u *e* v *condotte da un punto* P *del prolungamento di* AB *dalla parte di* B*. Sapendo che l'angolo formato dalle due rette* u *e* v *è di* $2\pi/3$*, calcolare il perimetro del triangolo formato dalle tre rette.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.31.

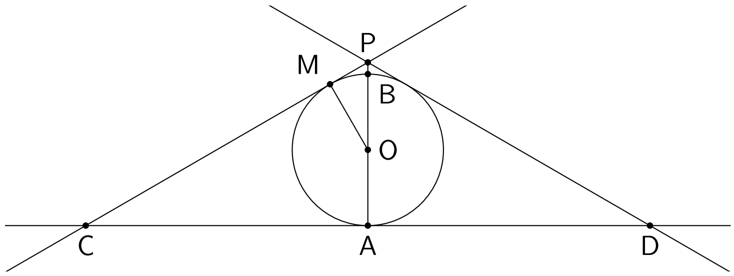


Figura 3.31: *Figura relativa all'esercizio* 3.42

Nel triangolo rettangolo MPO si trova

$$|\overline{PO}| = \frac{|\overline{MO}|}{\sin(\pi/3)} \quad \Rightarrow \quad |\overline{PO}| = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Ne segue

$$|\overline{PA}| = |\overline{PO}| + |\overline{OA}| = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r, \quad |\overline{PC}| = 2|\overline{PA}| = \frac{4r\sqrt{3}}{3} + 2r, \quad |\overline{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overline{CP}| = 2r + r\sqrt{3}.$$

Il perimetro richiesto è allora

$$8r + \frac{14}{3}r\sqrt{3}.$$

□

Esercizio 3.43. *Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di raggio* 1 *e* $\overline{AB}$ *una corda di lunghezza* 1*. Se* C *è il punto di* $\mathcal{C}$ *a distanza* $\sqrt{2}$ *da* B *tale che* $A\widehat{B}C$ *sia ottuso, calcolare l'area del triangolo* ABC*.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.32.

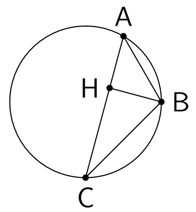


Figura 3.32: *Figura relativa all'esercizio* 3.43

Con le solite convenzioni sugli angoli interni di un triangolo, dal teorema dei seni si deduce che

$$\gamma = \frac{\pi}{6}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Sempre con il teorema dei seni si ottiene ora

$$|\overline{AC}| = 2\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Nel triangolo rettangolo ABH si ha poi

$$|\overline{BH}| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dunque l'area del triangolo è

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

□

Esercizio 3.44. *In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è* 2α*. Determinare il rapporto dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.33.

Posto $|\overline{AB}| = c$, si ha $|\overline{HB}| = c\sin\alpha$ e $|\overline{AH}| = c\cos\alpha$. Per i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta si possono usare le formule

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p} \quad \text{e} \quad R = \frac{abc}{4\mathcal{A}},$$

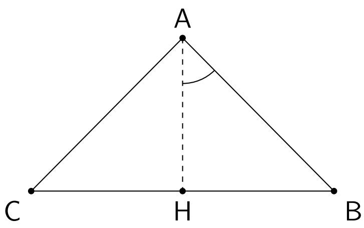


Figura 3.33: *Figura relativa all'esercizio 3.44*

dove a, b, c sono i lati, p è il semiperimetro e $\mathcal{A}$ è l'area del triangolo. Si trova

$$\frac{r}{R}=\frac{4\mathcal{A}^2}{p\,a\,b\,c}=\frac{4c^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(c+c\sin\alpha)2c^3\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=2\sin\alpha(1-\sin\alpha)$$ □

Esercizio 3.45. *Una circonferenza γ_r di raggio $r>0$ è tangente internamente ad un'altra circonferenza γ_R di raggio $R>2r$ e di centro O. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo OAB formato dalle semirette uscenti da O e tangenti γ_r nei punti A e B.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.34.

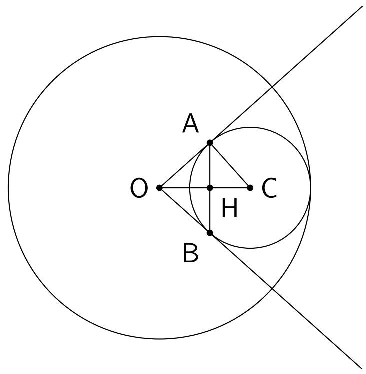


Figura 3.34: *Figura relativa all'esercizio 3.45*

Nel triangolo rettangolo OAC, di cui $\overline{\mathrm{AH}}$ è altezza relativa all'ipotenusa, si ha

$$|\overline{\mathrm{OC}}|=R-r,\quad |\overline{\mathrm{OA}}|=\sqrt{R^2-2Rr},\quad |\overline{\mathrm{AH}}|=\frac{|\overline{\mathrm{OA}}||\overline{\mathrm{AC}}|}{|\overline{\mathrm{OC}}|}=\frac{r\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r},\quad |\overline{\mathrm{OH}}|=\frac{R^2-2Rr}{R-r}.$$

Se ne deduce facilmente

$$\mathcal{A}=\frac{Rr(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}}{(R-r)^2};\quad 2p=\frac{2R\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}.$$ □

Esercizio 3.46. *Un trapezio rettangolo ha la base maggiore di 12 cm e l'altezza di 5 cm. Determinare la base minore e il lato obliquo in modo che l'area del triangolo che essi formano con la diagonale maggiore del trapezio sia di 10 cm^2.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.35.

L'area del triangolo DCB è data da

$$\frac{1}{2}|\overline{DC}||\overline{DA}| \quad \Rightarrow \quad |\overline{DC}| = 4.$$

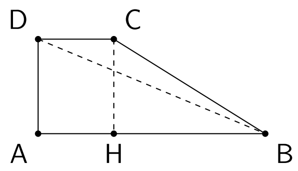


Figura 3.35: *Figura relativa all'esercizio* 3.46

A questo punto il lato obliquo $\overline{BC}$ si trova nel triangolo rettangolo CHB e si ottiene $|\overline{BC}| = \sqrt{89}$. □

Esercizio 3.47. *Siano* $\overline{AB}$ *una corda di una circonferenza* γ *di centro* O *e raggio* $r > 0$, $\overline{CD}$ *il diametro ortogonale ad* $\overline{AB}$, *con* C *dalla parte di* $\overline{AB}$, *e si ponga* $2\alpha = A\hat{O}B$. *Determinare* $\cos\alpha$ *in modo che il rapporto tra l'area del triangolo* OAB *e quella del triangolo* ABC *sia* $k > 0$. *Calcolare in funzione di* k *il perimetro di* ABC *e l'area di* ABD.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.36.

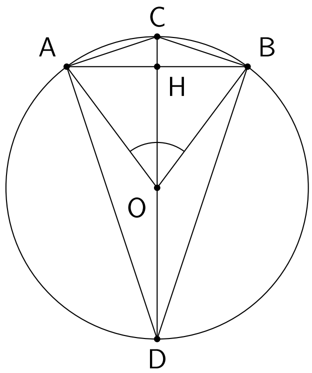


Figura 3.36: *Figura relativa all'esercizio* 3.47

Per il teorema della corda si ha, intanto, $|\overline{AB}| = 2r\sin\alpha$. Si ha poi $|\overline{OH}| = r\cos\alpha$ e $|\overline{CH}| = r - r\cos\alpha$. Si deve dunque avere

$$\frac{|\overline{AB}||\overline{OH}|}{|\overline{AB}||\overline{CH}|} = \frac{|\overline{OH}|}{|\overline{CH}|} = \frac{r\cos\alpha}{r - r\cos\alpha} = k \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{k}{1+k}.$$

Ne segue

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{1+2k}}{1+k} \quad \text{e} \quad |\overline{AB}| = 2r\frac{\sqrt{1+2k}}{1+k}$$

Sempre dal teorema della corda si trova

$$|\overline{\mathsf{AC}}| = |\overline{\mathsf{BC}}| = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2(k+1)}}.$$

Dunque

$$2p(\mathsf{ABC}) = \frac{4r}{\sqrt{2(k+1)}} + 2r\sqrt{\frac{1+2k}{(1+k)^2}}$$

Si ha, infine,

$$|\overline{\mathsf{HD}}| = r + r\cos\alpha = r\frac{1+2k}{1+k} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(\mathsf{ABD}) = r^2\frac{\sqrt{1+2k}(1+2k)}{(1+k)^2}. \qquad \square$$

Esercizio 3.48. *Il trapezio isoscele* ABCD *è circoscritto ad una semicirconferenza di centro* O*. Siano* H *il piede della perpendicolare condotta da* C *alla base maggiore* $\overline{\mathsf{AB}}$ *e* K *il punto di tangenza della semicirconferenza con il lato* $\overline{\mathsf{BC}}$*. Determinare il perimetro e l'area del trapezio* ABCD *sapendo che* $|\overline{\mathsf{OK}}| = 8\,\mathrm{cm}$ *e* $|\overline{\mathsf{AB}}| = 20\,\mathrm{cm}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.37.

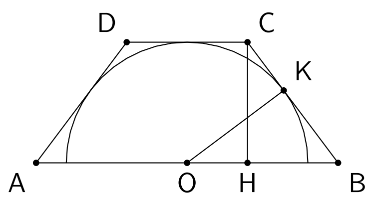


Figura 3.37: *Figura relativa all'esercizio* 3.48

Chiaramente $\overline{\mathsf{OK}}$ è raggio della semicirconferenza e, dall'uguaglianza dei triangoli OKB e CHB (sono rettangoli, hanno un angolo in comune e due lati uguali perché raggi), se ne deduce che $|\overline{\mathsf{CB}}| = |\overline{\mathsf{OB}}| = 10\,\mathrm{cm}$. Ne segue $|\overline{\mathsf{HB}}| = 6\,\mathrm{cm}$ e $|\overline{\mathsf{DC}}| = 8\,\mathrm{cm}$. Dunque $2p = 48\,\mathrm{cm}$ e $\mathcal{A} = 112\,\mathrm{cm}^2$. $\square$

Esercizio 3.49. *In un trapezio scaleno* ABCD *le basi misurano* $|\overline{\mathsf{AB}}| = 21 + 5\sqrt{3}$ *e* $|\overline{\mathsf{CD}}| = 9$*. Sapendo che l'angolo in* B *ha ampiezza* $\pi/3$ *e che* $\cos\widehat{\mathsf{D}} = -5/13$*, calcolare la lunghezza dei lati obliqui.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.38.

Gli angoli in A e D sono supplementari, dunque $\cos\widehat{\mathsf{A}} = 5/13$ e $\sin\widehat{\mathsf{A}} = 12/13$. Posto $|\overline{\mathsf{AD}}| = x$ e $|\overline{\mathsf{BC}}| = y$, da $|\overline{\mathsf{AB}}| = |\overline{\mathsf{AH}}| + |\overline{\mathsf{DC}}| + |\overline{\mathsf{KB}}|$ e $|\overline{\mathsf{DH}}| = |\overline{\mathsf{CK}}|$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{5}{13}x + 9 + \dfrac{y}{2} = 21 + 5\sqrt{3} \\ \dfrac{12}{13}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}.$$

Ricavando $x/13$ dalla seconda e sostituendo nella prima si ottiene facilmente

$$|\overline{\mathsf{AD}}| = 13\sqrt{3} \quad \text{e} \quad |\overline{\mathsf{BC}}| = 24. \qquad \square$$

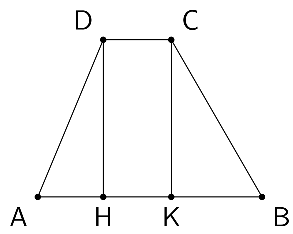


Figura 3.38: *Figura relativa all'esercizio 3.49*

Esercizio 3.50. *Si considerino, nell'ordine, quattro punti allineati* O, A, B, *e* C *tali che* $|\overline{OA}| = a$, $|\overline{OB}| = 2a$, $|\overline{OC}| = 3a$. *Sia* P *uno dei due punti della retta passante per* O *e perpendicolare ad* $\overline{OC}$ *tale che* $|\overline{OP}| = a$. *Posto* $\alpha = \widehat{PAO}$, $\beta = \widehat{PBO}$ *e* $\gamma = \widehat{PCO}$, *dimostrare che* $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$.

Risoluzione. Si ha, facilmente,

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \ \tan\beta = \frac{1}{2}, \ \tan\gamma = \frac{1}{3}.$$

Da qui

$$\tan(\beta+\gamma) = 1, \quad \text{e quindi} \quad \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$ □

Esercizio 3.51. *Del triangolo* ABC *è noto che* $\cos \widehat{BAC} < 0$ *e che* $|\overline{AC}| = 26a$. *Determinare il perimetro del triangolo sapendo che* $8a$ *è la lunghezza dell'altezza* $\overline{BH}$ *relativa al lato* $\overline{AC}$ *e* $|\overline{HA}| = 6a$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.39.

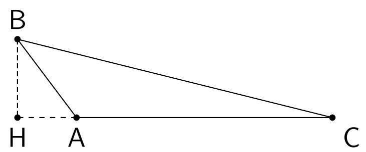


Figura 3.39: *Figura relativa all'esercizio 3.51*

L'informazione relativa all'angolo $\widehat{BAC}$ equivale al fatto che lo stesso è ottuso. Nel triangolo BAH si ha poi $|\overline{BA}| = 10a$; nel triangolo HBC si ha infine $|\overline{BC}| = 8a\sqrt{17}$. Dunque $2p = 4a(9 + 2\sqrt{17})$. □

Esercizio 3.52. *Data la semicirconferenza di centro* O *e diametro* $\overline{AB}$ *di lunghezza* 2, *siano* R *ed* S *i punti medi dei raggi* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OB}$ *rispettivamente. Sia inoltre* $\overline{MN}$ *una corda parallela ad* $\overline{AB}$ *(*M *più vicino a* B*). Determinare la lunghezza* x *dell'altezza del trapezio* MNRS *in modo che il lato obliquo abbia lunghezza* $3/(2\sqrt{5})$. *Determinare infine il perimetro e l'area del trapezio.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.40.

Nel triangolo rettangolo OHM si trova

$$|\overline{HM}| = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ne segue

$$|\overline{\mathsf{KM}}| = \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}.$$

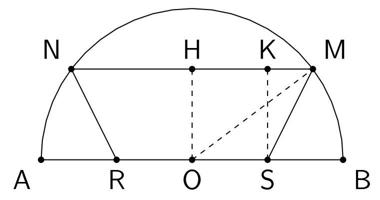


Figura 3.40: *Figura relativa all'esercizio 3.52*

Nel triangolo rettangolo KSM si deve avere

$$x^2 + \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}.$$

A questo punto i calcoli di perimetro e area del trapezio sono immediati. Si ottiene

$$2p(\mathsf{MNRS}) = \frac{13+3\sqrt{5}}{5}; \quad \mathcal{A}(\mathsf{MNRS}) = \frac{39}{50}.$$ □

Esercizio 3.53. *In un triangolo di lati a, b, c, opposti agli angoli α, β, γ, vale la relazione*

$$b = 4c\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Dopo aver dimostrato che il secondo membro si può scrivere nella forma $c(1+2\cos\alpha)$, trovare a, sapendo che $b=5$ e $c=4$.

Risoluzione. Si ha

$$b = 4c\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = c\left(3\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = c(1+2\cos\alpha).$$

Da qui

$$\cos\alpha = \frac{1}{8}$$

e, dal teorema del coseno,

$$a = \sqrt{25+16-40\frac{1}{8}} = 6.$$ □

Esercizio 3.54. *Fissato nel piano un punto* O, *siano $\overline{\mathsf{OP}}$ e $\overline{\mathsf{OQ}}$ due segmenti di uguale lunghezza a,* PRQS *un rombo di lato $b<a$, e* H *il punto di incontro delle diagonali del rombo. Posto $x = |\overline{\mathsf{PH}}|$, calcolare $|\overline{\mathsf{OR}}|\cdot|\overline{\mathsf{OS}}|$ e osservare che questo prodotto non dipende da x, ma solo da a e b.*

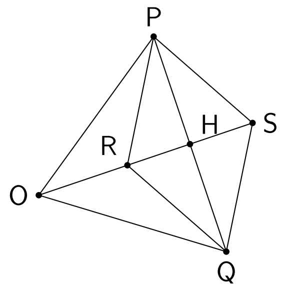


Figura 3.41: *Figura relativa all'esercizio* 3.54

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.41.

Si ha

$$|\overline{OR}| = |\overline{OH}| - |\overline{RH}|, \quad |\overline{OS}| = |\overline{OH}| - |\overline{RH}| \quad \Rightarrow \quad |\overline{OR}| \cdot |\overline{OS}| = |\overline{OH}|^2 - |\overline{RH}|^2.$$

Nei triangoli rettangoli OHP e RHP si trova

$$|\overline{OH}|^2 = a^2 - x^2, \quad \text{e} \quad |\overline{RH}|^2 = b^2 - x^2,$$

da cui la conclusione. □

Esercizio 3.55. *In un triangolo* ABC *l'angolo* α *con vertice in* A *è tale che* $\cos\alpha = {}^{11}/_{16}$, *l'angolo* β *con vertice in* B *è tale che* $\cos\beta = {}^{7}/_{8}$, *infine* $|\overline{AB}| = 4$. *Calcolare il perimetro del triangolo. Determinare inoltre le lunghezze dei lati del rettangolo* FGHK, *con* K *in* $\overline{AC}$ *e* H *in* $\overline{BC}$, *la cui base* $\overline{FG}$, *contenuta in* $\overline{AB}$, *è doppia dell'altezza* $\overline{FK}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.42.

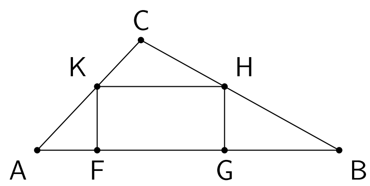


Figura 3.42: *Figura relativa all'esercizio* 3.55

Si ha

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3\sqrt{15}}{16}, \quad \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Per l'angolo γ con vertice in C si ha allora

$$\sin\gamma = \sin\big(\pi - (\alpha+\beta)\big) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Dal teorema dei seni si ricava poi

$$\frac{|\overline{CB}|}{\sin\alpha} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin\gamma} \quad \text{e} \quad \frac{|\overline{AC}|}{\sin\beta} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin\gamma},$$

da cui $|\overline{\mathsf{CB}}| = 3$ e $|\overline{\mathsf{AC}}| = 2$. Quindi $2p = 9$.

Posto poi $|\overline{\mathsf{FK}}| = x$, da cui $|\overline{\mathsf{FG}}| = 2x$, nei triangoli rettangoli AFK e BGH si ricava

$$|\overline{\mathsf{AF}}| = \frac{x}{\tan\alpha} \quad \text{e} \quad |\overline{\mathsf{BG}}| = \frac{x}{\tan\beta}.$$

Dunque

$$2x + \frac{x}{\tan\alpha} + \frac{x}{\tan\beta} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90}{45 + 16\sqrt{15}}.$$

□

Esercizio 3.56. *Dato il triangolo isoscele* ABC *con base* $|\overline{\mathsf{AB}}| = 6a\sqrt{3}$ *e l'angolo al vertice* $\mathsf{A\widehat{C}B} = 2\pi/3$*, si divida il lato* $\overline{\mathsf{BC}}$ *in tre parti uguali mediante i punti* M *e* N*. Si determinino le lunghezze dei segmenti* $\overline{\mathsf{AM}}$ *e* $\overline{\mathsf{AN}}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.43.

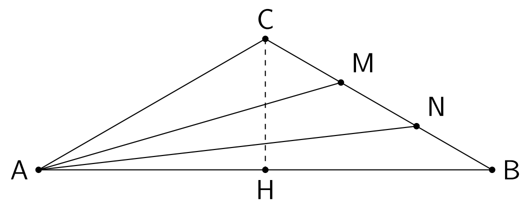


Figura 3.43: *Figura relativa all'esercizio* 3.56

Nel triangolo rettangolo CHB si trova facilmente $|\overline{\mathsf{CB}}| = 6a$. Dunque, per Carnot,

$$|\overline{\mathsf{AM}}| = \sqrt{|\overline{\mathsf{AC}}|^2 + |\overline{\mathsf{CM}}|^2 - 2|\overline{\mathsf{AC}}||\overline{\mathsf{CM}}|\cos\frac{2\pi}{3}} = a\sqrt{52},$$

e

$$|\overline{\mathsf{AN}}| = \sqrt{|\overline{\mathsf{AC}}|^2 + |\overline{\mathsf{CN}}|^2 - 2|\overline{\mathsf{AC}}||\overline{\mathsf{CN}}|\cos\frac{2\pi}{3}} = a\sqrt{76}.$$

□

Esercizio 3.57. *Esternamente al triangolo equilatero* ABC *di lato* 2*, costruire la semicirconferenza con diametro* $\overline{\mathsf{BC}}$*. Tracciare su di essa la corda* $\overline{\mathsf{PQ}} = \overline{\mathsf{BC}}/2$ *parallela a* $\overline{\mathsf{BC}}$ *e calcolare il perimetro del triangolo* PAQ *e il* $\cos(\mathsf{P\widehat{A}Q})$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.44.

Nel triangolo rettangolo CPB, di cui $\overline{\mathsf{CH}}$ è altezza relativa all'ipotenusa, si ha $|\overline{\mathsf{CH}}| = 1/2$. Dal primo teorema di Euclide si ricava allora $|\overline{\mathsf{CP}}| = 1$. Dunque

$$\mathsf{P\widehat{C}B} = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad \mathsf{P\widehat{C}A} = \frac{2\pi}{3}.$$

Il teorema di Carnot applicato al triangolo ACP fornisce allora

$$|\overline{\mathsf{AP}}| = \sqrt{|\overline{\mathsf{AC}}|^2 + |\overline{\mathsf{CP}}|^2 - 2|\overline{\mathsf{AC}}||\overline{\mathsf{CP}}|\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{7}.$$

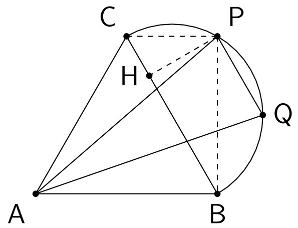


Figura 3.44: *Figura relativa all'esercizio 3.57*

Dunque

$$2p(\mathsf{PAQ}) = 1 + 2\sqrt{7}.$$

Dal teorema di Carnot applicato al triangolo APQ si trova

$$|\overline{\mathsf{PQ}}|^2 = |\overline{\mathsf{AP}}|^2 + |\overline{\mathsf{AQ}}|^2 - 2|\overline{\mathsf{AP}}||\overline{\mathsf{AQ}}| \cos \mathsf{P\widehat{A}Q}, \quad \Rightarrow \quad \cos \mathsf{P\widehat{A}Q} = \frac{13}{14}. \qquad \square$$

Esercizio 3.58. *Sui lati* $\overline{\mathsf{AB}}$, $\overline{\mathsf{BC}}$ *e* $\overline{\mathsf{DC}}$ *di un quadrato di lato* 10 *si considerino rispettivamente i punti* M, N *e* Q *tali che* $|\overline{\mathsf{BN}}| = |\overline{\mathsf{AM}}| + 3$ *e* $|\overline{\mathsf{CQ}}| = |\overline{\mathsf{AM}}| + 4$. *Determinare* $|\overline{\mathsf{AM}}|$ *in modo che l'area del quadrilatero* AMNQ *sia* 45.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.45.

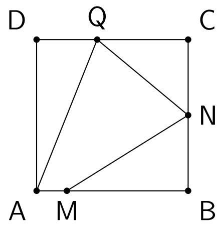


Figura 3.45: *Figura relativa all'esercizio 3.58*

Posto $|\overline{\mathsf{AM}}| = x$, si ha

$$\mathcal{A}(\mathsf{MNB}) = \frac{1}{2}(10 - x)(x + 3), \quad \mathcal{A}(\mathsf{QCN}) = \frac{1}{2}\big(10 - (x + 3)\big)(x + 4), \quad \mathcal{A}(\mathsf{QDA}) = \frac{1}{2}\big(10 - (x + 4)\big)10,$$

da cui

$$\mathcal{A}(\mathsf{AMNQ}) = 100 - \mathcal{A}(\mathsf{MNB}) - \mathcal{A}(\mathsf{QCN}) - \mathcal{A}(\mathsf{QDA}),$$

e $x = 2$. $\square$

Esercizio 3.59. *Sia* ABCD *un trapezio rettangolo con base minore* $\overline{\mathsf{DC}}$ *e lato obliquo* $\overline{\mathsf{CB}}$. *Sia inoltre* M *un punto interno al lato* $\overline{\mathsf{DA}}$. *Se l'angolo* $\mathsf{A\widehat{B}C} = \pi/6$ *e se* $|\overline{\mathsf{DC}}| = a$, $|\overline{\mathsf{CB}}| = a\sqrt{3}$ *e* $|\overline{\mathsf{MB}}| = a\sqrt{13/2}$, *determinare* $a > 0$ *in modo che l'area del quadrilatero* MBCD *sia* $7\sqrt{3} - 5$.

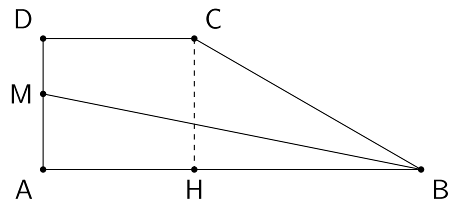


Figura 3.46: *Figura relativa all'esercizio 3.59*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.46.

Nel triangolo HBC si trova

$$|\overline{\mathrm{CH}}| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = |\overline{\mathrm{AD}}|, \quad \text{e} \quad |\overline{\mathrm{HB}}| = \frac{3a}{2}.$$

Ne segue

$$|\overline{\mathrm{AB}}| = \frac{5a}{2} \quad \mathcal{A}(\mathrm{ABCD}) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Nel triangolo MAB si trova poi

$$|\overline{\mathrm{AM}}| = \frac{a}{2}, \quad \text{da cui} \quad \mathcal{A}(\mathrm{AMB}) = \frac{5a^2}{8}.$$

Deve dunque essere

$$\frac{7a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{5a^2}{8} = 7\sqrt{3} - 5 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2}.$$

□

Esercizio 3.60. *In un trapezio isoscele* ABCD *la base maggiore* $\overline{\mathrm{AB}}$ *ha lunghezza* 5 *e la diagonale* $\overline{\mathrm{BD}}$ *ha lunghezza* 4*; inoltre* $\overline{\mathrm{BD}}$ *e* $\overline{\mathrm{AD}}$ *sono tra loro ortogonali. Sia* M *il punto della base minore* $\overline{\mathrm{CD}}$ *tale che* $\tan\alpha = 9/8$, *essendo* $\alpha = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$. *Calcolare l'area del trapezio* ABCM.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.47.

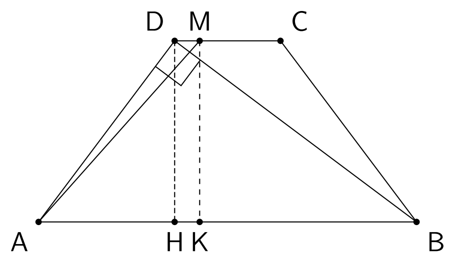


Figura 3.47: *Figura relativa all'esercizio 3.60*

Utilizzando i teoremi di Pitagora ed Euclide, nel triangolo rettangolo ADB si trova

$$|\overline{\mathrm{AD}}| = 3, \quad |\overline{\mathrm{DH}}| = \frac{12}{5}, \quad |\overline{\mathrm{AH}}| = \frac{9}{5}, \quad \text{da cui} \quad |\overline{\mathrm{DC}}| = \frac{7}{5}.$$

Nel triangolo rettangolo AMK si trova poi

$$|\overline{\mathsf{AK}}| = \frac{|\overline{\mathsf{MK}}|}{\tan\alpha} = \frac{32}{15}.$$

Dunque

$$|\overline{\mathsf{HK}}| = |\overline{\mathsf{DM}}| = \frac{32}{15} - \frac{9}{5} = \frac{1}{3}, \quad \Rightarrow \quad |\overline{\mathsf{MC}}| = \frac{7}{5} - \frac{1}{3} = \frac{16}{15}.$$

Ne segue

$$\mathcal{A}(\mathsf{ABCM}) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{16}{15}\right)\frac{12}{5} = \frac{182}{25}. \qquad \square$$

Esercizio 3.61. *Dato un triangolo equilatero* ABC*, sia* DEFG *il quadrato con lato* $\overline{\mathsf{DE}}$ *su* $\overline{\mathsf{AB}}$ *e vertici* F *e* G *rispettivamente sui lati* $\overline{\mathsf{BC}}$ *e* $\overline{\mathsf{AC}}$*. Inoltre siano L e l rispettivamente le misure dei lati del triangolo e del quadrato. Sapendo che $L - l = 2\sqrt{3}$, determinare la differenza delle misure dei perimetri del triangolo e del quadrato.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.48.

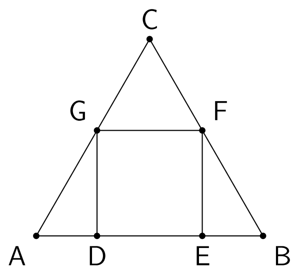


Figura 3.48: *Figura relativa all'esercizio* 3.61

Nel triangolo rettangolo AGD si trova

$$|\overline{\mathsf{AD}}| = \frac{l}{\sqrt{3}}, \quad \text{da cui} \quad \frac{2l}{\sqrt{3}} + l = L,$$

che, assieme alla relazione fornita dal testo, fornisce $l = 3$ e, di conseguenza, $L = 3 + 2\sqrt{3}$. La differenza dei perimetri è allora

$$6\sqrt{3} - 3. \qquad \square$$

Esercizio 3.62. *In un triangolo* ABC *rettangolo in* A*, si ha che* $|\overline{\mathsf{AC}}| = |\overline{\mathsf{AB}}|\sqrt{3}$ *e che* $|\overline{\mathsf{BC}}| = a + |\overline{\mathsf{AC}}|$*, con* $a > 0$*. Determinare a in modo che la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa* $\overline{\mathsf{BC}}$ *sia uguale a*

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}}.$$

Risoluzione. Posto $|\overline{AB}| = x$, si deve avere

$$x^2+(x\sqrt{3})^2=(a+(x\sqrt{3})^2,\quad \text{da cui}\quad x=a(\sqrt{3}+2),$$

e quindi

$$|\overline{AB}|=a(\sqrt{3}+2),\quad |\overline{AC}|=a(3+2\sqrt{3}),\quad |\overline{BC}|=a(4+2\sqrt{3}).$$

Poiché l'altezza relativa all'ipotenusa è il prodotto dei cateti fratto l'ipotenusa, si ottiene la condizione

$$\frac{a^2(\sqrt{3}+2)(3++2\sqrt{3})}{a(4+2\sqrt{3})}=\frac{2}{2-\sqrt{3}},\quad \Rightarrow\quad a=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$ □

Esercizio 3.63. *Sulla semicirconferenza di diametro* $|\overline{AB}| = 2r$ *si considerino i punti* C *e* D *tali che* $|\overline{AC}| = |\overline{CD}| = 2|\overline{DB}|$. *Calcolare il perimetro del quadrilatero* ABDC.

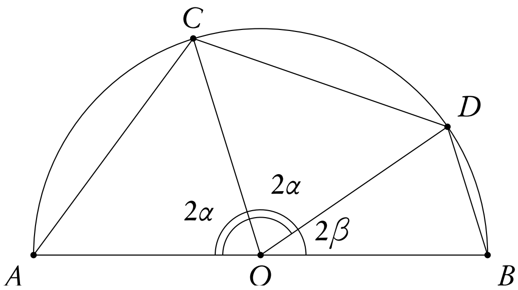


Figura 3.49: *Figura relativa all'esercizio* 3.63

Risoluzione. Con riferimento alla figura 3.49 indichiamo con 2α gli angoli $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$ e con 2β l'angolo $D\hat{O}B$. Si ha, per il noto teorema della corda,

$$|\overline{AC}|=|\overline{CD}|=2r\sin\alpha\,,\quad |\overline{DB}|=2r\sin\beta\,.$$

Da qui, tenendo conto che $\overline{AC}=2\overline{DB}$, si trova

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{DB}|}=2=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=2\sin\beta\,.$$

Poiché

$$2\alpha+2\alpha+2\beta=\pi\,,$$

se ne deduce che

$$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad \sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\,.$$

La precedente relazione tra $\sin\alpha$ e $\sin\beta$ si traduce allora in un'equazione in α:

$$\sin\alpha=2\sin\beta\ \Rightarrow\ 4\sin^2\alpha+\sin\alpha-2=0\,.$$

Si trova facilmente

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}-1}{8}.$$

Il perimetro richiesto è quindi:

$$2p = \frac{r}{8}\left(11+5\sqrt{33}\right).$$

□

Esercizio 3.64. *Si consideri il trapezio isoscele* ABCD *in cui* $|\overline{AB}| = 5$ *è la base maggiore,* $|\overline{BC}| = 3$ *è un lato obliquo e* $|\overline{AC}| = 4$ *è la diagonale. Condotte dai vertici* A *e* C *le bisettrici degli angoli* $C\hat{A}B$ *e* $A\hat{C}D$ *rispettivamente, e detti* M *ed* N *i punti di incontro di queste rette con* BC *e* AD, *dimostrare che le due bisettrici sono parallele e calcolare l'area del trapezio* AMCN.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.50.

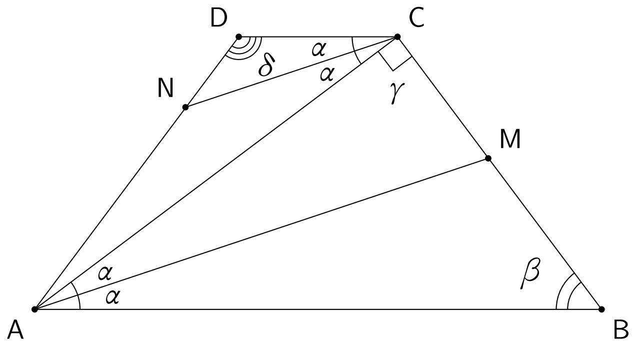


Figura 3.50: *Figura relativa all'esercizio* 3.64

Cominciamo con l'osservare che l'angolo γ è retto per le note proprietà delle terne pitagoriche. Gli angoli $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$ sono uguali perché le rette AB e CD sono parallele. Ne segue che anche i quattro angoli segnati con α sono uguali e quindi che le due rette NC e AM sono parallele.

Dal triangolo rettangolo ABC si ricava

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos 2\alpha = \frac{4}{5},$$

da cui

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

A questo punto nel triangolo (rettangolo) ACM si ricava facilmente $|\overline{CM}|$ e l'area.

Rimane da trovare l'area del triangolo ACN che si può fare con la formula

$$\frac{1}{2}|\overline{CN}|\cdot|\overline{AC}|\sin\alpha.$$

$|\overline{AC}|$ è già noto e la lunghezza del segmento $\overline{CN}$ si può trovare nel triangolo CDN, con il teorema dei seni, in quanto si trova facilmente $|\overline{CD}|$, si conosce già $\sin\alpha$ e si può trovare $\sin\delta$, che è uguale a $\sin\beta$.

Eseguendo tutti i calcoli si trova, infine, che l'area è

$$\frac{176}{45}.$$

□

Esercizio 3.65. *Un trapezio rettangolo* ABCD *ha la base maggiore* $|\overline{AB}| = 3a$*, la base minore* $|\overline{CD}| = 2a$ *e il lato obliquo* $|\overline{BC}| = 2a$*. Determinare l'ampiezza dell'angolo* $\beta = A\widehat{B}C$*. Delle due circonferenze di diametro* $\overline{BC}$*, considerare quella rivolta verso l'interno del trapezio, scegliere su di essa un punto* P *ed esprimere* $|\overline{CP}|$ *in funzione dell'angolo* $\vartheta = P\widehat{C}B$*. Determinare infine il perimetro del triangolo* PCD.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.51.

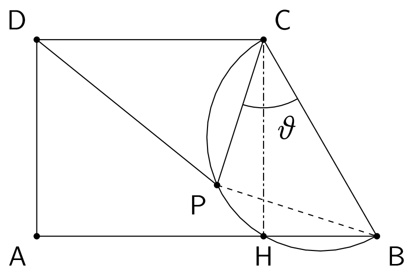


Figura 3.51: *Figura relativa all'esercizio* 3.65

Essendo $|\overline{HB}| = |\overline{AB}| - |\overline{DC}| = a$, dall'esame del triangolo rettangolo HBC si deduce subito che l'angolo $A\widehat{B}C$ misura 60°, e di conseguenza l'angolo $D\widehat{C}B$ misura 120°. Il triangolo PCB è retto perché inscritto in una semicirconferenza; dunque $|\overline{PC}| = |\overline{BC}| \cos\vartheta = 2a\cos\vartheta$. Per trovare $|\overline{DP}|$ (unico lato mancante del triangolo di cui si deve calcolare il perimetro) basta ora applicare il teorema del coseno al triangolo PCD, tenendo conto che $D\widehat{C}P = 120° - \vartheta$. Si trova

$$\begin{aligned}
|\overline{DP}| &= \sqrt{|\overline{DC}|^2 + |\overline{CP}|^2 - 2\cdot|\overline{DC}|\cdot|\overline{CP}|\cos(120° - \vartheta)} = \\
&= \sqrt{4a^2 + 4a^2\cos^2\vartheta - 2\cdot 2a\cdot 2a\cos\vartheta\cos(120° - \vartheta)} = \\
&= \sqrt{4a^2 + 4a^2\cos^2\vartheta - 2\cdot 2a\cdot 2a\cos\vartheta\left(-\frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\right)} \\
&= \sqrt{4a^2 + 8a^2\cos^2\vartheta - 4a^2\sqrt{3}\cos\vartheta\sin\vartheta}\,.
\end{aligned}$$

Il perimetro richiesto è dunque

$$2p = 2a + 2a\cos\vartheta + \sqrt{4a^2 + 8a^2\cos^2\vartheta - 4a^2\sqrt{3}\cos\vartheta\sin\vartheta}\,.$$

□

Esercizio 3.66. *La base* $\overline{AB}$ *di un triangolo isoscele misura* $8a$ *e* $\cos\alpha = 1/4$*, essendo* $\alpha = C\widehat{A}B$*. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo e la misura del raggio del cerchio inscritto.*

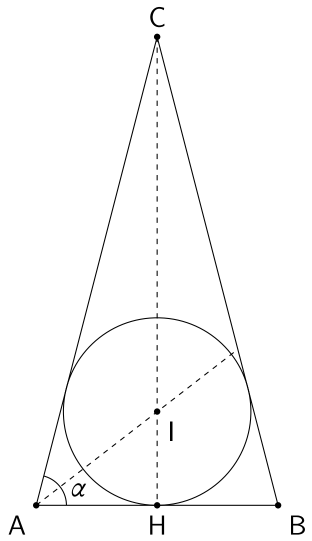


Figura 3.52: *Figura relativa all'esercizio* 3.66

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 3.66.

Detto H il punto medio della base $\overline{AB}$, dall'esame del triangolo rettangolo AHC si deduce

$$|\overline{AH}| = |\overline{AC}|\cos\alpha \Rightarrow |\overline{AC}| = \frac{|\overline{AH}|}{\cos\alpha} = \frac{4a}{1/4} = 16a\,.$$

Si può ora ricavare la misura dell'altezza $\overline{CH}$, per esempio con il teorema di Pitagora applicato al triangolo AHC e si ottiene

$$|\overline{CH}| = \sqrt{(16a)^2 - (4a)^2} = 4a\sqrt{15}\,.$$

Per la misura dell'area e del perimetro si ottiene:

$$\mathcal{A} = 16a^2\sqrt{15} \qquad 2p = 40a\,.$$

Il raggio del cerchio inscritto è ora immediato:

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p} = \frac{16a^2\sqrt{15}}{20a} = \frac{4}{5}a\sqrt{15}\,.$$

Chi non ricordasse la formula del raggio del cerchio inscritto potrebbe ricavare r utilizzando il triangolo rettangolo AIH:

$$r = |\overline{IH}| = |\overline{AH}|\tan\frac{\alpha}{2}\,.$$

Essendo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}},$$

si ottiene

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

e infine

$$r = \frac{4}{5}a\sqrt{15},$$

in perfetto accordo con il risultato precedente. □

4 Analitica

Esercizio 4.1. *Data la circonferenza γ di equazione $x^2+y^2+10x+10y+25=0$, scrivere le equazioni delle rette* r *ed* s *tangenti a γ nei punti* R *ed* S *di ordinata -2. Calcolare il perimetro del triangolo formato da r, s e l'asse x.*

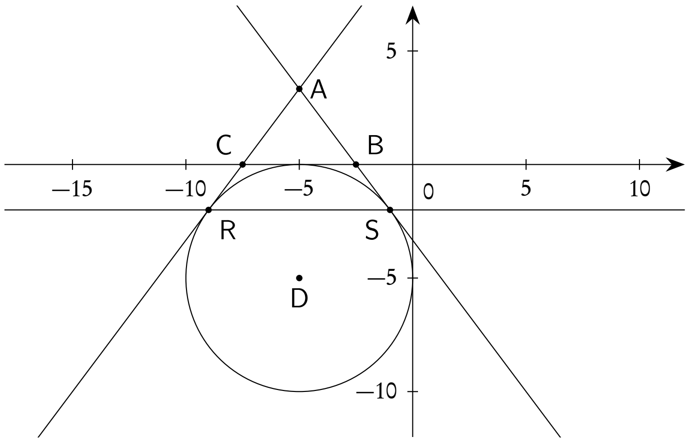


Figura 4.1: *Figura relativa all'esercizio* 4.1

Risoluzione. Le coordinate dei punti R ed S (si veda la figura 4.1) si trovano intersecando $y=-2$ con la circonferenza data; per le equazioni delle tangenti basta osservare che passano per i punti R ed S e sono ortogonali, rispettivamente, alle rette DR e DS. Si trova che il perimetro richiesto vale $40/3$. □

Esercizio 4.2. *La parabola $\mathcal{P}$ ha equazione $y=2x(1-x)$. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta* r *tangente a $\mathcal{P}$ nell'origine* O, *dalla retta* s *ortogonale ad* r *e tangente a $\mathcal{P}$ in un punto* A, *e dal segmento* $\overline{\mathrm{OA}}$.

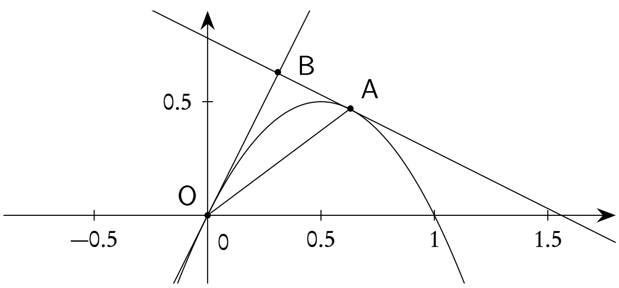


Figura 4.2: *Figura relativa all'esercizio* 4.2

Risoluzione. La retta tangente in O alla parabola ha equazione $y = 2x$ e si può determinare con il metodo del "$\Delta = 0$" oppure ricordando che il coefficiente angolare della tangente a un parabola $y = ax^2 + bx + c$ in un suo punto di ascissa x_0 è dato da $m = 2ax_0 + b$. Le rette perpendicolari a questa tangente hanno dunque coefficiente angolare $-1/2$ e la tangente richiesta sarà del tipo

$$y = -\frac{1}{2}x + q\,.$$

La determinazione di q si fa imponendo la condizione di tangenza (sistema con la parabola e $\Delta = 0$). Si ottiene $q = 25/32$. A questo punto la determinazione delle coordinate di A e di B e, di conseguenza, il calcolo dell'area del triangolo sono immediati. Si ottiene:

$$\mathcal{A}(\mathrm{ABO}) = \frac{125}{1024}\,. \qquad \square$$

Esercizio 4.3. *Dati il punto* $\mathrm{A} = (1, 2)$ *e la retta* r *di equazione* $3x - y - 6 = 0$, *determinare la proiezione ortogonale* H *di* A *su* r *e i punti* B *di* r *tali che l'area del triangolo* AHB *sia 2.*

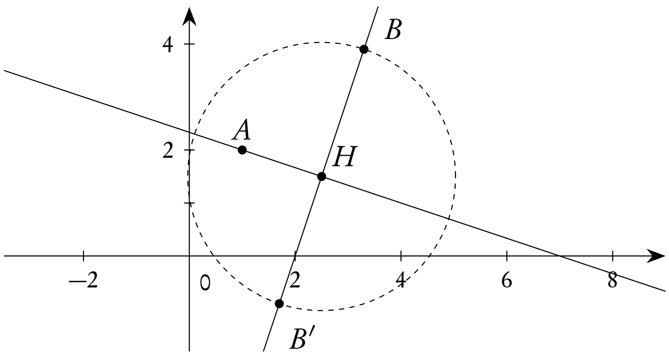


Figura 4.3: *Figura relativa all'esercizio* 4.3

Risoluzione. Il punto H si trova subito intersecando la retta r con la sua perpendicolare per A. Si trova $\mathrm{H} = (5/2, 3/2)$. A questo punto si trova la distanza $|\overline{\mathrm{AH}}|$ come distanza tra due punti (si poteva naturalmente anche usare la formula della distanza tra un punto e una retta):

$$|\overline{\mathrm{AH}}| = \frac{\sqrt{10}}{2}\,.$$

I punti B richiesti devono allora essere tali che $|\overline{\mathrm{AH}}| \cdot |\overline{\mathrm{HB}}|$ sia il doppio dell'area data. Si trova

$$|\overline{\mathrm{HB}}| = \frac{8}{\sqrt{10}}\,.$$

Per trovare i punti B basterà intersecare la circonferenza di centro H e raggio $|\overline{\mathrm{HB}}|$ con la retta r data. Si trova

$$\mathrm{B} = \left(\frac{33}{10}, \frac{39}{10}\right), \quad \mathrm{B}' = \left(\frac{17}{10}, -\frac{9}{10}\right). \qquad \square$$

Esercizio 4.4. *Sono date la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+y^2=4$ e la retta r di equazione $x+y=0$. Scrivere le equazioni delle rette parallele ad r e tangenti a $\mathcal{C}$. Scrivere inoltre l'equazione della circonferenza contenuta nel primo quadrante e tangente internamente a $\mathcal{C}$.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.4.

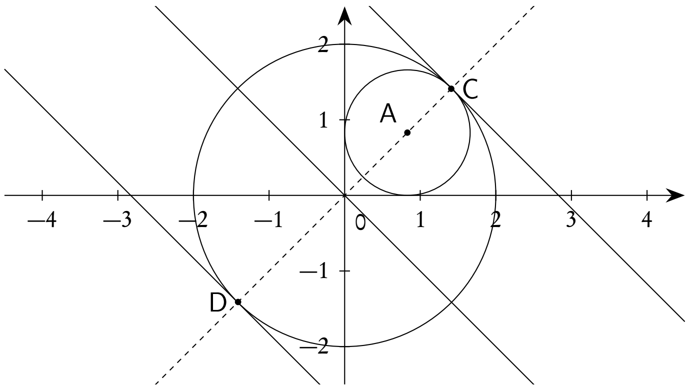


Figura 4.4: *Figura relativa all'esercizio* 4.4

I punti di tangenza delle rette parallele ad r con la $\mathcal{C}$ sono, banalmente,

$$\mathsf{C}=(\sqrt{2},\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad \mathsf{D}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2}).$$

Le equazioni delle due rette richieste sono dunque

$$x+y=2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x+y=-2\sqrt{2}.$$

Per trovare l'equazione della circonferenza richiesta si può osservare che, detto $\mathsf{A}=(a,a)$ il suo centro, si deve avere

$$a=|\overline{\mathsf{AC}}|,$$

ovvero

$$a=\sqrt{(a-\sqrt{2})^2+(a-\sqrt{2})^2},$$

da cui $a=2(\sqrt{2}-1)$. L'equazione richiesta è:

$$\left(x-2\sqrt{2}+2\right)^2+\left(y-2\sqrt{2}+2\right)^2=\left(2\sqrt{2}-2\right)^2.$$

□

Esercizio 4.5. *Scrivere l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ che ammette come fuoco il punto $\mathsf{F}=(1,-3/4)$ e come direttrice la retta $y=-5/4$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{P}$ e ortogonale alla retta $x-2y+2=0$.*

Risoluzione. L'equazione della parabola $\mathcal{P}$ si può fare in base alla definizione: la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Detto $\mathsf{P}=(x,y)$ il generico punto della parabola, si deve avere allora

$$\sqrt{(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}=\left|y+\frac{5}{4}\right|$$

Quadrando e semplificando si ottiene

$$y = x^2 - 2x\,.$$

La retta richiesta deve avere coefficiente angolare -2 (condizione di perpendicolarità), e dunque sarà del tipo $y = -2x + q$. Mettendola a sistema con la parabola e richiedendo che il discriminante della equazione risolvente sia 0 si trova subito $q = 0$. La retta richiesta è dunque

$$y = -2x\,.$$ □

Esercizio 4.6. *Tra le parabole di equazioni* $4y = 4kx - x^2$, $k \in \mathbb{R}$, *determinare quelle tangenti alla retta* t *di equazione* $y = x + 4$. *Di queste considerare quella il cui vertice* V *ha ascissa negativa e indicare con* T *e* Q *rispettivamente il punto di contatto con la retta* t *e l'intersezione di questa retta con l'asse* y. *Calcolare l'area del triangolo* TVQ.

Risoluzione. La condizione di tangenza tra la retta data e la generica parabola si ottiene dalla condizione che il sistema costituito dalle due equazioni abbia una sola soluzione, ovvero che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}x^2 + kx \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4(1-k)x + 16 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3 \lor k = -1\,.$$

La parabola corrispondente a $k = 3$ ha ascissa del vertice in $x = 6$, quella corrispondente a $k = -1$ ha ascissa del vertice in $x = -2$. La parabola richiesta è dunque

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x\,.$$

Si faccia riferimento alla figura 4.5.

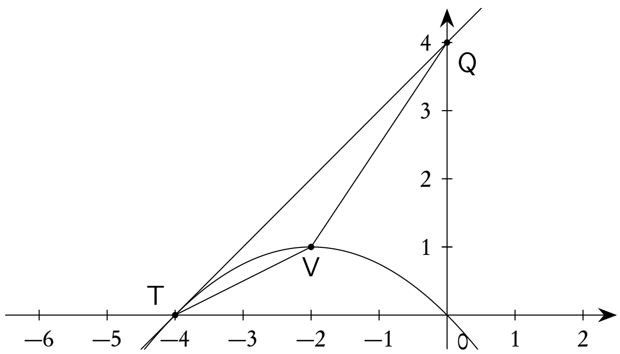


Figura 4.5: *Figura relativa all'esercizio* 4.6

È immediato trovare il punto di tangenza, $\mathsf{T} = (-4, 0)$, il punto $\mathsf{Q} = (0, 4)$ e il vertice $\mathsf{V} = (-2, 1)$. Per trovare l'area richiesta è sufficiente trovare $|\overline{\mathsf{TQ}}|$ e l'altezza relativa a $\overline{\mathsf{TQ}}$, cioè la distanza di V dalla retta $\mathsf{t} : x - y + 4 = 0$, cioè dalla retta data. Si ottiene

$$|\overline{\mathsf{TQ}}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}; \quad d(\mathsf{V}, \mathsf{t}) = \frac{\mathrm{abs}-2 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

L'area richiesta è allora:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}4\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 2. \qquad \square$$

Esercizio 4.7. *Fra tutte le rette passanti per il punto* $\mathsf{A} = (1,2)$ *determinare quella, o quelle, che nel primo quadrante formano con gli assi coordinati un triangolo di area pari a* 4.

Risoluzione. La soluzione più semplice consiste nel cercare l'equazione segmentaria della retta incognita, tenendo conto che sicuramente essa non passerà per l'origine:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\,,\ p > 0 \land q > 0 \text{ (perché il testo chiede un triangolo appartenente al primo quadrante).}$$

La condizione di passaggio per $\mathsf{A} = (1,2)$ e la richiesta che l'area del triangolo sia 4 consentono di scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{q} = 1 \\ \dfrac{pq}{2} = 4 \end{cases},$$

sistema che ha come soluzione possibile $(p,q) = (2,4)$. $\square$

Esercizio 4.8. *Scrivere l'equazione dell'asse del segmento di estremi* $\mathsf{A} = (2,-1)$ *e* $\mathsf{B} = (0,3)$. *Tra le circonferenze passanti per* A *e* B, *determinare quella tangente alla retta* r *passante per il punto* $\mathsf{C} = (0,4)$ *e parallela ad* AB.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.6.

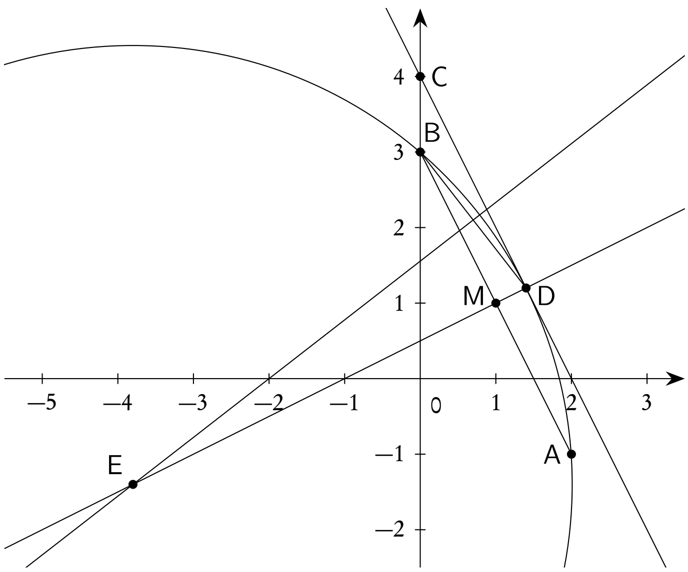


Figura 4.6: *Figura relativa all'esercizio* 4.8

Il punto medio M del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ ha coordinate

$$\left(\frac{x_\mathsf{A}+x_\mathsf{B}}{2}, \frac{y_\mathsf{A}+y_\mathsf{B}}{2}\right)=(1,1).$$

Il coefficiente angolare della retta AB è

$$m_\mathsf{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_\mathsf{B}-y_\mathsf{A}}{x_\mathsf{B}-x_\mathsf{A}}=\frac{3-(-1)}{0-2}=-2.$$

L'asse richiesta avrà dunque coefficiente angolare $m = 1/2$ ed equazione

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

La retta per C e parallela ad AB ha equazione

$$y-4=-2(x-0)\Rightarrow y=-2x+4.$$

La circonferenza richiesta, dovendo essere tangente ad r e passante per A e B, avrà come punto di tangenza l'intersezione D tra la retta r e l'asse di AB:

$$\mathsf{D}\colon \begin{cases} y=-2x+4 \\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \mathsf{D}=\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right).$$

Per scrivere l'equazione della circonferenza si può, data l'equazione generica $x^2+y^2+ax+by+c=0$ imporre il passaggio per i tre punti A, B, D, ottenendo un sistema lineare nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} 4+1+2a-b+c=0 \\ 9+3b+c=0 \\ \dfrac{49}{25}+\dfrac{36}{25}+\dfrac{7}{5}a+\dfrac{6}{5}b+c=0 \end{cases}.$$

Alternativamente si può trovare il centro E come intersezione tra l'asse del segmento $\overline{\mathsf{BD}}$ e l'asse del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$, e poi il raggio come distanza tra E e B. Si trova (con qualche calcolo standard):

$$\text{asse di } \overline{\mathsf{BD}}\colon y=\frac{7}{9}x+\frac{14}{9}; \quad \mathsf{E}=\left(-\frac{19}{5},-\frac{7}{5}\right); \quad |\overline{\mathsf{EB}}|^2=\frac{169}{5}.$$

L'equazione richiesta è dunque

$$\left(x+\frac{19}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{5}\right)^2=\frac{169}{5}.$$

□

Esercizio 4.9. *Nel piano* $\mathsf{O}xy$ *sono date le due circonferenze*

$$\mathcal{C}_1\colon x^2+y^2-4x+2y+4=0, \quad \mathcal{C}_2\colon x^2+y^2-6y+5=0.$$

Trovare le circonferenze tangenti comuni a $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *e aventi centro sull'asse delle ordinate.*

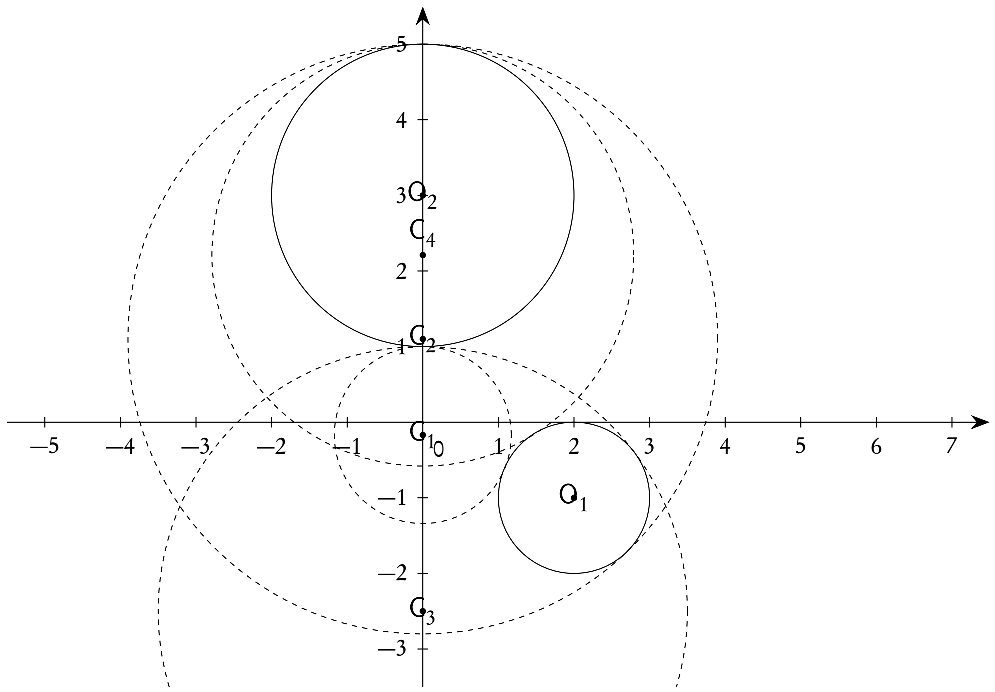


Figura 4.7: *Figura relativa all'esercizio* 4.9

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.7.

Detti $C = (0, a)$ e r il centro e il raggio di una delle circonferenze incognite, utilizzando la strategia risolutiva standard si possono considerare i sistemi tra ciascuna delle circonferenze date e quella incognita:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ay + a^2 - r^2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ay + a^2 - r^2 = 0 \end{cases} .$$

Questi sistemi, che sono di quarto grado, possono essere ridotti a sistemi di secondo grado sostituendo una delle due equazioni con la differenza tra le due equazioni stesse:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \\ -4x + 2y + 4 + 2ay - a^2 + r^2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ -6y + 5 + 2ay - a^2 + r^2 = 0 \end{cases} .$$

Per ciascuno dei due sistemi si ottiene un'equazione risolvente di secondo grado ricavando, per esempio, la x dalla seconda equazione e sostituendola nella prima. Uguagliando a zero il discriminante delle due equazioni risolventi si ottengono due equazioni nelle incognite a ed r che, messe a sistema, consentono di risolvere il problema. Tuttavia i calcoli sono abbastanza complessi e, come sempre succede quando si ha a che fare con circonferenze, conviene valutare eventuali strategie alternative. In questo caso si può osservare che le distanze dell'incognito centro C da O_1 e O_2, uguali rispettivamente a

$$|\overline{CO}|_1 = \sqrt{(0-2)^2 + (a+1)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 5} \quad \text{e} \quad |\overline{CO}|_2 = |3 - a|,$$

devono anche essere uguali, a seconda dei casi, a $r \pm r_1$ e $r \pm r_2$, dove r_1 e r_2 sono i raggi delle due circonferenze date, cioè 1 e 2. Se si tiene conto, come è facile dedurre, che $a < 3$, si possono impostare le equazioni seguenti

$$\sqrt{a^2+2a+5} = r \pm 1 \quad \text{e} \quad 3-a = r \pm 2.$$

Con queste equazioni si impostano quattro sistemi di semplice soluzione che permettono di trovare quattro valori di a e, corrispondentemente, quattro valori di r che soddisfano il problema. Ne risolviamo esplicitamente uno, i calcoli per gli altri sono identici.

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+2a+5} = r+1 \\ 3-a = r+2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a^2+2a+5} = 2-a \\ 3-a = r+2 \end{cases},$$

dove il secondo sistema è stato ottenuto sostituendo la prima equazione con la sottrazione tra la prima e la seconda. Quadrando e semplificando la prima equazione e sostituendo il valore trovato di a nella seconda si trova

$$a = -\frac{1}{6}, \quad r = \frac{7}{6}.$$

Per gli altri casi si trovano le seguenti coppie di valori (a, r):

$$\left(\frac{11}{10}, \frac{39}{10}\right), \quad \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), \quad \left(\frac{31}{14}, \frac{39}{14}\right).$$

□

Esercizio 4.10. *Nel piano Oxy è data la parabola $\mathcal{C}\colon y = x^2$ e i due punti $A(2,0)$ e $B(0,-2)$. Trovare per quali $a > 0$ esiste un triangolo di area a, con due vertici in A e B e il terzo vertice $C \in \mathcal{C}$. Per ogni valore di a trovato si precisi il numero di triangoli richiesti, determinando il triangolo di area minima.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.8.

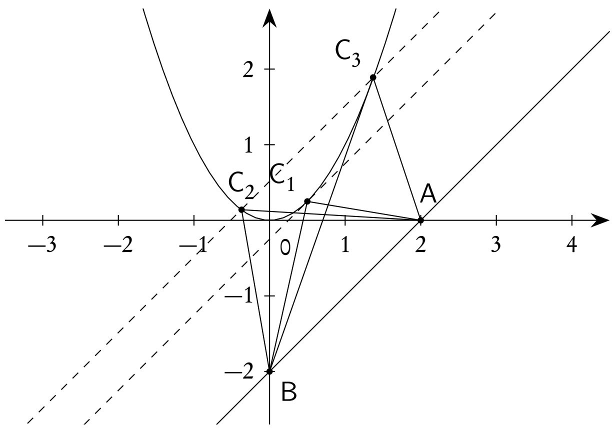


Figura 4.8: *Figura relativa all'esercizio 4.10*

Indicato con $C(s, s^2)$ il terzo vertice del triangolo ABC, l'altezza $|\overline{CH}|$ è la distanza del punto C dalla retta AB, che ha equazione $x - y - 2 = 0$.

$$|\overline{CH}| = \frac{|s - s^2 - 2|}{\sqrt{2}}.$$

La condizione sull'area si esprime come segue:

$$\frac{1}{2}\frac{|s-s^2-2|}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=a.$$

Da qui si ottengono le due equazioni

$$s^2-s+2=\pm a.$$

Una delle due non ha soluzioni per nessun valore di a ($\Delta<0$), l'altra ha soluzioni solo se $a\geq {}^7/_4$. Se $a={}^7/_4$ si hanno due soluzioni coincidenti con

$$\mathsf{C}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right).$$

Se $a>{}^7/_4$ si hanno due soluzioni con

$$C_2=\left(\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2},\left(\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2}\right)^2\right),\quad C_3=\left(\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2},\left(\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2}\right)^2\right).$$

Il triangolo di area minima è quello corrispondente a $s={}^7/_4$. La retta per C_1 e tangente alla parabola è parallela alla retta AB; anche la retta per C_1 e C_2 è parallela alla retta AB. □

Esercizio 4.11. *Trovare le tangenti comuni alle due circonferenze*

$$\mathcal{C}_1: x^2+y^2-4x-4y+4=0,\quad \mathcal{C}_2: x^2+y^2+4x+8y+16=0.$$

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.9.

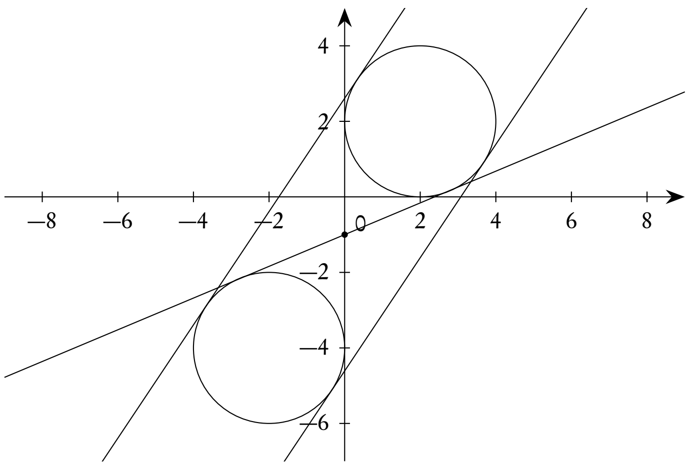


Figura 4.9: *Figura relativa all'esercizio* 4.11

Le due circonferenze date hanno entrambe raggio 2, la prima ha centro $(2,2)$, la seconda $(-2,-4)$. Una delle quattro tangenti comuni è l'asse delle ordinate: $x=0$. Un'altra deve passare per il punto $A(-1,0)$

ed è dunque del tipo $y+1=mx$, ovvero $mx-y-1=0$. Il valore di m si può trovare imponendo che la distanza di questa retta da uno dei due centri, per esempio $(2,2)$, sia 2:

$$\frac{|2m-2-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2, \quad \Rightarrow \quad m=\frac{5}{12}.$$

Le altre due tangenti devono essere parallele alla retta dei centri, e quindi avere coefficiente angolare $3/2$, saranno quindi del tipo

$$y=\frac{3}{2}x+q.$$

Per trovare q si procede come sopra, imponendo che la distanza di questa retta da uno dei due centri, per esempio $(2,2)$, sia 2. Si trovano, in conclusione, le quattro rette: $x=0$, $5x-12y-12=0$, $3x-2y+2\sqrt{13}-2=0$, $3x-2y-2\sqrt{13}-2=0$. □

Esercizio 4.12. *In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale* Oxy*, si consideri il segmento* $\overline{AB}$ *di lunghezza* 6*; il punto* A *appartiene al semiasse positivo delle* y *e le coordinate di* B *sono* $(t,0)$ *essendo* $t\geq 0$*. Si scrivano le equazioni parametriche del luogo geometrico* $\mathcal{L}$ *descritto dal punto medio del segmento* $\overline{AB}$ *al variare del parametro* t *nell'intervallo* $[0,6]$*. Dedurre, infine, l'equazione cartesiana di tale luogo geometrico, descriverne il tipo e tracciarne il grafico.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.10.

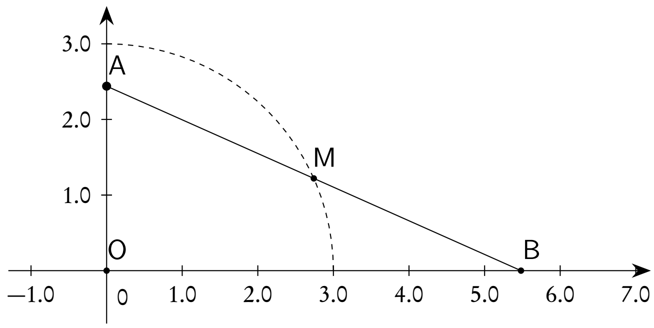


Figura 4.10: *Figura relativa all'esercizio 4.12*

Il punto A ha coordinate $(0,y_A)$, e si ha, essendo $|\overline{AB}|=6$,

$$y_A^2+t^2=36 \quad \Rightarrow \quad y_A=\sqrt{36-t^2},$$

ove abbiamo preso solo la determinazione positiva della radice quadrata, perché A sta sul semiasse positivo delle y. Il punto medio del segmento $\overline{AB}$ ha dunque coordinate

$$x=\frac{t}{2}, \quad y=\frac{\sqrt{36-t^2}}{2}, \quad t\in[0,6].$$

Le due equazioni precedenti forniscono le equazioni parametriche del luogo cercato. Per ottenerne l'equazione cartesiana posiamo osservare che, elevando al quadrato le due equazioni in t e sommando membro a membro, si ottiene

$$x^2+y^2=\frac{t^2}{4}+\frac{36-t^2}{4}=9,$$

ovvero che, al variare di $t \in [0,6]$ il punto medio di $\overline{\mathsf{AB}}$ sta sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 3. Tenendo conto delle condizioni poste, si conclude facilmente che il luogo $\mathcal{L}$ è costituito solo dal quarto di detta circonferenza che sta nel primo quadrante. □

Esercizio 4.13. *Dato il triangolo di vertici* $\mathsf{A}(1,2)$, $\mathsf{B}(6,9)$ *e* $\mathsf{C}(3,12)$, *trovare il suo baricentro* G. *Trasformare il triangolo* ABC *nel triangolo* $\mathsf{A'B'C'}$ *con l'affinità* $f:(x,y)\to(4x,5y)$. *Trovare infine il baricentro* G' *del triangolo* $\mathsf{A'B'C'}$ *e verificare che* $f(\mathsf{G})=\mathsf{G}'$.

Risoluzione. Il baricentro di un triangolo ha come coordinate la media delle coordinate dei tre estremi:

$$\mathsf{G}=\left(\frac{x_\mathsf{A}+x_\mathsf{B}+x_\mathsf{C}}{3},\frac{y_\mathsf{A}+y_\mathsf{B}+y_\mathsf{C}}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{23}{3}\right).$$

L'affinità agisce nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathsf{A}=(1,2)&\mapsto\mathsf{A}'=(4,10)\\ \mathsf{B}=(6,9)&\mapsto\mathsf{B}'=(24,45)\\ \mathsf{C}=(3,12)&\mapsto\mathsf{C}'=(12,60)\end{aligned}$$

Il baricentro G' ha dunque coordinate

$$\mathsf{G}'=\left(\frac{40}{3},\frac{115}{3}\right)$$

ed è immediato che

$$f(\mathsf{G})=f\left(\left(\frac{10}{3},\frac{23}{3}\right)\right)=\left(4\,\frac{10}{3},5\,\frac{23}{3}\right)=\left(\frac{40}{3},\frac{115}{3}\right)=\mathsf{G}'.$$ □

Esercizio 4.14. *Trasformare in forma cartesiana la curva* $\mathcal{C}$ *di equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-4t^2+12t-5 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Specificare di che curva si tratta, rappresentarla graficamente e scrivere le equazioni delle rette tangenti ad essa passanti per il punto $(0,4)$.

Risoluzione. Per passare dalla rappresentazione parametrica a quella cartesiana è sufficiente ricavare la t dalla prima equazione e sostituirla nella seconda.

$$\begin{cases} t=\dfrac{x+1}{2} \\ y=-4\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2+12\,\dfrac{x+1}{2}-5 0=-x^2+4x \end{cases}.$$

Si tratta dunque di una parabola con asse parallelo all'asse y, concavità verso il basso, vertice in $\mathsf{V}(2,4)$. Per la determinazione delle rette tangenti consideriamo il fascio di rette non verticali per $(0,4)$: $y-4=mx$. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y=mx+4 \\ y=-x^2+4x \end{cases}$$

e imponiamo che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo. Si ottiene

$$x^2+(m-4)x+4=0 \quad \Rightarrow \quad (m-4)^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad m-4=\pm 4 \quad \Rightarrow \quad m=0 \vee m=8.$$

Le due rette tangenti sono allora

$$y=4 \quad \text{e} \quad y=8x+4. \qquad \square$$

Esercizio 4.15. *Rispetto ad un sistema di riferimento* $\mathsf{O}xy$*, determinare l'equazione del luogo* $\mathcal{L}$ *dei punti* $\mathsf{P}(x,y)$ *la cui distanza dal punto* $\mathsf{O}(0,0)$ *è doppia della distanza dal punto* $\mathsf{A}(1,0)$ *e infine rappresentarlo graficamente.*

Risoluzione. Detto $\mathsf{P}(x,y)$ il generico punto del luogo, si deve avere

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Trattandosi di uguaglianza tra numeri positivi, si può elevare al quadrato senza alcun problema. Si ottiene, dopo semplificazione,

$$3x^2+3y^2-8x+4=0.$$

Il luogo è il circolo di centro $(4/3,0)$ e raggio $2/3$. $\square$

Esercizio 4.16. *Nel piano cartesiano* $\mathsf{O}xy$ *siano dati la retta* r *di equazione* $x=1$ *ed il punto* $\mathsf{A}(2,0)$*. Si determini l'equazione del luogo geometrico* $\mathcal{L}$ *dei punti* P *del piano per cui* $|\overline{\mathsf{PA}}|=\sqrt{2}\cdot|\overline{\mathsf{PH}}|$ *essendo* $|\overline{\mathsf{PH}}|$ *la distanza tra il punto* P *e la retta* r*. Rappresentare graficamente il luogo ottenuto.*

Risoluzione. Detto $\mathsf{P}(x,y)$ il generico punto del luogo, si ha

$$|\overline{\mathsf{PA}}|=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \quad \text{e} \quad |\overline{\mathsf{PH}}|=|x-1|,$$

da cui

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{2}|x-1|.$$

Trattandosi di uguaglianza tra numeri positivi si può elevare al quadrato[1] senza problema e si ottiene, dopo semplificazione,

$$x^2-y^2=2.$$

Il luogo $\mathcal{L}$ è l'iperbole equilatera rappresentata nella figura 4.11.

$\square$

Esercizio 4.17. *Rispetto ad un sistema di riferimento* $\mathsf{O}xy$ *cartesiano ortogonale, scrivere l'equazione della circonferenza passante per* $\mathsf{A}(1,4)$ *e* $\mathsf{B}(-2,1)$ *e avente il centro sulla retta di equazione* $3x-y+4=0$*.*

Risoluzione. Se la circonferenza passa per i punti A e B, significa che $\overline{\mathsf{AB}}$ è una corda della circonferenza stessa. Il centro dovrà dunque appartenere all'asse della corda e, dovendo anche stare sulla retta di equazione $3x-y+4=0$, si troverà nell'intersezione tra queste due rette. L'asse della corda è la perpendicolare nel suo punto medio. Il coefficiente angolare di AB è

$$m_{\mathsf{AB}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{3}=1.$$

[1]Si ricordi che $|t|^2=t^2$.

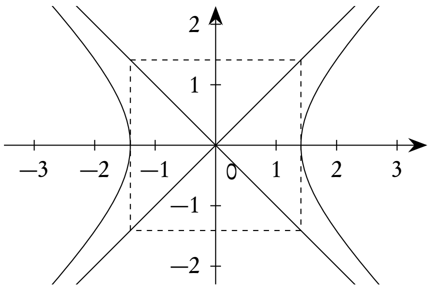


Figura 4.11: *Figura relativa all'esercizio* 4.16

Il punto medio M di $\overline{\mathsf{AB}}$ è la media tra le coordinate degli estremi:

$$\mathsf{M} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

L'equazione dell'asse è dunque $x + y - 2 = 0$. Si verifica facilmente che l'intersezione tra quest'asse e la retta di equazione $3x - y + 4 = 0$ è proprio il punto medio M della corda. La circonferenza richiesta ha dunque raggio

$$r = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

ed equazione

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0.$$

Si faccia riferimento alla figura 4.12.

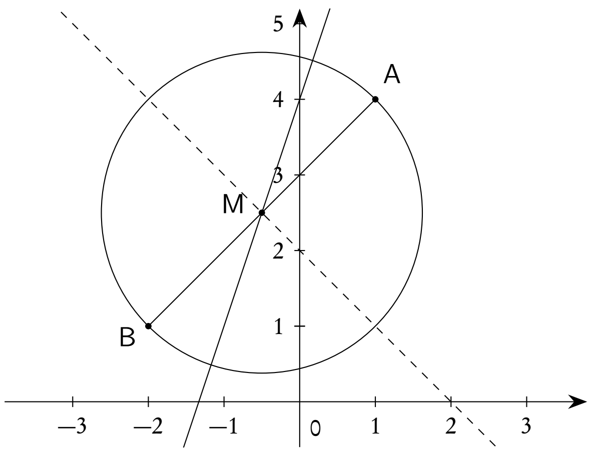


Figura 4.12: *Figura relativa all'esercizio* 4.17

□

Esercizio 4.18. *Per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ il punto* $\mathsf{A}(-1, b)$ *(in un sistema di riferimento* $\mathsf{O}xy$ *cartesiano ortogonale) determina con l'origine* O *una retta* r *parallela alla retta* s *di equazione* $2x - y + \sqrt{3} = 0$*? Calcolare poi la distanza tra le due rette.*

Risoluzione. La retta s ha coefficiente angolare 2. La retta per A e B ha coefficiente angolare

$$m_{\mathsf{AB}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b}{-1} = -b.$$

L'equazione di AB sarà dunque $2x - y = 0$. Affinché le due rette siano parallele dovrà dunque essere $b = -2$. Per trovare la distanza richiesta basterà trovare la distanza tra O (che appartiene alla retta r e la retta s. Si ottiene

$$d(\mathsf{r}, \mathsf{s}) = d(\mathsf{O}, \mathsf{s}) = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

□

Esercizio 4.19. *Scrivere le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione*

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$$

e passanti per l'origine. Calcolare inoltre l'area del parallelogramma con i lati tangenti alla circonferenza e paralleli alle due rette.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.13

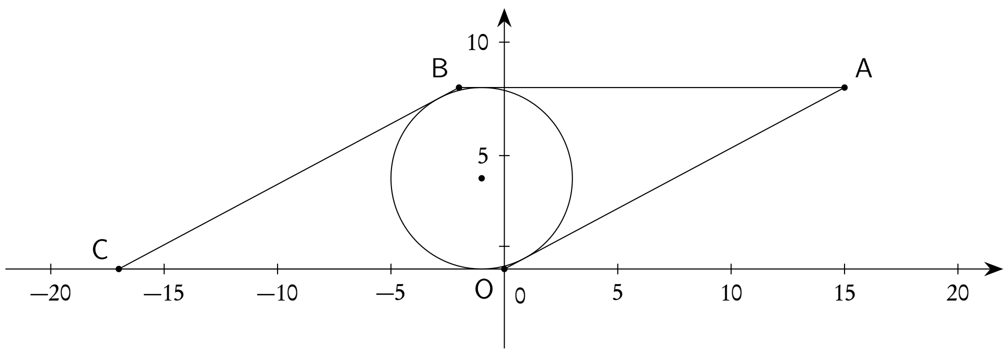


Figura 4.13: *Figura relativa all'esercizio* 4.19

Riscrivendo l'equazione della circonferenza data nella forma

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 8y + 16 - 16) + 1 = 0 \quad \text{ovvero} \quad (x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$$

si verifica subito che essa ha centro in (-1,4) e raggio $r = 4$. Le due tangenti per l'origine non possono essere verticali, dunque si possono cercare tra le rette del tipo $y = mx$. Considerando il sistema tra la generica retta $y = mx$ e la circonferenza data, si ottiene l'equazione risolvente

$$(1 + m^2)x^2 + 2(1 - 4m)x + 1 = 0.$$

Basterà imporre la condizione che essa abbia discriminante nullo perché le rette siano tangenti. Si trova facilmente

$$\Delta = 4m(15m - 8) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \vee m = \frac{8}{15}.$$

Si ottengono le due rette

$$\mathsf{r}\colon y = 0 \quad \text{e} \quad \mathsf{s}\colon y = \frac{8}{15}\, x.$$

Per trovare l'area del parallelogramma richiesto si possono trovare le altre due tangenti alla circonferenza, parallele rispettivamente a r e a s. La parallela ad r è sicuramente $y = 8$. La parallela ad s ha equazione

$$y = \frac{8}{15}x + q \quad \text{ovvero} \quad 8x - 15y + 15q = 0.$$

Per trovare q si può mettere a sistema con la circonferenza, ricavare l'equazione risolvente di 2° grado e imporre $\Delta = 0$. Più efficiente la strategia di imporre la condizione che la distanza tra s, o anche un suo punto come O, e questa retta sia uguale al diametro della circonferenza, che vale 8. Si ottiene

$$8 = \frac{|15q|}{\sqrt{64 + 225}} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{136}{15}.$$

Intersecando le rette a due a due si trovano i quattro vertici del parallelogramma

$$\mathrm{O}(0,0), \quad \mathrm{A}(15,8), \quad \mathrm{B}(-2,8), \quad \mathrm{C} = (-17,0).$$

Se ne deduce che si tratta di un rombo di lato 17 e altezza 8. L'area richiesta è dunque $17 \times 8 = 136$.

In realtà è facile provare che un parallelogramma circoscritto ad una circonferenza è necessariamente un rombo che ha come altezza un diametro. Era dunque sufficiente trovare per esempio il vertice A come intersezione tra s e la retta $y = 8$. Questo consentiva di trovare subito la lunghezza del lato e di concludere come prima. □

Esercizio 4.20. *Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale* Oxy*, si consideri la circonferenza* γ *di equazione* $x^2 + y^2 = r^2$*. Trovare il luogo geometrico* $\mathcal{L}$ *dei punti* P *del piano tali che*

$$3|\overline{\mathrm{PT}}|^2 = |\overline{\mathrm{PS}}|^2,$$

dove T *è uno dei due punti di contatto con* γ *delle rette tangenti a* γ *passanti per* P *e* S *è l'intersezione con l'asse* x *della retta per* P *parallela all'asse* y*.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.14

Detto P(s,t) il generico punto del luogo cercato, si osserva che P deve essere esterno alla circonferenza, altrimenti non ci sono tangenti alla stessa condotte da P. Si ha, facilmente,

$$|\overline{\mathrm{PS}}|^2 = t^2.$$

Per trovare $|\overline{\mathrm{PT}}|^2$ conviene osservare che $\overline{\mathrm{PT}}$ è cateto del triangolo rettangolo PTO:

$$|\overline{\mathrm{PT}}|^2 = |\overline{\mathrm{OP}}|^2 - |\overline{\mathrm{OT}}|^2 = (s^2 + t^2) - r^2.$$

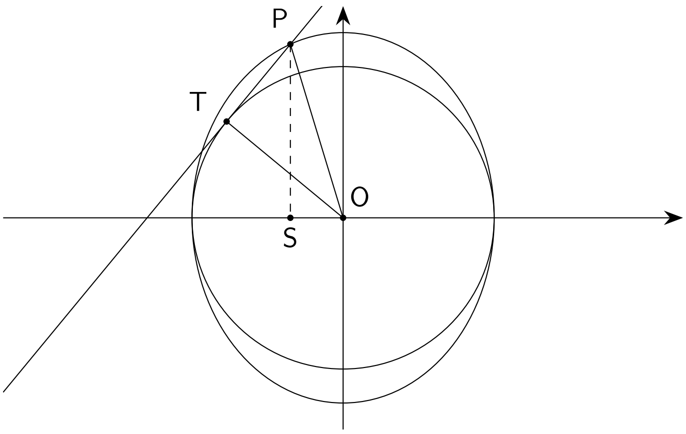


Figura 4.14: *Figura relativa all'esercizio* 4.20

L'equazione del luogo è allora

$$3(s^2+t^2-r^2)=t^2.$$

Utilizzando le usuali variabili x ed y al posto di s e t e riscrivendo l'equazione nella sua forma canonica, si ottiene

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{3/2}\,r\right)^2}=1.$$

Si tratta dell'ellisse con asse maggiore sull'asse $\mathrm{O}y$, di lunghezza $\sqrt{3/2}\,r$, e asse minore sull'asse $\mathrm{O}x$, di lunghezza r. □

Esercizio 4.21. *Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale* $\mathrm{O}xy$*, scrivere l'equazione della circonferenza* γ *di raggio* 1*, tangente agli assi e contenuta nel primo quadrante. Scrivere l'equazione della retta passante per* P *e* Q*, con* P, Q $\in\gamma$*, tale che la corda* $\overline{\mathrm{PQ}}$ *ammette il punto* A $(3/2, 4/3)$ *come punto medio. Detta* B *l'intersezione tra la secante* PQ *e l'asse* x*, costruire un quadrato equivalente al rettangolo* $|\overline{\mathrm{BP}}|\cdot|\overline{\mathrm{BQ}}|$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.15.

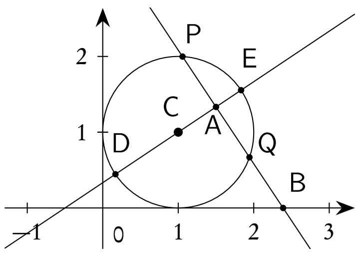


Figura 4.15: *Figura relativa all'esercizio* 4.21

Chiaramente la circonferenza deve avere centro nel punto $\mathrm{C}(1,1)$ e quindi equazione

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-2x-2y+1=0.$$

Se A è punto medio della corda $\overline{PQ}$ la retta AC deve essere perpendicolare alla corda in A. La retta AC ha coefficiente angolare
$$m_{AC} = \frac{4/3 - 1}{3/2 - 1} = \frac{2}{3}.$$
La retta PQ avrà coefficiente angolare $-3/2$ e, dovendo passare per A, avrà equazione
$$y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad 18x + 12y - 43 = 0.$$
Questo ci permette di trovare subito
$$B = \left(\frac{43}{18}, 0\right).$$
Impostando invece i calcoli per determinare le coordinate di P e Q (come intersezioni tra questa retta e la circonferenza) si vede che si ottengono valori abbastanza complessi. In realtà il testo non chiede la determinazione di P e Q, ma solo di $|\overline{BP}|$ e $|\overline{BQ}|$. Ora, indicate con D ed E le intersezioni di AC con la circonferenza, si vede subito che $|\overline{AQ}| = |\overline{AP}|$ si possono trovare usando il secondo teorema di Euclide nel triangolo DEQ, $|\overline{AB}|$ con la distanza tra due punti e quindi $|\overline{BP}|$ e $|\overline{BQ}|$ rispettivamente facendo $|\overline{AB}| + |\overline{AP}|$ e $|\overline{AB}| - |\overline{AQ}|$. Si trova, con calcoli standard,
$$|\overline{AC}| = \frac{\sqrt{13}}{6}; \quad |\overline{AQ}|^2 = |\overline{AE}| \cdot |\overline{AD}| = \big(1 - |\overline{AC}|\big)\big(1 + |\overline{AC}|\big) = 1 - |\overline{AC}|^2 = \frac{23}{36};$$
$$|\overline{AB}|^2 = \frac{208}{81}; \quad |\overline{BP}| \cdot |\overline{BQ}| = \big(|\overline{AB}| - |\overline{AQ}|\big)\big(|\overline{AB}| + |\overline{AQ}|\big) = |\overline{AB}|^2 - |\overline{AQ}|^2 = \frac{5625}{2916}.$$
Se ne deduce che il quadrato richiesto ha lato $25/_{18}$. □

Esercizio 4.22. *Nel piano cartesiano* Oxy *un triangolo* ABC*, isoscele sulla base* $\overline{BC}$*, circoscritto alla circonferenza* γ *di equazione*
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0,$$
ha l'angolo $B\widehat{A}C$ *di* $\pi/4$ *e i vertici* A *e* B *sulla retta* r *di equazione* $x = -1$*, con* A *nel semipiano* $y < 0$*. Trovare le coordinate di* A *e la misura dell'altezza* h *relativa alla base* $\overline{BC}$*.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.16.

La circonferenza data ha centro in $D(1, 2)$ e raggio $r = 2$. Se l'angolo $B\widehat{A}C$ misura $\pi/4$, l'angolo $B\widehat{A}D$ misura $\pi/8$. Nel triangolo AED si possono ora ricavare $|\overline{AD}|$ e $|\overline{AE}|$.
$$|\overline{AD}| = \frac{|\overline{ED}|}{\sin \pi/8} = \frac{4}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \quad |\overline{AE}| = |\overline{AD}| \cos\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2} + 2.$$
È ora facile trovare le coordinate di A:
$$A = \big(-1, 2 - (2\sqrt{2} + 2)\big) = \big(-1, -2\sqrt{2}\big).$$
Infine si ha
$$h = |\overline{AD}| + |\overline{DH}| = 2 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$
□

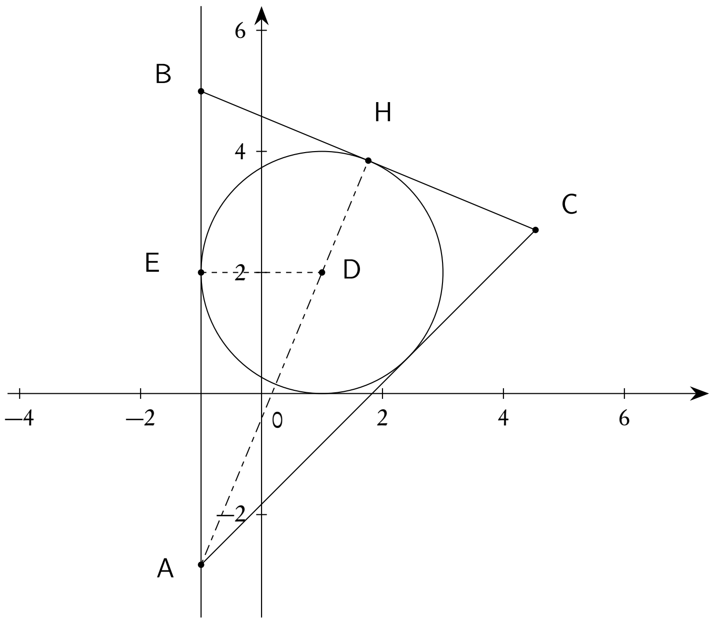


Figura 4.16: *Figura relativa all'esercizio* 4.22

Esercizio 4.23. *Sono date nel piano cartesiano* Oxy *le due rette parallele*

$$r\colon 4x+3y-1=0 \quad e \quad s\colon y=-\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}.$$

Dato il punto $P(2,1)\in s$, *determinare le coordinate dei vertici dei quadrati che hanno un vertice in* P *e due lati sulle rette* r *e* s.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.17.

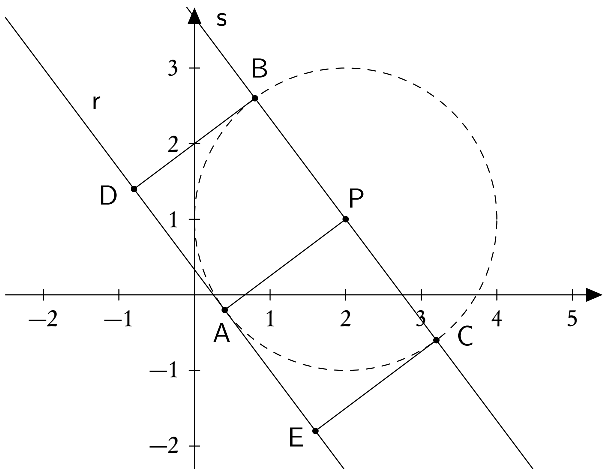


Figura 4.17: *Figura relativa all'esercizio* 4.23

La distanza tra P e la retta r è il lato dei quadrati cercati.

$$d(\mathsf{P},\mathsf{r}) = 2.$$

Dunque il circolo di centro P e raggio $r = 2$ individua i punti A su r e B e C su s. I punti D ed E si possono trovare, per esempio, intersecando le perpendicolari per B e C a s con r.

Si trovano i seguenti vertici.

$$\mathsf{P}(2,1),\quad \mathsf{C}\left(\frac{16}{5},-\frac{3}{5}\right),\quad \mathsf{E}\left(\frac{8}{5},-\frac{9}{5}\right),\quad \mathsf{A}\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right),\quad \mathsf{B}\left(\frac{4}{5},\frac{13}{5}\right),\quad \mathsf{D}\left(-\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right). \qquad \square$$

Esercizio 4.24. *Nel piano cartesiano $\mathsf{O}xy$ trovare le rette tangenti comuni alle circonferenze di equazioni*

$$x^2+y^2+4x=0 \quad e \quad x^2+y^2-2x=0.$$

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.18.

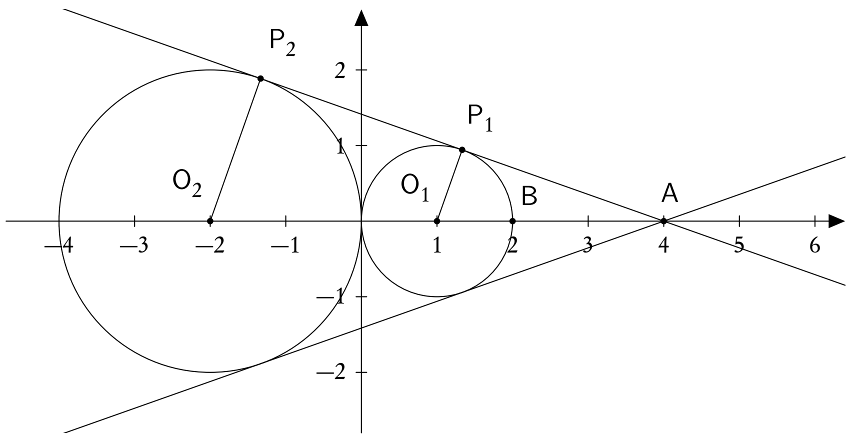


Figura 4.18: *Figura relativa all'esercizio 4.24*

Le due circonferenze hanno centro in $\mathsf{O}_1 = (1,0)$ e $\mathsf{O}_2 = (-2,0)$ e raggi $r = 1$ e $R = 2$ rispettivamente. Essendo esternamente tangenti avranno tre tangenti comuni, di cui una è l'asse delle y e le altre due saranno simmetriche rispetto all'asse x. La soluzione più "algebrica" del problema consiste nel considerare una generica retta $y = mx + q$, porla a sistema con ciascuna delle due circonferenze e imporre che l'equazione risolutiva di ciascun sistema abbia il discriminante nullo. Tuttavia, come spesso succede nei problemi riguardanti la circonferenza, conviene valutare soluzioni più "geometriche". In questo caso osserviamo che i due triangoli $\mathsf{AP}_1\mathsf{O}_1$ e $\mathsf{AP}_2\mathsf{O}_2$ sono simili (e retti). Posto allora $|\overline{\mathsf{AB}}| = a$ si deve avere

$$a + r : r = a + 2r + R : R \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Dunque $\mathsf{A} = (4,0)$. A questo punto si può considerare il fascio di rette non verticali per A

$$y - 0 = m(x-4),$$

considerare il sistema tra questo fascio di rette e una delle circonferenze e imporre che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo:

$$\begin{cases} y = mx - 4m \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (1+m^2)x^2 - 2(4m^2+1)x + 16m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 8m^2 = 0.$$

Si trovano i due valori di m e le corrispondenti tangenti seguenti:

$$m = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad y = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-4).$$

Si poteva anche osservare che per l'angolo $\alpha = \mathrm{P_1}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{O_1}$ si ha

$$\sin\alpha = \frac{|\overline{\mathrm{O_1P_1}}|}{|\overline{\mathrm{AO_1}}|} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Il coefficiente angolare della retta $\mathrm{AP_1}$ è allora

$$m = \tan(\pi - \alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

e si ritrovano gli stessi risultati di prima. □

Esercizio 4.25. *Dati la retta* r *di equazione* $2x + y - 1 = 0$ *e il punto* $\mathrm{P}(2,3)$, *trovare il punto* P' *simmetrico di* P *rispetto ad* r.

Risoluzione. Il punto P' cercato appartiene alla perpendicolare s ad r per P:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Detto H il punto di intersezione tra s ed r, il punto P' deve essere tale che H è punto medio di $\overline{\mathrm{PP}'}$. Si trova facilmente

$$\mathrm{H} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right).$$

Si ha poi

$$x_{\mathrm{H}} = \frac{x_{\mathrm{P}} + x_{\mathrm{P}'}}{2} \quad \text{e} \quad y_{\mathrm{H}} = \frac{y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{P}'}}{2},$$

da cui

$$\mathrm{P}' = \left(-\frac{14}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Come al solito si poteva anche procedere per altra via. Per esempio, se d è la distanza tra P e la retta r, il punto P' si può trovare come uno dei due punti di intersezione tra il circolo di centro P e raggio $2d$ e la retta s. □

Esercizio 4.26. *Dati il punto* $\mathrm{P}(1,2)$ *e la parabola di equazione* $y = x^2$, *determinare*

1. *l'equazione del fascio di rette di centro* P,

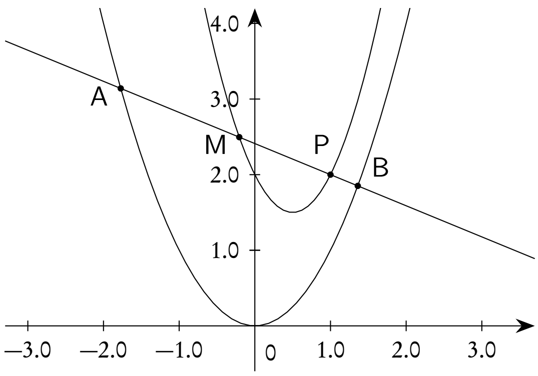


Figura 4.19: *Figura relativa all'esercizio 4.26*

2. *il luogo geometrico $\mathcal{L}$ dei punti medi delle corde determinate dall'intersezione della parabola con le rette del fascio.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.19.

L'equazione del fascio di centro P si trova come combinazione lineare di due rette passanti per P, per esempio le rette $y = 2$ e $x = 1$:

$$\lambda(y-2)+\mu(x-1)=0.$$

In vista della seconda parte del problema, da questo fascio possiamo escludere la retta $x = 1$, in quanto essa ha solo una intersezione con la parabola. Si può dunque supporre $\lambda \neq 0$ e, posto $m = -\mu/\lambda$, riscrivere il fascio nella forma a un solo parametro

$$y-2=m(x-1).$$

Cerchiamo le intersezioni di queste rette con la parabola.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2+mx-m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2-mx+m-2=0.$$

Posto

$$\Delta = m^2-4m+8,$$

si ottengono i due punti

$$\mathsf{A}=\left(\frac{m+\sqrt{\Delta}}{2}, 2-m+\frac{m^2}{2}+\frac{m\sqrt{\Delta}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \mathsf{B}=\left(\frac{m-\sqrt{\Delta}}{2}, 2-m+\frac{m^2}{2}-\frac{m\sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

Il punto medio M di $\overline{\mathsf{AB}}$ ha coordinate

$$\begin{cases} x_{\mathsf{M}} = \dfrac{m}{2} \\[2ex] y_{\mathsf{M}} = 2-m+\dfrac{m^2}{2} \end{cases}.$$

Ricavando m dalla prima equazione, sostituendola nella seconda, e scrivendo (x,y) al posto di $(x_\mathsf{M},y_\mathsf{M})$, si ottiene l'equazione cartesiana del luogo:

$$y = 2x^2 - 2x + 2.$$ □

Esercizio 4.27. *Dati i punti* $\mathsf{A}(1,2)$ *e* $\mathsf{B}(7,5)$, *determinare le coordinate dei punti* P *e* Q *che dividono il segmento* $\overline{\mathsf{AB}}$ *in tre parti uguali.*

Risoluzione. Detto P ilò punto più vicino ad A, si può osservare che deve essere, per il teorema di Talete,

$$x_\mathsf{P} - x_\mathsf{A} = \frac{x_\mathsf{B} - x_\mathsf{A}}{3}, \quad y_\mathsf{P} - y_\mathsf{A} = \frac{y_\mathsf{B} - y_\mathsf{A}}{3}.$$

Si ricava facilmente $\mathsf{P} = (3,3)$. In modo analogo si ha

$$x_\mathsf{Q} - x_\mathsf{A} = 2\frac{x_\mathsf{B} - x_\mathsf{A}}{3}, \quad y_\mathsf{Q} - y_\mathsf{A} = 2\frac{y_\mathsf{B} - y_\mathsf{A}}{3},$$

da cui $\mathsf{Q} = (5,4)$. □

Esercizio 4.28. *Sono dati punti* $\mathsf{A}(-2,-1)$, $\mathsf{B}(-5/2,25/4)$ *e la parabola di equazione* $y = x^2$. *Trovare i punti* P *della parabola tali che il triangolo* ABP *sia rettangolo in* P.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.20.

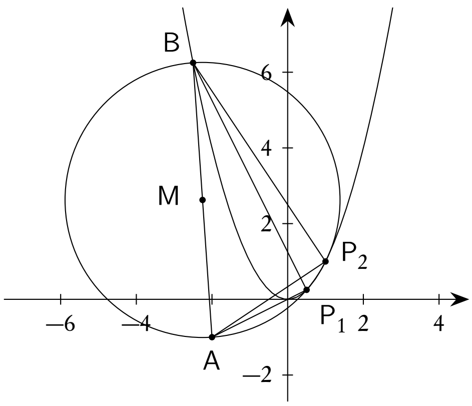


Figura 4.20: *Figura relativa all'esercizio* 4.28

Detto M il punto medio di $\overline{\mathsf{AB}}$, i punti cercati devono stare sulla circonferenza di centro M e raggio $|\overline{\mathsf{MA}}|$. Si ha

$$\mathsf{M} = \left(-\frac{9}{4}, \frac{21}{8}\right) \quad \text{e} \quad r = |\overline{\mathsf{MA}}| = \frac{\sqrt{845}}{8}.$$

La circonferenza di centro M e raggio r ha equazione

$$\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{21}{8}\right)^2 = \frac{845}{64}.$$

Mettendo a sistema questa equazione con la parabola $y = x^2$ si ottiene l'equazione risolvente

$$4x^4 - 17x^2 + 18x - 5 = 0.$$

Questa equazione ha sicuramente la soluzione $-5/2$, in quanto il punto B appartiene sia alla parabola che alla circonferenza. Tuttavia ha anche la soluzione $x = 1$. Dividiamo il polinomio a primo membro per $x - 1$, per esempio con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 4 & 0 & -17 & 18 & -5 \\ 1 & & 4 & 4 & -13 & 5 \\ \hline & 4 & 4 & -13 & 5 & 0 \end{array}$$

Il polinomio quoziente ha ancora la radice 1 e si può quindi ulteriormente dividere per $x - 1$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & 4 & -13 & 5 \\ 1 & & 4 & 8 & -5 \\ \hline & 4 & 8 & -5 & 0 \end{array}$$

Il secondo quoziente è di secondo grado e ha le radici

$$-\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2},$$

confermando che B appartiene sia alla parabola che alla circonferenza. I punti cercati sono allora

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = (1, 1).$$ □

Esercizio 4.29. *Dati i punti* $A(4/3, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-3, 0)$ *e* $D(-5/3, -2)$, *verificare che il quadrilatero* ABCD *è un rettangolo. Inoltre, determinare le equazioni delle rette, parallele al lato* $\overline{AD}$, *che dividono il rettangolo* ABCD *in tre rettangoli aventi la stessa area.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.21.

Risulta

1. AB: $y = (-3/2)x + 2 \parallel$ CD: $y = (-3/2)x - 9/2$;
2. BC: $y = (2/3)x + 2 \parallel$ DA: $y = (2/3)x - 8/9$;
3. $(-3/2)(2/3) = -1 \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow \widehat{B} = 90°$ e $CD \perp DA \Rightarrow \widehat{D} = 90°$
4. per 1) e 2) ABCD è un parallelogramma;
5. per 3) e 4) il parallelogramma ABCD è un rettangolo;

Per trovare le due rette richieste si può ad esempio osservare che esse dividono la diagonale $\overline{AC}$ in tre parti uguali. Questo permette di trovare agevolmente le coordinate dei punti E ed F:

$$E = \left(-\frac{14}{9}, 0\right), \quad F = \left(-\frac{1}{9}, 0\right).$$

Le rette richieste sono allora

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{27} \quad \text{e} \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{28}{27}.$$ □

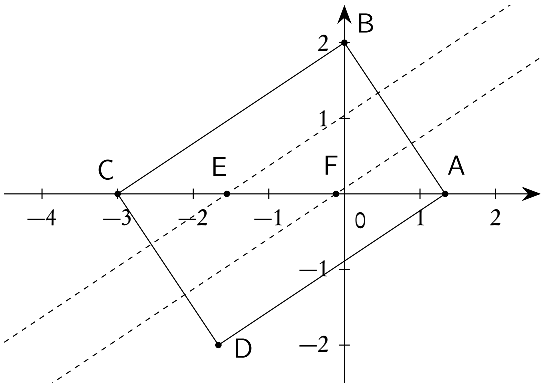


Figura 4.21: *Figura relativa all'esercizio* 4.29

Esercizio 4.30. *Sono date le due parabole di equazione* $y = x^2$ *e* $x = y^2$*. Se* A *e* B *sono i punti di incidenza delle parabole con la loro tangente in comune, determinare l'area del triangolo di vertici* A*,* B *e* C(1, 1)*.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.22.

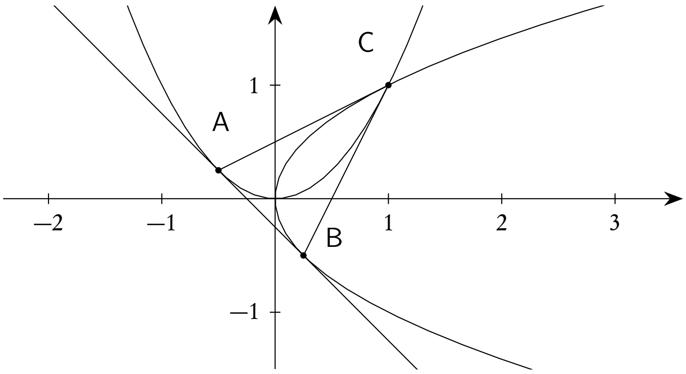


Figura 4.22: *Figura relativa all'esercizio* 4.30

Per determinare la tangente comune alle due parabole si può osservare che, essendo esse simmetriche rispetto alla retta $y = x$, tale deve essere anche la tangente comune, che sarà dunque del tipo $y = -x + q$. Mettendo a sistema con una delle due parabole e imponendo la condizione $\Delta = 0$ sull'equazione risolutiva di secondo grado, si trova facilmente $q = -1/4$. Si può comunque anche cercare una tangente comune del tipo $y = mx + q$. Mettendo a sistema con ciascuna delle due parabole e imponendo la condizione $\Delta = 0$ per ciascuna delle due equazioni risolutive di secondo grado si trova il sistema

$$\begin{cases} m^2 + 4q = 0 \\ 1 - 4mq = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad m = -1 \quad \wedge \quad q = -\frac{1}{4}.$$

Il punto A di tangenza con la prima parabola è soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x - 1/4 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathsf{A} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Per simmetria si avrà
$$\mathsf{B} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$
Dunque
$$|\overline{\mathsf{AB}}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$
Per trovare l'altezza h del triangolo si può procedere semplicemente cercando la distanza tra C e la tangente comune sopra trovata, riscritta in forma implicita: $4x + 4y + 1 = 0$.
$$h = \frac{9}{\sqrt{32}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}.$$
L'area di ABC è
$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\sqrt{2}\frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{27}{32}.$$
□

Esercizio 4.31. *Nel piano cartesiano sono dati i punti* $\mathsf{A}(-1,1)$ *e* $\mathsf{B}(5,3)$ *e la retta* r *di equazione* $x - y = 3$. *Scrivere l'equazione del luogo descritto dal baricentro del triangolo* ABP, *ove* P *è un punto che percorre la retta* r.

Risoluzione. Se (s,t) sono le coordinate del punto P, si ha $t = s - 3$. Le coordinate (x,y) del baricentro del triangolo sono allora
$$\begin{cases} x = \dfrac{s-1+5}{3} = \dfrac{s+4}{3} \\ y = \dfrac{s-3+1+3}{3} = \dfrac{s+1}{3} \end{cases}.$$
Queste sono già le equazioni parametriche del luogo richiesto. Per trovare l'equazione cartesiana basta "eliminare" il parametro s, per esempio ricavandolo dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda. Si ottiene facilmente $y = x - 1$. □

Esercizio 4.32. *Trovare le equazioni delle tangenti comuni alla parabola* $x = -y^2$ *e alla circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.23.

Una delle tangenti comuni è l'asse delle y. Cerchiamo le altre due tangenti che non sono verticali e avranno dunque equazione del tipo $y = mx + q$. Mettendo a sistema questa equazione con la parabola e con la circonferenza si ottengono le due equazioni risolventi
$$m^2x^2 - (2mq+1)x + q^2 = 0 \quad \text{e} \quad (m^2+1)x^2 + 2(mq-1)x + q^2 = 0.$$
Queste due equazioni devono avere discriminate nullo. Si ottiene il sistema
$$\begin{cases} 4mq + 1 = 0 \\ q^2 + 2mq - 1 = 0 \end{cases},$$
che ha le soluzioni
$$q = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad m = \mp\frac{\sqrt{6}}{12}.$$
Si noti che, come era prevedibile, le due rette sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. □

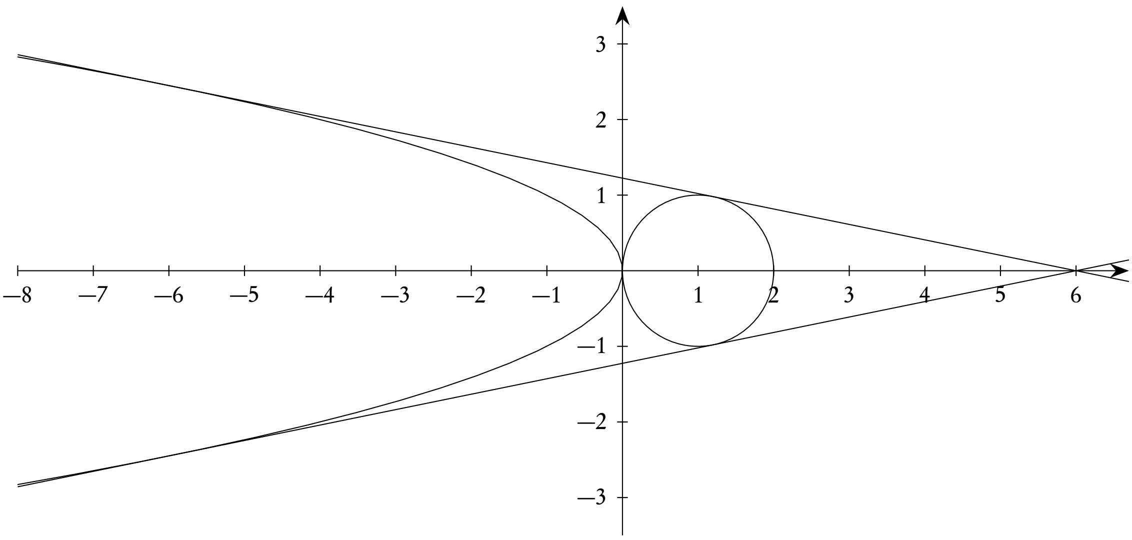


Figura 4.23: *Figura relativa all'esercizio 4.32*

Esercizio 4.33. *Sul segmento* $\overline{\mathsf{AB}}$, *con* $\mathsf{A}(-2,3)$ *e* $\mathsf{B}(1,4)$, *determinare le coordinate di un punto* P *tale che* $|\overline{\mathsf{AP}}| = (3/5)\,|\overline{\mathsf{PB}}|$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.24.

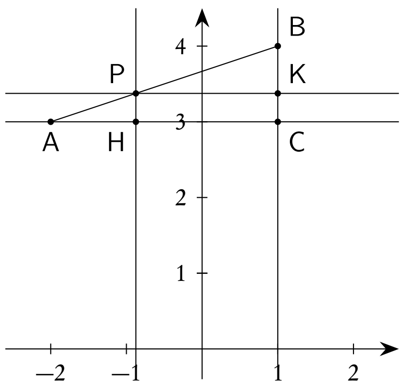


Figura 4.24: *Figura relativa all'esercizio 4.33*

Si noti che, se $|\overline{\mathsf{AP}}| = (3/5)\,|\overline{\mathsf{PB}}|$, anche $|\overline{\mathsf{AH}}| = (3/5)\,|\overline{\mathsf{HC}}|$ e $|\overline{\mathsf{CK}}| = (3/5)\,|\overline{\mathsf{KB}}|$. Quindi

$$|\overline{\mathsf{HC}}| + \frac{3}{5}|\overline{\mathsf{HC}}| = 3 \quad \text{e} \quad |\overline{\mathsf{KB}}| + \frac{3}{5}|\overline{\mathsf{KB}}| = 1,$$

ovvero

$$|\overline{\mathsf{HC}}| = \frac{15}{8} \quad \text{e} \quad |\overline{\mathsf{KB}}| = \frac{5}{8}.$$

Se ne deduce

$$x_{\mathsf{P}} = x_{\mathsf{H}} = 1 - \frac{15}{8} = -\frac{7}{8} \quad \text{e} \quad y_{\mathsf{P}} = y_{\mathsf{K}} = 4 - \frac{5}{8} = \frac{27}{8}.$$

□

Esercizio 4.34. *Nel piano cartesiano, per ogni* $t \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, *è dato il punto*

$$\mathsf{Q}(t)\left(t, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right).$$

Dette $\mathsf{Q}_x(t)$ *e* $\mathsf{Q}_y(t)$ *le proiezioni ortogonali di* $\mathsf{Q}(t)$ *sugli assi, sia* $\mathsf{P}(t)$ *la proiezione ortogonale dell'origine* $\mathsf{O}(0,0)$ *sulla retta passante per* $\mathsf{Q}_x(t)$ *e* $\mathsf{Q}_y(t)$*. Verificare che* $\mathsf{P}(t)$ *appartiene a una circonferenza di cui si chiede l'equazione.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.25

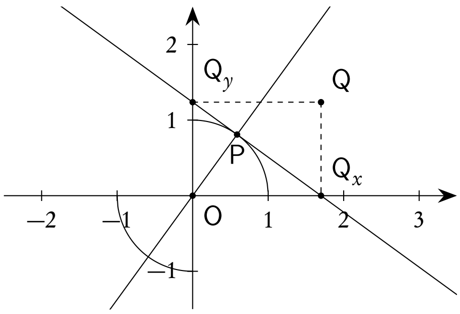


Figura 4.25: *Figura relativa all'esercizio* 4.34

Osserviamo che eve essere $t < -1 \vee t > 1$, dunque la retta per Q_x e Q_y non può essere verticale. Il suo coefficiente angolare è

$$\frac{\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}} - 0}{0 - t} = -\frac{1}{\sqrt{t^2-1}},$$

e la sua equazione è

$$y = -\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}(x - t).$$

La perpendicolare per O ha invece equazione

$$y = \sqrt{t^2-1}\, x.$$

Il sistema tra le due equazioni fornisce le coordinate del punto P di intersezione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t} \end{cases}.$$

Calcolando $x^2 + y^2$ si trova facilmente $x^2 + y^2 = 1$: il punto P appartiene[2] alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Anche se il testo non lo chiedeva esplicitamente si può ricavare l'equazione cartesiana

[2]Attenzione: il luogo *non* esaurisce tutta questa circonferenza!

del luogo. Osserviamo preliminarmente che, dalle condizioni $t < -1 \lor t > 1$ segue $-1 < x < 0 \lor 0 < x < 1$ e analogamente $-1 < y < 0 \lor 0 < y < 1$. Ricavando la t nella prima equazione e sostituendola nella seconda si ottiene, dopo semplificazione,

$$y = x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{x}{|x|}\sqrt{1 - x^2},$$

da cui si deduce che il luogo è costituito dai due quarti della predetta circonferenza, situati nel primo e terzo quadrante, privati degli estremi. □

Esercizio 4.35. *Determinare le equazioni delle rette passanti per il punto* $\mathsf{A}(1,1)$ *che, con gli assi coordinati* x, y, *individuano nel primo quadrante triangoli di area* $9/4$. *Verificato che tali rette hanno equazione*

$$y = -2x + 3 \quad e \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

determinare i punti della retta p *di equazione*

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

che sono equidistanti dalle altre due rette.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.26.

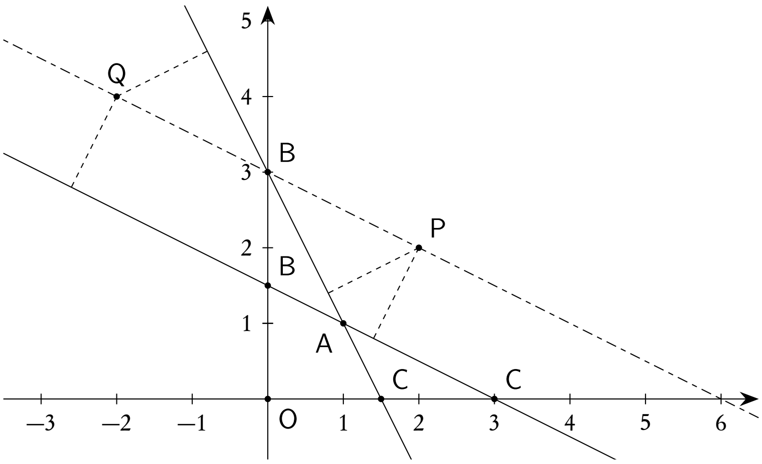


Figura 4.26: *Figura relativa all'esercizio 4.35*

Osserviamo che le rette richieste per A devono avere coefficiente angolare $m < 0$ ed equazione

$$y - 1 = m(x - 1).$$

I punti B e C di intersezione con l'asse delle ordinate avranno coordinate

$$\mathsf{B} = (0, -m + 1) \quad \mathsf{C} = \left(0, \frac{m-1}{m}\right).$$

Si dovrà dunque avere

$$\frac{1}{2}(1-m)\left(\frac{m-1}{m}\right)=\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad m=-2 \vee m=-\frac{1}{2}.$$

Si trovano ora facilmente le due rette

$$\mathsf{r}\colon y=-2x+3 \quad \text{e} \quad \mathsf{s}\colon y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

ovvero

$$\mathsf{r}\colon 2x+y-3=0 \quad \text{e} \quad \mathsf{s}\colon x+2y-3=0.$$

citate nel testo.

Detto (s,t) un generico punto della retta p si deve avere $s=-2t+6$ e

$$\frac{|2(-2t+6)+t-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|(-2t+6)+2t-3|}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad |-3t+9|=3 \quad \Rightarrow \quad t=2 \vee t=4.$$

I punti cercati sono dunque $\mathsf{P}=(2,2)$ e $\mathsf{Q}=(-2,4)$. □

Esercizio 4.36. *Nel piano cartesiano* $\mathsf{O}xy$ *sono assegnate le circonferenze di equazioni:*

$$x^2+y^2-4x-4y+4=0, \quad (x+1)^2+y^2=r^2.$$

Determinare r *in modo che una tangente comune alle due circonferenze sia parallela alla retta di equazione* $y-x=0$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.27.

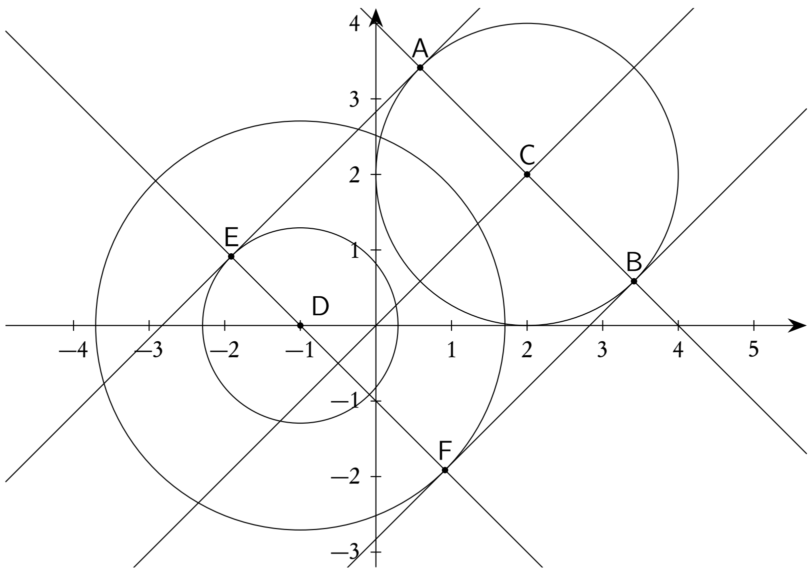


Figura 4.27: *Figura relativa all'esercizio* 4.36

La prima circonferenza ha centro in $C(2,2)$ e raggio $r=2$, la seconda circonferenza ha centro in $D(-1,0)$ e raggio r variabile. Le rette parallele alla $y-x=0$ e tangenti alla prima circonferenza devono passare per i punti A e B di intersezione tra la stessa circonferenza e la perpendicolare per C alla retta $y-x=0$. Si trova facilmente

$$\mathsf{A}=(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}),\quad \mathsf{B}=(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}).$$

Le tangenti in A e B hanno allora equazione

$$x-y+2\sqrt{2}=0 \quad \text{e} \quad x-y-2\sqrt{2}=0.$$

Si avranno due circonferenze di centro D che soddisfano la condizione richiesta e che avranno per raggio la distanza di D dalle due tangenti trovate. Si trova facilmente

$$r_1=\frac{4-\sqrt{2}}{2},\ r_2=\frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

□

Esercizio 4.37. *Nel piano sono dati i punti* $\mathsf{A}(1,1)$ *e* $\mathsf{B}(-1,2)$*. Dopo avere verificato che il luogo dei punti* P *tali che* $|\overline{\mathsf{AP}}|^2=(1/2)|\overline{\mathsf{BP}}|^2$ *è la circonferenza di equazione* $x^2+y^2-6x-1=0$*, determinare l'area dell'ottagono circoscritto alla circonferenza.*

Risoluzione. Detto $P(x,y)$ il generico punto del luogo, si ha

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}.$$

Quadrando (ambo i membri sono positivi!) e semplificando si ottiene proprio la circonferenza data. Si noti che questo prova sia che tutti i punti del luogo appartengono alla circonferenza, che, viceversa, ogni punto della circonferenza, appartiene al luogo: l'elevazione al quadrato non ha introdotto soluzioni estranee. Riscritta l'equazione della circonferenza nella forma

$$(x-3)^2+y^2=10,$$

si vede che essa ha centro $(3,0)$ e raggio $r=\sqrt{10}$. Per rispondere alla seconda parte del problema dobbiamo trovare l'area dell'ottagono regolare circoscritto a una circonferenza di raggio $\sqrt{10}$.

Con riferimento alla figura 4.28, si ha

$$|\overline{\mathsf{OH}}|=\sqrt{10},\quad \mathsf{B\hat{O}H}=\frac{\pi}{8},\quad |\overline{\mathsf{BH}}|=|\overline{\mathsf{OH}}|\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{10}(\sqrt{2}-1).$$

Dunque l'area $\mathcal{A}$ dell'ottagono è data da

$$\mathcal{A}=8\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\big(\sqrt{2}-1\big)=80\big(\sqrt{2}-1\big).$$

□

Esercizio 4.38. *Nel piano cartesiano* $\mathsf{O}xy$ *sono dati la parabola* $y=x^2$ *e il fascio di rette di equazione* $y=mx+2-m$.

1. *Verificare che per ogni* $m\in\mathbb{R}$ *le rette del fascio incontrano la parabola in due punti distinti* $\mathsf{A}(x_1,y_1)$ *e* $\mathsf{B}(x_2,y_2)$.

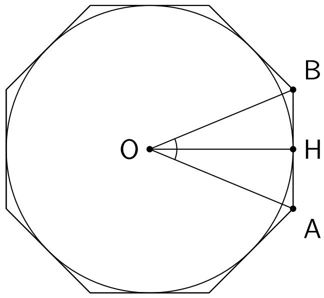


Figura 4.28: *Ottagono regolare circoscritto ad un cerchio*

2. *Se* A *e* B *sono i punti del quesito* 1*, determinare i valori di* $m \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\, x_1^2 x_2^2 - 2\,.$$

Per questi valori di m*, determinare le coordinate di* A *e* B.

Risoluzione. Riscritta l'equazione del fascio nella forma

$$y - 2 = m(x - 1),$$

si vede che si tratta del fascio di rette non verticali[3] per $\mathsf{P}(1,2)$. Messa questa equazione a sistema con la parabola si trova l'equazione risolvente

$$x^2 - mx - 2 + m = 0,$$

che ha come discriminante

$$m^2 - 4m + 8$$

che risulta essere positivo per ogni valore di m: ci saranno dunque sempre due intersezioni distinte. La cosa era evidente anche geometricamente, in quanto il punto P risulta "interno" alla parabola, e la retta verticale è esclusa da questo fascio.

Riconsiderata l'equazione risolvente $x^2 - mx - 2 + m = 0$, si ricava che

$$x_1 + x_2 == -\frac{b}{a} = m, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 2.$$

La condizione su x_1 e x_2 si scrive allora, dopo semplificazione,

$$m^2 - 6m = 0,$$

che ha come soluzioni $m = 0$ e $m = 6$. Per questi valori di m si trovano i seguenti valori per le coordinate di A e B.

$$m = 0,\ \mathsf{A}\big(-\sqrt{2}, 2\big),\ \mathsf{B}\big(\sqrt{2}, 2\big); \quad m = 6,\ \mathsf{A}\big(3 + \sqrt{5}, 14 + 6\sqrt{5}\big),\ \mathsf{B}\big(3 - \sqrt{5}, 14 - 6\sqrt{5}\big). \qquad \square$$

[3]Non si tratta dunque in realtà di un intero fascio proprio di rette, rimanendo esclusa una retta. Tuttavia usualmente si parla lo stesso di fascio.

Esercizio 4.39. *Siano dati, nel piano cartesiano, i punti* $\mathsf{A}(-2,-5)$, $\mathsf{B}(-5,-2)$ *e* $\mathsf{C}(-2,-1)$. *Determinare l'equazione dell'asse del segmento* $\overline{\mathsf{AB}}$ *e il punto* D *tale che il quadrilatero* ABCD *sia un trapezio isoscele.*

Risoluzione. Il punto medio M di $|\overline{\mathsf{AB}}|$ ha coordinate

$$\mathsf{M} = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

La retta AB ha coefficiente angolare -1, dunque l'asse di $\overline{\mathsf{AB}}$ ha coefficiente angolare 1 e, dovendo passare per M, sarà proprio la bisettrice $y = x$. Il punto D è semplicemente il simmetrico di C rispetto alla bisettrice: $\mathsf{D} = (-1,-2)$. □

Esercizio 4.40. *Determinare l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse* y, *che ha il vertice nel punto* $\mathsf{V}(-1/2, -13/4)$ *ed è tangente alla retta di equazione* $y = x - 3$.

Risoluzione. Se $y = ax^2 + bx + c$ è l'equazione di una generica parabola del tipo richiesto, si deve avere

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2} & \text{(ascissa del vertice)} \\ -\dfrac{13}{4} = \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}b + c & \text{(passaggio per il vertice)} \end{cases}.$$

Considerato poi il sistema tra l'equazione della parabola e quella della retta data

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 3 \end{cases},$$

si deve imporre la condizione che il discriminante della equazione risolutiva sia nullo:

$$ax^2 + (b-1)x + c + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (b-1)^2 - 4a(c+3) = 0.$$

Il sistema delle tre equazioni in a, b, c è di facile risoluzione e si ottiene la parabola

$$y = x^2 + x - 3.$$ □

Esercizio 4.41. *Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano la cui distanza dal punto* A *di coordinate* $(-1,0)$ *è tre volte la distanza dalla retta di equazione* $y = -x + 2$.

Risoluzione. Detto $\mathsf{P}(s,t)$ il generico punto del luogo e detta H la proiezione di P sulla retta data, che conviene riscrivere nella forma $x + y - 2 = 0$, si deve avere

$$|\overline{\mathsf{PA}}| = 3|\overline{\mathsf{PH}}| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(s+1)^2 + t^2} = 3\,\frac{|s+t-2|}{\sqrt{2}}.$$

Poiché si tratta di un'uguaglianza tra numeri positivi, si possono elevare al quadrato[4] ambo i membri e si ottiene, dopo semplificazione,

$$7s^2 + 7t^2 + 18st - 40s - 36t + 34 = 0,$$

[4] Si ricordi che

$$(|t|)^2 = t^2.$$

ovvero, usando (x, y) al posto di (s, t)

$$7x^2+7y^2+18xy-40x-36y+34=0.$$

Si tratta di una conica con assi di simmetria non paralleli agli assi coordinati. □

Esercizio 4.42. *Un quadrato, che non ha punti in comune con gli assi coordinati, ha lato $l=2\sqrt{2}$, un vertice nel punto $\mathsf{A}(9/4, 1/4)$ e due lati paralleli alla retta r di equazione $x+y+2=0$. Determinare gli altri tre vertici.*

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.29.

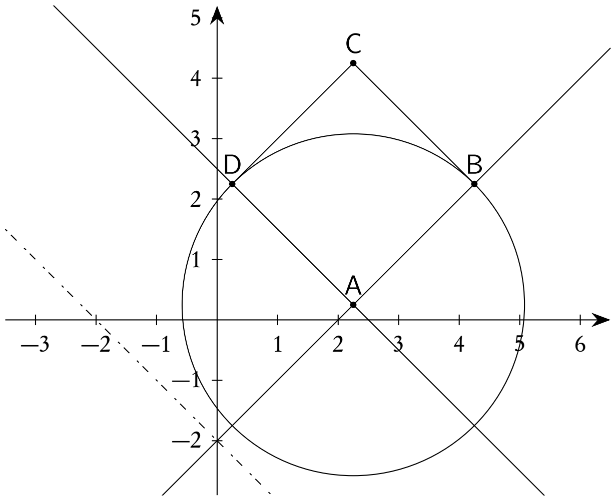


Figura 4.29: *Figura relativa all'esercizio 4.42*

I vertici B e D staranno sull'intersezione tra la circonferenza di centro A e raggio $2\sqrt{2}$ e le rette per A rispettivamente parallela e perpendicolare alla retta r.

$$\mathsf{D}: \begin{cases} \left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=8 \\ y-\dfrac{1}{4}=-\left(x-\dfrac{9}{4}\right) \end{cases}, \quad \mathsf{B}: \begin{cases} \left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=8 \\ y-\dfrac{1}{4}=x-\dfrac{9}{4} \end{cases}.$$

Si trova

$$\mathsf{B}\left(\frac{17}{4}, \frac{9}{4}\right) \quad \text{e} \quad \mathsf{D}\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

In realtà, noto D, B si poteva trovare anche per simmetria di D rispetto alla retta verticale per A. Il punto C si può trovare per simmetria di A rispetto alla retta (orizzontale) BD. Si trova facilmente

$$\mathsf{C}\left(\frac{9}{4}, \frac{17}{4}\right).$$

□

Esercizio 4.43. *Sono dati i punti* A$(-1,2)$ *e* B$(3,0)$ *e la parabola* $\mathcal{P}$ *di equazione* $y = x^2 + 1$. *Determinare il luogo* $\mathcal{L}$ *dei baricentri del triangolo che ha un vertice sulla parabola e gli altri vertici nei punti* A *e* B. *Determinare inoltre i punti di intersezione tra* $\mathcal{P}$ *ed* $\mathcal{L}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.30.

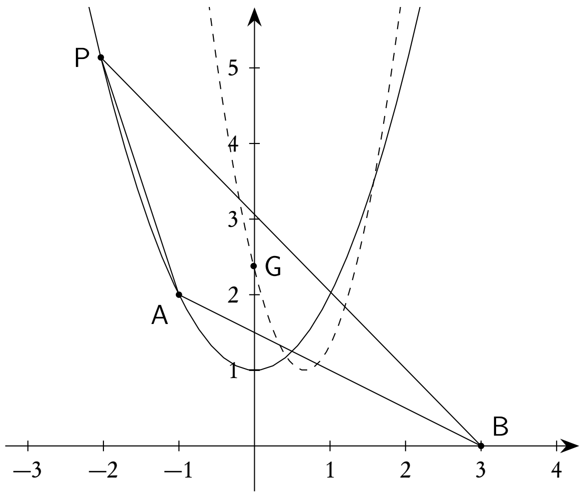


Figura 4.30: *Figura relativa all'esercizio* 4.43

Detto P(s, s^2+1) il generico punto della parabola, con P $\neq$ A, ovvero $s \neq -1$, il baricentro G del triangolo ABP ha coordinate

$$\begin{cases} x = \dfrac{3-1+s}{3} \\ y = \dfrac{2+s^2+1}{3} \end{cases}.$$

Ricavando s dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si trova l'equazione cartesiana del luogo

$$y = 3x^2 - 4x + \frac{7}{3}, \quad x \neq \frac{1}{3}.$$

I punti di intersezione tra le due parabole sono poi

$$\left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}, \frac{7 \pm 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

□

Esercizio 4.44. *Assegnati nel piano i punti* A$(-1,0)$, B$(5,0)$ *e* C$(2,4)$, *determinare il centro, il raggio e l'equazione della circonferenza tangente al lato* $\overline{\text{AB}}$ *e ai prolungamenti dei lati* $\overline{\text{CA}}$ *e* $\overline{\text{CB}}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.31.

La circonferenza richiesta è una delle tre circonferenze ex-iscritte al triangolo ABC. Il suo centro si trova nell'intersezione, per esempio, della bisettrice dell'angolo interno in C e dei due angoli esterni in

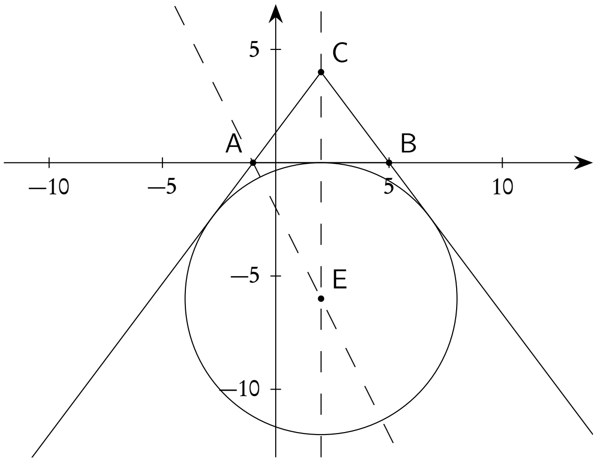


Figura 4.31: *Figura relativa all'esercizio* 4.44

A. La prima bisettrice ha banalmente equazione $x = 2$. Per trovare la seconda basta cercare il luogo dei punti del piano equidistanti dalle rette AB e AC.

$$m_{\mathsf{AC}} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{AC}\colon y = \frac{4}{3}(x+1), \quad \text{ovvero} \quad 4x - 3y + 4 = 0.$$

Per le bisettrici si deve dunque avere

$$\frac{|4x - 3y + 4|}{5} = |y| \quad \text{ovvero} \quad x - 2y + 1 = 0 \lor 2x + y + 2 = 0.$$

La prima delle due rette ottenute è la bisettrice dell'angolo interno, la seconda[5] è quella (che a noi serve) dell'angolo esterno. Il centro della circonferenza si trova ora facilmente: $E = (2, -6)$. Se ne deduce che il raggio è 6 e che la circonferenza ha equazione

$$(x-2)^2 + (y+6)^2 = 36.$$

□

Esercizio 4.45. *Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti* A(2,3)*,* B(5,0) *e* C(1,1)*.*

Risoluzione. Ci sono vari modi per risolvere questo problema. Il più elementare è quello di scrivere le condizioni di passaggio di una generica circonferenza per i tre punti dati: si otterrà un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite.

$$\begin{cases} 13 + 2a + 3b + c = 0 \\ 25 + 5a + c = 0 \\ 2 + a + b + c = 0 \end{cases}.$$

Si ottiene facilmente

$$a = -\frac{19}{3}, \quad b = -\frac{7}{3}, \quad c = \frac{20}{3}.$$

[5] Si osservi che, come deve essere, le due bisettrici sono tra di loro perpendicolari.

Tuttavia, come spesso succede nel caso della circonferenza, è più “elegante” determinare il centro come intersezione tra gli assi di due dei tre segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. Successivamente si trova il raggio come distanza tra questo centro e uno dei tre punti A, B, C. Possiamo trovare l'equazione degli assi come luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento:

$$\begin{aligned}
&\text{asse di AB: } \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}, \quad \Rightarrow \quad x-y-2=0\\
&\text{asse di AC: } \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}, \quad \Rightarrow \quad 2x+4y-11=0.
\end{aligned}$$

L'intersezione tra le due rette fornisce il centro D:

$$D=\left(\frac{19}{6},\frac{7}{6}\right).$$

Per il raggio si ha, per esempio,

$$r=|\overline{DC}|=\sqrt{\left(\frac{19}{6}-1\right)^2+\left(\frac{7}{6}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{36}}.$$

Si ottiene naturalmente la stessa equazione di prima. □

Esercizio 4.46. *Date le curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ rispettivamente di equazioni*

$$3x^2+2y^2-5=0 \quad e \quad y=x^2,$$

trovare l'area del poligono che ha per vertici i punti di incontro delle 2 curve e i punti di intersezione della prima con l'asse x.

Risoluzione. Anche se non è richiesto dal testo, osserviamo che la prima curva è una ellisse di centro l'origine, assi coincidenti con gli assi coordinati e semiassi orizzontale e verticale, rispettivamente

$$\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

La seconda curva è invece una parabola. Si faccia riferimento alla figura 4.32.

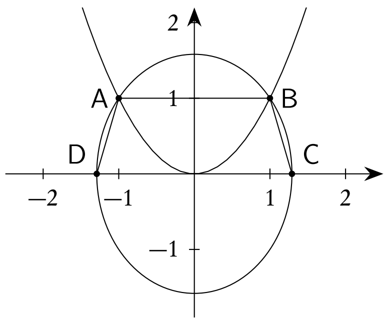


Figura 4.32: *Figura relativa all'esercizio* 4.46

Mettiamo a sistema le due equazioni per trovare le coordinate dei punti di intersezione.

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2-5=0 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2y^2+3y-5=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{5}{2} \vee y=1.$$

Il primo valore non è accettabile, dal secondo si ottiene $x=\pm 1$. Le intersezioni della prima curva con l'asse x sono invece

$$\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},0\right) \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}},0\right).$$

La figura è un trapezio isoscele di altezza 1, base minore 2 e base maggiore $2\sqrt{5/3}$. L'area sarà perciò

$$\sqrt{\frac{5}{3}}+1.$$

□

Esercizio 4.47.

Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(0,1)$ e raggio $r=1$. Se A, diverso dall'origine O, e B sono, rispettivamente, i punti di intersezione della retta $y=kx$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e la retta $y=2$, determinare il funzione di $k\in\mathbb{R}$ il luogo geometrico dei punti $P(x_B,y_A)$ e calcolare k in modo che $x_B y_A \geq \sqrt{3}$. Passare infine all'equazione cartesiana del luogo richiesto.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.33, dove abbiamo rappresentato anche il grafico del luogo cercato, anche se non richiesto dal testo.

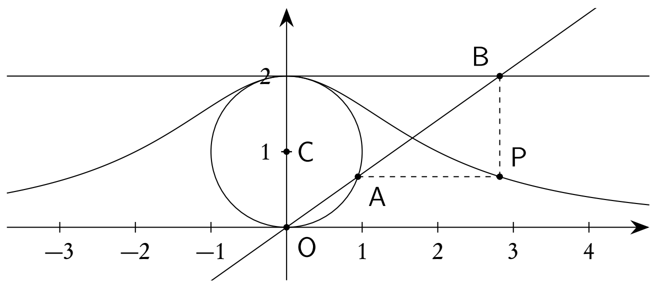


Figura 4.33: *Figura relativa all'esercizio* 4.47

L'equazione della circonferenza è

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

Per trovare le coordinate di A basta fare sistema tra l'equazione della retta $y=kx$ e quella della circonferenza; deve essere $k\neq 0$, altrimenti l'unica intersezione è l'origine. Si trova facilmente

$$\begin{cases} x=\dfrac{2k}{1+k^2} \\ y=\dfrac{2k^2}{1+k^2} \end{cases}.$$

Stesso discorso per trovare le coordinate di B, dove si deve fare sistema tra $y = kx$ e $y = 2$. Si trova

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{k} \\ y = 2 \end{cases}.$$

Le coordinate di P sono dunque

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{k} \\ y = \dfrac{2k^2}{1+k^2} \end{cases}.$$

Queste due equazioni forniscono le equazioni parametriche del luogo cercato. Per trovare l'equazione cartesiana basta ricavare k dalla prima equazione e sostituirla nella seconda. Si ottiene

$$y = \frac{8}{x^2+4}.$$

La disequazione proposta si scrive

$$\frac{2}{k}\,\frac{2k^2}{1+k^2} \geq \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\,k^2 - 4k + \sqrt{3} \leq 0,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il denominatore è sempre positivo. Si ottiene facilmente

$$k \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right].$$

□

Esercizio 4.48. *Trovare la relazione tra i parametri b e c in modo che la parabola $\mathcal{C}_1$ avente equazione $y = (1/2)\,x^2 + bx + c$ passi per il vertice* V *della parabola $\mathcal{C}_2$ di equazione $y = x^2 + 2x$. Indicato con* P *l'altro punto comune alle due parabole, scrivere l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto medio* M *del segmento* $\overline{\mathsf{VP}}$.

Risoluzione. Il vertice della seconda parabola è $\mathsf{V} = (-1, -1)$. La condizione di passaggio della prima parabola per V fornisce la condizione

$$-1 = \frac{1}{2} - b + c \quad \Rightarrow \quad c = b - \frac{3}{2}.$$

Si ha poi, per trovare le intersezioni tra le due parabole,

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 + bx + b - \dfrac{3}{2} \\ y = x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x(2-b) - 2b + 3 = 0 \Rightarrow x = b - 2 \pm (b-1) = \begin{cases} 2b-3 \\ -1 \end{cases}.$$

Le coordinate di P sono dunque, in funzione di b,

$$\mathsf{P} = (2b-3, 4b^2 - 8b + 3).$$

Il punto medio M di $\overline{\mathsf{VP}}$ ha coordinate

$$\begin{cases} x = b - 2 \\ y = 2b^2 - 4b + 1 \end{cases}.$$

Queste equazioni forniscono le equazioni parametriche del luogo. Ricavando b dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene

$$y = 2x^2 + 4x + 1.$$

□

Esercizio 4.49. *Determinare $r > 0$ in modo che l'area del quadrilatero, i cui vertici sono i punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione*

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 + (xy - x^2)^2 = 0,$$

sia uguale a 4.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.34, dove abbiamo rappresentato la situazione per $r = 1$.

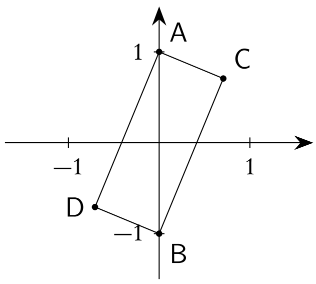


Figura 4.34: *Figura relativa all'esercizio* 4.49

La somma di due quadrati può essere nulla solo se ciascuno dei due addendi lo è. Deve dunque essere

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - r^2 = 0 \\ xy - x^2 = 0 \end{cases}.$$

Incidentalmente osserviamo che la prima equazione rappresenta una circonferenza di centro l'origine e raggio 1, la seconda equazione una coppia di rette, precisamente le rette $x = 0$ e $y = x$. Si ottengono le quattro soluzioni del sistema

$$\mathsf{A} = (0, r), \quad \mathsf{B} = (0, -r), \quad \mathsf{C} = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathsf{D} = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right).$$

Ragioni di simmetria rendono evidente che il quadrilatero è un parallelogramma. Inoltre si ha

$$m\mathsf{AC} = 1 - \sqrt{2}, \quad m\mathsf{BC} = 1 + \sqrt{2}.$$

Poiché

$$m\mathsf{AC} \cdot m\mathsf{BC} = -1,$$

si tratta di un rettangolo. L'area è dunque

$$|\overline{AC}|\cdot|\overline{BC}| = \sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}-r\right)^2}\sqrt{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}+r\right)^2} = r^2\sqrt{2}.$$

Si ha allora

$$r=\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

□

Esercizio 4.50. *Data la circonferenza* $x^2+y^2-2x=0$*, trovare le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto* $A(0,2)$.

Risoluzione. La circonferenza data si può riscrivere nella forma

$$(x-1)^2+y^2=1,$$

dunque ha centro nel punto $C(1,0)$ e raggio 1. Delle due tangenti condotte da A una è l'asse y, l'altra è del tipo $y-2=m(x-0)$, ovvero $y=mx+2$. Mettendo a sistema con la circonferenza si ottiene

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y=mx+2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad (1+m^2)x^2+2x(2m-1)+4=0.$$

La condizione $\Delta=0$ fornisce facilmente $m=-3/4$ e la retta

$$y=-\frac{3}{4}x+2.$$

La determinazione delle rette tangenti a una circonferenza da un punto esterno si può fare però, molto più elegantemente, osservando che, detto M il punto medio di $\overline{AC}$, i punti di tangenza sono le intersezioni della circonferenza data con la circonferenza di centro M e passante per A. Si veda la figura 4.35.

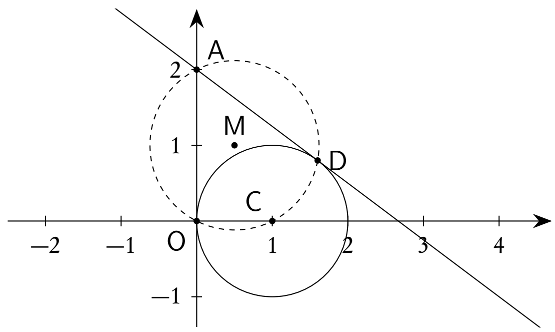


Figura 4.35: *Tangenti ad una circonferenza da un punto esterno* (esercizio 4.50)

La circonferenza di centro M e raggio $|\overline{MA}|$ ha equazione

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4} \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-x-2y=0.$$

Cerchiamo le intersezioni tra le due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ x^2+y^2-x-2y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{O}=(0,0) \quad \text{e} \quad \mathsf{D}=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right).$$

La retta per A e D è la stessa trovata sopra. □

Esercizio 4.51. *La retta* r *passa per* A(0,3) *e interseca l'asse* x *nel punto* P$(p,0)$ *in modo che la semiretta* PA *forma un angolo di* $2\pi/3$ *col semiasse positivo delle ascisse. Scrivere l'equazione di* r *e le coordinate del punto* P.

Risoluzione. Dai dati del problema si evince che il coefficiente angolare della retta r è

$$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

La retta ha allora equazione

$$\mathsf{r}\colon y=-\sqrt{3}x+3,$$

e il punto P coordinate

$$\mathsf{P}=(\sqrt{3},0).$$ □

Esercizio 4.52. *Sia data la parabola* $\mathcal{P}$ *di equazione* $y=x^2+2x+1$. *Determinare e disegnare il luogo* $\mathcal{L}$ *dei punti medi delle corde individuate dalla parabola con le rette del fascio di centro l'origine. Infine trovare i punti di intersezione tra* $\mathcal{L}$ *e* $\mathcal{P}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.36.

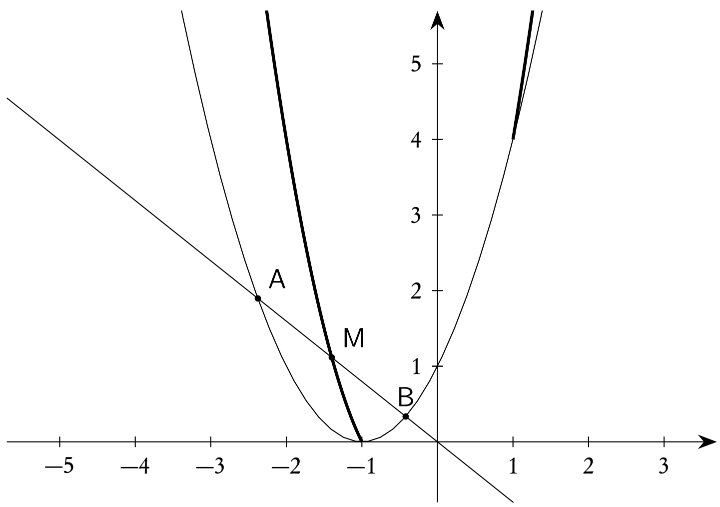


Figura 4.36: *Figura relativa all'esercizio* 4.52

Osserviamo innanzitutto che possiamo escludere dal fascio di centro l'origine la retta verticale, che incontra la parabola in un solo punto. Il fascio potrà dunque essere rappresentato nella forma $y=mx$.

Troviamo le intersezioni con la parabola.

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2-m)x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{m-2 \pm \sqrt{m^2-4m}}{2}, \; m \leq 0 \vee m \geq 4.$$

Dunque i punti di intersezione sono

$$\left(\frac{m-2 \pm \sqrt{m^2-4m}}{2}, m\frac{m-2 \pm \sqrt{m^2-4m}}{2} \right)$$

e il punto medio della corda individuata dai due punti di intersezione ha coordinate

$$\left(\frac{m-2}{2}, m\frac{m-2}{2} \right), \quad m \leq 0 \vee m \geq 4.$$

Ricavando m dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene l'equazione cartesiana del luogo

$$y = 2x^2 + 2x \quad \text{con} \quad x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[:$$

Si tratta di due rami di parabola. I punti di intersezione tra le due curve sono $(-1, 0)$ e $(1, 4)$.

Si noti che per $m = 0$ e per $m = 4$ la retta del fascio è tangente alla parabola e i due punti di intersezioni coincidono nel punto di tangenza: ovviamente anche il punto M coinciderà con il punto di tangenza: si ottengono proprio i due punti di intersezione tra la parabola data e il luogo richiesto. □

Esercizio 4.53. *Siano dati la retta* r *di equazione* $x - y - 1 = 0$ *e il punto* $A(2, 3)$. *Se* A' *è il simmetrico di* A *rispetto a* r, *determinare l'area del triangolo* OAA'.

Risoluzione. Il punto A' appartiene alla retta s per A ed ortogonale ad r, retta che ha equazione

$$y - 3 = -1(x - 2), \quad \text{ovvero} \quad x + y - 5 = 0.$$

L'altezza del triangolo è la distanza di O da s, mentre la base del triangolo è il doppio della distanza di A da r.

$$d(O, s) = \frac{|-5|}{\sqrt{2}}, \quad d(A, r) = \frac{|2-3-1|}{\sqrt{2}}.$$

L'area del triangolo è allora

$$\mathcal{A} = \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2}} = 5.$$

□

Esercizio 4.54. *Nel piano si consideri il punto* $P(3, 1)$. *Determinare le equazioni delle rette* r *del fascio di centro l'origine degli assi tali che, detta* H *la proiezione ortogonale di* P *su* r, *l'area del triangolo* OPH *sia pari a* 2.

Risoluzione. Si vede subito che la retta verticale per l'origine non soddisfa le condizioni del problema, in quanto in tal caso l'area del triangolo OPH è $3/2$. Possiamo dunque limitarci a considerare il fascio di rette non verticali per l'origine: $y = mx$ ovvero $mx - y = 0$. Possiamo anche supporre $m \neq 0$: nemmeno la retta orizzontale per l'origine soddisfa le condizioni del problema. La retta per P ortogonale alla retta $y = mx$ ha equazione

$$y-1=-\frac{1}{m}(x-3) \quad \text{ovvero} \quad x+my-m-3=0.$$

I segmenti $|\overline{PH}|$ e $|\overline{OH}|$ sono, nell'ordine, le distanze di P ed O dalle due rette considerate.

$$|\overline{PH}|=\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}, \quad |\overline{OH}|=\frac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

L'area del triangolo è $(1/2)|\overline{PH}|\cdot|\overline{OH}|$. Si deve avere dunque

$$\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|(3m-1)(-m-3)|}{m^2+1}=4.$$

Dunque

$$-3m^2-8m+3=\pm(4m^2+4).$$

Si trova facilmente

$$m=\pm1,\ m=7,\ m=-\frac{1}{7}. \qquad \square$$

Esercizio 4.55. *Sia data la parabola di equazione $y = x^2$. Determinare l'equazione della circonferenza con centro sull'asse y, tangente alla parabola e tale che la corda determinata dai due punti di tangenza abbia lunghezza* 4.

Risoluzione. Se la corda individuata dai punti di tangenza, che indichiamo con A e B, deve essere lunga 4, i punti di tangenza devono avere ascissa 2 e −2. Dovendo appartenere alla parabola si avrà $A=(2,4)$ e $B=(-2,4)$. La tangente alla parabola in A ha coefficiente angolare $m=2ax_A+b=4$; essa è anche tangente alla circonferenza. La normale avrà coefficiente angolare $m=-1/4$ e quindi equazione

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2) \quad \text{ovvero} \quad x+4y-18=0.$$

Il centro C della circonferenza si troverà nell'intersezione tra questa retta e l'asse y. Si trova

$$C=\left(0,\frac{9}{2}\right)$$

Il raggio r è la lunghezza del segmento $\overline{CA}$:

$$|\overline{CA}|=\sqrt{(0-2)^2+\left(\frac{9}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{4}}.$$

L'equazione della circonferenza è allora:

$$x^2+\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{17}{4} \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-9y+16=0. \qquad \square$$

Esercizio 4.56. *Data la parabola* $\mathcal{P}$ *di equazione* $y = x^2 - 4x + 3$*, scrivere l'equazione della retta* r *tangente a* $\mathcal{P}$ *nel punto* $\mathsf{A}(1, 0)$ *e quella della retta* s *tangente a* $\mathcal{P}$ *e ortogonale a* r.

Risoluzione. La retta tangente in A ha coefficiente angolare $m = 2ax_{\mathsf{A}} + b = -2$. La sua equazione sarà

$$y - 0 = -2(x - 1) \quad \text{ovvero} \quad y = -2x + 2.$$

Le rette ortogonali ad r avranno coefficiente angolare $m = 1/2$ e dunque equazione

$$y = \frac{1}{2}x + q.$$

Mettendo a sistema con la parabola e imponendo la condizione che il discriminante dell'equazione risolutiva sia nullo, si trova

$$q = -\frac{33}{16}.$$ □

Esercizio 4.57. *Fra tutte le rette passanti per il punto* $\mathsf{A}(3, 0)$*, determinare quella che interseca la retta* r *di equazione* $3x - 4y = -16$ *in un punto* P *che dista* 5 *da* A*. Verificare poi che la retta* s *trovata è ortogonale a* r.

Risoluzione. Conviene cercare i punti $\mathsf{P} = (s, t)$ della retta r che hanno distanza 5 da A. Si deve avere

$$\begin{cases} 3s - 4t + 16 = 0 \\ \sqrt{(s-3)^2 + t^2} = 5 \end{cases}.$$

Il sistema si risolve facilmente elevando al quadrato la seconda equazione (cosa lecita perché si tratta di uguaglianza tra due numeri positivi). Si trova solo la soluzione $(0, 4)$. La retta s richiesta è dunque la retta per P e A:

$$y = -\frac{4}{3}x + 4.$$

Le due rette sono ortogonali in quanto il prodotto dei coefficienti angolari è -1. Del resto la cosa era anche una conseguenza del fatto che esiste un solo punto di r che dista 5 da A. □

Esercizio 4.58. *Si consideri una generica retta* r *del fascio di equazione* $4x + 3y = k$, $k \in \mathbb{R}$*, e siano* A *e* B *i punti d'incontro di* r *con gli assi* x *e* y *rispettivamente con origine in* O*. Se* $\alpha = \mathsf{O}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{B}$*, calcolare* $\tan(\alpha/2)$*. Trovare* $k \geq 0$ *tale che l'area del triangolo* OAB *valga 27 e scrivere l'equazione della circonferenza inscritta in questo triangolo.*

Risoluzione. Nel triangolo OAB, si ha, supponendo $k \neq 0$,

$$\tan \alpha = \frac{|\overline{\mathsf{OB}}|}{|\overline{\mathsf{OA}}|} = \frac{|k|/3}{|k|/4} = \frac{4}{3},$$

da cui

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

Dunque

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Si ha poi

$$27 = \frac{1}{2}|\overline{OB}||\overline{OA}| \quad\Rightarrow\quad 27 = \frac{1}{2}\frac{k}{3}\frac{k}{4} \quad\Rightarrow\quad k = 18\sqrt{2}.$$

Con questo valore di k si ha

$$A = \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad B = (0, 6\sqrt{2}).$$

Per trovare l'equazione della circonferenza inscritta, osserviamo che il suo centro è il punto di incontro di due bisettrici degli angoli interni. La bisettrice dell'angolo in O è $y = x$. Per la bisettrice dell'angolo in A osserviamo che l'angolo, nel semipiano delle $y > 0$, che essa forma con la semiretta positiva dell'asse x è

$$\delta = \pi f a r c \alpha 2,$$

e quindi il suo coefficiente angolare è

$$\tan\delta = -\frac{1}{2}.$$

L'equazione della bisettrice è dunque

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)$$

Intersecando le due bisettrici si trova

$$\begin{cases} y = x \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{9\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Il raggio è $3\sqrt{2}/2$ e l'equazione della circonferenza

$$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2. \qquad \square$$

Esercizio 4.59. *Dato il fascio di rette di equazione* $x + (k+1)y - 1 - 3k = 0$, $k \in \mathbb{R}$, *determinare*

1. *l'equazione della retta del fascio parallela alla retta di equazione* $2x - 3y + 2 = 0$,
2. *le rette del fascio che distano* 2 *dall'origine* $O = (0, 0)$,
3. *i valori di k ai quali corrispondono le rette del fascio con coefficiente angolare* $m \in [-1, 1]$.

Risoluzione. Cominciamo con l'osservare che l'insieme di rette di equazione $x + (k+1)y - 1 - 3k = 0$, $k \in \mathbb{R}$ non rappresenta un intero fascio di rette: scrivendo l'equazione nella forma

$$(x + y - 1) + k(y - 3) = 0,$$

si vede che la retta $y-3=0$ non si ottiene per nessun valore di $k \in \mathbb{R}$. Questo succede (quasi) sempre quando si vuole rappresentare un fascio di rette con un solo parametro. Tuttavia si parla ugualmente di fascio, intendendo che la "retta mancante" si ottenga in realtà per $k \to \infty$. Se infatti si riscrive l'equazione nella forma

$$\frac{1}{k}(x+y-1)+(y-3)=0$$

ci si rende subito conto che, se $k \to \infty$, si ottiene proprio la retta $y=3$.

Per cercare la retta del fascio parallela alla retta $2x-3y+2=0$, basterà imporre che il coefficiente angolare sia $2/3$:

$$-\frac{1}{k+1}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x-3y+13=0.$$

Imponiamo ora la condizione che la distanza tra O e una generica retta del fascio sia 2:

$$\frac{|-1-3k|}{\sqrt{1+(k+1)^2}}=2.$$

Elevando al quadrato ambo (in quanto positivi non si introducono soluzioni estranee) si ottiene

$$k=-1 \vee k=\frac{7}{5},$$

da cui le due rette $x+2=0$ e $5x+12y-26=0$.

Più delicato rispondere alla terza domanda. Osserviamo intanto che la retta di coefficiente angolare -1 si ottiene per $k=0$, quella di coefficiente angolare 1 si ottiene per $k=-2$. È opportuno ora valutare, anche con l'ausilio di un grafico, che cosa succede alle rette del fascio, al variare del parametro k. Si veda la figura 4.37.

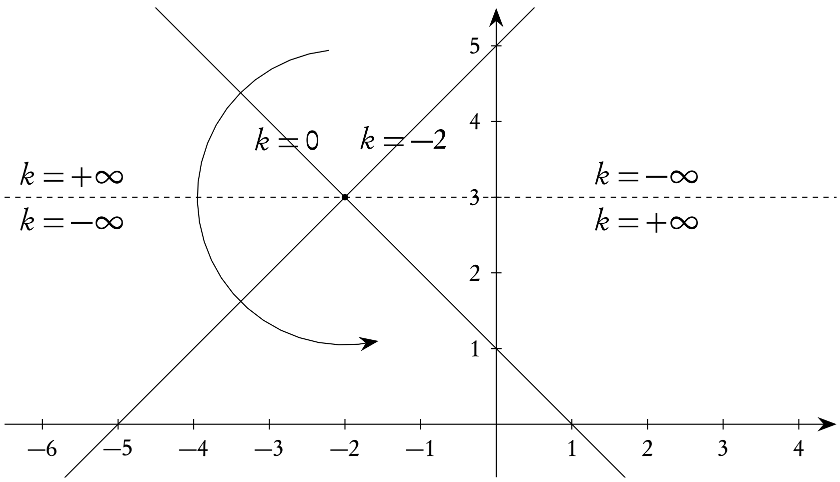


Figura 4.37: *Figura relativa all'esercizio* 4.59

Osservando che il parametro aumenta "ruotando in senso antiorario", si conclude che le rette con coefficiente angolare $m \in [-1,1]$ sono quelle con $k \leq -2$ oppure quelle con $k \geq 0$. Nella figura è rappresentata tratteggiata la "retta mancante" del fascio. □

Esercizio 4.60. *Scrivere le equazioni delle parabole, ad asse verticale, passanti per i punti* $\mathsf{A}=(0,0)$ *e* $\mathsf{B}=(4,0)$ *e tangenti alla retta di equazione* $y=2x-9$.

Risoluzione. Una generica parabola $y=ax^2+bx+c$ è tangente alla retta $y=2x-9$ se è nullo il discriminante dell'equazione risolutiva del sistema tra la parabola e la retta.

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=2x-9 \end{cases}, \quad ax^2+(b-2)x+c+9=0 \quad \Rightarrow \quad (b-2)^2-4a(c+9)=0.$$

Mettiamo questa condizione na sistema con le condizioni di passaggio per i punti A e B:

$$\begin{cases} (b-2)^2-4a(c+9)=0 \\ 0=c \\ 0=16a+4b+c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a,b,c)=(1,-4,0) \vee (a,b,c)=\left(\frac{1}{4},-1,0\right).$$ □

Esercizio 4.61. *Dati i punti* $\mathsf{A}(-1,0)$, $\mathsf{B}(1,0)$ *e* $\mathsf{P}(t,1)$, *che al variare di* $t\in\mathbb{R}$ *percorre la retta* $y=1$, *scrivere l'equazione del luogo geometrico descritto dall'ortocentro (punto di incontro delle altezze) del triangolo* ABP *e disegnarlo.*

Risoluzione. L'altezza relativa ad $\overline{\mathsf{AB}}$ ha equazione $x=t$. Il coefficiente angolare della retta BP è

$$m_{\mathsf{BP}}=\frac{1-0}{t-1}.$$

Il coefficiente angolare e l'equazione della perpendicolare AH per A a BP sono dunque

$$m_{\mathsf{AH}}=1-t \quad \text{e} \quad y=(1-t)(x+1).$$

Possiamo trovare le coordinate dell'ortocentro H intersecando le due altezze trovate:

$$\begin{cases} x=t \\ y=(1-t)(x+1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}=\left(t,1-t^2\right).$$

Le coordinate di H costituiscono già le equazioni parametriche del luogo cercato; per trovarne l'equazione cartesiana basta "eliminare il parametro t". Si ottiene

$$y=-x^2+1.$$ □

Esercizio 4.62. *Sia* $\mathcal{P}$ *la parabola col vertice in* $\mathsf{V}(2,-1)$ *e passante per il punto* $\mathsf{A}(1,0)$. *Scrivere l'equazione della retta normale a* $\mathcal{P}$ *per il punto di ascissa* 1 *e le coordinate del secondo punto* B *in cui tale retta incontra la parabola.*

Risoluzione. Per determinare l'equazione della parabola usiamo le condizioni di passaggio per il vertice e per il suo punto A, e la condizione che l'ascissa del vertice sia $-b/2a$.

$$\begin{cases} -1=4a+2b+c \\ 0=a+b+c \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \end{cases}.$$

Si trova
$$y = x^2 - 4x + 3.$$
La tangente a P nel punto di ascissa 1 ha $m = 2ax_0 + b = -2$. La perpendicolare ha $m = 1/2$ e quindi equazione
$$y = \frac{1}{2}(x-1).$$
Per il secondo punto di intersezione si trova facilmente
$$\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{4}\right).$$
□

Esercizio 4.63. *Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione*
$$(a^2+a)x^2 + (2a^2-5a)y^2 - 4(3a-4)x - 12(a+1)y + \frac{56}{3} = 0$$

1. *rappresenta una circonferenza di cui si chiede il raggio,*
2. *rappresenta una retta,*
3. *rappresenta una parabola con asse verticale di cui si chiedono le coordinate del vertice.*

Risoluzione. Affinché l'equazione sia una circonferenza occorre, intanto, che
$$a^2 + a = 2a^2 - 5a \quad \Rightarrow \quad a = 0 \lor a = 6.$$
Se $a = 0$ l'equazione diventa di primo grado e quindi non rappresenta una circonferenza. Se $a = 6$ si ottiene
$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - 2y + \frac{4}{9} = 0$$
da cui $r = 1$: si tratta proprio di una circonferenza.

Per ottenere una retta l'equazione deve essere di primo grado:
$$a^2 + a = 0 \land 2a^2 - 5a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$
La retta è
$$12x - 9y + 14 = 0.$$

Per ottenere infine una parabola con asse verticale il coefficiente di y^2 deve essere nullo, mentre quello di x^2 deve essere diverso da zero. Si trova facilmente $a = 5/2$ e si ottiene la parabola
$$y = \frac{7}{24}x^2 - \frac{7}{15}x + \frac{28}{45},$$
di vertice
$$\left(\frac{4}{5}, \frac{14}{45}\right).$$
□

Esercizio 4.64. *Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei punti equidistanti da* $A = (0,0)$ *e* $B = (4,2)$ *e trovarne l'intersezione* C *con l'asse y. Calcolare l'area del triangolo* ABC.

Risoluzione. Il luogo richiesto è l'asse del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$. Si può trovare questo luogo come retta perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ nel punto medio M.

$$\mathsf{M}=(2,1);\quad m_{\mathsf{AB}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad m_{\text{asse}}=-2;\quad y-1=-2(x-2).$$

Si può anche trovare lo stesso luogo imponendo la condizione che un generico punto $\mathsf{P}(x,y)$ sia equidistante da A e B.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}.$$

Elevando al quadrato (i due membri sono positivi!) e semplificando, si ottiene lo stesso risultato di prima.

Il punto C di intersezione di questo luogo con l'asse y è $(0,5)$. Si può trovare l'aera del triangolo ABC come prodotto tra la base $|\overline{\mathsf{AC}}|=5$ e l'altezza (distanza di B dall'asse y), che vale 4. Si ha dunque $\mathcal{A}(\mathsf{ABC})=10$. □

Esercizio 4.65. *Determinare $k\in\mathbb{R}$ affinché la parabola di equazione $y=(k+4)x^2-(k+4)x+k-2$ abbia la concavità verso l'alto e sia tangente alla retta passante per i punti $\mathsf{A}=(0,2)$ e $\mathsf{B}=(1,-6)$. Stabilire poi per quali valori di k si ottengono parabole con intersezione non vuota con l'asse x.*

Risoluzione. La parabola ha la concavità verso l'alto se $k>-4$. La retta pere A e B ha equazione

$$8x+y-2=0.$$

La parabola data è tangente a questa retta se il discriminante dell'equazione risolvente del sistema tra la parabola e la retta è nullo.

$$\begin{cases} y=(k+4)x^2-(k+4)x+k-2 \\ 8x+y-2=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad (k+4)x^2-(k-4)x+k-4=0.$$

Dunque

$$(k-4)^2-4(k+4)(k-4)=0 \quad\Rightarrow\quad k=4\ \vee\ k=-\frac{20}{3}.$$

Solo il primo valore soddisfa la condizione $k>-4$.

La parabola ha intersezione non vuota con l'asse x se il discriminante dell'equazione risolvente del sistema tra la parabola e l'asse y è non negativo. Si trova facilmente, tenendo conto che deve essere $k>-4$, $k\in]-4,4]$. □

Esercizio 4.66. *Dato il fascio $\mathcal{P}$ di parabole*

$$y=x^2-2tx+(t+1)^2,$$

trovare il luogo geometrico $\mathcal{V}$ descritto dai vertici. Indicato con A il punto d'incontro fra $\mathcal{V}$ e l'asse y, trovare la parabola il cui vertice V, situato nel primo quadrante, forma con A e con l'origine O un triangolo isoscele. Calcolare l'area del triangolo OAV.

Risoluzione. Il vertice V ha coordinate

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases} .$$

Queste equazioni danno già le equazioni parametriche del luogo cercato. "Eliminando t" si trova l'equazione cartesiana: $y = 2x + 1$. Il punto A ha coordinate $(0, 1)$.

Ci sono tre punti appartenenti al luogo $\mathcal{V}$ che, con O e A formano un triangolo isoscele. Solo uno sta nel primo quadrante ed è tale che $|\overline{\mathsf{AV}}| = |\overline{\mathsf{AO}}| = 1$. Per trovarlo basterà intersecare la circonferenza di centro A e raggio 1 con $\mathcal{V}$. Si trova

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}+1} \right).$$

Per trovare l'area del triangolo OAV si potrà usare $|\overline{\mathsf{OA}}|$ come base e x_{V} come altezza. Si trova

$$\mathcal{A}(\mathsf{OAV}) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

□

Esercizio 4.67. *Dato il fascio di rette di equazione*

$$(k-1)x + (2k+3)y - 2 = 0,$$

trovare per quale valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ la retta corrispondente verifica le seguenti condizioni

1. *è parallela alla retta di equazione* $3x + y - 1 = 0$,
2. *è perpendicolare alla retta di equazione* $3x - 4y + 1 = 0$,
3. *passa per il punto* $\mathsf{P}(1, 2)$.

Risoluzione. Il coefficiente angolare della generica retta del fascio è

$$\frac{1-k}{2k+3}.$$

Affinché sia parallela alla retta $3x + y - 1 = 0$ basta che il coefficiente angolare sia -3. Si trova $k = 2$.

La generica del fascio è perpendicolare alla $3x - 4y + 1 = 0$ se

$$\frac{1-k}{2k+3} = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad k = -3.$$

Per il passaggio per il punto $\mathsf{P}(1, 2)$ si deve avere

$$k - 1 + (2k+3)2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{3}{5}.$$

□

Esercizio 4.68. *È data la conica di equazione*

$$x^2 + ky^2 - x - k^2 y = 0.$$

1. *Stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo di conica;*
2. *nel caso di una circonferenza trovarne centro e raggio.*

Risoluzione. Per $k = 0$ si ottiene $x^2 - x = 0$, che rappresenta la coppia di rette $x = 0$ e $x = 1$. Se $k \neq 0$ si può riscrivere l'equazione nella forma

$$(x^2 - x) + k(y^2 - ky) = 0,$$

ovvero, completando i quadrati,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + k\left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{k^3}{4}.$$

Se $k = -1$ si ottiene

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0:$$

si tratta della coppia di rette incidenti

$$x - \frac{1}{2} = \pm\left(y + \frac{1}{2}\right) \quad \text{ovvero} \quad x + y = 0 \vee x - y - 1 = 0.$$

Per gli altri valori di k si può riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{k^3 + 1}{4}} + \frac{\left(y - \frac{k}{2}\right)^2}{\frac{k^3 + 1}{4k}} = 1.$$

Se ne deduce quanto segue.

Se $k < -1 \vee -1 < k < 0$ si tratta di un'iperbole, se $k > 0$ si tratta di un'ellisse, e di una circonferenza nel caso particolare $k = 1$. In questo caso il centro e il raggio sono dati da

$$C = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nel caso di un'ellisse o iperbole il centro è

$$D = \left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right),$$

mentre i semiassi sono

$$\left|\frac{k^3 + 1}{4}\right| \quad \text{e} \quad \left|\frac{k^3 + 1}{4k}\right|.$$

□

Esercizio 4.69. *Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ la cui distanza dal punto $A(1, 0)$ è pari alla metà della distanza dalla retta $x = 4$. Riconoscerlo e disegnarlo.*

Risoluzione. Si deve avere
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{2}\frac{|x-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}.$$
Quadrando (ambo i membri sono positivi!) e semplificando si ottiene
$$3x^2+4y^2=12 \quad \text{ovvero} \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=12.$$
Si tratta dunque di un'ellisse di centro l'origine e semiassi 2 e $\sqrt{3}$. □

Esercizio 4.70. *Tra le rette del fascio*
$$4x+3y+k=0$$
individuare quelle che, intersecando gli assi cartesiani in A *e* B*, formano triangoli* AOB *di area* 24.

Risoluzione. Il fascio di rette è un fascio di rette improprio, costituito da tutte[6] le rette parallele alla retta $4x+3y=0$. Le intersezioni di una generica retta del fascio con gli assi x e y rispettivamente sono
$$A=\left(-\frac{k}{4},0\right), \quad B=\left(0,-\frac{k}{3}\right).$$
Si deve dunque avere
$$\frac{1}{2}\left|-\frac{k}{4}\right|\cdot\left|-\frac{k}{3}\right|=24 \quad \Rightarrow \quad k\in\{-24,24\}.$$ □

Esercizio 4.71. *Dato il fascio di circonferenze*
$$x^2+y^2+kx-1=0,$$
trovare $k\in\mathbb{R}$ affinché

1. *il raggio sia $\sqrt{5}$;*
2. *il centro appartenga alla retta $y=2x-1$;*
3. *la circonferenza corrispondente sia tangente alla retta $y=x-\sqrt{3}$.*

Risoluzione. Poiché in una circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si ha
$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{k^2}{4}+1},$$
si deve avere
$$\frac{k^2}{4}+1=5 \quad \Rightarrow \quad k=\pm4.$$

[6] Un insieme di rette con i coefficienti dipendenti da un solo parametro, e di primo grado nel parametro, normalmente rappresenta un fascio di rette, proprio o improprio, *privato* di una retta. Un insieme come quello proposto in questo esercizio, in cui l'unico termine dipendente dal parametro è il termine noto, rappresenta invece un *intero* fascio dirette.

Il centro di una generica circonferenza del tipo indicato è

$$\mathsf{C} = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{k}{2}, 0\right).$$

Dunque

$$0 = 2\left(-\frac{k}{2}\right) - 1 \quad \Rightarrow \quad k = -1.$$

Per rispondere all'ultima domanda si può procedere in diversi modi. Il più elementare consiste nel considerare il sistema tra la circonferenza generica e la retta data

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + kx - 1 = 0 \\ y = x - \sqrt{3} \end{cases},$$

e imporre che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo:

$$2x^2 - x(2\sqrt{3} - k) + 2 = 0, \quad \text{da cui} \quad k^2 - 4k\sqrt{3} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2\sqrt{3} \pm 4.$$ □

Esercizio 4.72. *Si considerino le parabole di equazioni* $y = x^2 - 5x + 4$*,* $y = -x^2 + kx + k + 1$*,* $k \in \mathbb{R}$*, e la retta* r *di equazione* $y = 2$*. Calcolare i valori di k per i quali la retta* r *stacca sulle parabole corde uguali.*

Risoluzione. Troviamo le intersezioni tra la retta r e la prima parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, 2\right).$$

La corda ha dunque lunghezza $\sqrt{17}$.

Troviamo le intersezioni della retta r con la seconda parabola:

$$\begin{cases} y = -x^2 + kx + k + 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4k - 4}}{2}, 2\right).$$

La corda ha dunque lunghezza $\sqrt{k^2 + 4k - 4}$. Allora

$$\sqrt{17} = \sqrt{k^2 + 4k - 4} \quad \Rightarrow \quad k \in \{-7, 3\}.$$ □

Esercizio 4.73. *Sono dati nel piano il punto* $\mathsf{P}(1,3)$ *e le rette* r *ed* s *di equazioni* $x + y = 2$ *e* $3x + y = 6$*. Determinare le coordinate del punto* A *proiezione ortogonale di* P *su* r*, il punto* B *di intersezione delle due rette e i vertici dei quadrati che hanno un lato coincidente col segmento* $\overline{\mathsf{AB}}$*.*

Risoluzione. La retta p per P e ortogonale ad r ha $m = 1$ e quindi equazione $x - y + 2 = 0$. Il punto A è l'intersezione di r con questa perpendicolare. Si trova subito $\mathsf{A} = (0, 2)$. Il punto B di intersezione tra le due rette r e s si trova dal sistema tra le due equazioni: $\mathsf{B} = (2, 0)$. Si ha poi

$$|\overline{\mathsf{AB}}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Inoltre la retta t per B ha equazione $x-y-2=0$. I vertici cercati dei quadrati si trovano nell'intersezione delle circonferenze di centro A e B e raggio $2\sqrt{2}$ rispettivamente con le rette p e t.

$$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=8 \\ x-y+2=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x-2)^2+y^2=8 \\ x-y-2=0 \end{cases} .$$

Si trova facilmente $C(2,4)$, $D(4,2)$, $C'(-2,0)$, $D'(0,-2)$. □

Esercizio 4.74. *Data la parabola di equazione $y=1-x^2$, scrivere l'equazione della parabola, ad asse verticale, ad essa tangente nel punto $(1/2, 3/4)$ e col vertice sull'asse x.*

Risoluzione. Due parabola sono tra di loro tangenti in un punto se hanno, in quel punto, la stessa retta tangente. La tangente alla parabola data nel punto $(1/2, 3/4)$ ha

$$m=2ax_0+b=2(-1)\frac{1}{2}+0=-1.$$

Anche per la parabola cercata, del tipo $y=ax^2+bx+c$, si deve avere

$$2ax_0+b=-1 \quad \Rightarrow \quad 2a\frac{1}{2}+b=-1, \quad \text{ovvero} \quad a+b=-1.$$

Dalla condizione di passaggio per $(1/2, 3/4)$ si trova l'ulteriore condizione

$$\frac{3}{4}=a\frac{1}{4}+b\frac{1}{2}+c.$$

Infine se il vertice deve stare sull'asse x si deve avere

$$\frac{-b^2+4ac}{4a}=0.$$

Mettendo a sistema le tre condizioni si trova la parabola

$$y=\frac{1}{3}(x-2)^2.$$ □

Esercizio 4.75. *Determinare l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta* r *di equazione $y=1$ e passante per i punti* $A(3+\sqrt{3},0)$ *e* $B(1,1)$. *Calcolare inoltre i vertici del triangolo rettangolo isoscele circoscritto alla circonferenza e avente la base sulla retta $x=5$ e l'altezza sulla retta $y=1$.*

Risoluzione. Si faccia riferimenti alla figura 4.38.

La circonferenza deve avere il centro C nell'intersezione tra l'asse del segmento $\overline{AB}$ 8 che è una corda della circonferenza cercata)e la retta r. L'asse di $\overline{AB}$ si può trovare come luogo geometrico dei punti (x,y) del piano equidistanti da A e B.

$$\sqrt{(x-3-\sqrt{3})^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \quad \Rightarrow \quad x(2+sqrt3)-y-5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0$$

Per il centro C si trovano le coordinate $(3,1)$. La circonferenza ha dunque raggio 2 ed equazione

$$(x-3)^2+(y-1)^2=4.$$

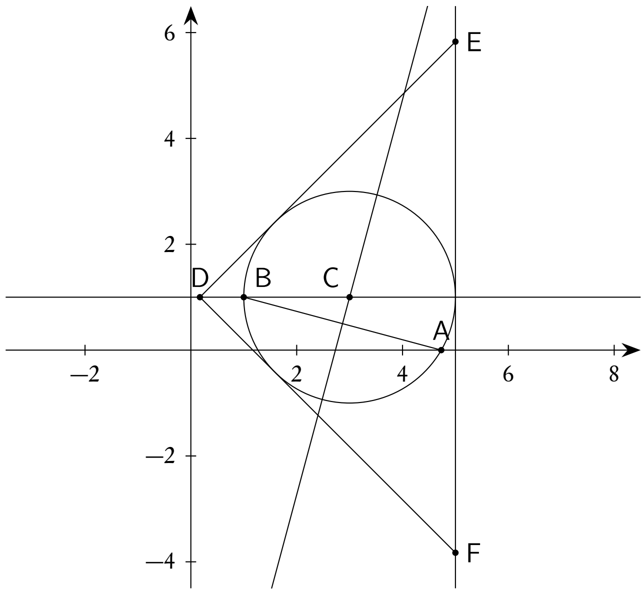


Figura 4.38: *Figura relativa all'esercizio* 4.75

Detto D il vertice e $\overline{\mathsf{EF}}$ la base del triangolo rettangolo isoscele cercato, la retta DE deve formare un angolo di $\pi/4$ con la retta r e dunque deve avere $m = 1$. Si dovrà cercare la retta del fascio improprio $y = x + q$ e tangente alla circonferenza nel primo quadrante. Mettendo a sistema e imponendo la condizione che il discriminante dell'equazione risolutiva sia nullo si trova facilmente $q = 2 \pm 2\sqrt{2}$, di cui solo $2 + 2\sqrt{2}$ è accettabile in quanto il punto di tangenza sta nel primo quadrante. I punti D, E ed F si trovano ora facilmente:

$$(3 - 2\sqrt{2}, 1),\ (5, 3 + 2\sqrt{2}),\ (5, -1 - 2\sqrt{2}).$$ □

Esercizio 4.76. *Assegnate la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$, la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $4x + y^2 = 0$ e la retta* r *di equazione $x - y = 0$, trovare la retta* t *parallela ad* r *e tangente a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{P}$. Inoltre, detti* A *e* B *i rispettivi punti di tangenza, determinare le coordinate dei vertici dei quadrati aventi un lato coincidente col segmento* $\overline{\mathsf{AB}}$.

Risoluzione. Una retta parallela ad r ha equazione $x - y + k = 0$. Di tangenti alla parabola parallele alla r ce n'é una sola e la condizione di tangenza si ottiene imponendo che il discriminante dell'equazione risolutiva del sistema

$$\begin{cases} 4x + y^2 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases},$$

sia nullo. Si ottiene

$$y^2 + 4y - 4k = 0 \quad \text{e} \quad 4 + 4k = 0 \quad \text{e} \quad k = -1.$$

Questa retta è anche tangente alla circonferenza nel punto $\mathsf{A} = (1, 0)$, come si verifica facilmente. Il punto di tangenza con la parabola è invece $\mathsf{B} = (-1, -2)$. Essendo $|\overline{\mathsf{AB}}| = 2\sqrt{2}$, i vertici C e D dei quadrati cercati si troveranno nell'intersezione delle perpendicolari a t per A e B con le circonferenze di raggio

$2\sqrt{2}$ e centri rispettivamente A e B.

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=8 \\ y=-1(x-1) \end{cases}, \quad \begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2=8 \\ y+2=-1(x+1) \end{cases}$$

Si trovano i punti

$$(-3,0),\ (-1,2) \quad \text{e} \quad (1,-4),\ (3,-2).$$

□

Esercizio 4.77. *Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $y=x-1$ e passanti per i punti* $A=(2,0)$ *e* $B=(3,0)$.

Risoluzione. Le condizioni di passaggio della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ per i punti A e B si scrivono

$$\begin{cases} 4+2a+c=0 \\ 9+3a+c=0 \end{cases}$$

Da qui si ottiene, intanto, $a=-5$ e $c=6$. La circonferenza $x^2+y^2-5x+by+6=0$ è tangente alla retta data se il discriminante dell'equazione risolutiva del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+by+6=0 \\ y=x-1 \end{cases}$$

è nullo. Si ottiene

$$2x^2+(b-7)x-b+7=0 \quad \Rightarrow \quad b^2-6b-7=0 \quad \Rightarrow \quad b=7 \ \vee \ b=-1.$$

□

Esercizio 4.78. *Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei baricentri dei triangoli* AOP, *dove* $A=(0,4)$, $O=(0,0)$ *e* P *percorre la parabola di equazione $y=x^2$.*

Risoluzione. Detto $P=(t,t^2)$ il generico punto della parabola, il baricentro del triangolo AOP ha coordinate

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{3} \\ y=\dfrac{4+t^2}{3} \end{cases}.$$

Queste equazioni sono già le equazioni parametriche del luogo cercato, per ottenere l'equazione cartesiana basta "eliminare" il parametro t, per esempio ricavandolo dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda. Si ottiene

$$y=3x^2+\frac{4}{3}.$$

□

Esercizio 4.79. *Sia data la circonferenza $x^2+y^2=1$. Detto* $V=(0,b)$, *con $b>1$, un punto sul semiasse superiore delle ordinate e* ABV *il triangolo isoscele, con vertice in* V, *circoscritto alla circonferenza, determinare b in modo che il triangolo abbia altezza doppia della base.*

Risoluzione. Le tangenti alla circonferenza condotte dal punto V hanno equazione $y-b=mx$, ovvero $mx-y+b=0$. Esse sono tangenti alla circonferenza se la distanza dal centro è uguale al raggio, ovvero se è uguale ad 1:

$$1=\frac{b}{\sqrt{m^2+1}} \quad \Rightarrow \quad m=\pm\sqrt{b^2-1}.$$

Le due tangenti sono dunque

$$y=\pm\sqrt{b^2-1}x+b.$$

La base del triangolo sta sulla retta $y=-1$. Gli estremi A e B della base sono le intersezioni delle due tangenti trovate con la $y=-1$. Si trova

$$\left(\pm\frac{b+1}{\sqrt{b^2-1}},-1\right).$$

La base e l'altezza del triangolo misurano allora, rispettivamente,

$$2\frac{b+1}{\sqrt{b^2-1}} \quad \text{e} \quad b+1.$$

Imponendo la condizione che l'altezza sia doppia della base (con $b>0$), si trova

$$b=\sqrt{17}.$$ □

Esercizio 4.80. *Un segmento* $\overline{\mathsf{PQ}}$ *di lunghezza 2 passa per il punto* $\mathsf{A}=(0,2/3)$ *ed ha l'estremo* P *sul semiasse positivo delle* x. *Determinare i punti* P *e* Q *in modo che il triangolo* OPQ *sia isoscele sulla base* $\overline{\mathsf{PQ}}$.

Risoluzione. Si faccia riferimento alla figura 4.39.

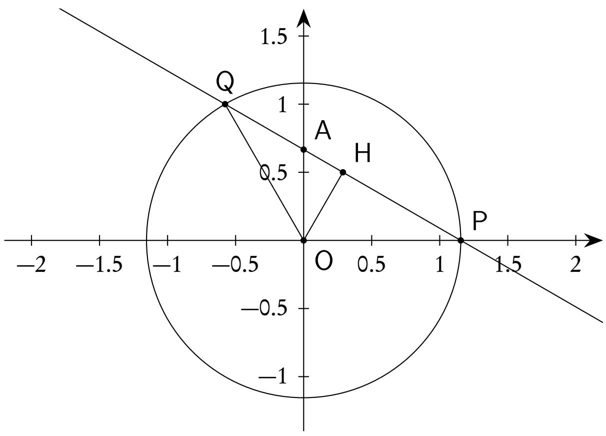


Figura 4.39: *Figura relativa all'esercizio* 4.80

L'impostazione del testo suggerisce una risoluzione per via puramente analitica anche se, come vedremo, non si tratta della soluzione più semplice. Dette $(t,0)$, $t>0$, le coordinate di P, il punto Q si troverà nell'intersezione tra la circonferenza di centro O e raggio t e la semiretta PA. L'equazione di PA (retta passante per due punti) è

$$\frac{x-0}{t-0}=\frac{y-2/3}{0-2/3} \quad \Rightarrow \quad 2x+3y-2t=0.$$

La circonferenza di centro O e raggio t ha equazione $x^2+y^2=t^2$. Il punto Q è dunque una delle due soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-2t=0 \\ x^2+y^2=t^2 \end{cases}.$$

Si ritrova naturalmente il punto P; si trova poi

$$Q=\left(\frac{4t-9t^3}{4+9t^2}, \frac{12t^2}{4+9t^2}\right).$$

Si può ora imporre la condizione che $|\overline{PQ}|=2$. Si trova, dopo semplificazione,

$$81t^6-45t^4-72t^2-16=0,$$

che si può vedere come un'equazione di terzo grado nell'incognita $u=t^2$:

$$81u^3-45u^2-72u-16=0.$$

La ricerca delle soluzioni razionali di quest'equazione è un po' laboriosa, a causa del fatto che i divisori del termine noto e del primo coefficiente sono numerosi. Si trovano le soluzioni[7] seguenti

$$-\frac{4}{9}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{4}{3}.$$

Solo la terza è accettabile ($u=t^2>0$) e da qui si ricava, tenendo conto che anche per t si ha $t>0$,

$$t=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

In conclusione si ha

$$P=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad Q=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right).$$

La soluzione per via trigonometrica è meno laboriosa. Detto α l'angolo alla base del triangolo isoscele POQ, e dette sempre $(t,0)$ le coordinate di P, nel triangolo AOP si trova

$$\frac{2}{3}=t\cdot\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha=\frac{2}{3t}, \quad \text{e quindi} \quad \cos\alpha=\frac{3t}{\sqrt{4+9t^2}}.$$

Nel triangolo POH si deve avere

$$|\overline{PH}|=\frac{|\overline{PQ}|}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad t\cos\alpha=1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{3t^2}{\sqrt{4+9t^2}}=1,$$

[7] Naturalmente una volta trovata una soluzione, si può scomporre il polinomio a primo membro e cercare le altre due soluzioni con le formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

da cui si trova facilmente, sempre tenendo conto che $t > 0$,

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

che è lo stesso risultato di prima. □

5 Equazioni e disequazioni trigonometriche

Esercizio 5.1. *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$\cos^2 x + (1-\sqrt{3})\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0$$

che appartengono all'intervallo $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

Risoluzione. Poiché $\cos x = 0$ non è soluzione di questa equazione, si può dividere per $\cos x$, ottenendo la seguente equazione nella funzione tangente:

$$\sqrt{3}\tan^2 x - (1-\sqrt{3})\tan x - 1 = 0.$$

Posto $\tan x = t$, si ottiene un'equazione di secondo grado che ha le soluzioni:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-2\sqrt{3}+3)+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{1+2\sqrt{3}+3}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}) \pm (1+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} 1/\sqrt{3} \\ -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

A questo punto è immediato concludere che le soluzioni, nell'intervallo richiesto, sono:

$$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}.$$

Si sarebbe anche potuto procedere usando le formule di duplicazione e bisezione:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2},$$

ottenendo l'equazione

$$(1-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\sin 2x + (1+\sqrt{3})\cos 2x = 0,$$

che può essere semplificata in

$$\sin 2x - (2+\sqrt{3})\cos 2x + 1 = 0.$$

Si tratta di un'equazione lineare in seno e coseno, nella variabile $2x$ che può essere risolta con metodo grafico (porre $\cos 2x = X$ e $\sin 2x = Y$ e mettere a sistema con $X^2 + Y^2 = 1$).

Nelle equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno, come quella proposta in questo quesito, si può sempre procedere indifferentemente nei due modi descritti; il secondo presenta il vantaggio che "funziona senza condizioni", cioè senza dovere preventivamente verificare se $\cos x = 0$ è o no soluzione dell'equazione. Naturalmente i calcoli possono essere più complicati con un metodo rispetto all'altro, ma la cosa non è prevedibile a priori. □

Esercizio 5.2. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{|\cos 2x|}{\sin x} < 1$$

per $x \in [0, 7\pi/2]$.

Risoluzione. Conviene trasformare il $\cos 2x$: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. A questo punto si considerano due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo o negativo ottenendo le seguenti disequazioni

$$\frac{1 - 2\sin^2 x - \sin x}{\sin x} < 0 \quad , \quad \frac{2\sin^2 x - 1 - \sin x}{\sin x} < 0,$$

la prima nel caso che l'argomento del valore assoluto sia positivo, la seconda nel caso che sia negativo. Si tratta di due disequazioni di tipo standard che conviene risolvere preventivamente nell'intervallo $[0, 2\pi]$, per poi riportare i risultati nell'intervallo richiesto. Si ottiene:

$$x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, 2\pi\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right[\cup \left]3\pi, \frac{7\pi}{2}\right[.$$ □

Esercizio 5.3. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{2\cos 2x + 2(\sqrt{3}+1)\sin x - 2 - \sqrt{3}}{3\sin^2 x - \cos^2 x} \geq 0, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Risoluzione. Si può studiare il segno di numeratore e denominatore e poi fare un grafico di segno. Per quanto riguarda il numeratore, trasformando tutto in $\sin x$, si trova che è positivo per

$$\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Procedendo allo stesso modo con il denominatore, si trova che esso è positivo per

$$\sin x < -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin x > \frac{1}{2}.$$

Se ne deduce che la disequazione è verificata per

$$x \in \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$ □

Esercizio 5.4. *Risolvere la disequazione*

$$2\sqrt{3}\sin^2 x + \cos x \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Essendo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, la disequazione si riscrive come segue:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - 2\sqrt{3} \geq 0\,.$$

Posto ora $\cos x = t$ si ottiene

$$2\sqrt{3}\,t^2 - t - 2\sqrt{3} \geq 0\,,$$

la cui equazione associata

$$2\sqrt{3}\,t^2 - t - 2\sqrt{3} = 0$$

fornisce le soluzioni

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4\sqrt{3}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Dunque

$$t \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee t \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

La seconda disequazione non è mai verificata ($2/\sqrt{3} > 1$), dalla prima si trae

$$x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

□

Esercizio 5.5. *Risolvere l'equazione*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cot x\,.$$

Risoluzione. Intanto si deve avere $\sin x \neq 0$, ovvero $x \neq k\pi$. Si ha poi

$$\cos^2 x - \frac{\cos x}{2\sin x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x\left(\cos x - \frac{1}{2\sin x}\right) = 0$$

ovvero

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \cos x - \frac{1}{2\sin x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = 1.$$

Dalla prima si ricava

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

dalla seconda

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Le soluzioni sono dunque

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

□

Esercizio 5.6. *Risolvere la disequazione*

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x<2.$$

Risoluzione. Trattandosi di una disequazione lineare in seno e coseno si può usare una risoluzione grafica: posto $\cos x = X$ e $\sin x = Y$, si ottiene

$$\begin{cases} \sqrt{3}X+Y<2 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}.$$

Si faccia riferimento alla figura 5.1.

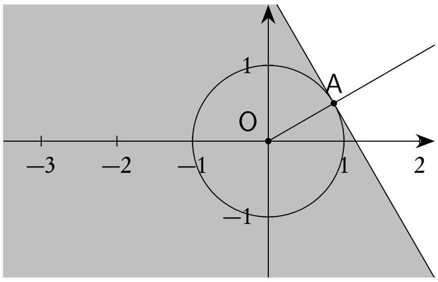


Figura 5.1: *Figura relativa all'esercizio 5.6*

La retta $\sqrt{3}X+Y=2$ è tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A di coordinate

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right),$$

corrispondente all'angolo di $\pi/6$. La disequazione $\sqrt{3}X+Y<2$ è verificata nella parte evidenziata del piano. Si ottiene dunque

$$x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \forall k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Si noti che per $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ risulta $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2$.

Come ogni equazione o disequazione lineare in seno e coseno si sarebbe anche potuto trasformarla in una disequazione di tipo elementare. Raccogliendo, a primo membro,

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2,$$

si ottiene

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)<2 \quad\Rightarrow\quad \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)<1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{3}+x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

da cui si può concludere come prima.

Da sconsigliare, di solito, l'uso delle formule parametriche, che trasformano la disequazione in una disequazione solo nella funzione

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Le formule parametriche infatti non sono sempre applicabili (come è naturale quando compare la funzione *tangente*) e si dovrebbe prima verificarne appunto l'applicabilità. □

Esercizio 5.7. *Risolvere l'equazione*

$$2\sin^2 x = \tan x.$$

Risoluzione. Si deve intanto avere

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Successivamente si ha

$$2\sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x\left(2\sin x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0,$$

ovvero

$$\sin x = 0 \quad \vee 2\sin x - \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = 1.$$

Si trova ora facilmente

$$x = k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

che si può scrivere, più elegantemente[1],

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}.$$

□

Esercizio 5.8. *Risolvere la disequazione*

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x + 4 \leq 4(\sin^2 2x + \cos^2 2x).$$

Risoluzione. Poiché

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1,$$

la disequazione si può riscrivere come

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 0.$$

Raccogliendo, a primo membro,

$$\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3},$$

si ottiene

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 0,$$

[1] Nella risoluzione di equazioni e disequazioni trigonometriche ci si imbatte quasi sempre nel problema della periodicità. Abitualmente si sottintende che il "k" che compare nelle soluzioni sia un intero, anche se la cosa andrebbe sempre precisata. Tuttavia anche in questo testo eviteremo, di solito, questa esplicita indicazione, quando è evidente dal contesto.

da cui si conclude

$$\pi + 2k\pi \le x + \frac{\pi}{6} \le 2\pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

Trattandosi di una disequazione lineare ed omogenea, si sarebbe anche potuto dividere ambo i membri per $\cos x$, ottenendo una disequazione in $\tan x$. Tuttavia questo richiederebbe di distinguere tre casi:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\tan x + 1 \le 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \sqrt{3}\tan x + 1 \ge 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \cos x = 0.$$

Nella risoluzione di un'equazione lineare omogenea in seno e coseno questo metodo può anche essere efficiente (in un'equazione si hanno solo due casi: $\cos x = 0$ e $\cos x \neq 0$). Nella risoluzione di una disequazione è sicuramente un metodo poco efficace. □

Esercizio 5.9. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 2x \ge 0.$$

Risoluzione. Usando la formula di duplicazione del seno e scomponendo, si ottiene

$$\cos^2 x\big(1 - 2\sin x\big)\big(1 + 2\sin x\big) \ge 0.$$

Si può esaminare il segno di ciascuno dei tre fattori a primo membro e trovare il segno complessivo con un grafico. Tenendo conto che il primo membro è periodico di periodo 2π, ci si può limitare a considerare l'intervallo $[0, 2\pi[$. Il grafico può essere costruito sia utilizzando la circonferenza goniometrica che un normale grafico di segno. Proponiamo entrambi i metodi, riportando solo i grafici (vedi le figure 5.2 e 5.3 rispettivamente), in quanto i calcoli sono elementari.

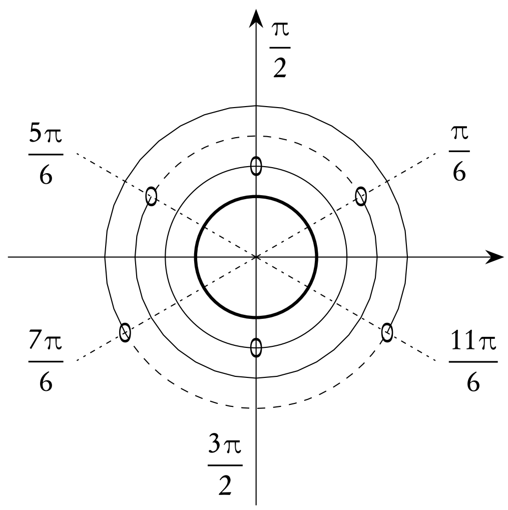


Figura 5.2: *Risoluzione dell'esercizio 5.9 con la circonferenza goniometrica*

Nella figura 5.2 abbiamo rappresentato il segno dei tre fattori su tre circonferenze concentriche, mentre la circonferenza più interna serve solo da riferimento; inoltre abbiamo indicato con una linea continua i tratti dove ciascun fattore è positivo, con una linea tratteggiata i tratti dove è negativo, con uno 0 i valori dove si annulla. Tenendo conto della periodicità e del fatto che $11\pi/6$ corrisponde anche a $-\pi/6$ si ottiene

$$-\frac{\pi}{6}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\pi \quad \vee \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

$+/-$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\cos^2 x$	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+	
$1-2\sin x$	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	
$1+2\sin x$	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	
prodotto	+	+	0	−	0	−	0	+	0	−	0	−	0	+	

Figura 5.3: *Risoluzione dell'esercizio 5.9 senza la circonferenza goniometrica*

Si ottiene naturalmente lo stesso risultato di prima. Si noti che, a causa della periodicità, abbiamo lasciato vuota la colonna sottostante il 2π, che è la ripetizione di quella sottostante lo 0.

In molte situazioni è richiesta la scrittura di queste soluzioni sotto forma di unione di intervalli. Si può usare, per esempio, la forma seguente.

Posto, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$E_k = \left[2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi+2k\pi, \frac{7}{6}\pi+2k\pi\right[\cup \left]\frac{11}{6}\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right],$$

l'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_k\,. \qquad \square$$

Esercizio 5.10. *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2\cos x\cos y = 1 \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. La risoluzione di un sistema di equazioni goniometriche è in generale molto complessa e non esistono strategie standard. In questo caso la seconda equazione si può riscrivere come

$$\sin x\cos y + \cos x\sin y = 2\cos x\cos y,$$

che, tenendo conto della prima, diventa

$$\sin(x+y) = 1 \quad \Rightarrow \quad x+y = \frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Ricavando y e sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$y=-x+\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad\Rightarrow\quad 2\cos x\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \sin 2x=1,$$

da cui

$$2x=\frac{\pi}{2}+2h\pi \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{4}+h\pi.$$

In conclusione le coppie soluzione sono del tipo

$$\left(\frac{\pi}{4}+h\pi,\ \frac{\pi}{4}+(2k-h)\pi\right),\ \forall\, h,\, k\in\mathbb{Z}.$$

□

Esercizio 5.11. *Razionalizzare il denominatore della frazione*

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

e trovare le soluzioni $x\in[0,2\pi]$ *dell'equazione*

$$(1+\cos x)^2=(7+4\sqrt{3})\sin^2 x.$$

Risoluzione. Razionalizzando il denominatore si ottiene

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'equazione si può riscrivere come segue

$$(1+\cos x)^2=(7+4\sqrt{3})(1-\cos^2 x) \quad\Rightarrow\quad (1+\cos x)^2=(7+4\sqrt{3})(1-\cos x)(1+\cos x),$$

da cui

$$(1+\cos x)\big((8+4\sqrt{3})\cos x-(6+4\sqrt{3})\big)=0,$$

ovvero

$$\cos x=-1 \quad\vee\quad \cos x=\frac{6+4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni in $[0,2\pi]$ sono allora

$$x\in\left\{\frac{\pi}{6},\ \pi,\ \frac{11}{6}\pi\right\}.$$

□

Esercizio 5.12. *Risolvere la seguente disequazione nell'intervallo* $[0,2\pi]$.

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x\le\sqrt{3}.$$

Risoluzione. Raccogliendo $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ al primo membro, la disequazione si può riscrivere nella forma

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se ne deduce

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{3}+2k\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le x\le\frac{13\pi}{6}+2k\pi,$$

ovviamente con $k\in\mathbb{Z}$. Le soluzioni nell'intervallo $[0,2\pi]$ si possono scrivere come

$$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right].$$

□

Esercizio 5.13. *Risolvere la seguente equazione trigonometrica*

$$\sin 3x-\sin x-(2\cos^2 x-1)=0.$$

Risoluzione. Per le formule di prostaferesi si ha

$$\sin 3x-\sin x=2\sin x\cos 2x.$$

A questo punto conviene osservare che

$$2\cos^2 x-1=\cos 2x.$$

L'equazione si può riscrivere nella forma

$$\cos 2x(2\sin x-1)=0\quad\Rightarrow\quad\cos 2x=0\vee 2\sin x-1=0.$$

Dalla prima si trae

$$2x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad\Rightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Dalla seconda si trae invece

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi.$$

Dunque

$$x\in\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi,\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right\},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Si poteva procedere anche in modo "più artigianale" calcolando $\sin 3x$ e trasformando tutto in seno. Si ottiene

$$4\sin^3 x-2\sin^2 x-2\sin x+1=0.$$

Posto $\sin x=t$ si ottiene

$$4t^3-2t^2-2t+1=0\quad\Rightarrow\quad 2t^2(2t-1)-(2t-1)=0\quad\Rightarrow\quad(2t^2-1)(2t-1)=0,$$

da cui

$$t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\vee t=\frac{1}{2},$$

che produce gli stessi risultati di prima. □

Esercizio 5.14. *Trovare le soluzioni, nell'intervallo* $[-\pi, 2\pi]$, *della seguente equazione trigonometrica*

$$\sin 4x + \sin 2x - \sin(\pi + 3x) = 0.$$

Risoluzione. Applicando la prostaferesi della somma di due seni l'equazione si riduce subito all'equazione equivalente

$$\sin(3x)\big(2\cos x + 1\big) = 0$$

che ha, nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$, le soluzioni

$$-\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{3}\pi,\ 0,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi\,.$$

Si poteva anche procedere in modo "più artigianale", calcolando $\sin 2x$, $\sin 3x$ e $\sin 4x$, raccogliendo $\sin x$ e trasformando tutto in coseno. Si ottiene

$$\sin x(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x\big(4\cos^2 x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1)\big) = 0,$$

ovvero

$$\sin x(4\cos^2 x - 1)(2\cos x + 1) = 0,$$

che si risolve in modo elementare. □

Esercizio 5.15. *Risolvere la seguente disequazione trigonometrica*

$$\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}\sin^2\dfrac{x}{2}} > 0.$$

Risoluzione. Usando la formula di bisezione del seno al denominatore, la disequazione si trasforma in

$$\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} > 0.$$

Possiamo risolverla trovando il segno del numeratore e del denominatore e utilizzando il solito grafico di segno. Poiché l'unica condizione per il dominio è legata al fatto che il denominatore deve essere diverso da zero, anche il dominio può essere dedotto da questo grafico, senza una sua preventiva determinazione. Essendo i calcoli standard, riportiamo solo il grafico.

+/−	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$2\sin x - 1$	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	
$\sqrt{2}\cos x - 1$	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	
frazione	−	−	0	+	×	−	0	+	×	−	

Si ha dunque

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad \vee \quad \frac{5\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z},$$

insieme che si può scrivere alternativamente come segue

$$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\ \cup\ \left]\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right[.$$ □

Esercizio 5.16. *Trovare le soluzioni, nell'intervallo* $[-2\pi,\pi/2]$, *della seguente equazione trigonometrica*

$$\sin(\pi+x)+2\sin x\cos x=2\cos^2 x-\cos x.$$

Risoluzione. Poiché $\sin(\pi+x)=-\sin x$, portando tutto a primo membro, la disequazione si può riscrivere come

$$-\sin x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x+\cos x=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x(2\cos x-1)-\cos x(2\cos x-1)=0,$$

ovvero

$$(2\cos x-1)(\sin x-\cos x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cos x-1=0 \vee \sin x-\cos x=0.$$

Si trovano facilmente le seguenti soluzioni:

$$x\in\left\{-\frac{7\pi}{4},-\frac{5\pi}{3},-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right\}.$$ □

Esercizio 5.17. *Risolvere la seguente disequazione trigonometrica*

$$\frac{\cos 4x+\sin 3x-\cos 2x}{\tan x-1}\geq 0.$$

Risoluzione. Troviamo intanto il dominio.

$$\begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \tan x\neq 1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \wedge x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Applicando al numeratore le formule di prostaferesi tra il primo e l'ultimo addendo si ottiene

$$\cos 4x+\sin 3x-\cos 2x=-2\sin 3x\sin x+\sin 3x=\sin 3x(1-2\sin x).$$

La disequazione si riduce allora a

$$\frac{\sin 3x(1-2\sin x)}{\tan x-1}\geq 0,$$

che si risolve trovando il segno dei tre fattori che vi compaiono (due al numeratore e uno al denominatore). Si ha

$$\sin 3x=0 \quad \text{se} \quad 3x=k\pi \quad\Rightarrow\quad x=k\frac{\pi}{3}$$

e

$$-2\sin x+1=0 \quad \text{se} \quad x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi.$$

I valori che annullano il denominatore sono già stati trovati cercando il dominio. Questo ci permette di costruire il seguente grafico di segno, limitato all'intervallo $[0,2\pi[$.

$+/-$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sin 3x$	0	+	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−	0	+	+	+	+	+	0	−	
$-2\sin x+1$	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
$\tan x-1$	−	−	−	−	0	+	+	+	×	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	×	−	−	−	
frazione	0	−	0	+	×	−	0	+	×	−	0	+	0	−	0	+	0	−	×	+	×	−	0	+	

L'insieme delle soluzioni della disequazione appartenenti all'intervallo $[0, 2\pi[$ è il seguente

$$E = \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right[.$$

Per ottenere le soluzioni su tutto $\mathbb{R}$ basta tenere conto della periodicità, che è qui 2π.

Si noti che, nel tracciare il grafico di segno, in corrispondenza al fattore $\tan x - 1$ del denominatore abbiamo messo uno "0" in corrispondenza dei caposaldi $x = \pi/4$ e $x = 5\pi/4$, anche se li avevamo già esclusi dal dominio: l'esclusione dal dominio risulta comunque evidente dall'ultima riga del grafico, dove abbiamo piazzato una "×" in corrispondenza agli stessi caposaldi. Avremmo potuto escludere questi valori dallo studio fin dall'inizio, senza alcuna modifica nelle conclusioni, anche addirittura in corrispondenza ai due fattori del numeratore. □

Esercizio 5.18. *Trovare le soluzioni, nell'intervallo* $[0, 2\pi]$, *della seguente disequazione trigonometrica*

$$4\tan x - \frac{3}{\tan x} + 1 < 0 .$$

Risoluzione. Si ha intanto, per i dominio,

$$x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Riducendo allo stesso denominatore si ottiene poi

$$\frac{4\tan^2 x + \tan x - 3}{\tan x} < 0.$$

Posto $\tan x = t$ si ottiene la disequazione algebrica

$$\frac{4t^2 + t - 3}{t} < 0,$$

che si risolve con il solito grafico di segno.

+/−	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4t^2+t-3$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
t		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
frazione		$-$	0	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	

Si ottiene

$$t<-1 \quad \vee 0<t<\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan x<-1 \quad \vee \quad 0<\tan x<\frac{3}{4}.$$

Posto ora

$$\alpha=\arctan\frac{3}{4} \quad (\simeq 37°),$$

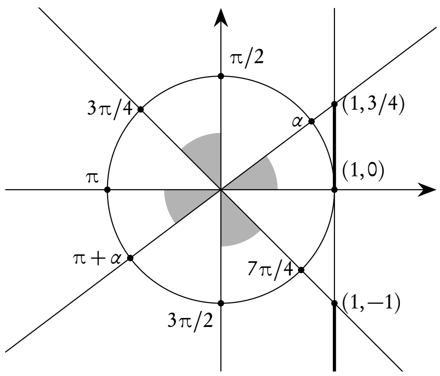


Figura 5.4: *Figura relativa all'esercizio 5.18*

con riferimento alla figura 5.4, si conclude che le soluzioni della disequazione, nell'intervallo $[0,2\pi]$, sono

$$x\in\,]0,\alpha[\,\cup\,\left]\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi\right[\,\cup\,]\pi,\pi+\alpha[\,\cup\,\left]\frac{3}{2}\pi,\frac{7}{4}\pi\right[.$$ □

Esercizio 5.19. *Risolvere la seguente equazione trigonometrica*

$$\frac{1}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{1+\cos^2 x}=\frac{4}{3}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $\cos x\neq\pm1$, ovvero $x\neq k\pi$. Riducendo allo stesso denominatore e semplificando si ottiene poi

$$2\cos^4 x+3\cos^2 x-2=0$$

che ha come soluzioni

$$\cos^2 x=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 x=-2,$$

di cui la seconda è palesemente non accettabile. Se ne deduce

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}. \qquad \square$$

Esercizio 5.20. *Trovare le soluzioni, nell'intervallo* $[0, 2\pi]$, *della seguente disequazione trigonometrica:*

$$2\sin x \, \frac{1}{1+\tan^2 x} + \sin x - 2\cos x \geq 0, .$$

Risoluzione. La disequazione non è facilmente trasformabile in una disequazione contenente una sola funzione trigonometrica, in quanto contiene sia la funzione seno che la funzione coseno al primo grado. Inoltre il testo contiene l'espressione

$$\frac{1}{1+\tan^2 x},$$

scritta in questo modo, anche se essa coincide con $\cos^2 x$. Tenendo conto che la presenza della funzione tangente richiede, per il dominio, che $\cos x \neq 0$, si può osservare che raccogliendo $\cos x$ il primo membro può essere scritto come prodotto appunto tra $\cos x$ e una funzione contenente solo la tangente:

$$\cos x \left(\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \tan x - 2 \right) \geq 0,$$

ovvero

$$\cos x \left(\tan^3 x - 2\tan^2 x + 3\tan x - 2 \right) \geq 0,$$

dove abbiamo eliminato il denominatore perché, nel dominio, risulta strettamente positivo. Il termine tra parentesi può essere scomposto in quanto ammette la soluzione $\tan x = 1$. Si ottiene

$$\cos x \, (\tan x - 1)\left(\tan^2 x - \tan x + 2\right) \geq 0.$$

L'ultimo fattore può essere semplificato, in quanto strettamente positivo nel dominio (il discriminante è negativo). Si può a questo punto costruire un grafico di segno per concludere. Nel costruire il grafico abbiamo tenuto conto da subito delle condizioni poste per il dominio.

+/−	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x$	+	+	+	+	×	−	−	−	×	+	
$\tan x - 1$	−	−	0	+	×	−	0	+	×	−	
prodotto	−	−	0	+	×	+	0	−	×	−	

Se ne deduce che l'insieme delle soluzioni è

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi \right].$$

Abbiamo preferito raccogliere $\cos x$, anziché dividere per $\cos x$: quest'ultimo modo di procedere avrebbe richiesto di considerare due casi, a seconda che $\cos x > 0$ oppure $\cos x < 0$. Si sarebbero naturalmente ottenute le stesse soluzioni, ma, a nostro avviso, con più rischio di sbagliare. □

Esercizio 5.21. *Verificare che l'equazione* $2t^3 + t^2 + t - 1 = 0$ *ha una soluzione razionale e trovare, nell'intervallo* $[0, (5/2)\pi]$, *le soluzioni della seguente disequazione trigonometrica:*

$$\frac{2\sin^2 x + 3\sin x - 2}{2\cos^3 x + \cos x - \sin^2 x} \geq 0\,.$$

Risoluzione. Le possibili soluzioni razionali dell'equazione di terzo grado data sono

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},$$

e si verifica che $1/2$ è soluzione. Eseguiamo la divisione del polinomio a primo membro, per esempio con la regola di Ruffini, per $x - 1/2$. Si ottiene

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1/2 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\,.$$

Dunque

$$2t^3 + t^2 + t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)(2t^2 + 2t + 2) = (2t - 1)(t^2 + t + 1).$$

Passando alla risoluzione della disequazione proposta, troviamo il segno di numeratore e denominatore. Si ha

$$2\sin^2 x + 2\sin x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x < -2 \lor \sin x > \frac{1}{2},$$

ovvero, nel tratto $[0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}.$$

Per il denominatore si ha poi

$$2\cos^3 x + \cos x - \sin^2 x = 2\cos^3 x + \cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1).$$

Il secondo fattore è strettamente positivo, il primo è positivo per $\cos x > 1/2$, ovvero, nel tratto $[0, 2\pi[$,

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \lor \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi.$$

Possiamo costruire il solito grafico di segno.

+/−	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
numeratore	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−	
denominatore	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	
frazione	−	−	0	+	×	−	0	+	×	−	

Tenendo conto della periodicità, si conclude che, nell'intervallo richiesto, le soluzioni sono

$$x \in \left[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi\right[\cup \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi\right[\cup \left[\frac{13}{6}\pi, \frac{7}{3}\pi\right[.$$

Si noti che non abbiamo preventivamente trovato il dominio della disequazione data: la costruzione del grafico di segno permette di ottenere direttamente questo dominio. Bisogna prestare attenzione a questo fatto nel risolvere una disequazione. Per esempio nell'esercizio 5.20 abbiamo ritenuto molto più proficuo determinare il dominio a priori e in genere questo nodo di procedere è da preferire. □

Esercizio 5.22. *Risolvere l'equazione trigonometrica nell'intervallo* $[0, \pi]$

$$\sin(x+\pi) + \sin 2x = \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right).$$

Risoluzione. La risoluzione di un'equazione trigonometrica come quella proposta richiede una attenta disanima preventiva delle varie possibilità di soluzione. La prima strategia che può essere utilizzata è quella di usare le formule di addizione e sottrazione, bisezione e duplicazione per ridursi a funzioni nello stesso argomento. Si otterrebbe

$$-\sin x + 2\sin x\cos x = \sin\frac{x}{2}.$$

Poiché sono richieste solo le soluzioni in $[0, \pi]$, $\sin x$ e, a maggior ragione, $\sin {}^{x}\!/_{2}$ è positivo; si ottiene dunque

$$-\sin x + 2\sin x\cos x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Elevando al quadrato si ottiene un'equazione facilmente esprimibile solo mediante $\cos x$:

$$8\cos^4 x - 8\cos^3 x - 6\cos^2 x + 7\cos x - 1 = 0.$$

Poiché $\cos x = 1$ è soluzione, il primo membro si può scomporre in

$$(\cos x - 1)(8\cos^3 x - 6\cos x + 1) = 0.$$

Da qui si ricava subito, nell'intervallo $[0, \pi]$, $x = 0$. Purtroppo il termine di terzo grado non ha radici razionali e quindi non è possibile, con gli strumenti a nostra disposizione, procedere nella risoluzione.

Riesaminiamo allora l'equazione proposta e osserviamo che al primo membro si può applicare la formula di prostaferesi della somma di due seni. Si ottiene

$$2\cos\frac{\pi - x}{2} = \cos\frac{x-\pi}{2}.$$

Tenendo conto che la funzione coseno è pari, portando tutto a primo membro l'equazione si riscrive nella forma

$$\cos\frac{x-\pi}{2}\left(2\sin\frac{3x+\pi}{2} - 1\right) = 0.$$

Se ne deduce innanzitutto

$$\cos\frac{x-\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi,$$

e quindi $x = 0$ nell'intervallo richiesto (soluzione già trovata con il metodo precedente). Si ha poi

$$\sin\frac{3x+\pi}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \dfrac{3x+\pi}{2} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ovvero} \quad x = \dfrac{4k\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{9} \\ \dfrac{3x+\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ovvero} \quad x = \dfrac{4k\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{9} \end{cases}.$$

Solo la soluzione $x = {}^{2\pi}/_{9}$ sta nell'intervallo richiesto.

Si noti che questo risultato conferma che il polinomio di terzo grado in coseno precedentemente trovato non ha soluzioni razionali: il coseno di ${}^{2\pi}/_{9}$ non è infatti razionale, anzi non può nemmeno essere determinato usando le formule goniometriche a partire dai valori noti per gli angoli notevoli. □

Esercizio 5.23. *Risolvere l'equazione nell'intervallo* $\left]0, \frac{5}{2}\pi\right]$*:*

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{2 - \sin x} = \frac{2}{\sqrt{2-\sin x}}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere solo $\sin x \geq 0$ in quanto $2 - \sin x$ è sempre strettamente positivo. Si ottiene, riducendo allo stesso denominatore e semplificando,

$$\sqrt{\sin x(2 - \sin x)} = \sin x.$$

Trattandosi di un'uguaglianza tra numeri positivi, possiamo elevare al quadrato senza introdurre soluzioni estranee. Si ottiene, dopo semplificazione,

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0 \lor \sin x = 1.$$

Nell'intervallo proposto le soluzioni sono allora

$$x \in \left\{\frac{1}{2}\pi, \pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi\right\}.$$ □

Esercizio 5.24. *Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$:*

$$\left(\sin(x-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2=\frac{1+\cos 3x}{2}.$$

Risoluzione. Riducendo allo stesso denominatore e portando tutto a primo membro l'equazione si riscrive

$$2\left(\sin(x-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2-1-\cos 3x=0$$

Eseguendo i calcoli indicati a primo membro si ottiene successivamente

$$\begin{aligned}2\left(\sin(x-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2-1\cos 3x &= 2(\sin 2x-\sin x)^2-1-\cos 3x= \\ &= 2(2\sin x\cos x-\sin x)^2-1-\cos^3 x+3\sin^2 x\cos x= \\ &= 8\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^2 x-8\sin^2 x\cos x-1-\cos^3 x+3\sin^2 x\cos x= \\ &= 8\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^2 x-5\sin^2 x\cos x-1-\cos^3 x.\end{aligned}$$

L'equazione può essere trasformata in un'equazione contenente solo la funzione $\cos x$. Si ottiene, dopo semplificazione,

$$8\cos^4 x-4\cos^3 x-6\cos^2 x+5\cos x-1=0.$$

Utilizzando la regola di Ruffini si può scomporre il primo membro, ottenendo

$$8(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^3=0,$$

da cui

$$\cos x=-1 \lor \cos x=\frac{1}{2}, \quad \text{ovvero} \quad x=\pi+2k\pi \lor x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

In realtà l'esercizio poteva essere risolto molto più elegantemente usando le formule di prostaferesi e di bisezione. Si ha infatti

$$\left(\sin(x-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=(\sin 2x-\sin x)=2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

e

$$\frac{1+\cos 3x}{2}=\cos^2\frac{3x}{2}.$$

L'equazione si può riscrivere allora

$$\cos^2\frac{3x}{2}\left(4\sin^2\frac{x}{2}-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{3x}{2}(1-2\cos x)=0,$$

da cui si ottengono le stesse soluzioni di prima.

Si tenga sempre presente l'uso delle formule di prostaferesi che consentono di "ridurre il numero di addendi", favorendo così eventuali scomposizioni in fattori. □

Esercizio 5.25. *Risolvere la disequazione in* $[0, 2\pi]$*:*

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{2\sin^2 x + (4-\sqrt{2})\sin x - 2\sqrt{2}} > 0 .$$

Risoluzione. Troviamo il segno di numeratore e denominatore e poi facciamo il solito grafico di segno. Le uniche condizioni per il dominio sono legate alla presenza del denominatore: possiamo evitare di trovare il dominio preventivamente, in quanto lo stesso grafico di segno ci fornirà le condizioni corrette. Per il numeratore si ha

$$\sin x + \cos x - 1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) - 1 = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1.$$

Si avrà dunque

$$\sin x + \cos x - 1 > 0 \quad \text{se} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

da cui

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Per il denominatore si ha

$$2\sin^2 x + (4-\sqrt{2})\sin x - 2\sqrt{2} > 0 \quad \text{se} \quad \sin x < -2 \vee \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ovvero

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

+/−	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		2π
numeratore	0	+	+	+	0	−	−	−	
denominatore	−	−	0	+	+	+	0	−	
frazione	0	−	×	+	0	−	×	+	

Le soluzioni sono dunque, nell'intervallo richiesto,

$$x \in \left]\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[\cup \left]\frac{3}{4}\pi, 2\pi\right[.$$

□

Esercizio 5.26. *Risolvere nell'intervallo* $[-\pi, \pi]$ *la disequazione*

$$\sin^2 x - \sin x + \cos x - \sin x \cos x \geq 0 .$$

Risoluzione. Si può scomporre il primo membro

$$\sin x(\sin x-1)-\cos x(\sin x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (\sin x-1)(\sin x-\cos x)\geq 0.$$

Possiamo trovare il segno di ciascuno dei due fattori e poi costruire il solito grafico di segno. Possiamo anche osservare che il primo fattore si annulla per $x=\pi/2+2k\pi$ e altrove è sempre negativo. La disequazione sarà dunque verificata per $x=\pi/2+2k\pi$ e negli intervalli dove il secondo fattore è negativo o nullo:

$$\sin x-\cos x\leq 0.$$

Nell'intervallo richiesto si conclude facilmente

$$x\in\left[-\frac{3}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}.$$

□

Esercizio 5.27. *Risolvere l'equazione*

$$5\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=2,\quad x\in\mathbb{R}$$

Risoluzione. Si tratta di un'equazione riducibile a omogenea di secondo grado in seno e coseno. Si può risolvere in vari modi.

$$5\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x-2(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$$

Osservato che $\cos x=0$ non è soluzione si può dividere per $\cos^2 x$ ottenendo un'equazione nella funzione tangente:

$$3\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x-3=0\quad\Rightarrow\quad \tan x=\sqrt{3}\vee\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}, dacui$$

$$x=\frac{\pi}{3}+k\pi\vee x=-\frac{\pi}{6}+k\pi.$$

Si potevano anche usare le formule di bisezione

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Si ottiene, dopo semplificazione,

$$3\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=0.$$

Raccogliendo

$$\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3},$$

si ottiene

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=0\quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

da cui

$$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi\quad\text{ovvero}\quad x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},$$

che è lo stesso risultato di prima, anche se scritto in maniera diversa. □

Esercizio 5.28. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\cos x - \sin x}{\tan^2 x - 1} \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \tan x \neq \pm 1 \quad \text{ovvero} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Si può poi trovare il segno di numeratore e denominatore e costruire il solito grafico di segno. Riportiamo solo il grafico finale: i calcoli sono elementari.

$+/-$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
num.	$+$	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	
den	$-$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	
fraz.	$-$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	

Si ha dunque

$$x \in \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[. \qquad \square$$

Esercizio 5.29. *Risolvere l'equazione*

$$\sin x - \sin 5x = \cos 3x \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Risoluzione. Usando le formule di prostaferesi della differenza di due seni, l'equazione si riscrive

$$2\cos 3x \sin(-2x) = \cos 3x \quad \Rightarrow \quad \cos 3x(2\sin 2x + 1) = 0,$$

da cui

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,$$

ovvero

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,$$

Nell'intervallo richiesto si ha

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right\}. \qquad \square$$

Esercizio 5.30. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\sin x - \cos x}{1 - \cot^2 x} \leq 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$x \neq k\pi \wedge \cot x \neq \pm 1 \quad \text{ovvero} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Si può poi costruire il solito grafico di segno. Riportiamo solo il grafico finale visto che i calcoli sono standard.

$+/-$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
num.	×	−	×	+	×	+	×	+	×	−	×	−	
den.	×	−	×	+	×	−	×	−	×	+	×	−	
frazione	×	+	×	+	×	−	×	−	×	−	×	+	

Nell'intervallo richiesto le soluzioni sono

$$x \in \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[.$$ □

Esercizio 5.31. *Risolvere nell'intervallo* $[0, 3\pi]$ *la seguente equazione*

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin x} - \frac{1+\cos 2x}{\cos x} = 0.$$

Risoluzione. Dopo aver trovato il dominio, che richiede

$$x \neq k\frac{\pi}{2},$$

applicando le formule di duplicazione del coseno l'equazione si semplifica in

$$\sin x - \cos x = 0,$$

che, nell'intervallo richiesto, ha le soluzioni

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right\}.$$ □

Esercizio 5.32. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *la disequazione*

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}.$$

Risoluzione. Raccogliendo, a primo membro,

$$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

la disequazione si riscrive

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si conclude facilmente

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi \quad \text{ovvero} \quad x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right].$$ □

Esercizio 5.33. *Risolvere nell'intervallo* $[0, 2\pi]$ *la seguente equazione*

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{2}\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ 1 + \cos 2x \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Successivamente, applicando le formule di duplicazione del coseno, l'equazione si semplifica in

$$\sqrt{2}\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0.$$

Si conclude, nell'intervallo considerato,

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}.$$ □

Esercizio 5.34. *Risolvere in* $\mathbb{R}$ *la seguente disequazione*

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x < \sqrt{3}.$$

Risoluzione. Si tratta di una disequazione riducibile a omogenea di secondo grado in seno e coseno. A nostro avviso conviene applicare le formule di bisezione del coseno (se l'equazione contenesse anche $\sin^2 x$ anche quelle del seno)

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

ottenendo

$$\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x < 0.$$

Raccogliendo, a primo membro,

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

si ottiene

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \pi + 2k\pi < \frac{2\pi}{3} + 2x < 2\pi + 2k\pi.$$

Si conclude

$$\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi \quad \text{ovvero} \quad x\in\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}\left]\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right[$$

□

Esercizio 5.35. *Risolvere la seguente disequazione*

$$\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x\ge 1$$

nell'intervallo $[0,2\pi]$.

Risoluzione. Applicando le solite formule

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{e} \quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

si ottiene

$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x\ge 1 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)\ge 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\ge\frac{1}{2}.$$

Si conclude che deve essere

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi\le\frac{\pi}{6}+2x\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad \text{ovvero} \quad k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

Nell'intervallo richiesto le soluzioni sono

$$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\pi,4\frac{\pi}{3}\right].$$

□

Esercizio 5.36. *Risolvere nell'intervallo* $[0,2\pi]$ *la seguente disequazione*

$$|\sin x|\ge\cos x\,.$$

Risoluzione. Tenendo conto che si ha

$$|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & \text{se } 2k\pi\le x\le\pi+2k\pi;\\ -\sin x, & \text{se } \pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi.\end{cases},$$

si ottiene

$$\begin{cases}2k\pi\le x\le\pi+2k\pi\\ \sin x\ge\cos x\end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi\\ -\sin x\ge\cos x\end{cases}.$$

Dunque

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\pi+2k\pi \quad \cup \quad \pi+2k\pi<x<\frac{7\pi}{4}+2k\pi,$$

e, nell'intervallo richiesto,

$$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right].$$

La risoluzione sarebbe stata molto più agevole e veloce utilizzando i grafici delle funzioni a primo e secondo membro. Riportiamo nella figura 5.5 il grafico che permette di trarre le conclusioni già ottenute per via algebrica. □

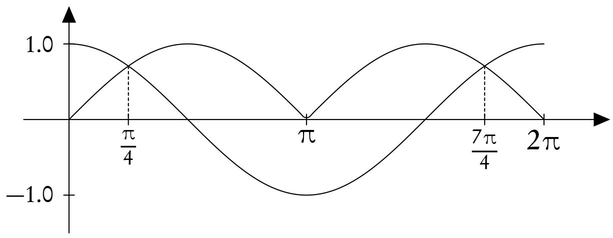


Figura 5.5: *Figura relativa all'esercizio* 5.36

Esercizio 5.37. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} \leq \sqrt{3}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Risoluzione. La disequazione si riscrive facilmente nella forma

$$\frac{\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1}{\sin x} \leq 0.$$

Possiamo ora trovare il segno di numeratore e denominatore. Per il numeratore si deve risolvere la disequazione

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) > \frac{1}{2}.,$$

ovvero

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi.$$

Il denominatore è positivo per $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$. si può costruire il solito grafico di segno.

+/−	0		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
num.	0	−	−	−	0	+	
den.	0	+	0	−	−	−	
frazione	×	−	×	+	0	−	

Nell'intervallo richiesto le soluzioni sono

$$x \in]0, \pi[\cup \left[\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right[. \qquad \square$$

Esercizio 5.38. *Risolvere l'equazione*

$$\sin x = \cos 2x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Risoluzione. Dopo aver applicato le formule di duplicazione per il coseno, l'equazione si riscrive

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

da cui

$$\sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2}.$$

Nell'intervallo richiesto le soluzioni sono

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

□

Esercizio 5.39. *Dopo aver risolto la disequazione*

$$|\sin x| < \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

dedurre le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} |\sin x| < \dfrac{1}{2} \\ |\tan x| > 0 \end{cases}.$$

Risoluzione. La disequazione data è equivalente a

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

ovvero, nell'intervallo richiesto,

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right].$$

Per risolvere il sistema basta tenere conto che

$$|t| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \neq 0.$$

Basterà dunque escludere i punti dove la tangente si annulla. Si ottiene

$$x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right[.$$

□

Esercizio 5.40. *Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema*

$$\begin{cases} 2a^2 + 5\cos 2x - 12a\cos x + 5 = 0 \\ \tan^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

ammette soluzioni $x \in [0, 2\pi]$?

Risoluzione. Dalla seconda equazione si ricava

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x=\frac{3}{5}.$$

Sostituendo nella prima si ricava facilmente

$$a \in \left\{\frac{3}{5}, 3\right\}.$$

□

Esercizio 5.41. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\cos 2x-\sin x}{\sqrt{2\cos x-1}} \leq 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$2\cos x-1>0 \quad \Rightarrow \quad \cos x>\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

A questo punto il denominatore è strettamente positivo e può essere semplificato. La disequazione si riduce a

$$\cos 2x-\sin x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2 x+\sin x-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \leq -1 \vee \sin x \geq \frac{1}{2},$$

da cui

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

Tenendo conto conto del dominio, si conclude che, nell'intervallo richiesto, le soluzioni sono

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[.$$

□

Esercizio 5.42. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>\cos 2x, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\frac{\pi}{4}-x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{ovvero, in } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x \neq -\frac{\pi}{4}.$$

La disequazione si può riscrivere come

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}>\cos^2 x-\sin^2 x,$$

ovvero

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)>0 \quad \Rightarrow \quad (\cos x-\sin x)\frac{-2\sin x\cos x}{\cos x+\sin x}>0.$$

A questo punto si può costruire il solito diagramma di segno, che riportiamo relativamente all'intervallo richiesto.

$+/-$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x - \sin x$		$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$-2\sin x$		$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\cos x$		$+$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\cos x + \sin x$		$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
frazione		$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Se ne deduce che le soluzioni sono

$$x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

□

Esercizio 5.43. *Risolvere l'equazione in* $\mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\cos(-x) + \frac{1}{2} = 0.$$

Risoluzione. Applicando le formule di sottrazione e ricordando che $\cos x$ è una funzione pari, l'equazione si riscrive

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

da cui

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{piup}{6} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Le soluzioni sono allora

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

□

Esercizio 5.44. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\sin x}{4\cos^2 x - 1} \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Risoluzione. Si può direttamente trovare il segno di numeratore e denominatore e costruire il grafico di segno, dal quale si ricaveranno anche le condizioni per il dominio. Il segno del numeratore è molto semplice da determinare; il denominatore è positivo se

$$\cos x < -\frac{1}{2} \ \vee \ \cos x > \frac{1}{2},$$

ovvero, nell'intervallo richiesto,

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi.$$

Il grafico di segno diventa

$+/-$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sin x$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$4\cos^2 x - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
frazione	0	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	0	$+$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	0

Le soluzioni sono dunque

$$\{0\} \cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

Si noti, nel grafico di segno, che la colonna sottostante il 2π poteva anche non essere compilata: stante la periodicità essa è identica a quella sottostante lo 0. □

Esercizio 5.45. *Risolvere la disequazione in* $\mathbb{R}$

$$\tan^2 x - \tan x > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Risoluzione. Si tratta di una disequazione a risoluzione immediata: si deve avere

$$\tan x < 0 \vee \tan x > 1, \quad \text{ovvero} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$ □

Esercizio 5.46. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} \leq \sqrt{3}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Risoluzione. Portando a primo membro e riducendo allo stesso denominatore si ottiene

$$\frac{\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1}{\sin x} \leq 0.$$

Il segno del denominatore si determina facilmente. Il numeratore è positivo se

$$\cos x - \sqrt{3}\sin x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) > 1,$$

ovvero

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi.$$

Possiamo ora costruire il solito grafico di segno, limitandoci all'intervallo richiesto.

$+/-$	$-\pi$		$-\dfrac{2\pi}{3}$		0		π
num.		$-$	0	$+$	0	$-$	
den.		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
frazione		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	

Per le soluzioni si ha dunque

$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right[\cup]0, \pi[. \qquad \square$$

Esercizio 5.47. *Risolvere la disequazione*

$$\cos 2x + 3\sin x \geq 2\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Applicando le formule di duplicazione del coseno la disequazione può essere facilmente riscritta come

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1,$$

ovvero

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Esercizio 5.48. *Risolvere la disequazione*

$$2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x \leq 1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Si usano le formule di bisezione di seno e coseno e di duplicazione del seno:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

ottenendo

$$\cos 2x + \sin 2x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) \geq 1,$$

ovvero

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

Le soluzioni sono

$$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Esercizio 5.49. *Risolvere la disequazione*

$$\sin^2 x - \cos^2 x \leq \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. La disequazione si riscrive

$$2\cos^2 x+\cos x-1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \cos x\leq -1 \vee \cos x\geq \frac{1}{2},$$

da cui le conclusioni

$$x=\pi+2k\pi \vee -\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq \frac{\pi}{3}+2k\pi.$$

□

Esercizio 5.50. *Risolvere l'equazione*

$$8\sin^2 x+8\cos^4 x-13\cos 2x=0, \quad x\in[0,2\pi].$$

Risoluzione. L'equazione si riscrive

$$8\cos^4 x-34\cos^2 x+21=0 \quad\Rightarrow\quad \cos^2 x=\frac{3}{4} \vee \cos^2 x=\frac{7}{2}.$$

La seconda possibilità è da scartare, dalla prima si ricava

$$\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad\Rightarrow\quad x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}.$$

□

Esercizio 5.51. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{2\cos^2 x-\sin 2x}{1-\tan^2 x}\geq 0, \quad x\in[0,2\pi].$$

Risoluzione. Per il dominio occorre tenere conto delle condizioni per l'esistenza della tangente e del fatto che $\tan x\neq\pm1$. Si trova

$$x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

A questo punto si possono eseguire i calcoli ottenendo

$$\frac{2\cos^x-2\sin x\cos x}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2\cos^3 x}{\cos x+\sin x}\geq 0.$$

Si può costruire il solito grafico di segno (che tiene conto anche del dominio trovato).

+/−	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$2\cos^3 x$	+	+	×	+	×	−	×	−	×	−	×	+	×	+	
$\cos x+\sin x$	+	+	×	+	×	+	×	−	×	−	×	−	×	+	
frazione	+	+	×	+	×	−	×	+	×	+	×	−	×	+	

Le soluzioni sono

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \qquad \square$$

Esercizio 5.52. *Ricavare* $\tan x$ *dal sistema*

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 7/5 \\ 2\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x \cos x - 5\sin x = 3/25 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Ricaviamo $\cos x$ dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda, ottenendo

$$2\sin^2 x + 3\left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x \left(\frac{7}{5} - \sin x\right) - 5\sin x = \frac{3}{25},$$

ovvero

$$25\sin^2 x + 45\sin x - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \begin{cases} 3/4 \\ -12/5 \end{cases}.$$

Solo il primo valore è accettabile. Da qui si ottiene

$$\cos x = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{3}{4}. \qquad \square$$

Esercizio 5.53. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\cos 2x - \cos x}{\sin x} > 0, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Risoluzione. La disequazione può essere riscritta

$$\frac{2\cos^2 x - \cos x - 1}{\sin x} > 0.$$

Per il segno del numeratore si deve risolvere la disequazione

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x < -\frac{1}{2} \vee \cos x > 1.$$

Si può costruire il tradizionale grafico di segno.

+/−	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
num.	0	−	0	+	+	+	0	−	
den.	0	+	+	+	0	−	−	−	
frazione	×	−	0	+	×	−	0	+	

Per le soluzioni si ha dunque

$$x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[. \qquad \square$$

Esercizio 5.54. *Risolvere la seguente disequazione*

$$\frac{\cos x - \sin x}{1 + \tan x} \geq 0$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Risoluzione. Per il dominio si deve avere, nell'intervallo richiesto,

$$x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{4} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} \wedge x \neq \frac{7\pi}{4}.$$

Si può costruire facilmente il solito grafico di segno

+/−	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
num.	+	+	0	−	×	−	×	−	0	+	×	+	×	+	
den.	+	+	+	+	×	−	×	+	+	+	×	−	×	+	
frazione	+	+	0	−	×	+	×	−	0	+	×	−	×	+	

Per le soluzioni si ha dunque

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]. \qquad \square$$

6 Potenze, logaritmi ed esponenziali

Esercizio 6.1. *Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti uguaglianze?*

1. $\log(1+x) - \log(1-x) = \log \dfrac{1+x}{1-x}$.
2. $\log|1+x| - \log|1-x| = \log \dfrac{1+x}{1-x}$.
3. $\log(1-x^2) - \log(1-x) = \log \dfrac{1-x^2}{1-x}$.

Risoluzione. Per la prima uguaglianza osserviamo che il primo membro ha senso se

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad -1<x<1.$$

Il secondo membro ha senso se

$$\frac{1+x}{1-x}>0\,,$$

disequazione fratta che si risolve con lo schema seguente.

$+/-$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\times$	$-$	

Da qui si deduce che anche per il secondo membro si deve avere $-1<x<1$. Dunque la prima uguaglianza ha senso se $-1<x<1$.

Per la seconda uguaglianza si trova che il primo membro ha senso se $x \neq \pm 1$, il secondo se $-1<x<1$, dunque essa ha senso ancora se $-1<x<1$.

Per la terza al primo membro si deve avere

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-x>0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad -1<x<1.$$

Al secondo membro deve essere
$$\frac{1-x^2}{1-x}>0\,,$$
che si risolve con lo schema seguente.

$+/-$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\dfrac{1-x^2}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\times$	$+$	

Anche la terza uguaglianza è allora verificata se $-1<x<1$. □

Esercizio 6.2. *È possibile che l'equazione*
$$\log(1-x^4)-\log(1-x^2)=1-x^4$$
abbia 3 *soluzioni?*

Risoluzione. Poiché l'equazione data è simmetrica in x, se ha una soluzione ha anche l'opposta, dunque il numero di soluzioni è sicuramente pari.

Anche se non richiesto dal testo, conviene osservare che per il dominio del primo membro si deve avere
$$\begin{cases} 1-x^4>0 \\ 1-x^2>0 \end{cases},\quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1-x^2)(1+x^2)>0 \\ 1-x^2>0 \end{cases},\quad \Rightarrow \quad 1-x^2>0,\quad \Rightarrow \quad -1<x<1.$$
A questo punto l'equazione si può anche scrivere nella forma semplificata
$$\log(1+x^2)=1-x^4,\quad -1<x<1.$$
□

Esercizio 6.3. *Per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la seguente equazione è verificata per ogni $x<-4$?*
$$\log(kx-2)+\log(kx+2)=\log(k^2x^2-4).$$

Risoluzione. Se $k=0$ l'equazione non ha alcuna soluzione (sia il primo che il secondo membro risultano non definiti). Supponiamo dunque $k\neq 0$. Per le proprietà dei logaritmi basterà poi solo controllare che il dominio dell'equazione contenga[1] l'insieme $]-\infty,-4[$.

Osserviamo innanzitutto che, essendo $(kx-2)(kx+2)=k^2x^2-4$ il dominio del secondo membro è un soprainsieme di quello del primo membro: per il primo membro si deve infatti avere
$$kx-2>0 \wedge kx+2>0,$$

[1]Attenzione: dire che l'equazione deve essere verificata per tutti gli $x<-4$ non esclude la possibilità che ci siano anche altre soluzioni $x\geq 4$.

mentre per il secondo si deve avere

$$(kx-2>0 \wedge kx+2>0) \vee (kx-2<0 \wedge kx+2<0).$$

Basterà dunque ragionare sul dominio del primo membro.

Se k>0 si deve avere

$$x>\frac{2}{k} \wedge x>-\frac{2}{k} \quad \Rightarrow \quad x>\frac{2}{k},$$

e questo insieme non può contenere l'insieme $]-\infty,-4[$.

Se $k<0$ si deve avere

$$x<\frac{2}{k} \wedge x<-\frac{2}{k} \quad \Rightarrow \quad x<\frac{2}{k},$$

Affinche questo insieme contenga l'insieme $]-\infty,-4[$ dovrà dunque essere

$$\frac{2}{k}\geq -4 \quad \Rightarrow \quad k\leq -\frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 6.4. *Risolvere l'equazione*

$$\log\frac{x-2}{2}=\log\sqrt{x+6}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x>2$. Si ha poi

$$\frac{x-2}{2}=\sqrt{x+6}.$$

Quadrando e semplificando (senza alcun problema in quanto si tratta di quantità strettamente positive) si ottiene

$$x^2-8x-20=0$$

che ha come unica soluzione accettabile $x=10$. □

Esercizio 6.5. *Risolvere l'equazione*

$$2^{\sqrt{x-1}}\cdot 2^{\sqrt{x+1}}=16^{1/\sqrt{x+1}}.$$

Risoluzione. Per il dominio si ha, intanto, $x>1$. L'equazione può essere riscritta nella forma

$$2^{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=2^{4/\sqrt{x+1}},$$

da cui

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\frac{4}{\sqrt{x+1}}.$$

Dopo semplificazione ed elevazione al quadrato si trova $x={}^5/_3$, che risulta accettabile. □

Esercizio 6.6. *Quante soluzioni ha l'equazione*

$$\ln x = \frac{1}{x-1}\,?$$

Risoluzione. L'equazione non può essere risolta con metodi elementari. Tuttavia si può applicare il metodo grafico, in quanto le funzioni a primo e secondo membro sono tracciabili per via elementare: $\ln x$ è la funzione logaritmo naturale, $1/(x-1)$ è semplicemnte l'iperbole $xy = 1$ traslata di una unità verso destra. Si veda la figura 6.1.

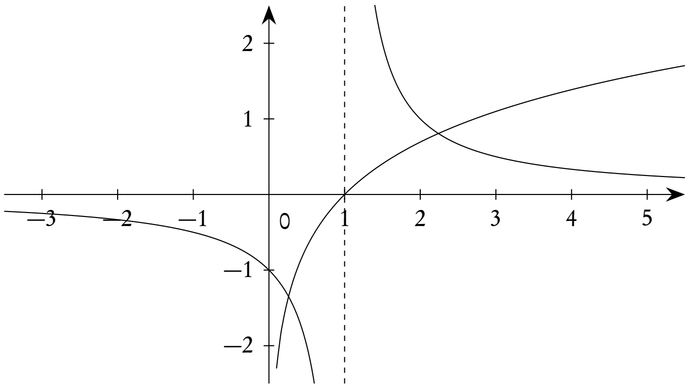


Figura 6.1: *Figura relativa all'esercizio* 6.6

Si conclude che l'equazione ha due soluzioni. □

Esercizio 6.7. *Sapendo che*

$$2^{\sqrt{2}}$$

è irrazionale[2]*, provare che anche*

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

è irrazionale. Tenendo conto di questo risultato trovare una coppia di irrazionali α e β tali che

$$\alpha^{\beta}$$

sia razionale.

Risoluzione. Si ha

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = \left(2^{(1/2)}\right)^{\sqrt{2}} = \left(2^{\sqrt{2}}\right)^{(1/2)} = \sqrt{2^{\sqrt{2}}}.$$

Se $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}$ fosse razionale, anche il suo quadrato, cioè $2^{\sqrt{2}}$, lo sarebbe, in contrasto con l'ipotesi. Si ha poi

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

[2] In realtà questo numero, che prende il nome di costante di Gelfond–Schneider, è addirittura trascendente, e compare tra gli esempi citati da Hilbert a proposito del *settimo* dei problemi da lui proposti l'8 agosto 1900 nella sua conferenza al Congresso internazionale dei matematici di Parigi.

e da qui si ottiene l'esempio richiesto. Anche

$$\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 4$$

costituisce un ulteriore esempio.

È abbastanza interessante osservare che, anche senza sapere se

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

è irrazionale o no, è possibile mostrare che una potenza di base ed esponente irrazionali può essere razionale. Infatti se

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

fosse razionale esso stesso sarebbe l'esempio di un irrazionale elevato ad un irrazionale che ha come risultato un razionale. Se invece

$$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

fosse irrazionale (come abbiamo provato, anche se qui questo fatto non conta),

$$\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

sarebbe l'esempio richiesto (che è proprio uno dei due che abbiamo proposto sopra). Si noti che con questo ragionamento non abbiamo costruito un esempio, abbiamo solo provato che questo fatto è possibile. □

Esercizio 6.8. *Risolvere la disequazione*

$$\log_{|x^2-x|} 2 < \log_{|x^2-x|} 3.$$

Risoluzione. Iniziamo determinando il dominio:

$$\begin{cases} |x^2-x| > 0 \\ |x^2-x| \neq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \wedge x \neq 1 \\ x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Cambiando la base la disequazione si può riscrivere come

$$\frac{\ln 2}{\ln|x^2-x|} < \frac{\ln 3}{\ln|x^2-x|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln 2 - \ln 3}{\ln|x^2-x|} < 0.$$

Poiché il numeratore è negativo, basterà che il denominatore sia positivo:

$$\ln|x^2-x| > 0 \quad \Rightarrow \quad |x^2-x| > 1 \quad \Rightarrow \quad x^2-x < -1 \vee x^2-x > 1.$$

La prima disequazione non è mai verificata, la seconda lo è per

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

e queste sono le soluzioni della disequazione data. □

Esercizio 6.9. *Risolvere la disequazione*

$$2^{4^x} < 4^{2^x} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. La disequazione si può riscrivere

$$2^{4^x} < (2^2)^{2^x} \quad \Rightarrow \quad 2^{4^x} < 2^{2\cdot 2^x} \quad \Rightarrow \quad 2^{4^x} < 2^{2^{x+1}}.$$

Poiché la base è maggiore di 1, si ottiene

$$4^x < 2^{x+1} \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} < 2^{x+1} \quad \Rightarrow \quad 2x < x+1.$$

Se ne deduce che deve essere

$$x \in]-\infty, 1[.$$

□

Esercizio 6.10. *Risolvere, nel suo dominio naturale, l'equazione in* $\mathbb{R}$

$$\ln x + \ln(x + \mathrm{e}) = \ln(2\mathrm{e}^2).$$

Risoluzione. Il dominio naturale è $x > 0$. Si ha poi

$$\ln\big(x(x+\mathrm{e})\big) = \ln(2\mathrm{e}^2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + \mathrm{e}x - 2\mathrm{e}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{e} \vee x = -2\mathrm{e}.$$

Solo il primo valore è accettabile. □

Esercizio 6.11. *Dopo aver specificato il dominio in* $\mathbb{R}$*, risolvere l'equazione*

$$\log(x+1) + \log(x) = 2\log(1-x).$$

Perché la soluzione non dipende dalla base dei logaritmi?

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 1.$$

Si ha poi

$$\log\big((x+1)x\big) = \log(1-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x = 1 + x^2 - 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}.$$

Il risultato non dipende dalla base dei logaritmi, perché le proprietà dei logaritmi che abbiamo applicato non dipendono dalla base. □

Esercizio 6.12. *Risolvere l'equazione rispetto a* $x \in \mathbb{R}$

$$a^{1+\sqrt{x}} + a^{3-\sqrt{x}} = 2a^2$$

essendo $a > 0$ *un numero reale fissato.*

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x \geq 0$. Successivamente si ha

$$a \cdot a^{\sqrt{x}} + a^3 \cdot \frac{1}{a^{\sqrt{x}}} = 2a^2.$$

Posto

$$a^{\sqrt{x}} = t$$

dopo semplificazione si ottiene

$$t^2 - 2at + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = a \quad \Rightarrow \quad a^{\sqrt{x}} = a \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$ □

Esercizio 6.13. *Dopo averne specificato il dominio in* $\mathbb{R}$*, risolvere l'equazione*

$$12 \log_x 2 + \log_2 x = 8\,.$$

Risoluzione. Tenendo conto che la base dei logaritmi deve essere strettamente positiva e diversa da 1 e che l'argomento dei logaritmi deve essere strettamente positivo, si trova, per il dominio, $x \in [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Conviene poi eseguire un cambiamento di base

$$\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Posto poi $\log_2 x = t$, dopo semplificazione si ottiene

$$t^2 - 8t + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \,\vee\, t = 6.$$

Si ottiene quindi

$$\log_2 x = 2 \,\vee\, \log_2 x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \,\vee\, x = 64.$$ □

Esercizio 6.14. *Risolvere l'equazione*

$$\log_2(3 \cdot 2^x - \sqrt{2} \cdot 2^{2x}) = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$3 \cdot 2^x - \sqrt{2} \cdot 2^{2x} > 0.$$

Posto $2^x = t$, si ottiene

$$3t - \sqrt{2}t^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < t < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 0 < 2^x < \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

La prima disequazione è sempre verificata; dalla seconda si ottiene, prendendo il logaritmo in base 2 di ambo i membri,

$$x < \log \frac{3}{\sqrt{2}} = \log_2 3 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 3 - \frac{1}{2} \simeq 1.085.$$

Successivamente si ha

$$\log_2(3\cdot 2^x-\sqrt{2}\cdot 2^{2x})=\log_2\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 2^x-\sqrt{2}\cdot 2^{2x}-\sqrt{2}=0.$$

Posto $2^x=t$ si ottiene, dopo semplificazione,

$$\sqrt{2}t^2-3t+\sqrt{2}=0 \quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{2} \vee t=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$2^x=\sqrt{2}=2^{1/2} \vee 2^x=\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-1/2}.$$

Le soluzioni sono

$$x=\pm\frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 6.15. *Risolvere l'equazione*

$$\log_{\frac{1}{81}}(x^2-1)=-\frac{1}{4}.$$

Risoluzione. Si deve avere, per il dominio, $x<-1 \vee x>1$. Successivamente l'equazione si riscrive

$$\log_{\frac{1}{81}}(x^2-1)=\log_{\frac{1}{81}}\left(\frac{1}{81}\right)^{-1/4} \quad\Rightarrow\quad x^2-1=\left(\frac{1}{81}\right)^{-1/4} \quad\Rightarrow\quad x^2-1=3.$$

Dunque $x=\pm2$, soluzioni entrambe accettabili. □

Esercizio 6.16. *Si dica se la seguente uguaglianza è corretta oppure no*

$$\log(1-x^2)=\log(1-x)+\log(1+x).$$

Risoluzione. Avendosi

$$1-x^2=(1-x)(1+x),$$

applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene proprio l'uguaglianza proposta. Occorre però verificare che il dominio del primo e secondo membro siano uguali. Per il primo membro si deve avere

$$1-x^2>0 \quad\Rightarrow\quad -1<x<1.$$

Per il secondo membro si deve avere

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ 1+x>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad -1<x<1.$$

Dunque l'uguaglianza è corretta. □

Esercizio 6.17. *Si dica se la seguente uguaglianza è corretta oppure no*

$$\log(x^2-1)=\log(x-1)+\log(x+1).$$

Risoluzione. Avendosi
$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene proprio l'uguaglianza proposta. Occorre però verificare che il dominio del primo e secondo membro siano uguali. Per il primo membro si deve avere
$$x^2-1>0 \quad\Rightarrow\quad x<-1 \vee x>1.$$
Per il secondo membro si deve avere
$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x>1.$$
Dunque l'uguaglianza non è generalmente corretta, lo è solo se $x>1$. □

Esercizio 6.18. *Risolvere l'equazione*
$$\ln\left(x^{\ln x}\right)=1.$$

Risoluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi l'equazione si riscrive
$$\ln x\cdot\ln x=1 \quad\Rightarrow\quad \ln^2 x=1 \quad\Rightarrow\quad \ln x=\pm 1,$$
da cui
$$x=e \vee x=\frac{1}{e},$$
entrambe accettabili. □

Esercizio 6.19. *Risolvere l'equazione*
$$\log_{\ln x}\left(\ln x^8\right)=4.$$

Risoluzione. L'equazione si può riscrivere
$$\log_{\ln x}\left(\ln x^8\right)=\log_{\ln x}\left(\ln x\right)^4 \quad\Rightarrow\quad \ln x^8=\left(\ln x\right)^4 \quad\Rightarrow\quad 8\ln x=\left(\ln x\right)^4.$$
Da qui si deduce, intanto
$$\ln x=0,$$
non accettabile in quanto $\ln x$ è base di un logaritmo e la base dei logaritmi deve essere strettamente positiva (e diversa da 1). Si ha poi
$$\left(\ln x\right)^3=8 \quad\Rightarrow\quad \ln x=2 \quad\Rightarrow\quad x=e^2,$$
soluzione accettabile. □

Esercizio 6.20. *Risolvere l'equazione*
$$\log_{|x-1|}(x+5)=2.$$

Risoluzione. L'equazione si può riscrivere

$$\log_{|x-1|}(x+5) = \log_{|x-1|}\left(|x-1|\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x+5 = |x-1|^2 \quad \Rightarrow \quad x+5 = x^2-2x+1,$$

ovvero

$$x^2-3x-4=0 \quad \text{da cui} \quad x=4 \vee x=-1,$$

entrambe accettabili. □

Esercizio 6.21. *Risolvere l'equazione*

$$\left|\ln|x|\right| = \ln^2 x.$$

Risoluzione. Possiamo intanto osservare che, per il dominio del secondo membro, deve essere $x>0$. Si può dunque riscrivere l'equazione come segue

$$\left|\ln x\right| = \ln^2 x.$$

Tenendo conto che $|\ln x| = \pm \ln x$, a seconda che $0<x<1$ oppure $x \geq 1$, si ha

$$\begin{cases} 0<x<1 \\ -\ln x = \ln^2 x \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \ln x = \ln^2 x \end{cases}.$$

Dal primo sistema si ricava $x = {}^1\!/\mathrm{e}$, dal secondo $x=1 \vee x=\mathrm{e}$. □

Esercizio 6.22. *Risolvere l'equazione*

$$\ln x^4 = \left(\ln x^2\right)^2.$$

Risoluzione. Cominciamo con l'osservare che se $x_1>0$ è soluzione, anche $-x_1$ lo è: possiamo dunque risolvere l'equazione per $x>0$ e poi tenere conto della simmetria. L'equazione si riscrive

$$4\ln x = 4\ln^2 x.$$

Si tenga conto che, senza l'osservazione sulla simmetria si sarebbe dovuto scrivere

$$4\ln|x| = 4\ln^2|x|,$$

comunque senza grosse difficoltà. Si trova

$$\ln x = 0 \ \vee\ \ln x = 1 \quad \Rightarrow \quad x=1 \ \vee\ x=\mathrm{e}.$$

Le soluzioni sono dunque

$$x=\pm 1 \quad \text{e} \quad x=\pm\mathrm{e}.$$

□

Esercizio 6.23. *Risolvere l'equazione*

$$\log_{x^3}\left(\ln x\right) = \log_x\left(\ln x^{\sqrt[3]{4}}\right).$$

Risoluzione. Cambiamo, a primo membro, la base da x^3 a x:

$$\log_{x^3}\big(\ln x\big)=\frac{\log_x\big(\ln x\big)}{\log_x\big(x^3\big)}=\frac{1}{3}\log_x\big(\ln x\big).$$

L'equazione si riscrive

$$\log_x\big(\ln x\big)=3\log_x\big(\ln x^{\sqrt[3]{4}}\big) \quad\Rightarrow\quad \log_x\big(\ln x\big)=\log_x\big(\ln x^{\sqrt[3]{4}}\big)^3.$$

Dunque

$$\ln x=\big(\ln x^{\sqrt[3]{4}}\big)^3 \quad\Rightarrow\quad \ln x=\big(\sqrt[3]{4}\ln x\big)^3 \quad\Rightarrow\quad \ln x=4\ln^3 x.$$

Si ricava

$$\ln x=0 \lor \ln x=\pm\frac{1}{2}.$$

Dalla prima si trova $x=1$, che non è accettabile in quanto la base dei logaritmi non può essere 1; dalla seconda si ricava

$$x=\sqrt{\mathrm{e}} \lor x=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

□

Esercizio 6.24. *Risolvere la disequazione*

$$\log_x(\ln x)>\log_x 2.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} 0<x<1\lor x>1 \\ \ln x>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x>1.$$

A questo punto essendo la base x dei logaritmi maggiore di 1 si ottiene

$$\ln x>2 \quad\Rightarrow\quad x>\mathrm{e}^2.$$

□

Esercizio 6.25. *Risolvere la disequazione*

$$x^{2x-1}>x^{1-2x}.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere $x>0$: la base di una potenza ad esponente reale deve essere non negativa, se però $x=0$ il primo membro non ha senso. Successivamente conviene prendere il logaritmo in una base maggiore di 1, per esempio e, di ambo i membri. Si ottiene, dopo semplificazione,

$$2(2x-1)\ln x>0.$$

Si tratta di un prodotto di due fattori il cui segno è elementare. Il grafico di segno è

$+/-$	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\ln x$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$2(2x-1)\ln x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La disequazione è dunque verificata per

$$x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[. \qquad \square$$

Esercizio 6.26. *Risolvere la disequazione*

$$\log_2 \frac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 0.$$

Per studiare il segno del numeratore si deve risolvere la disequazione

$$x+\sqrt{x^2+9} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9} > -x.$$

Se $-x < 0$ la disequazione è sicuramente vera; se $-x > 0$ si può elevare al quadrato ottenendo, dopo semplificazione, $9 > 0$ che è sicuramente vera. Dunque il numeratore è sempre strettamente positivo. Il dominio è allora $x > 0$. In realtà il segno del numeratore poteva anche essere determinato "a vista":

$$\sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} = |x| \quad \Rightarrow \quad x+\sqrt{x^2+9} > x+|x| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x+\sqrt{x^2+9} > 0.$$

Passiamo a risolvere la disequazione: si può osservare che

$$1 = \log_2 2,$$

da cui

$$\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 2,$$

oppure prendere l'esponenziale di base 2 di ambo i membri, ottenendo lo stesso risultato, se si tiene conto che

$$2^{\log_2 t} = t, \quad \text{se} \quad t > 0.$$

Poiché dal dominio sappiamo che $x > 0$, possiamo ridurre allo stesso denominatore ed eliminare il denominatore.

$$\sqrt{x^2+9} > 3x.$$

Essendo ambo i membri positivi, per il dominio, si può elevare al quadrato senza problemi. Si ottiene, tenendo conto che $x > 0$,

$$0 < x < \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

□

Esercizio 6.27. *Risolvere, al variare di* $0 < a < 1 \vee a > 1$, *la disequazione*

$$\log_a x + \log_a(x+1) > \log_a(x-2).$$

Risoluzione. Intanto si deve avere, per il dominio, $x > 0$. La disequazione si riscrive

$$\log_a(x^2+x) > \log_a(x-2).$$

Se $0 < a < 1$ si ottiene

$$x^2 + x < x - 2,$$

che non ha soluzioni. Se invece $a > 1$ si ottiene

$$x^2 + x > x - 2,$$

che è sempre verificata. Tenendo conto del dominio si ha dunque, in questo caso, $x > 2$. □

Esercizio 6.28. *Risolvere la disequazione*

$$\ln^3 x - 9\ln^2 x + 26\ln x - 24 \leq 0.$$

Risoluzione. Per il dominio deve essere $x > 0$. Posto poi $\ln x = t$, si ottiene

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 > 0.$$

Il primo membro è un polinomio di 3° grado che ammette la radice 2. Si può dunque scomporre dividendolo per $x - 2$, per esempio con la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -9 & 26 & -24 \\ 2 & & 2 & -14 & 24 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & 0 \end{array}$$

Dunque

$$t^3 - 9t^2 + 26t - 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad (t-2)(t^2 - 7t + 12) > 0.$$

Il solito grafico di segno diventa

+/−	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$t-2$		−	0	+	+	+	+	+	
$t^2-7t+12$		+	+	+	0	−	0	+	
prodotto		−	0	+	0	−	0	+	

Si conclude che deve essere

$$2 < t < 3 \vee t > 4 \quad \Rightarrow \quad 2 < \ln x < 3 \vee \ln x > 4 \quad \Rightarrow \quad e^2 < x < e^3 \vee x > e^4. \qquad \square$$

Esercizio 6.29. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{\ln|\sin x|}{\sin^2 x - |\sin x| + 1} \geq 0.$$

Risoluzione. Osservando che $\sin^2 x = |\sin x|^2$, e ponendo $|\sin x| = t$, si vede subito che il denominatore è sempre strettamente positivo e dunque può essere semplificato. Il numeratore non è mai positivo, in quanto $|\sin x| \leq 1$, e si annulla quando $|\sin x| = 1$, ovvero

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Queste sono le soluzioni della disequazione. $\square$

Esercizio 6.30. *Risolvere la disequazione*

$$\log_{\tan x}(\cos x) > 0.$$

Risoluzione. Possiamo limitarci all'intervallo $[0, 2\pi[$, vista la periodicità. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} x \neq \pi/2 \\ x \neq 3\pi/2 \\ \cos x > 0 \\ 0 < \tan x < 1 \vee \tan x > 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Se $0 < \tan x < 1$ si ottiene $\cos x < 1$, da cui, tenendo conto del dominio,

$$0 < x < \frac{\pi}{4}.$$

Se $\tan x > 1$ si ottiene $\cos x > 1$ che non è mai verificata. Le soluzioni sono dunque

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Esercizio 6.31. *Risolvere la disequazione*

$$x^{\ln \cos x} \geq 1.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq 0.$$

A questo punto prendiamo il logaritmo in base e di ambo i membri. Si ottiene

$$\ln \cos x \cdot \ln x \geq 0.$$

Il primo dei due fattori è nullo per $x = 2\pi + 2k\pi$, $k \geq 0$, altrove è negativo. Il secondo fattore è negativo per $0 < x < 1$, si annulla per $x = 1$, è positivo per $x > 1$. Si conclude facilmente che il prodotto è maggiore di zero in $]0,1[$ e si annulla per $x = 2\pi + 2k\pi$, $k \geq 0$.

Le soluzioni della disequazione sono dunque

$$0 < x < 1 \quad \vee \quad x = 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0. \qquad \square$$

Esercizio 6.32. *Risolvere la disequazione*

$$2^x - 5 \cdot 2^{x/2} + 6 \geq 0.$$

Risoluzione. Posto $2^{x/2} = t$ si ottiene

$$t^2 - 5t + 6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq 2 \vee t \geq 3.$$

Quindi

$$2^{x/2} \leq 2 \vee 2^{x/2} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2 \vee x \geq 2\log_2 3. \qquad \square$$

Esercizio 6.33. *Risolvere la disequazione*

$$5^{x+1} + 5^{x-1} > 4^x + 2^{2x-1}.$$

Risoluzione. La disequazione si può riscrivere come segue.

$$5^x \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 5^x > 4^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} \quad \Rightarrow \quad 5^x \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 5^x > 4^x + \frac{1}{2} \cdot 4^x,$$

ovvero

$$\frac{26}{5} \cdot 5^x > \frac{3}{2} \cdot 4^x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{4}\right)^x > \frac{15}{52}.$$

Prendendo il logaritmo in base e di ambo i membri si ottiene

$$x(\ln 5 - \ln 4) > \ln 15 - \ln 52 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{\ln 15 - \ln 52}{\ln 5 - \ln 4} \quad (\simeq -5.6),$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\ln 5 - \ln 4 > 0$. $\square$

Esercizio 6.34. *Risolvere la disequazione*

$$\Big(\ln\big(\ln(x+2)\big)\Big)\big(5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5\big) \geq 0.$$

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ \ln(x+2) > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > -1.$$

Il primo dei due fattori è positivo se $\ln(x+2) > 1$, ovvero $x > \mathrm{e} - 2$. Per il secondo si deve risolvere la disequazione

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad 5^x < 1 \vee 5^x > 5 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \vee x > 1.$$

Si può costruire il solito grafico di segno

$+/-$	-1		0		$e-2$		1		$+\infty$
$\ln\big(\ln(x+2)\big)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$5^{2x}-6\cdot 5^x+5$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
prodotto		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La disequazione è verificata per
$$0<x<e-2 \lor x>1.$$
□

Esercizio 6.35. *Risolvere la disequazione*
$$4x^2+x\cdot 3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}+1}>2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6.$$

Risoluzione. Si deve intanto avere, per il dominio, $x\geq 0$. Si può poi portare tutto a primo membro e raccogliere a fattor comune $3^{\sqrt{x}}$. Si ottiene
$$2(2x^2-x-3)-3^{\sqrt{x}}(2x^2-x-3)>0 \quad\Rightarrow\quad (2x^2-x-3)(2-3^{\sqrt{x}})>0.$$

Si può trovare il segno di ciascuno dei due fattori e costruire un grafico di segno. Per il primo si ha, facilmente,
$$2x^2-x-3>0 \quad\Rightarrow\quad x<-1\lor x>\frac{3}{2}.$$

Per il secondo si ha
$$2-3^{\sqrt{x}}>0 \quad\Rightarrow\quad 3^{\sqrt{x}}<2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x}<\log_3 2 \quad\Rightarrow\quad 0\leq x<\log_3^2 2.$$

$+/-$	0		$\log_3^2 2$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x^2-x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$2-3^{\sqrt{x}}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
prodotto	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Le soluzioni sono dunque
$$\log_3^2 2<x<\frac{3}{2}.$$
□

7 Quesiti a risposta multipla

Tutti i quesiti contenuti in questo capitolo contengono quattro o cinque possibili risposte, delle quali una sola è corretta. La risposta corretta è riportata nel capitolo 8.

Non è mai previsto l'uso dei numeri complessi. Quando si parla di coordinate nel piano si intende sempre di avere introdotto un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometrico.

Per tutti i quesiti è fornita la risposta corretta. Per ogni quesito è consigliabile individuare la strategia più veloce per giungere alla conclusione corretta, tenendo conto dei limitati tempi a disposizione concessi nei test di accesso universitari. Quasi sempre è molto utile cercare di capire il perché le altre risposte sono errate.

Gli argomenti sono proposti senza un ordine preciso, tranne i quesiti sul calcolo combinatorio e probabilità elementare, che sono raggruppati in fondo a partire dal quesito 361, in considerazione del fatto che non in tutti i test di ammissione sono previste domande di questo tipo.

Quesito 1. Se è domenica, fa caldo e c'è il sole Nicola va al mare. Se è lunedì oppure se piove, Nicola resta a casa. Oggi Nicola è andato al mare. Allora si può affermare *con certezza* che

1. oggi fa caldo.
2. oggi non fa caldo.
3. oggi non piove.
4. oggi piove.
5. oggi c'è il sole.

Quesito 2. Quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

Affinché due frazioni siano uguali:

1. è necessario che abbiano uguale numeratore e uguale denominatore.
2. non è necessario che abbiano uguale denominatore e uguale numeratore.
3. è necessario e sufficiente che abbiano numeratori e denominatori proporzionali.
4. è necessario che abbiano numeratori e denominatori proporzionali.
5. è sufficiente che abbiano lo stesso numeratore e lo stesso denominatore.

Quesito 3. Si dice *numero primo* un intero $n > 1$ divisibile solo per 1 ed n. Si dica quale delle delle seguenti affermazioni è *errata*.

1. non è sufficiente essere un numero dispari diverso da 1 per essere un primo.
2. non è necessario che un numero sia primo per essere dispari.
3. affinché un numero sia dispari diverso da 1 e da 2 è sufficiente che sia primo.
4. affinché un numero sia primo è necessario che sia dispari oppure che sia il 2.
5. è necessario e sufficiente essere un dispari diverso da 1 o essere il 2 per essere un primo.

Quesito 4. Una scatola contiene palle rosse, verdi e blu, tutte di grandezza diversa. Sapendo che ogni palla rossa è più grande di ogni palla verde, e che non è vero che tutte le palle verdi siano più grandi di tutte le palle blu, quale delle seguenti affermazioni è *necessariamente* vera?

1. Tutte le palle rosse sono più grandi di tutte le palle blu.
2. Tutte le palle rosse sono più grandi di almeno una palla blu.
3. C'è almeno una palla blu che è più grande di una palla rossa.
4. C'è almeno una palla rossa più grande di almeno una palla blu.
5. C'è almeno una palla blu che è più grande di una palla verde.

Quesito 5. Se in una classe almeno uno studente non sarà promosso, quanti saranno gli studenti promossi?

1. Tutti.
2. Al più tutti meno uno.
3. Sicuramente tutti meno uno.
4. Al più tutti meno due.
5. Sicuramente nessuno.

Quesito 6. Se un insieme ha n elementi, quanti elementi ha l'insieme delle sue parti?

1. n elementi.
2. 2^n elementi.
3. n^2 elementi.
4. $2(n-2)$ elementi.
5. $2n$ elementi.

Quesito 7. Dire che "La frase $\mathcal{P}$ vale se vale la frase $\mathcal{Q}$", significa dire che $\mathcal{Q}$ è condizione:

1. sufficiente ma non necessaria per $\mathcal{P}$.
2. necessaria per $\mathcal{P}$.
3. necessaria ma non sufficiente per $\mathcal{P}$.
4. necessaria e sufficiente per $\mathcal{P}$.

Quesito 8. In un paese di una regione di frontiera gli abitanti parlano la lingua A e/o la lingua B. Si sa che il 70% degli abitanti parla la lingua A e il 60% parla la lingua B. Quale percentuale parla entrambe le lingue?

1. 65%
2. 30%
3. 40%
4. 10%
5. non si può rispondere.

Quesito 9. Si consideri la proposizione: "Tutte le torri sono alte". Dire che essa è *falsa* equivale a dire che:

1. Esiste una torre che non è alta.

2. Almeno due torri sono alte.
3. Tutte le torri sono basse.
4. Nessuna torre è alta.
5. Almeno una torre è alta.

Quesito 10. Quando è contento, Francesco canta. Quindi:

1. oggi Francesco non è contento quindi non canta.
2. oggi Francesco non canta, quindi non si sa se sia contento.
3. oggi Francesco non canta, quindi non è contento.
4. oggi Francesco canta, quindi è contento.
5. il figlio di Francesco ha preso 10 in matematica e Francesco non canta.

Quesito 11. In un cestino ci sono cento ciliegie. Ognuna di esse è sana o bacata. Si conoscono i seguenti fatti:

1. almeno una ciliegia è bacata.
2. prese due ciliegie qualsiasi, almeno una è sana.

Quante sono le ciliegie sane e quante quelle bacate?

1. 99 bacate e una sana.
2. 51 bacate e 49 sane.
3. 50 sane e 50 bacate.
4. 1 bacata e 99 sane.
5. 51 sane e 49 bacate.

Quesito 12. In un paese succede che in tutte le famiglie con almeno due figli ci sia una figlia femmina. Che cosa si può dedurre?

1. ogni figlio maschio ha una sorella.
2. non ci sono famiglie con un figlio unico.
3. non ci possono essere due fratelli maschi.
4. se un figlio maschio non ha sorelle, allora è figlio unico.
5. ogni figlia femmina ha un fratello maschio.

Quesito 13. La nota proprietà delle potenze: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$, è valida:

1. se $a \cdot b > 0$.
2. mai.
3. sempre.
4. solo se $a > 0 \land b > 0$.
5. se $a > 0 \land b > 0$.

Quesito 14. La funzione $f(x) = x^x$ ha come dominio

1. $\mathbb{R}$.
2. $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\} \cup \{\, x \in \mathbb{Z} \mid x < 0 \,\}$.

3. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
4. $\mathbb{Z}$.
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Quesito 15. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

1. $\dfrac{2^{x+y}}{3^{x-y}} = 0$ se $2^x = -2^y$.
2. $\dfrac{2^{x+y}}{3^{x-y}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot 6^y$.
3. $\dfrac{2^{x+y}}{3^{x-y}}$ non è definita se $x = y$.
4. $\dfrac{2^{x+y}}{3^{x-y}} = \dfrac{2^x + 2^y}{3^x - 3^y}$ per ogni x, y.
5. esistono x e y tali che $\dfrac{2^{x+y}}{3^{x-y}} < 0$.

Quesito 16. La nota proprietà delle potenze: $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, è valida:

1. solo se $a > 0$.
2. se $a > 0$.
3. se $a < 0$.
4. sempre.
5. mai.

Quesito 17. Se $a > 0$ è un numero reale e n è un numero naturale (intero ≥ 0), la disuguaglianza $a^n \leq a$ è verificata

1. se $a > 1$.
2. solo se $a \leq 1 \wedge n > 1$.
3. solo se $a \leq 1 \wedge n = 0$.
4. se $a \leq 1 \wedge n > 1$.
5. se e solo se $n = 1$.

Quesito 18. La nota proprietà delle potenze: $((a)^b)^c = (a)^{bc}$, è valida:

1. se e solo se $a > 0$.
2. mai.
3. sempre.
4. solo se $a > 0$.
5. se $a > 0$.

Quesito 19. Se a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, allora l'uguaglianza $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ è vera:

1. se n è dispari oppure se n è pari e contemporaneamente $a > 0 \wedge b > 0$.

2. se n è pari.
3. solo se $a > 0 \wedge b > 0$.
4. solo se n è dispari.
5. sempre.

Quesito 20. $3^{10} + 3^{10} + 3^{10}$ è uguale a:

1. 9^{10}.
2. 9^{30}.
3. un numero irrazionale.
4. 3^{30}.
5. 3^{11}.

Quesito 21. Quanto vale, in $\mathbb{R}$, $\sqrt{(-1)^2}$?

1. $\left(\sqrt{-1}\right)^2$.
2. ± 1.
3. -1.
4. non esiste.
5. 1.

Quesito 22. La funzione $f(x) = (x^2)^x$ ha come dominio:

1. $\mathbb{Z}$.
2. $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \,\}$.
3. $\mathbb{R}$.
4. $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \,\}$.
5. $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$.

Quesito 23. Quanto vale $\sqrt{x^2}$?

1. $\pm x$.
2. non esiste.
3. x.
4. nessuna delle altre risposte è corretta.
5. $|x|$.

Quesito 24. Quanto vale $\left((-1)^2\right)^{1/2}$?

1. Non è definito perché non si può fare una potenza con base negativa.
2. Dipende dall'ordine con cui si eseguono le potenze.
3. Non è definito perché equivale a $\left((-1)^{1/2}\right)^2$.
4. 1.
5. -1, perché equivale a $(-1)^1$, facendo il prodotto degli esponenti.

Quesito 25. L'uguaglianza $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$:

1. è vera se $a > 0$ e $b > 0$.

2. è vera solo se $a = 0$ e $b > 0$.
3. è sempre falsa.
4. è vera se e solo se $(a = 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b = 0)$.
5. è sempre vera.

Quesito 26. Quale delle seguenti affermazioni è corretta, se x è un qualunque numero reale?

1. $|-x| = |x|$.
2. $|-x| \neq 0$.
3. $|x| \neq 0$.
4. $|x| > 0$.
5. $|-x| > 0$.

Quesito 27. Le soluzioni della disequazione $\dfrac{x}{|x|} \geq 1$ sono:

1. $x \geq 0$.
2. $x \geq 1$.
3. $x > 0$.
4. $x > 1$.
5. $x \neq 0$.

Quesito 28. Le soluzioni della disequazione $\left|\sqrt{x^2+1} - 1\right| \leq 0$ sono:

1. $x > 1$.
2. nessuna soluzione.
3. $x < 0$.
4. $-1 < x < 1$.
5. $x = 0$.

Quesito 29. Quale delle seguenti definizioni di valore assoluto in $\mathbb{R}$ è *errata*?

1. Posto $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$, si ha $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$.
2. $|x| = \sqrt{x^2}$.
3. $|x| = \max(x, -x)$.
4. $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$
5. $|x|$ è il valore di x privato del segno.

Quesito 30. Se x è un numero reale, si dica quale delle seguenti affermazioni è *errata*.

1. $|x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$.
2. $|-x^2| = |x^2|$.
3. $|x^2 - 1| = x^2 - 1$.

4. $|\sqrt{x}| = \sqrt{x}$.
5. $|x^2+1| = x^2+1$.

Quesito 31. Se x è un numero reale, si dica quale delle seguenti affermazioni è *errata*.

1. $x > -|x|$.
2. $x \leq |x|$.
3. $x < |x| + 1$.
4. $-|x| \leq x \leq |x|$.
5. $x \geq -|x|$.

Quesito 32. Le soluzioni della disequazione $x + |x| \leq 0$ sono:

1. $x = 0$.
2. $x < 0$.
3. nessuna soluzione.
4. $x \leq 0$.
5. $\mathbb{R}$.

Quesito 33. Il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}$ è:

1. $x \neq \pm 1$.
2. $x < -1 \vee x > 1$.
3. $x < 1$.
4. $x > 1$.
5. $x > 0$.

Quesito 34. Le soluzioni della disequazione $x^2 - |x| < 0$ sono:

1. $0 < x < 1$.
2. $-1 < x < 0$.
3. $x < -1$.
4. $x > 1$.
5. $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$.

Quesito 35. Il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+|x|}}$ è:

1. $x > 1$.
2. $x > 0$.
3. $\mathbb{R}$.
4. $x \geq 0$.
5. $x \geq 1$.

Quesito 36. Le soluzioni della disequazione $|x| + \sqrt{x} > 0$ sono

1. $\mathbb{R}$.
2. $x > 0$.
3. nessuna soluzione.
4. $x \geq 0$.
5. $x > 1$.

Quesito 37. Se x e y sono due numeri reali, quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

1. $|x \cdot y| \geq x \cdot y$.
2. $|x - y| \leq |x| + |y|$.
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
5. $|x - y| \leq |x| - |y|$.

Quesito 38. L'insieme di soluzioni della disequazione $x^2 > 0$ è:

1. $x < 0$.
2. $x \neq 0$.
3. $\mathbb{R}$.
4. $x \geq 0$.
5. $x > 0$.

Quesito 39. L'insieme di soluzioni della disequazione $\sqrt{-(x-1)^2} \geq 0$ é:

1. $x = 1$.
2. $x \neq 1$.
3. $x < 1$.
4. $x > 1$.
5. nessuna soluzione perché non esiste la radice quadrata di un numero negativo.

Quesito 40. Si consideri la disequazione $(x^6 - x^2 - 1)(1 + x^2 - x^6) \leq 0$. Quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

1. Non è elementarmente risolubile perché non si riescono a trovare le radici del polinomio associato.
2. È sempre verificata.
3. È verificata per $x < 0$.
4. Non ha nessuna soluzione.
5. È verificata per $x > 0$.

Quesito 41. Si considerino le due disequazioni $x^2 + \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{x}$ e $x^2 \geq 0$. Quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

1. L'operazione di semplificazione ha modificato il dominio.
2. Le due disequazioni sono equivalenti perché la seconda è stata ottenuta dalla prima semplificando $1/x$ che si trova in ambo i membri.
3. Gli insiemi di soluzioni delle due disequazioni sono disgiunti.

4. L'operazione di semplificazione ha fatto "perdere" soluzioni.
5. La prima disequazione è comunque verificata per ogni x.

Quesito 42. Si considerino le due disequazioni $x > 1$ e $x^2 > 1$. Quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

1. L'elevazione al quadrato ha introdotto soluzioni estranee.
2. La seconda disequazione è sempre vera.
3. La seconda disequazione è vera per $x > \pm 1$, mentre la prima solo per $x > 1$.
4. L'elevazione al quadrato ha fatto perdere soluzioni.
5. Esse sono equivalenti perché il passaggio dalla prima alla seconda è avvenuto elevando al quadrato due membri positivi.

Quesito 43. Nella disequazione $(x^2+1)(x^2-1) < 0$:

1. l'insieme di soluzioni è $x < -1$.
2. si può semplificare per (x^2+1).
3. l'insieme di soluzioni è $x < -1 \wedge x > 1$.
4. l'insieme di soluzioni è $-1 \leq x \leq 1$.
5. l'insieme di soluzioni è $x > 1$.

Quesito 44. L'insieme di soluzioni della disequazione $\dfrac{\sqrt{x-2}}{2-x} > 0$ è

1. $x \leq 2$.
2. $x > 2$.
3. $x \geq 2$.
4. $x < 2$.
5. l'insieme vuoto.

Quesito 45. Si considerino le disequazioni $x^3 - x^2 \geq 0$ e $x - 1 \geq 0$. Quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

1. Esse sono equivalenti perché la seconda è stata ottenuta dalla prima dividendo per x^2.
2. L'insieme di soluzioni della prima è un soprainsieme dell'insieme di soluzioni della seconda.
3. Gli insiemi di soluzioni delle due disequazioni sono disgiunti.
4. La divisione per x^2 è lecita se pongo la condizione $x^2 > 0$.
5. L'insieme di soluzioni della prima è un sottoinsieme di quello della seconda.

Quesito 46. Si considerino le disequazioni $x^3 - x^2 > 0$ e $x - 1 > 0$. Quale delle seguenti affermazioni è *esatta*?

1. L'operazione di semplificazione utilizzata (divisione per x^2) è a priori lecita.
2. Le due disequazioni sono equivalenti pur non avendo lo stesso insieme di soluzioni.
3. Le due disequazioni sono equivalenti.
4. Le due disequazioni non sono equivalenti perché la divisione per x^2 non è sempre lecita.
5. La divisione per x^2 fa perdere qualche soluzione.

Quesito 47. Si consideri la funzione $f(x) = |x|$. Una sola delle seguenti affermazioni è vera.

1. Si ha $f(x) > 0$ per ogni x.
2. Si ha $f(x) \geq 0$ solo per $x > 0$.
3. Si ha $f(x) < 0$ per $x < 0$.
4. Si ha $f(x) = 0$ solo per $x = 0$.
5. Si ha $f(x) \leq 0$ per $x \leq 0$.

Quesito 48. L'insieme di soluzioni della disequazione $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)x < 0$ è:

1. $x < 0$.
2. $x \leq 0$.
3. $x \geq 0$.
4. $\mathbb{R}$.
5. $x > 0$.

Quesito 49. Quanto vale $\log_{(-2)}(-8)$?

1. -3.
2. 4, perché $-2 \cdot 4 = -8$.
3. Non è definito.
4. 3, perché $(-2)^3 = -8$.
5. $1/3$, perché $((-8)^{1/3} = -2$.

Quesito 50. Quanto vale $\log_3(x^2)$?

1. $2\log_3(\pm x)$.
2. $2\log_3(x)$.
3. $2\log_3(|x|)$.
4. Non è mai definito.
5. $2\log_3(-x)$.

Quesito 51. La disequazione $\log_{(1/2)} x < \log_2 x$ è verificata:

1. per $0 < x < 1$.
2. sempre.
3. per $x > 0$.
4. mai.
5. per $x > 1$.

Quesito 52. Quanto vale $\log_1 1$?

1. Non è definito.
2. Qualsiasi numero, perché 1 elevato a qualsiasi esponente dà sempre 1.

3. 1, perché la base e l'argomento del logaritmo sono uguali.
4. Sia 0 che 1.
5. 0, perché il logaritmo di 1 vale zero in qualsiasi base.

Quesito 53. Se a è un reale maggiore di 0 e diverso da 1, la formula $x = a^{\log_a x}$ è valida:

1. per $x \geq 0$.
2. per $x > 0$.
3. per tutti gli x.
4. mai.
5. per $x \in \mathbb{Z}$.

Quesito 54. La nota proprietà dei logaritmi $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ è valida:

1. mai.
2. sempre.
3. se $bc \neq 0$
4. se $b > 0 \wedge c > 0$.
5. se $bc > 0$.

Quesito 55. La disequazione $\log_2 x < \log_3 x$ è verificata:

1. per $x > 0$.
2. mai.
3. per $0 < x < 1$.
4. per $x > 1$.
5. sempre.

Quesito 56. La formula del cambiamento di base nei logaritmi è:

1. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_c b}$.
2. $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.
3. $\log_a b = \dfrac{1}{a} \log_c b$.
4. $\log_a b = \log_c b - \log_c a$.
5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Quesito 57. La disequazione $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ è verificata:

1. mai.

2. per $x < 0$.
3. per $x > 1$.
4. sempre.
5. per $x > 0$.

Quesito 58. Che relazione c'è tra i grafici di $f(x) = \log_{(1/3)} x$ e $g(x) = \log_3 x$?

1. Sono simmetrici rispetto all'asse delle x.
2. Non c'è nessuna relazione.
3. Sono uno il traslato dell'altro di un'opportuna quantità.
4. Sono simmetrici rispetto all'asse y.
5. Sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Quesito 59. Il dominio della funzione $f(x) = \log_{x^2}(x^2 - 1)$ è:

1. $x \neq 0$.
2. $x \neq \pm 1$.
3. $\leq -1 \vee x \geq \pm 1$.
4. $x > 0$.
5. $x < -1 \vee x > 1$.

Quesito 60. Le soluzioni della disequazione $\dfrac{\log_2 x}{-x^2} \geq 0$ sono:

1. $x > 0$.
2. $x > 1$.
3. $0 < x \leq 1$.
4. $x \neq 0$.
5. nessuna soluzione.

Quesito 61. Il dominio della funzione $f(x) = \log_2\big(\log_3 x\big)$ è:

1. $x \geq 0$.
2. $x > 1$.
3. $0 < x < 1 \vee x > 1$.
4. $x > 0$.
5. $x \geq 1$.

Quesito 62. Le soluzioni della disequazione $\log_2\big(\log_2 x\big) > 0$ sono:

1. $x > 1$.
2. $x > 0$.
3. $0 < x < 2$.
4. $x > 2$.
5. $0 < x < 1$.

Quesito 63. Il dominio della funzione $f(x) = \left(\log_2 x\right)^x$ è:

1. l'insieme vuoto.
2. $x > 0$.
3. $0 < x < 1$.
4. $x > 1$.
5. $x \geq 1$.

Quesito 64. Le soluzioni della disequazione $\log_2\left(\log_2 x\right) < 1$ sono:

1. $x > 0$.
2. $x \geq 1$
3. $x > 1$.
4. $1 < x < 4$.
5. $1 < x < 2$.

Quesito 65. Le soluzioni della disequazione $3^{2x} + 1 \leq 2 \cdot 3^x$ sono:

1. nessuna soluzione.
2. $\mathbb{R}$.
3. $x = 0$.
4. $x < 0$.
5. $x > 0$.

Quesito 66. Le soluzioni della disequazione $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < 1$ sono:

1. $x > 0$.
2. $x \neq 0$.
3. $x > 0$.
4. $x < 0$.
5. $x < 1$.

Quesito 67. Le soluzioni della disequazione $4^x - 2^x > 0$ sono:

1. nessuna soluzione.
2. $x \neq 0$.
3. $x < 0$.
4. $\mathbb{R}$.
5. $x > 0$.

Quesito 68. Il dominio della funzione $f(x) = \log_{x-1}(x^2)$ è:

1. $x > 2$.
2. $x \neq 1$.

3. $1 < x < 2 \vee x > 2$.
4. $x > 1$.
5. $x \neq 0$.

Quesito 69. Le soluzioni della disequazione $3^{\frac{x}{x-1}} > 1$ sono:

1. $x < 0 \vee x > 1$.
2. $x \neq 1$.
3. $x > 1$.
4. $0 < x < 1$.
5. $x < 0$.

Quesito 70. Le soluzioni della disequazione $\log_2(x^2+1) \geq \log_2(2x)$ sono:

1. $\mathbb{R}$.
2. $x > 0$.
3. nessuna soluzione.
4. $x \neq 1$.
5. $0 < x < 1$.

Quesito 71. Il dominio della funzione $f(x) = (x-1)^{\log_2 x}$ è:

1. $x > 0$.
2. $x > 1$.
3. $x \geq 1$.
4. $x \neq 0$.
5. $x \neq 1$.

Quesito 72. Il dominio della funzione $f(x) = \log_x x^x$ è:

1. $0 < x < 1 \vee x > 1$.
2. $x \geq 0$.
3. $x > 1$.
4. $x > 0$.
5. $0 < x < 1$.

Quesito 73. Il dominio della funzione $f(x) = \log_x 3^{x-1}$ è:

1. $x > 1$.
2. $x > 0$.
3. $x \geq 0$.
4. $0 < x < 1 \vee x > 1$.
5. $0 < x < 1$.

Quesito 74. Le soluzioni della disequazione $\log_{(1/3)}(x-2) < 1$ sono:

1. $x > 0$.
2. $x > 2$.
3. $x > 7/3$.
4. $0 < x < 2$.
5. $0 < x < 2 \vee x > 2$.

Quesito 75. Quale delle seguenti affermazioni è esatta?

1. Se $\sin x = 0$, allora $\cos x = 1$.
2. Se $\sin 2x = 0$, allora $\sin x = 0$ e $\cos x = 0$.
3. Se $\cos 2x = 0$, allora $\sin x = \sqrt{2}/2$.
4. Se $\sin x = 1$, allora $\cos x = 0$.
5. Se $\cos x = 0$, allora $\sin x = 1$.

Quesito 76. La disequazione $(\sin 6)x > 0$ (angoli in radianti) è verificata:

1. per $x \neq 0$.
2. mai.
3. per $x < 0$.
4. per $x > 0$.
5. per ogni x.

Quesito 77. Quale delle seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x) = \cos x^2$ è vera?

1. La funzione è periodica di periodo $\sqrt{\pi}$.
2. La funzione è periodica di periodo 2π.
3. La funzione non è calcolabile perché non si può fare il quadrato di un angolo.
4. La funzione è sempre positiva.
5. La funzione non è periodica.

Quesito 78. La relazione $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$ è valida:

1. solo per $x \neq k\pi$, a causa del dominio della cotangente.
2. solo per $x \neq 0$.
3. solo per $x \neq k\pi/2$.
4. solo per $x \neq (2k+1)\pi/2$, a causa del dominio della tangente.
5. per tutti gli x.

Quesito 79. Qual è il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$?

1. $\{\, \pi/2 + 2k\pi \,\}$, con k intero.
2. $\{\, \pi/2 \,\}$.
3. $\{\, \pi/2 + k\pi \,\}$, con k intero.

4. Non è definita per nessun x.
5. $\mathbb{R}$.

Quesito 80. $\cos^2(2) - \sin^2(2)$ è uguale a:

1. $1/2$.
2. 0.
3. 1.
4. $\cos 4$.
5. $2\cos(2) - 2\sin(2)$.

Quesito 81. Data la funzione $f(x) = 2\sin(2x) + 1$, si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

1. f è periodica di periodo 2π.
2. L'equazione $f(x) = -1$ non ha soluzioni.
3. Esiste x tale che $f(x) > 3$.
4. $f(x) \geq 0$ per ogni x.
5. f è periodica di periodo π.

Quesito 82. Quanto vale l'espressione $\sin(10x) \cdot \cos(10x)$?

1. $\sin(20x)$.
2. $\cos(20x)$.
3. $0.5 \sin(20x)$.
4. non è definita.
5. $\sin^2(10x) - \cos^2(10x)$.

Quesito 83. L'equazione $\sin x = \sin \pi$ ha il seguente insieme di soluzioni:

1. $\{0\}$.
2. $\mathbb{R}$.
3. $\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.
4. l'insieme vuoto.
5. $\{\pi\}$.

Quesito 84. La funzione (di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) $f(x) = \sin x$:

1. può essere trasformata in una funzione biunivoca e quindi invertibile operando solo una restrizione sul codominio.
2. può essere trasformata in una funzione biunivoca e quindi invertibile solo restringendo il dominio all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ e il codominio all'intervallo $[-1, 1]$.
3. è biunivoca e quindi invertibile.
4. può essere trasformata in una funzione biunivoca e quindi invertibile se si opera una opportuna restrizione del dominio e del codominio.

5. può essere trasformata in una funzione biunivoca e quindi invertibile operando solo una restrizione sul dominio.

Quesito 85. La funzione $f(x) = |\cos x|$ è:

1. periodica di periodo 2π.
2. periodica di periodo π.
3. non periodica.
4. periodica di periodo $\pi/2$.
5. periodica di periodo 4π.

Quesito 86. Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente 3 e 4. Detto x il più piccolo angolo del triangolo si ha:

1. $\sin x = 4/5$.
2. $\cos x = 4/5$.
3. $\sin x = 3/4$.
4. $\cos x = 3/4$.
5. $\tan x = 4/3$.

Quesito 87. L'equazione $(a_1 + a_2k)x + (b_1 + b_2k)y + (c_1 + c_2k) = 0$, dove k è un parametro reale,

1. Rappresenta un fascio improprio di rette se $a_2 = b_2 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
2. Rappresenta un fascio improprio di rette.
3. Rappresenta sempre un *intero* fascio di rette, proprio o improprio.
4. Rappresenta un fascio proprio di rette se $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.
5. Rappresenta un fascio proprio di rette.

Quesito 88. Le rette $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

1. si incontrano in un punto se $a_1b_2 \neq a_2b_1$.
2. possono essere perpendicolari solo se $c_1 = c_2 = 0$.
3. sono parallele solo se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.
4. si incontrano in un punto se $a_1b_2 = a_2b_1$.

Quesito 89. Sia A l'insieme di soluzioni, nel piano cartesiano, dell'equazione $xy = 1$. Allora

1. A è una parabola.
2. A è costituito dalle rette $x = 1$ e $y = 1$.
3. Non ci sono punti di A sugli assi coordinati.
4. A è costituito solo dai punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Quesito 90. L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

1. può anche rappresentare una parabola con asse verticale.

2. ha sempre infinite soluzioni.
3. rappresenta una circonferenza se $c > 0$.
4. può avere una sola soluzione.
5. rappresenta sempre una circonferenza reale.

Quesito 91. Dato un fascio proprio di rette e una parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$,

1. solo le eventuali tangenti alla parabola possono avere un unico punto in comune con la parabola.
2. c'è al più una retta del fascio tangente alla parabola.
3. può presentarsi il caso che ci sia una sola retta del fascio tangente alla parabola.
4. ci sono sempre due rette del fascio tangenti alla parabola.
5. c'è almeno una retta del fascio tangente alla parabola.

Quesito 92. L'equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$ rappresenta

1. un'ellisse.
2. una semicirconferenza.
3. una parabola.
4. una retta.
5. una circonferenza.

Quesito 93. Due parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$

1. hanno sempre almeno un punto in comune se $a > 0$ per entrambe.
2. hanno sempre almeno un punto in comune.
3. hanno al più due punti in comune.
4. possono avere più di due punti in comune.
5. non possono mai essere tra di loro tangenti.

Quesito 94. L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta

1. Una coppia di rette incidenti.
2. Una circonferenza.
3. Solo il punto $(0, 0)$.
4. Una coppia di rette parallele.
5. Un'iperbole non degenere.

Quesito 95. Una retta nel piano cartesiano

1. si può sempre rappresentare con un'equazione del tipo $y = mx + q$.
2. ha un'equazione del tipo $y = mx + q$ se non è parallela all'asse x.
3. interseca sempre l'asse delle y in un solo punto.
4. si può rappresentare con un'equazione del tipo $ax + by = 0$ se passa per l'origine.
5. non può essere verticale perché le rette verticali non hanno coefficiente angolare.

Quesito 96. La funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

1. è pari.

2. è sempre positiva.
3. è definita su tutto $\mathbb{R}$.
4. è dispari.

Quesito 97. Un'equazione di terzo grado in un'incognita reale

1. può non avere alcuna soluzione reale.
2. ha sempre almeno due soluzioni reali.
3. ha sempre almeno una soluzione reale.
4. ha sempre tre soluzioni reali (eventualmente non distinte).

Quesito 98. Le due disequazioni $\ln \dfrac{x+1}{x-1} < 1$ e $\ln(x+1) - \ln(x-1) < 1$

1. hanno lo stesso dominio.
2. hanno lo stesso insieme di soluzioni.
3. sono tali che uno dei due insiemi di soluzioni è sottoinsieme dell'altro.
4. hanno insiemi di soluzioni disgiunti.

Quesito 99. Le funzioni $f(x) = \cos(x^2)$ e $g(x) = (\cos x)^2$

1. hanno entrambe periodo 2π.
2. sono entrambe dispari.
3. sono entrambe sempre positive.
4. sono entrambe pari.

Quesito 100. La funzione inversa della funzione $f(x) = 2x - 1$ è

1. $g(x) = (x+1)/2$.
2. $g(x) = 2x + 1$.
3. $g(x) = 1/(2x-1)$.
4. $g(x) = (x-1)/2$.

Quesito 101. Date le funzioni $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = \sin x$, la funzione composta $f\big(g(x)\big)$ è:

1. $\sin(x^2 + 2)$.
2. $\sin^2(x + 2)$.
3. $\sin(x^2) + 2$.
4. $\sin^2 x + 2$.

Quesito 102. La disequazione $\sin x + \cos x > \sqrt{2}$

1. è verificata per $x \geq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.
3. è verificata per $x \neq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. è verificata per $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quesito 103. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2(x-3)}$ è:

1. $x = 0$.
2. $x = 0 \vee x \geq 3$.
3. $\mathbb{R}$.
4. $x \geq 3$.
5. $x = 0 \wedge x \geq 3$.

Quesito 104. Le due funzioni $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ e $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

1. sono entrambe pari.
2. hanno lo stesso dominio.
3. non sono definite per $x = 0$.
4. hanno gli stessi zeri.

Quesito 105. Quale delle seguenti funzioni è invertibile nel suo dominio naturale (eventualmente con una restrizione sul codominio)?

1. $\sin x$.
2. x^2.
3. $\tan x$.
4. $1/x^2$.
5. $\sqrt{x}$.

Quesito 106. Quale delle uguaglianze $\ln x^2 = 2\ln x$ e $(\ln x)^2 = \ln(\ln x)$ è sempre vera?

1. solo la prima.
2. solo la seconda.
3. nessuna delle due.
4. entrambe.

Quesito 107. La somma di due numeri reali irrazionali

1. è sempre un numero irrazionale.
2. nessuna delle altre risposte è corretta.
3. è sempre un numero razionale.
4. può essere anche un numero razionale.

Quesito 108. Nel piano cartesiano l'insieme dei punti che soddisfano l'equazione in due incognite $xy = 0$ è

1. una parabola.
2. un'iperbole equilatera.
3. una coppia di rette perpendicolari.

4. una circonferenza.

Quesito 109. Quale dei seguenti numeri è razionale?

1. $\sqrt{2}\sqrt{18}$.
2. $\sqrt{2}+\sqrt{18}$.
3. $\sqrt{2}+\sqrt{9}$.
4. $\sqrt{2}\sqrt{9}$.

Quesito 110. Il grafico di una funzione e quello della sua inversa, in un riferimento cartesiano ortogonale, sono

1. simmetrici rispetto all'origine.
2. simmetrici rispetto all'asse x.
3. nessuna delle altre risposte è corretta.
4. simmetrici rispetto all'asse y.
5. uguali.

Quesito 111. Se m e k sono due numeri reali non nulli tali che $m^2 - 4k^2 > 0$, l'equazione $x^2 + mx + k^2 = 0$

1. ha due soluzioni positive se $m < 0$.
2. ha due soluzioni positive.
3. non ha soluzioni reali.
4. ha due soluzioni negative.

Quesito 112. La disuguaglianza $2^{\sqrt{2}} > \left(\sqrt{2}\right)^2$ è

1. priva di senso perché il primo membro non è definito.
2. vera.
3. falsa.
4. non si può decidere il suo valore di verità.

Quesito 113. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Nessuna.
2. $3 > 3$.
3. $3 \leq 3$.
4. $3 < 3$.

Quesito 114. Quanto vale $\log_5 \sqrt{125}$?

1. $3/2$.
2. 3.
3. $1/2$.
4. 0.
5. $2/3$.

Quesito 115. 2^{π}

1. non è definito nell'insieme dei numeri reali.
2. è un numero reale maggiore di 8.
3. è un prodotto di tanti fattori uguali a 2.
4. è un numero reale minore di 8.

Quesito 116. Due rette dello spazio che non hanno punti in comune

1. possono non essere parallele.
2. sono sempre parallele.
3. appartengono sempre a due piani diversi.
4. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 117. In un sistema cartesiano ortogonale sono date le due circonferenze: $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Le tangenti comuni alle due circonferenze sono:

1. due.
2. una.
3. infinite.
4. nessuna.

Quesito 118. $3^1 = 3$

1. perché si tratta di un prodotto con un unico fattore uguale a 3.
2. perché si dimostra in base alle proprietà delle potenze.
3. nessuna delle altre risposte è corretta.
4. per definizione.

Quesito 119. Se n è un intero positivo, $3^{n+1} - 3^n$ vale

1. 3^{2n+1}.
2. $2 \cdot 3^n$.
3. 3.
4. 6^n.

Quesito 120. In un'equazione di secondo grado con discriminante maggiore di zero il rapporto $-b/a$ è uguale

1. alla somma delle radici.
2. al prodotto delle radici.
3. alla differenza delle radici.
4. al quoziente delle radici.

Quesito 121. Il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$ ha le seguenti soluzioni:

1. la coppia $(0,1)$.
2. le coppie $(x,0)$ per ogni reale x.
3. le coppie $(0,y)$ per ogni reale y.

4. nessuna delle altre risposte è corretta.
5.

Quesito 122. $a^3 - b^3$ è divisibile per

1. $a - b$.
2. $a^2 - ab + b^2$.
3. $a + b$.
4. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 123. In un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con discriminante positivo il rapporto c/a è uguale

1. al prodotto delle radici.
2. alla somma delle radici.
3. alla differenza delle radici.
4. al quoziente delle radici.

Quesito 124. Se a e b sono numeri reali $\sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2}$

1. è definito solo se $a > b$.
2. è sempre uguale a $(a - b)^2$.
3. è sempre uguale a $|a^2| - |b^2|$.
4. è sempre uguale a $|a^2 - b^2|$.
5. è sempre uguale a $a^2 - b^2$.

Quesito 125. $\sqrt{2} + \sqrt{18}$ è uguale a

1. $\sqrt{36}$.
2. $\sqrt{20}$.
3. $\sqrt{32}$.
4. non si può ridurre ad un unico radicale.

Quesito 126. $\sqrt{9}$ vale

1. ± 3.
2. 3.
3. nessuna delle altre risposte è corretta.
4. -3.

Quesito 127. L'equazione $171717x^4 + 717171x^2 - 777111 = 0$

1. ha 4 soluzioni reali.
2. ha infinite soluzioni reali.
3. non ha soluzioni reali.
4. ha due soluzioni reali.

Quesito 128. $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}}$

1. non è un numero reale.
2. è un numero reale minore di 1.
3. è un numero reale maggiore di 1.
4. è un numero reale negativo.

Quesito 129. Il sistema $\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 - 3x + 2 \end{cases}$

1. ha come unica soluzione $x = 1$.
2. ha le soluzioni $x = \pm 1$.
3. non ha senso, perché le due equazioni sono in una sola incognita.
4. non ha soluzioni.

Quesito 130. Il numero $\log_3\big((-5)(-3)\big)$ è uguale a

1. $\log_3(-5) + \log_3(-3)$.
2. $\log_3(-5) \cdot \log_3(-3)$.
3. non è definito in $\mathbb{R}$.
4. $\log_3(5) + \log_3(3)$.

Quesito 131. Il numero 3^π

1. è compreso tra 27 e 81.
2. è compreso tra 9 e 27.
3. non è definito in $\mathbb{R}$.
4. è compreso tra 1 e 9.

Quesito 132. La disequazione $x + |x| \geq 0$ è verificata per

1. $x < 0$.
2. $x > 0$.
3. tutti gli x reali.
4. $x \geq 0$.

Quesito 133. Nel piano cartesiano l'equazione $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ rappresenta

1. una parabola.
2. una conica non degenere.
3. una circonferenza.
4. un'iperbole.
5. una retta.

Quesito 134. $\sqrt{(-4)^2}$ è uguale a

1. 4.
2. ± 4.
3. -4.
4. non è un numero reale.

Quesito 135. Se a e b sono numeri reali, si ha

1. $|a-b| \geq |a|-|b|$.
2. $|a-b| = |a|-|b|$.
3. $|a-b| \leq |a|-|b|$.
4. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 136. Se a e $a°$ indicano rispettivamente la misura in radianti e gradi di un angolo, allora

1. $\sin(1) > \sin(60°)$.
2. i due valori non sono cnfrontabili.
3. $\sin(1) = \sin(60°)$.
4. $\sin(1) < \sin(60°)$.

Quesito 137. La funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $\cos(2x)$ è periodica di minimo periodo

1. 2π.
2. $\pi/2$.
3. 4π.
4. π.
5. non è periodica.

Quesito 138. L'uguaglianza $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$

1. è sempre vera.
2. nessuna delle altre risposte è corretta.
3. è vera se $a = 0$.
4. è sempre falsa.

Quesito 139. Se a e b sono due numeri reali

1. $\sqrt{ab} \geq \sqrt{a}\sqrt{b}$.
2. nessuna delle altre risposte è corretta.
3. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{a}\sqrt{b}$.
4. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Quesito 140. L'esatta negazione delle frase "Tutti gli studenti sono bravi a scuola" è:

1. Solo qualche studente è bravo a scuola.
2. Esiste un solo studente non bravo a scuola
3. Nessuno studente è bravo scuola.

4. Qualche studente non è bravo a scuola.

Quesito 141. Le due disequazioni $(x+3)(x-2)>0$ e $\dfrac{x+3}{x-2}>0$

1. non possono avere lo stesso insieme di soluzioni perchè hanno diverso dominio.
2. sono verificate per $x=0$.
3. hanno lo stesso insieme di soluzioni.
4. sono verificate per $-3<x<2$.

Quesito 142. La disequazione $(1-\sqrt{2})x>0$ è verificata per

1. $x>\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.
2. $x<0$.
3. $x<\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$.
4. $x>0$.

Quesito 143. La disequazione $\dfrac{1}{x^2}\geq 0$

1. è vera solo per $x>0$.
2. è vera solo per $x<0$.
3. è sempre vera perché x^2 non è mai negativo.
4. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 144. Il sistema $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2\leq 0 \end{cases}$

1. è verificato per $x<0$.
2. è verificato solo per $x=0$.
3. non ha soluzioni perché x^2 non può essere negativo.
4. è verificato per $x>0$.

Quesito 145. L'insieme $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

1. è vuoto.
2. è l'insieme delle parti dell'insieme vuoto.
3. coincide con l'insieme $\{\emptyset\}$.
4. ha due elementi.

Quesito 146. Per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2+(k^2+6)x-5ky+5=0$$

ha centro appartenente alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

1. Solo per $k = -2$.
2. Solo per $k = -3$.
3. Per $k = -3$ e $k = -2$
4. Per $k = 2$.
5. Per $k = 3$.

Quesito 147. Piegando in due un foglio di carta abbastanza grande dello spessore di 0.5 mm si raddoppia lo spessore. Se si procede con il piegamento in due, quanti piegamenti al minimo occorrono per ottenere uno spessore superiore a 81 mm?

1. 4.
2. 5.
3. 6.
4. 7.
5. 8.

Quesito 148. Quale dei seguenti è il valore di $\log_3\left(x^{4\log_x 3}\right)$, dove x è un reale strettamente positivo?

1. 2.
2. -2.
3. 4.
4. -4.
5. dipende da x.

Quesito 149. Quale dei seguenti è l'insieme di soluzioni della disequazione

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+1+\sqrt{x-2}} \ge 0\,?$$

1. $x \le 1 \vee x \ge 2$.
2. $x \ge 2$.
3. $1 \le x \le 2$.
4. $x = 2$.
5. $x \ge 1$.

Quesito 150. In un cono con raggio di base r e altezza h si inscrive un cilindro con asse coincidente con quello del cono e base sulla base del cono. Sapendo che l'altezza del cilindro è un terzo di quella del cono trova il rapporto tra i volumi di cono e cilindro.

1. 3.
2. 4.
3. 8/3.
4. 9/4.
5. 2.

Quesito 151. Se x è un angolo convesso e ottuso con $\sin x = \dfrac{1}{4}$, allora $\sin 2x$ vale

1. $-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.
2. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.
3. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.
4. $-\dfrac{\sqrt{5}}{8}$.
5. $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$.

Quesito 152. Un trapezio è inscritto in una circonferenza di raggio r e contiene il centro della circonferenza. L'angolo al centro che insiste sulla base minore misura α, quello che insiste sulla base maggiore misura 3α. Quanto misurano il lati obliqui del trapezio?

1. $2r\sin(2\alpha)$.
2. $2r\cos\alpha$.
3. $2r(\sin\alpha+\cos\alpha)$
4. $2r\sin 4\alpha$.
5. r.

Quesito 153. Qual è l'insieme di soluzioni della disequazione $\dfrac{1}{3-x}\geq|x-3|$?

1. $x<2$.
2. $x>3$.
3. $2<x<3$.
4. $2\leq x<3$.
5. $x\neq 3$.

Quesito 154. L'equazione $(\sqrt{-x})^2=\left|-\sqrt{x^2}\right|$ è verificata

1. solo per $x=0$.
2. per $x\geq 0$.
3. per $x\leq 0$.
4. mai.
5. per tutti gli x.

Quesito 155. L'equazione $2^x=-x^2+5$ ha esattamente

1. 2 soluzioni reali di segno opposto.
2. 2 soluzioni reali positive.
3. 1 soluzione reale.

4. nessuna soluzione reale.
5. 2 soluzioni reali negative.

Quesito 156. Per quali valori di k la disequazione $kx^2 - 2k - 4 > 0$ non ha soluzioni reali?

1. Per $k > 0$.
2. Per $k < 0$.
3. Per $-2 < k < 0$.
4. Solo per $k = 0$.
5. Per $k > 1$

Quesito 157. Nel piano cartesiano l'equazione $\frac{x}{y} = \frac{2y}{x}$ rappresenta

1. una circonferenza.
2. una ellisse.
3. una iperbole non degenere.
4. una coppia di rette incidenti private del punto comune.
5. una retta.

Quesito 158. Nel piano cartesiano un triangolo ha i vertici nei punti $A(0,0)$, $B(3,0)$ e $C(4,2)$. La tangente dell'angolo $B\widehat{A}C$ è

1. $1/3$.
2. $1/4$.
3. $1/2$.
4. 2.
5. 4.

Quesito 159. L'insieme di soluzioni della disequazione $\frac{x}{x^2 - 2x} < 0$ è

1. $x < 2$.
2. $x < 0 \vee 0 < x < 2$.
3. $x > 2$.
4. $x \neq 0 \wedge x \neq 2$
5. $x < 0$.

Quesito 160. Sia dato il polinomio $x^4 - 13x^3 + 56x^2 - 92x + 48$. Uno solo dei polinomi seguenti è un suo divisore. Quale?

1. $x - 3$.
2. $x + 1$.
3. $x - 5$.
4. $x + 2$.
5. $x - 1$.

Quesito 161. In una circonferenza di raggio r la corda $\overline{\mathsf{AB}}$ di lunghezza r divide il cerchio in due regioni. Quanto vale l'area di quella che contiene il centro della circonferenza?

1. $\dfrac{\pi r^2}{4}$.
2. $\dfrac{5\pi r^2}{6}$.
3. $\dfrac{5}{6}\pi r^2+\dfrac{1}{4}r^2\sqrt{3}$.
4. $\pi r^2-\dfrac{1}{4}r^2\sqrt{3}$.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 162. Posto $a=\log_3 5$ e $b=\log_9 25$, che legame c'è tra a e b?

1. $a>b$.
2. $a=b$.
3. $a<b$.
4. $a=b^2$.
5. $a=2b$.

Quesito 163. Il luogo dei punti del piano che verificano l'equazione $\dfrac{x-x^3}{xy}=1$ rappresenta

1. una parabola.
2. una parabola privata di un punto.
3. una parabola privata di due punti.
4. una parabola privata di tre punti.
5. un'iperbole.

Quesito 164. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, sia $\overline{\mathsf{AH}}$ l'altezza relativa all'ipotenusa. Sapendo che $|\overline{\mathsf{HC}}|=3$ e $|\overline{\mathsf{AB}}|=2$, quanto vale l'ipotenusa?

1. 3.
2. 4.
3. 5.
4. 6.
5. non si può rispondere perché non si hanno dati sufficienti.

Quesito 165. Se $x^2=y^2$ allora sicuramente

1. $x=y$.
2. $x=-y$.
3. $x=y=0$.
4. $x=y=1$.

5. $|x| = |y|$.

Quesito 166. Siano a e b due numeri reali con $a < 0 < b$. Allora

1. $|a| < |b|$.
2. $ab < b^2$.
3. $ab > b^2$.
4. $a^2 < b^2$.
5. $a^2 < ab$.

Quesito 167. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^2 + 8x + a > 0$ è verificata per tutti gli x reali, tranne uno?

1. $a = 4$.
2. $a = 0$.
3. $a = 16$.
4. $a = -16$.
5. per nessun valore di a.

Quesito 168. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle coppie di numeri reali (x, y) che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y + k = 0$ è vuoto?

1. Per nessun valore di k perché si tratta di una circonferenza di centro $(1, 1)$.
2. Per $k > 0$.
3. Per $k < 0$.
4. Per $k < 2$.
5. Per $k > 2$.

Quesito 169. Quante soluzioni ha l'equazione $\ln x = x - 3$.

1. Nessuna.
2. 1.
3. 2.
4. 4.
5. Infinite.

Quesito 170. Le soluzioni della disequazione $\sqrt{3x-1} < \sqrt{3x+1}$ sono

1. l'insieme vuoto.
2. $x > 1/3$.
3. $x \geq 1/3$.
4. $x > -1/3$.
5. $x \geq -1/3$.

Quesito 171. L'uguaglianza $2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$

1. è sempre falsa.
2. è sempre vera.
3. è vera se $\alpha = 2k\pi$.
4. è vera solo se $\alpha = 0$.
5. è vera se $\alpha = \pi + 2k\pi$.

Quesito 172. Sono dati due cerchi di raggi r e $2r$ e quello di raggio minore è internamente tangente a quello di raggio maggiore. L'area della regione compresa tra i due cerchi è

1. tre volte l'area del cerchio piccolo.
2. due volte l'area del cerchio piccolo.
3. un terzo dell'area del cerchio grande.
4. metà dell'area del cerchio grande.
5. non si può rispondere perché non si conosce il valore di r.

Quesito 173. Per quali valori di k il resto della divisione di $x^3 + kx^2 - 2x + 3k$ per $x - 1$ è 7?

1. $k = 0$.
2. $k = 2$.
3. Per ogni k.
4. $k = 1$.
5. Per nessun k.

Quesito 174. L'asse del segmento di estremi $(0,0)$ e $(2,-2)$ ha equazione

1. $x + y - 2 = 0$.
2. $x + y + 2 = 0$.
3. $x - y + 2 = 0$.
4. $x - y - 2 = 0$.
5. $x - y - 1 = 0$.

Quesito 175. Se a e b sono due reali tali che $a^2 > b^2 > 0$ e $a^3 < b^3$, se ne deduce

1. $a > b$.
2. $a < 0 < b$.
3. $a < b < 0$.
4. $ab > 0$.
5. $|a| > |b|$.

Quesito 176. Se p e $p + 2$ sono due primi, con $p > 3$, allora

1. $p + 1$ è divisibile solo per 2.
2. $p + 1$ è divisibile solo per 3.
3. $p + 1$ è divisibile sia per 2 che per 3.
4. $p + 1$ è divisibile solo per p.

5. $p+1$ è primo.

Quesito 177. Data la funzione $\cos(\sin x)$, quale delle affermazioni seguenti è *errata*?

1. È sempre positiva.
2. È pari.
3. Ha come dominio $-1 \leq x \leq 1$.
4. Ha sempre valori ≤ 1.
5. Ha come dominio $\mathbb{R}$.

Quesito 178. Per quali valori del parametro reale k la disequazione $kx^2 - x - k > 0$ ha come insieme di soluzioni un intervallo limitato di numeri reali?

1. $k < 0$.
2. $k \geq -1$.
3. $k > 0$.
4. $k \geq 0$.
5. per ogni k.

Quesito 179. Se a e b sono numeri reali non nulli e concordi di segno, allora

1. $a^2 + b^2 + 3ab > 0$.
2. $ab < 0$.
3. $a + b > 0$.
4. $a - b > 0$.
5. $a^2 + b^2 - 2ab < 0$.

Quesito 180. Se un rombo ha le diagonali lunghe 10 e 24, allora il raggio della circonferenza inscritta vale

1. $\dfrac{17}{13}$.
2. $\dfrac{60}{13}$.
3. 17.
4. $\dfrac{13}{12}$.
5. $\dfrac{14}{5}$.

Quesito 181. Se $n > 1$ è un numero naturale, i tre numeri

$$n, \quad \frac{n^2-1}{2}, \quad \frac{n^2+1}{2}$$

formano una terna pitagorica

1. solo se n è pari.
2. solo se n è dispari.
3. solo se n è multiplo di 3
4. per ogni n.
5. per nessun n.

Quesito 182. Per quali x si ha: $\big||x|+x\big| = |x|+x$?

1. Per nessun x.
2. Solo per $x > 0$.
3. Solo per $x = 0$.
4. Per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.
5. Solo per $x < 0$.

Quesito 183. Il luogo dei punti del piano cartesiano di equazione $(x^2+y^2-4)(2x-y+1) = 0$ è

1. una circonferenza.
2. una retta.
3. l'intersezione tra una retta e una circonferenza.
4. l'unione tra una retta e una circonferenza.
5. costituito da due soli punti.

Quesito 184. Il luogo dei punti del piano cartesiano di equazione $(x-y)^2+(x+y)^2 = 0$ è

1. costituito da un solo punto.
2. una parabola.
3. una circonferenza.
4. l'unione tra due rette.
5. costituito da due punti.

Quesito 185. L'espressione $\left(\sin\frac{\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}\right)^2$

1. non si può calcolare se non si conoscono il seno e coseno di $\frac{\pi}{10}$.
2. è uguale a $1+\sin\frac{\pi}{5}$.
3. è uguale a 1.
4. è uguale a $1+\cos\frac{\pi}{5}$.
5. è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quesito 186. Nel suo dominio l'espressione $(2-x)\sqrt{(x-2)^3}$ è uguale a

1. $\sqrt{(x-2)^5}$.

2. $-\sqrt{(x-2)^5}$.
3. $\sqrt{(2-x)^5}$.
4. $-\sqrt{(2-x)^5}$.
5. $\sqrt{(2-x)^2(x-2)^3}$.

Quesito 187. Quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

1. L'ortocentro di un triangolo può coincidere con uno dei vertici.
2. Il baricentro è sempre un punto interno al triangolo.
3. Il circocentro di un triangolo è equidistante da tutti i vertici del triangolo.
4. In un triangolo rettangolo il circocentro è il punto medio dell'ipotenusa.
5. L'incentro può trovarsi all'esterno del triangolo.

Quesito 188. Quanto vale la sesta parte di 42^{24} ?

1. 7^{24}.
2. 42^4.
3. 7^4.
4. $2^{23} \cdot 3^{23} \cdot 7^{24}$.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 189. La disequazione $\sin^2 x + \cos^2 x \geq 1$

1. non ha soluzioni.
2. è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. è verificata solo per $x = 2k\pi$.
4. è verificata solo per $x = k\pi$.
5. è verificata solo per $x \neq 2k\pi$.

Quesito 190. Se gli angoli sono misurati in radianti, qual è il più grande dei seguenti numeri?

1. $\sin 1$.
2. $\sin 2$.
3. $\sin 3$.
4. $\sin 4$.
5. $\sin 5$.

Quesito 191. Il polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + ax - a$, dove a è un parametro reale

1. ha tre radici reali e distinte se $a < 0$.
2. ha tre radici reali per ogni a.
3. ha una sola radice reale per ogni a.
4. ha una sola radice reale se $a > 0$.
5. non ha nessuna radice reale.

Quesito 192. Quanto vale $\cos^2 70° + \cos^2 20°$?

1. 1.
2. 2.
3. 1/2.
4. $\sqrt{3}/2$.
5. $\sqrt{2}2$.

Quesito 193. Siano $a \neq b$ due reali positivi diversi da 1; allora

1. $\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b} = \log_3(a-b)$.
2. $\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b} = \dfrac{\log_3 a^3}{\log_3 b^3}$.
3. $\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b} = \log_3\left(\dfrac{a}{b}\right)$.
4. $\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b} = \dfrac{a}{b}$.

Quesito 194. Quanti numeri razionali sono compresi tra π^2 e π^3?

1. Nessuno.
2. Infiniti.
3. Uno.
4. Due.

Quesito 195. L'insieme di soluzioni della disequazione $(x+a)(x^4-a)<0$, dove $a<0$ è un numero reale, è:

1. $x > a$.
2. $x < -a$.
3. $x < 0$
4. $x > 0$.
5. $x < a$.

Quesito 196. La disequazione $\log_4 \dfrac{x}{8} < 0$

1. è equivalente alla disequazione $\log_8 x < 1$.
2. è equivalente alla disequazione $\log_4 \dfrac{x^2}{64} < 0$.
3. ha come insieme di soluzioni $x < 8$.
4. ha come insieme di soluzioni$4 \leq x < 8$.

Quesito 197. Se x e y sono reali non nulli, allora $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ è uguale a

1. $x+y$, per ogni x e y.
2. $x+y$, solo se x e y sono positivi.
3. $\sqrt[6]{(x^3+y^3)^2}$, per ogni x e y.
4. $\sqrt[6]{(x^3+y^3)^2}$, se x e y sono positivi.

Quesito 198. L'insieme di soluzioni della disequazione $\dfrac{x-1}{\sqrt[4]{x^2+x+3}} \leq 0$ è

1. $x \geq 0$.
2. $x \leq 1$.
3. $1 \leq x < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.
4. $x \geq 1$.

Quesito 199. L'insieme di soluzioni della disequazione $\log_4 \sqrt[3]{x^2-3x+3} > 0$ è:

1. $1 < x < 2$.
2. $x < 1 \lor x > 2$.
3. $\mathbb{R}$.
4. $x \neq 1 \land x \neq 2$.
5. vuoto.

Quesito 200. Se A e B sono due insiemi con $A \subset B$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. $A \cap B = B$.
2. $A \cup B = A$.
3. $A \cap B \subseteq B$.
4. $A \cup B \subseteq A$.

Quesito 201. La disequazione $\sqrt{x^2-4} > -\sqrt{10}$ ha come insieme di soluzioni

1. $\mathbb{R}$.
2. $x \leq -2 \lor x \geq 2$.
3. $x < -2 \lor x > 2$.
4. $-2 < x < 2$.
5. l'insieme vuoto.

Quesito 202. Qual è l'inversa della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, come funzione di $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

1. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

2. $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$.
3. $f^{-1}(x) = x+1$.
4. $f^{-1}(x) = 1-x$

Quesito 203. Il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{x-2}$ è

1. $x < 0$.
2. $x \leq 0$.
3. $0 \leq x \vee x > 1$.
4. $x \neq 1$.
5. vuoto perché la radice di un numero negativo non è definita.

Quesito 204. Qual è l'inversa della funzione $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, come funzione di $[0, +\infty[$ in $[1, +\infty[$?

1. $g(x) = \ln\sqrt{x}$.
2. $g(x) = \ln(x^2)$.
3. $g(x) = \sqrt{\ln x}$.
4. $g(x) = \big(\ln x\big)^2$.

Quesito 205. L'insieme di soluzioni della disequazione $\dfrac{2^x + 2^{-x}}{3^x + 3^{-x}} \leq 0$ è

1. $\mathbb{R}$.
2. l'insieme vuoto.
3. $x \geq 0$.
4. $x \leq 0$.
5. $-1 < x < 1$.

Quesito 206. L'insieme di soluzioni della disequazione $(\cos x + \sin x + 2)\sin x > 0$, per $x \in [0, 2\pi[$ è

1. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
2. $0 < x < \pi$.
3. $\pi < x < 2\pi$.
4. $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

Quesito 207. Data la funzione $f(x) = \log_3(1-x)$, per quale valore di x si ha $f(x) = -3$?

1. per nessun x.
2. $x = -1$
3. $x = -3$.

4. $x = 26/27$.
5. $x = 24/27$.

Quesito 208. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

1. Se $A \cap B = A$, allora $A \subseteq B$.
2. Se $A \cup B = B$, allora A è vuoto.
3. Se $A \setminus B = \emptyset$, allora A e B sono disgiunti.
4. Se $A \cap B = \emptyset$, allora almeno uno dei due insiemi A e B è vuoto.
5. L'unione di due insiemi non può mai essere l'insieme vuoto.

Quesito 209. L'equazione $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3} = 0$ è verificata

1. per $x = -5$ e per $x = -3$.
2. per $x > -3$.
3. mai.
4. per tutti gli x reali.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 210. L'insieme di soluzioni della disequazione $\sqrt{x+5} > \sqrt{x-5}$ è

1. $\mathbb{R}$.
2. $x > 5$.
3. $x > -5$.
4. $-5 < x < 5$.
5. l'insieme vuoto.

Quesito 211. In un triangolo rettangolo il cateto minore misura 9 e la sua proiezione sull'ipotenusa è 9/25 dell'ipotenusa. Quanto vale l'area del triangolo?

1. 108.
2. 54.
3. 27.
4. 135.
5. 15.

Quesito 212. Se $A \setminus B = \emptyset$ allora sicuramente

1. $A = B$.
2. $A \subseteq B$.
3. $A = \emptyset$.
4. A e B sono disgiunti.
5. $B \subseteq A$.

Quesito 213. Ad una circonferenza di centro O si conduce una tangente in un suo punto A. Detto P un punto della tangente, se $\widehat{AOP}$ è di 52°, quanto misura l'angolo $\widehat{APO}$?

1. 48°.
2. 58°.
3. 38°.
4. 142°.

Quesito 214. Le misure dei lati di un rettangolo vengono ridotte del 30%. Di quanto si riduce l'area del rettangolo?

1. 60%.
2. 51%.
3. 49%.
4. 30%.

Quesito 215. Sia $f(x) = x^3 + 2$. Per quale x si ha $f(2x) = 2f(x)$?

1. 0.
2. $\dfrac{1}{3}$.
3. $\sqrt[3]{3}$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.
5. Per nessun x.

Quesito 216. Due insiemi A e B hanno 15 elementi ciascuno. Se la loro intersezione ha almeno 8 elementi, la loro unione ha

1. al più 22 elementi.
2. almeno 22 elementi.
3. esattamente 22 elementi.
4. al più 20 elementi.
5. al più 23 elementi.

Quesito 217. Si vuole riempire completamente un parallelepipedo a base quadrata di lato 30 ed altezza 70 con dei cubetti rigidi uguali. Qual è il minimo numero di tali cubetti?

1. 21.
2. 42.
3. 63.
4. 84.

Quesito 218. Quante soluzioni reali ammette l'equazione $x^5 - x^3 + 3x = 0$?

1. 1.
2. 2.
3. 3.
4. 4.

5. 5.

Quesito 219. Nello spazio, dati una retta r ed un suo punto P

1. esiste una sola perpendicolare per P alla retta r.
2. esistono infinite perpendicolari per P alla retta r.
3. non esiste nessuna perpendicolare per P alla retta r.
4. esiste esattamente due perpendicolari per P alla retta r.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 220. Il dominio della funzione $f(x) = \log_2\left(\log_3\left(\log_4 x\right)\right)$ è

1. $x > 0$.
2. $x > 2$.
3. $x > 3$.
4. $x > 4$.
5. $x > 5$.

Quesito 221. Un parallelepipedo ha dimensioni 1, 2 e 3. Qual è la massima distanza tra due punti del parallelepipedo?

1. $\sqrt{5}$.
2. $\sqrt{10}$.
3. $\sqrt{14}$.
4. 6.
5. 14.

Quesito 222. Quale delle seguenti uguaglianze è sempre corretta?

1. $\log(ab) = \log a + \log b$.
2. $\log(ab) = \log a \cdot \log b$.
3. $\log(ab) = \log|a| + \log|b|$.
4. $\log(a + b) = \log a + \log b$.
5. $\log(a + b) = \log|a| + \log|b|$.

Quesito 223. L'equazione $x^2 - 5 \cdot 2^9 x + 2^{20} = 0$

1. non ha nessuna soluzione.
2. ha due soluzioni negative.
3. ha come soluzioni i numeri $x = 2^9$ e $x = 2^{11}$.
4. ha come soluzioni i numeri $x = 2^8$ e $x = 2^{10}$.
5. ha come soluzioni i numeri $x = 2^10$ e $x = 2^{12}$.

Quesito 224. In un triangolo equilatero ABC di lato 1, sia M il punto medio di uno dei lati. Il raggio r della circonferenza di centro M e tangente agli altri due lati è

1. $\frac{1}{2}$.
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quesito 225. Il valore di $\cos 40° + \sin 40° + \cos 140° - \sin 140°$ è

1. > 0.
2. < 0.
3. 0.
4. compreso tra -1 e 0.
5. compreso tra 0 e 1.

Quesito 226. Il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r ha perimetro

1. $10r \sin 18°$.
2. $20r \sin 18°$.
3. $20r \sin 9°$.
4. $20r \sin 36°$.
5. $10r \sin 36°$.

Quesito 227. L'equazione $\log_{(2/3)} x = \sqrt{x-1}$ ha

1. nessuna soluzione.
2. 1 soluzione.
3. 2 soluzioni.
4. più di due soluzioni.

Quesito 228. L'insieme delle soluzioni della disequazione $\left(\sqrt{(x-1)^2}\right) \leq 0$ è

1. vuoto.
2. $x < 1$.
3. $x = 1$.
4. $x \leq 1$.
5. $x \geq 1$.

Quesito 229. Se $f(x) = \frac{4}{x-2}$ allora $f(f(4))$ vale

1. 2.
2. 4.
3. non si può calcolare.
4. 1/2.
5. 1/4.

Quesito 230. L'espressione $2\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}$ è uguale a

1. $\sin 2x$.
2. $\cos 2x$.
3. $\cos^2 x$.
4. $\sin^2 x$.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 231. La funzione $x\sin x$

1. è periodica di periodo 2π.
2. è periodica di periodo π.
3. è periodica di periodo $\pi/2$.
4. non è periodica.
5. è dispari.

Quesito 232. Un cono circolare retto ha raggio di base r e altezza h. Se il raggio di base dimezza e l'altezza raddoppia, il volume del cono

1. rimane invariato.
2. diventa la metà.
3. raddoppia.
4. diventa un quarto.

Quesito 233. Sia r una retta e P un suo punto. I cerchi tangenti in P a r sono

1. 1.
2. 2.
3. nessuno.
4. più di 2.

Quesito 234. La circonferenza terrestre è di circa 40000 km. Se si aumenta tale circonferenza di un metro, il raggio della terra aumenta di circa

1. 1 mm.
2. 1 cm.
3. 15 cm.
4. 30 cm.

5. 50 cm.

Quesito 235. La funzione $\sin(x-2)$

1. non è periodica.
2. è periodica di periodo 2π.
3. è periodica di periodo $2\pi-2$.
4. è periodica di periodo $2\pi+2$.

Quesito 236. $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

1. è sempre uguale a $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.
2. è sempre uguale a $-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.
3. è uguale a $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ per almeno un valore di α.
4. è uguale a $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ per al più un valore di α.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 237. In un piano cartesiano l'equazione $y=mx+q$ rappresenta, al variare di m e q,

1. tutte le rette del piano.
2. tutte le rette del piano esclusa l'asse y.
3. tutte le rette del piano esclusa l'asse x.
4. tutte le rette del piano non parallele agli assi.
5. tutte le rette del piano dotate di coefficiente angolare.

Quesito 238. La negazione della frase "Tutti gli anziani sono saggi" è

1. Nessun anziano è saggio.
2. C'è almeno un anziano non saggio.
3. Ci sono sicuramente più anziani non saggi.
4. Sicuramente un solo anziano è non saggio.

Quesito 239. Il numero $\sqrt{(-1)^2}$

1. è uguale a $(\sqrt{-1})^2$.
2. è uguale a ±1.
3. è uguale a 1.
4. è uguale a -1.
5. non è un numero reale.

Quesito 240. Quanto vale $\log_3\big((-9)(-27)\big)$?

1. $\log_3(-9)+\log_3(-27)$.
2. $-\log_3(9)-\log_3(27)$.
3. 5.
4. $\log_3(-9)\cdot\log_3(-27)$.
5. Non è definito.

Quesito 241. La disequazione $x^4-x^2\geq 0$

1. è equivalente alla $x^2-1\geq 0$.
2. é verificata solo per $x\leq -1 \vee x\geq 1$.
3. é verificata per $-1\leq x\leq 1$.
4. è verificata per $x\neq 0$.
5. è verificata per $x\leq -1 \vee x=0 \vee x\geq 1$.

Quesito 242. L'insieme di soluzioni della disequazione $\log_x 10\leq -1$ è

1. $0<x\leq 1$.
2. $\dfrac{1}{10}\leq x\leq 1$.
3. $\dfrac{1}{10}\leq x<1$.
4. $x>1$.
5. $0<x<1$.

Quesito 243. L'equazione $x^2-2^{10}x+2^{17}=0$

1. non ha radici reali.
2. ha due radici reali di segno opposto.
3. ha due radici reali negative e distinte.
4. ha due radici reali positive e distinte.
5. ha due radici reali coincidenti.

Quesito 244. L'equazione $x^2+y^2+2x+2=0$ nel piano cartesiano

1. rappresenta una circonferenza di centro $(-1,0)$.
2. rappresenta una circonferenza di centro $(0,-1)$.
3. rappresenta una circonferenza passante per il punto $(0,-2)$.
4. rappresenta una circonferenza passante per l'origine.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 245. Sia A un vertice di un cubo ed $\overline{\mathsf{HA}}$, $\overline{\mathsf{FA}}$ le diagonali di due facce che si intersecano in A. L'angolo $\mathsf{H}\widehat{\mathsf{A}}\mathsf{F}$ misura

1. 90°.
2. 120°.
3. 45°.
4. 60°.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 246. Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati A e B è

1. una retta.
2. un piano.
3. un'ellisse.
4. un'iperbole.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 247. L'equazione $x^4 + 999x - 999 = 0$ ha

1. 4 soluzioni reali e distinte.
2. 2 soluzioni reali positive distinte.
3. 2 soluzioni reali negative distinte.
4. 2 soluzioni reali opposte.
5. 2 soluzioni reali di segno opposto ma di diverso modulo.

Quesito 248. L'insieme delle soluzioni dell'equazione $\ln x^2 + \ln|x| - 3\ln x = 0$ è

1. $x = 1$.
2. $x > 0$.
3. $0 < x < 1$.
4. $x > 1$.
5. $1 < x < e$.

Quesito 249. Sia A l'insieme di soluzioni della disequazione $x < -1$ e B l'insieme di soluzioni della disequazione $x^2 < 1$, ottenuta elevando al quadrato la precedente. Allora si ha che

1. $A = B$.
2. $A \subset B$.
3. $A \supset B$.
4. $A \cap B = \emptyset$.

Quesito 250. Sia A l'insieme di soluzioni della disequazione $x < 1$ e B l'insieme di soluzioni della disequazione $x^2 < 1$, ottenuta elevando al quadrato la precedente. Allora si ha che

1. $A = B$.
2. $A \subset B$.
3. $A \supset B$.
4. $A \cap B = \emptyset$.

Quesito 251. Sia A l'insieme di soluzioni della disequazione $|x| < 1$ e B l'insieme di soluzioni della disequazione $x^2 < 1$, ottenuta elevando al quadrato la precedente. Allora si ha che

1. $A = B$.
2. $A \subset B$.
3. $A \supset B$.
4. $A \cap B = \emptyset$.

Quesito 252. Sia A l'insieme di soluzioni della disequazione $x > 1$ e B l'insieme di soluzioni della disequazione $x^2 > 1$, ottenuta elevando al quadrato la precedente. Allora si ha che

1. $A = B$.
2. $A \subset B$.
3. $A \supset B$.
4. $A \cap B = \emptyset$.

Quesito 253. Una sola delle seguenti affermazioni è *errata*. Data la disequazione $x(x-3) > 0$ essa ha lo stesso insieme di soluzioni della disequazione

1. $\dfrac{1}{x(x-3)} > 0$.
2. $\dfrac{x}{x-3} > 0$.
3. $\dfrac{x-3}{x} > 0$.
4. $x > \dfrac{1}{x-3}$.
5. $x^2 > 3x$.

Quesito 254. Quale delle seguenti disuguaglianze è corretta?

1. $9 > 2\sqrt{21}$.
2. $\sqrt{96} > 4\sqrt{6}$.
3. $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{10}$.
4. $\sqrt{5} - 2 \geq \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.
5. $\sqrt{19} < 3\sqrt{2}$.

Quesito 255. Nel piano cartesiano l'equazione $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 0$ rappresenta

1. un'ellisse di centro l'origine.
2. un'ellisse passante per l'origine.

3. una coppia di retta.
4. un punto.
5. l'insieme vuoto.

Quesito 256. L'equazione $e^{2x} + 5 \cdot e^x + 6 = 0$

1. ha due soluzioni reali entrambe negative.
2. ha due soluzioni reali entrambe positive.
3. ha due soluzioni reali opposte.
4. ha una sola soluzione reale.
5. non ha soluzioni reali.

Quesito 257. Il polinomio $(x^2 + x + 1)(x^2 - 4)(x^3 - 1)(x^6 + 2)$

1. ha una sola radice reale.
2. ha esattamente due radici reali distinte.
3. ha esattamente tre radici reali distinte.
4. ha esattamente cinque radici reali distinte.
5. ha esattamente tante radici reali quant'è il suo grado.

Quesito 258. Detto A l'insieme di soluzioni dell'equazione $x^2 - x + 6 = 0$ e B l'insieme di soluzioni dell'equazione $x^2 - |x| + 6 = 0$, si ha

1. $A = B$.
2. $A \subset B$.
3. $A \supset B$.
4. $A \cap B = \{3\}$.
5. $A \cap B = \emptyset$.

Quesito 259. Siano a e b due reali con $a > b > 1$. Allora

1. $\log_{(1/2)} a > \log_{(1/2)} b$.
2. $\left(\log_{(1/2)} a\right)^3 < \left(\log_{(1/2)} b\right)^3$.
3. $\left(\log_{(1/2)} a\right)^2 < \left(\log_{(1/2)} b\right)^2$.
4. $\log_{(1/2)} a < 0 < \log_{(1/2)} b$.
5. $\log_{(1/2)} b < 0 < \log_{(1/2)} a$.

Quesito 260. In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa misura 5, mentre un cateto misura 6. Quanto vale il perimetro?

1. Non si può rispondere: manca almeno un dato.
2. 26.
3. 24.
4. 22.

5. 20.

Quesito 261. Se x e y sono due numeri reali con $x < y \leq 4$ allora

1. $xy < 16$.
2. $xy \leq 16$.
3. $x + y > 0$.
4. $x^2 < y^2$.
5. $x^3 < y^3$.

Quesito 262. Quale delle seguenti funzioni *non* è periodica?

1. $\cos^2 x$.
2. $\cos(x^2)$.
3. $\dfrac{1}{\cos x}$.
4. $\cos(\pi x)$.
5. $\cos \dfrac{x}{2}$.

Quesito 263. Quale delle seguenti funzioni ha periodo 1?

1. $\sin(\pi x)$.
2. $\sin \dfrac{x}{\pi}$.
3. $\sin(2\pi x)$.
4. $\sin \dfrac{x}{2\pi}$.
5. Nessuna: una funzione trigonometrica può avere come periodo solo un multiplo o sottomultiplo di 2π.

Quesito 264. L'equazione $2^{|x|} \cdot 2^{x^2} = 4$ è equivalente all'equazione

1. $|x| \cdot x^2 = 2$.
2. $|x| \cdot x^2 = 4$.
3. $|x| + x^2 = 2$.
4. $|x| + x^2 = 4$.
5. Nessuna delle precedenti.

Quesito 265. Si consideri il numero $a = 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}$. Quale delle seguenti affermazioni è *errata*?

1. a è pari.
2. a è divisibile per 5.

3. a è divisibile per 10.
4. a è dispari.
5. a divisibile per 81.

Quesito 266. Siano α e β due angoli con $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Allora necessariamente

1. $\cos\alpha + \sin\beta < 0$.
2. $\sin\alpha < \cos\beta$.
3. $\cos\alpha < \sin\beta$.
4. $\sin\alpha + \sin\beta < 0$.
5. $\sin\alpha + \sin\beta > 0$.

Quesito 267. Sono dati nello spazio 4 punti in un piano, costituenti i vertici di un quadrilatero convesso, e un punto fuori dal piano. I piani che contengono almeno tre dei cinque punti sono

1. Due.
2. Tre.
3. Quattro.
4. Cinque.
5. Sei.

Quesito 268. L'insieme di soluzioni della disequazione $\log_{(1/2)}(x^2+1) \le 0$ è

1. $x = 0$.
2. $\mathbb{R}$.
3. $\emptyset$.
4. $-1 \le x \le 1$.
5. $x \ne 0$.

Quesito 269. L'equazione $x^2(x^3+x) = (x^3+x)(5x-6)$ ha

1. solo una radice reale.
2. esattamente due radici reali.
3. tre radici reali distinte.
4. nessuna radice reale.
5. almeno cinque radici reali distinte.

Quesito 270. Si n un naturale maggiore di 2. Il numero $(n+1)^3 - (n-2)^3$

1. è sicuramente divisibile per 6.
2. è sicuramente pari.
3. è divisibile per 3 per ogni valore di n.
4. è divisibile per 3 solo se n è un multiplo di 3.
5. non è mai divisibile per 3.

Quesito 271. Siano a e b due numeri reali non nulli e concordi. Allora

1. $\sqrt{a^2+b^2} = |a|+|b|$.
2. $\sqrt{a^2+b^2} = |a+b|$.
3. $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$.
4. $\sqrt{a^2+b^2} > |a|+|b|$.
5. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Quesito 272. Il numero razionale $\dfrac{1}{19}$ è rappresentato da un numero decimale

1. finito.
2. periodico con periodo 9.
3. periodico semplice.
4. periodico misto.

Quesito 273. In un triangolo rettangolo con un angolo di 30° il rapporto tra il cateto maggiore e quello minore è

1. $\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{3}$.
3. 2.
4. $\sqrt{3}/3$.
5. Non si può rispondere.

Quesito 274. L'insieme di soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2-1} < x$ è

1. $x < 1$.
2. $x \le 1$.
3. $x < 0$.
4. $x > 1$.
5. $x \ge 1$.

Quesito 275. Si consideri un cono a due falde indefinito, ovvero la superficie ottenuta ruotando una retta r attorno ad una retta s, con r ed s incidenti in un unico punto V. L'intersezione tra il cono e un piano *non* può mai essere

1. un punto.
2. una ellisse.
3. una parabola.
4. una coppia di rette incidenti.
5. l'insieme vuoto.

Quesito 276. Un angolo di due radianti

1. è maggiore di un angolo di 200°.
2. è maggiore di un angolo piatto.

3. è minore di un angolo retto.
4. è compreso tra un angolo retto e uno piatto.
5. è maggiore di 2π radianti.

Quesito 277. L'insieme di soluzioni della disequazione $(3^x-9)(2^x-4)\geq 0$ è

1. $x\neq 2$.
2. $x\neq 3$.
3. $\mathbb{R}$.
4. $x\leq 2 \vee x\geq 3$.
5. $2\leq x\leq 3$.

Quesito 278. Il rapporto tra il lato di un triangolo equilatero circoscritto e di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è

1. $\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{6}$.
4. 2.
5. dipende dal raggio della circonferenza.

Quesito 279. $(1202)^2-(1200)^2$ è uguale a

1. 4.
2. 1201.
3. 4804.
4. 2402.
5. Nessuna della altre risposte è corretta.

Quesito 280. Se gli angoli sono misurati in radianti, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\right)$ è uguale a

1. $\cos 3$.
2. $\sin 3$.
3. $-\cos 3$.
4. $-\sin 3$.
5. non ha senso perché 3 non è la misura di un angolo in radianti.

Quesito 281. L'insieme di soluzioni della disequazione $\left(\sin\big(\ln(x-1)\big)+2\right)^2\leq 9$ è

1. $\mathbb{R}$.
2. $x\geq 1$.
3. $x>1$.
4. $x>0$.

5. $x \neq 1$.

Quesito 282. Dall'uguaglianza $\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)^2 = 4(4-\sqrt{15})$ si deduce

1. $2\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{6}-\sqrt{10}$.
2. $2\sqrt{4-\sqrt{15}} = \pm\left(\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)$.
3. $2\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{10}-\sqrt{6}$.
4. $2\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{6}+\sqrt{10}$.
5. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Quesito 283. L'insieme di soluzioni della disequazione $\sqrt{|x|+2} < \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$ è

1. $x \geq 2$.
2. $x \leq 1$.
3. $\emptyset$.
4. $\mathbb{R}$.
5. $x \neq -1$.

Quesito 284. Si considerino le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, aventi come dominio il loro dominio naturale. Allora

1. f è l'inversa di g.
2. g è l'inversa di f.
3. $f(g(x)) = x$.
4. $f(g(x)) = |x|$.
5. $f(g(x)) = -x$.

Quesito 285. Per quali valori del parametro reale a le due rette $y = a^2x + 2$ e $y = (3a-2)x + 1$ non hanno alcun punto in comune?

1. Solo per $a = 1$.
2. Solo per $a = 2$.
3. Per $a = 1$ e per $a = 2$.
4. Per nessun valore di a.
5. Per $a = 0$.

Quesito 286. L'insieme di soluzioni della disequazione $\dfrac{(x-1)^2}{x-2} \geq 0$ è

1. $x > 2$.
2. $x \geq 2$.
3. $x \leq 1 \vee x > 2$.

4. $x = 1 \vee x > 2$.
5. $x < 2$.

Quesito 287. Quante soluzioni reali e distinte ha l'equazione $2^{2x^2} - 4 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$?

1. Nessuna.
2. 1.
3. 2.
4. 4.
5. L'equazione non è elementarmente risolubile.

Quesito 288. Per quali valori del parametro reale k l'equazione $x^2 + kx + k = 0$ ha una sola soluzione?

1. Per nessun valore di k.
2. Solo per $k = 0$.
3. Solo per $k = 4$.
4. Per $k = 0$ e per $k = 4$.
5. Per $k = \pm 2$.

Quesito 289. L'insieme di soluzioni della disequazione $\dfrac{x^2}{1-x^2} \leq 0$ è

1. $x < -1 \vee x > 1$.
2. $-1 < x < 1$.
3. $x < -1 \vee x = 0 \vee x > 1$.
4. $x < -1$.
5. $x > 1$.

Quesito 290. Quanti sono i punti di intersezione tra i grafici di $f(x) = |x| + \dfrac{1}{2}$ e $g(x) = \cos x$?

1. Nessuno.
2. 1.
3. 2.
4. 3.
5. 4.

Quesito 291. Si consideri l'equazione $ax^4 + bx^2 + c = 0$, dove a, b, e c sono parametri reali. Allora, qualunque siano a, b, e c,

1. l'equazione ha sempre quattro soluzioni reali.
2. l'equazione ha sempre almeno due soluzioni reali.
3. il prodotto delle sue eventuali soluzioni reali è positivo.
4. il prodotto delle sue eventuali soluzioni reali è negativo.
5. la somma delle sue eventuali soluzioni reali è nulla.

Quesito 292. Si consideri un trapezio ABCD rettangolo in A e D e di base maggiore $SegAB$ e base minore $\overline{CD}$. I due triangoli ABC e ABD

1. hanno sempre lo stesso perimetro.
2. hanno sempre la stessa area.
3. sono tali che ABC ha sempre area maggiore di ABD.
4. sono tali che ABC ha sempre area minore di ABD.

Quesito 293. Si consideri l'equazione $x^4 - 3x^2 + c = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

1. Per opportuni valori di c l'equazione ha quattro soluzioni positive.
2. Per opportuni valori di c l'equazione ha quattro soluzioni negative.
3. Per $c = -2$ ha la soluzione $x = -1$.
4. Per $c = 9/4$ l'equazione ha una soluzione positiva e una negativa.
5. Per $c = 0$ l'equazioni ha quattro soluzioni distinte.

Quesito 294. Si consideri l'equazione $(x+3)(y-2) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

1. L'unica soluzione è la coppia $(x, y) = (-3, 2)$.
2. Ha come soluzioni solo le coppie $(x, y) = (-3, 0)$ e $(x, y) = (0, 2)$.
3. Se $x \neq -3$ allora necessariamente $y = 2$.
4. Ha un numero finito di coppie soluzioni.
5. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Quesito 295. La disequazione $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+8} \leq 0$

1. è equivalente alla disequazione $\dfrac{1}{(x+2)(x+8)} \leq 0$.
2. è equivalente alla disequazione $\dfrac{1}{(x+2)(x+8)} \geq 0$.
3. è verificata solo per $x < -8$.
4. è verificata solo per $x > -2$.
5. è verificata per $x < -2 \vee x > 8$.

Quesito 296. Se il prodotto dei coefficienti angolari di due rette è -1

1. le due rette sono parallele.
2. almeno una delle due rette è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.
3. almeno una delle due rette è parallela all'asse delle ascisse.
4. almeno una delle due rette è parallela all'asse delle ordinate.
5. nessuna delle due rette è parallela a uno degli assi coordinati.

Quesito 297. Per quali valori di k l'equazione $kx^2 + (3k+2)y^2 + 2x + y + 5 = 0$ rappresenta una circonferenza?

1. Per $k > 0$.
2. Per $k = 0$.

3. Per $k < -1$.
4. Per $k = -1$.
5. Per nessun k.

Quesito 298. Quale delle seguenti uguaglianze è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$?

1. $|-x| = |x^{-1}|$.
2. $|-x| = -|x|$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $|-x| = \pm x$.
5. $|-x| = -\sqrt{x^2}$.

Quesito 299. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ si ha che:

1. $f(x+1) = \sqrt{x} + 1$.
2. $f(x) + 1 = \sqrt{x+1}$.
3. $f(x^2) = x$.
4. $f(x^4) = x^2$.
5. $f(x^6) = x^3$.

Quesito 300. Quante soluzioni reali e distinte ha l'equazione $3^{2x^2} - 6 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0$?

1. Nessuna.
2. 1.
3. 2.
4. 3.
5. 4.

Quesito 301. Il numero 0.2 è il 3% di

1. 0.6.
2. 6.
3. $\dfrac{20}{3}$.
4. 20.
5. $\dfrac{2}{3}$.

Quesito 302. Quale delle seguenti equazioni ha il numero $\sqrt{3}$ come soluzione?

1. $\dfrac{1}{x^2 - 3} = 0$.
2. $\dfrac{\sqrt{3}}{x^2 - 3} = 0$.

3. $\dfrac{3-x^2}{x^4+x^2+1}=0$.
4. $1-\dfrac{4}{x^2}=0$.
5. $x^2-5x+6=0$.

Quesito 303. L'equazione di una generica retta non parallela agli assi cartesiani e passante per il punto $(-1,2)$ è

1. $y+1=m(x-2),\ m\neq 0$.
2. $(x+1)+(y-2)=m,\ m\neq 0$.
3. $y=m(x+1),\ m\neq 0$.
4. $x+1=m(y-2),\ m\neq 0$
5. Nessuna delle precedenti.

Quesito 304. Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali, la retta r di equazione $2x-y=0$ interseca la circonferenza di equazione $x^2+(y-3)^2=1$ in

1. 1 punto.
2. 2 punti.
3. 3 punti.
4. più di 3 punti.
5. nessun punto.

Quesito 305. Quale delle seguenti uguaglianze è *falsa*?

1. $-\sqrt[4]{(-4)^2}=-2$.
2. $-\sqrt[3]{-27}=-3$.
3. $-\sqrt[3]{(-3)^3}=3$.
4. $\sqrt[4]{(-2)^2}=\sqrt{2}$.
5. $-\sqrt{(-4)^4}=-16$.

Quesito 306. Se n è un intero maggiore di 2, qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?

$$2^{1/n},\quad 2^{-1/n},\quad 2^n,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-n},\quad \frac{1}{2^{-n}}.$$

1. $2^{1/n}$.
2. $2^{-1/n}$.
3. 2^n.
4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n}$.

5. $\dfrac{1}{2^{-n}}$.

Quesito 307. Nel piano cartesiano sono date le due circonferenze $x^2+y^2=4$ e $(x-1)^2+y^2=1$. Quante sono le loro tangenti comuni.

1. Nessuna.
2. 1.
3. 2.
4. 3.
5. 4.

Quesito 308. Siano α e β due angoli tali che $\alpha=\pi-\beta$. Allora

1. $\sin\alpha+\sin\beta=0$.
2. $\cos\alpha+\cos\beta=-1$.
3. $\tan\alpha+\tan\beta=0$.
4. $\sin\alpha-\sin\beta=-1$.
5. $\cos\alpha-\cos\beta=0$.

Quesito 309. In un triangolo equilatero di lato 1 sia γ la circonferenza circoscritta e γ' quella inscritta. L'area della corona circolare delimitata da γ e γ' è

1. $\dfrac{\pi}{2}$.
2. $\dfrac{\pi}{3}$.
3. $\dfrac{\pi}{4}$.
4. $\sqrt{2}$.
5. $\sqrt{3}$.

Quesito 310. Nel piano sono date due circonferenze γ e γ' di raggi 4 e 5 rispettivamente. Sia d la distanza tra i centri. Allora

1. γ e γ' si intersecano in due punti se e solo se $1\le d\le 9$.
2. γ e γ' si intersecano in due punti se e solo se $d<9$.
3. γ e γ' non si intersecano se e solo se $d<1$.
4. γ e γ' si intersecano in due punti se e solo se $1<d<9$.
5. γ e γ' sono tangenti se e solo se $d=9$.

Quesito 311. I polinomi $x^7+x^5+x^3-x+1$ e $x^7-x^5-x^3-x+1$ assumono gli stessi valori in

1. nessun punto.
2. 1 punto.
3. 3 punti.
4. 5 punti.

5. 7 punti.

Quesito 312. Un trapezio isoscele è iscritto in una semicirconferenza di raggio 13. Quanto vale la sua area se l'altezza è 5?

1. 110.
2. 120.
3. 125.
4. 130.
5. 140.

Quesito 313. Siano x e y due reali con $x < 5$ e $y \leq 0$. Allora

1. $xy < 5y$.
2. $xy \leq 5y$.
3. $xy > 5y$.
4. $xy \geq 5y$.
5. $xy \leq 0$.

Quesito 314. Nel piano cartesiano l'equazione $(2x+3y)^2 = 1$ rappresenta

1. un'ellisse.
2. una parabola.
3. una retta.
4. una coppia di rette.
5. un punto.

Quesito 315. In un cerchio di raggio 1 è inscritto un triangolo con un lato coincidente con il diametro. Gli altri due lati del triangolo possono avere misure appartenenti solo a una delle coppie seguenti. Quale?

1. $\left(1, \dfrac{8}{5}\right)$.
2. $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}\right)$.
3. $\left(\dfrac{6}{5}, 1\right)$.
4. $\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$.
5. $(1, \sqrt{2})$.

Quesito 316. Siano a e b reali con $a < 0 < b$. Quanto vale $\sqrt[16]{a^{24}b^{24}}$?

1. $ab\sqrt{ab}$.
2. $\sqrt{a^3b^3}$.

3. $(ab)^{3/2}$.
4. $-ab\sqrt{|ab|}$.
5. a^8b^8.

Quesito 317. Si considerino le seguenti disequazioni nell'incognita reale x. Una sola di esse ammette almeno una soluzione minore di 0. Quale?

1. $3^{-x}-1<0$.
2. $\log_2 x+\log_2 x^2<3$.
3. $x^4-x+1<0$.
4. $\sqrt{x-1}<\sqrt{2x-3}$.
5. $(x+1)^2\leq 0$.

Quesito 318. L'equazione $\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}=0$

1. non ha soluzioni.
2. ha infinite soluzioni.
3. ha un'unica soluzione.
4. ha due soluzioni distinte.
5. ha solo soluzioni positive.

Quesito 319. Se n un intero positivo, l'espressione $6^{n+2}-3\cdot 6^n$ è uguale a

1. 6^2.
2. $6^n\cdot 11$.
3. $3\cdot 6^n\cdot$.
4. $-2\cdot 6^n$.
5. $2^n\cdot 3^{n+1}\cdot 11$.

Quesito 320. Qual è il maggiore dei seguenti numeri reali?

1. 33^{-5}.
2. $(-33)^5$.
3. $\sqrt[4]{33^{-5}}$.
4. $\sqrt[4]{33^{-3}}$.
5. $\left(33^{-5}\right)^2$.

Quesito 321. Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2-4}$ è

1. $x\leq -2\vee x\geq 2$.
2. $x<-2\vee x>2$.
3. $-2\leq x\leq 2$.
4. $-2<x<2$.
5. costituito da un numero finito di punti.

Quesito 322. Siano A e B i domini naturali, rispettivamente, delle due funzioni

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}.$$

Allora

1. $A=B$.
2. $A\subseteq B$.
3. $A\cap B=B$.
4. $A\cap B=A$.
5. $A\cap B=\emptyset$.

Quesito 323. Il numero $\left(\log_2\frac{5}{4}\right)^2$ è uguale a

1. $\left(\log_2\frac{4}{5}\right)^2$.
2. $(\log_2 5)^2-4$.
3. $(\log_2 5)^2+4$.
4. $\log_2\frac{25}{16}$.
5. $\log_4\frac{5}{4}$.

Quesito 324. Se un polinomio $P(x)$ è divisibile per x^2-2, allora

1. $P(x)$ non ha radici reali.
2. 2 è sicuramente radice di $P(x)$.
3. $\sqrt{2}$ non è radice di $P(x)$.
4. $-\sqrt{2}$ non è radice di $P(x)$.
5. $P(x)$ ha sicuramente almeno due radici reali distinte.

Quesito 325. Sapendo che l'affermazione "*Tutti i sabati vado in piscina e poi in pizzeria*" è *falsa*, se ne deduce che

1. qualche sabato non vado in piscina o in pizzeria.
2. tutti i sabati non vado in piscina o in pizzeria.
3. qualche sabato non vado né in piscina né in pizzeria.
4. tutti i sabati non vado né in piscina né in pizzeria.
5. tutti i venerdì vado in piscina e poi in pizzeria.

Quesito 326. Nel piano cartesiano sono dati i punti $\mathsf{A}=(1,0)$ e $\mathsf{B}=(0,2)$. Una sola fra le seguenti scelte del punto C fa si che il triangolo ABC *non* sia rettangolo. Quale?

1. $C = (1, 5/2)$.
2. $C = (-4, 0)$.
3. $C = (0, -1/2)$.
4. $C = (5, 2)$.
5. $C = (0, -1)$.

Quesito 327. Degli iscritti a un dato esame 36 non si sono presentati, il 20% non l'ha superato e il restante 20% l'ha superato. Quanti erano gli iscritti?

1. 80.
2. 70.
3. 60.
4. 50.
5. non si può rispondere con questi dati.

Quesito 328. Sia α un angolo acuto tale che $\cos\alpha = 0.6$. Se ne deduce che

1. $\sin 2\alpha = 0.16$.
2. $\sin 2\alpha = 0.28$.
3. $\tan\alpha < 1$.
4. $\cos 2\alpha = 0.16$.
5. $\cos 2\alpha = -0.28$.

Quesito 329. L'equazione $x^{2000} - 5x^{1000} + 4 = 0$

1. ha una sola soluzione.
2. ha esattamente due soluzioni.
3. ha esattamente quattro soluzioni.
4. ha almeno mille soluzioni.
5. non ha nessuna soluzione.

Quesito 330. Se k è un parametro reale, l'equazione $x + |x| - k = 0$

1. ha soluzioni per ogni valore di k.
2. ha soluzioni solo per $k < 0$.
3. per $k > 0$ ha infinite soluzioni.
4. per $k > 0$ ha una sola soluzione.
5. non ha soluzioni per nessun valore di k

Quesito 331. Si consideri la disequazione $|x + 2| < 3$. Una sola delle disequazioni seguenti *non* è equivalente ad essa. Quale?

1. $(x + 2)^2 < 9$.
2. $\sqrt{x^2 + 4x + 4} < 3$.
3. $-3 < x + 2 < 3$.

4. $|x^2-2x|<3x$.
5. $|4x+8|<12$.

Quesito 332. L'insieme dei punti (x,y) del piano cartesiano di equazione $x^2+2xy+y^2-1=0$ è

1. un'ellisse.
2. una parabola.
3. un'iperbole.
4. una coppia di rette parallele.
5. una coppia di rette incidenti.

Quesito 333. In un gruppo di studenti il 20% è iscritto ingegneria, il 50% dei rimanenti è iscritto a medicina, il 60% dei rimanenti è iscritto a scienze, gli ultimi 8 sono iscritti a lettere. Quanti studenti formano il gruppo?

1. 40.
2. 45.
3. 50.
4. 55.
5. 60.

Quesito 334. Si consideri, nel piano cartesiano, la circonferenza $x^2+y^2=1$. Qual è la minima distanza del punto $\mathsf{P}=(3,4)$ dalla circonferenza?

1. 3.
2. 4.
3. 5.
4. $\sqrt{15}$.
5. $\sqrt{17}$.

Quesito 335. L'insieme di soluzioni della disequazione $(1-x)|x|(1+x)>0$ è

1. $-1<x<1$.
2. $-1<x<0$.
3. $0<x<1$.
4. $-1<x<0 \vee 0<x<1$.
5. $x\neq 0$.

Quesito 336. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

1. Il quadrato di un irrazionale può essere razionale.
2. Il quadrato di un irrazionale può essere irrazionale.
3. La radice quadrata di un irrazionale è sempre irrazionale.
4. La radice quadrata di un razionale può essere razionale.
5. Il prodotto di irrazionali è sempre irrazionale.

Quesito 337. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

1. La media di due razionali è sempre razionale.
2. La media di due irrazionali può essere razionale.
3. La media di due irrazionali può essere irrazionale.
4. La media tra un razionale e un irrazionale è sempre irrazionale.
5. La semidifferenza tra un razionale e un irrazionale può essere razionale.

Quesito 338. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

1. Tra due razionali distinti c'è sempre almeno un altro razionale.
2. Tra due razionali distinti c'è sempre almeno un irrazionale.
3. Tra due irrazionali distinti ci sono sempre infiniti irrazionali e infiniti razionali.
4. Tra due irrazionali distinti c'è sempre almeno un intero.
5. Tra una razionale è un irrazionale ci sono sempre infiniti irrazionali e infiniti razionali.

Quesito 339. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la disequazione $\sin x + |\sin x| > 0$ è verificata

1. per $x \neq 0$.
2. per tutti gli x.
3. per $0 < x < \pi$.
4. per $\pi < x < 2\pi$.
5. per $0 \leq x \leq \pi$.

Quesito 340. Sia $f(x) = \cos(\cos x)$, dove x è la misura in radianti degli angoli. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

1. $f(x) \geq 0$, $\forall x$.
2. $f(x) > 0$, $\forall x$.
3. $f(x) \leq 1$, $\forall x$.
4. $f(x) < 1$, $\forall x$.
5. $f(x) \geq -1$, $\forall x$.

Quesito 341. L'uguaglianza $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{2}$

1. è falsa per ogni valore di x.
2. è vera per $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. è vera per $x = 2\pi$.
4. è vera solo per $x = 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. è vera solo per $x = 0$.

Quesito 342. L'espressione $\sqrt{x^2 + \sin^2|x| + 2|x| + \cos^2|x|}$ può essere trasformata in

1. $|x + 1|$.
2. $x + 1$.

3. $x+\sin|x|+\cos|x|$.
4. $|x|+1$.
5. $\sqrt{x^2+2|x|}+\sin|x|+\cos|x|$.

Quesito 343. L'equazione $\sin x = \dfrac{1}{x}$

1. ha infinite soluzioni, tutte positive.
2. ha infinite soluzioni, tutte negative.
3. non ha soluzioni.
4. ha un numero finito di soluzioni.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 344. Se gli angoli sono misurati in radianti, la disequazione $x^2 \geq \sin 5$

1. non ha nessuna soluzione.
2. è verificata solo per $\pi < x < 2\pi$.
3. è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.
4. è verificata per valori esterni a $\pm\sqrt{\sin 5}$.
5. nessuna delle altre risposte è corretta.

Quesito 345. La differenza tra due polinomi di grado 4 e 6 rispettivamente

1. ha grado 4.
2. ha grado 6.
3. ha grado 10.
4. ha grado 5.
5. ha un grado che dipende dai coefficienti dei due polinomi.

Quesito 346. Sono date nel piano due circonferenze dello stesso raggio. Una sola delle seguenti affermazioni è *falsa*.

1. Possono essere esterne una all'altra.
2. Possono essere esternamente tangenti.
3. Possono essere secanti.
4. Possono essere internamente tangenti.
5. Possono avere un solo punto in comune.

Quesito 347. Quale delle seguenti affermazioni concernenti il numero irrazionale π è vera?

1. Se a è un numero razionale la media tra a e π può essere razionale.
2. Se a è un numero irrazionale la media tra a e π non può essere razionale.
3. Se a è un numero irrazionale, allora $a+\pi$ non può essere intero.
4. Se a è un numero irrazionale, allora $a^2+3\pi$ può essere intero.
5. Se a è un numero irrazionale, allora $a\cdot\pi$ non può essere razionale.

Quesito 348. Se $x > 0$ è un numero reale, allora $3^{4\log_9 x}$ è uguale a

1. x^4.
2. x^3.
3. x^2.
4. $81x$.
5. $9x^2$.

Quesito 349. Data una circonferenza, uno dei seguenti poligoni regolari inscritti non può essere costruito con riga e compasso.

1. triangolo.
2. pentagono.
3. ennagono (nove lati).
4. dodecagono (dodici lati).
5. eptadecagono (diciassette lati).

Quesito 350. Per ogni $x \neq 0$ l'espressione $(x^2)^x$ è uguale a

1. x^{2x}.
2. $x^{(2^x)}$.
3. $x^{(x^2)}$.
4. $|x|^{2x}$.
5. $|x|^{(2^x)}$.

Quesito 351. Si mettano in ordine i seguenti numeri reali

$$a = (3-2\sqrt{2})^3, \quad b = (5\sqrt{2}-7)^2, \quad c = 99-70\sqrt{2}.$$

1. $a < b < c$.
2. $b < c < a$.
3. $c < b < a$.
4. $c < a < b$.
5. $a = b = c$.

Quesito 352. In un triangolo ABC rettangolo in A e di area 27, si ha $\tan A\widehat{B}C = \dfrac{2}{3}$. L'ipotenusa del triangolo è

1. $\sqrt{13}$.
2. $2\sqrt{13}$.
3. $3\sqrt{13}$.
4. 13.
5. non si può calcolare.

Quesito 353. Quale delle seguenti proprietà del valore assoluto *non* è valida, se a e a sono due numeri reali?

1. $|a+b| \leq |a|+|b|$.
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
3. $|a-b| \geq |a|+|b|$.
4. $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$.
5. $|a+b| = |a|+|b|$ se a e b sono negativi.

Quesito 354. Quale delle seguenti costruzioni *può* essere eseguita con riga e compasso?

1. La divisione di un angolo generico in 6 parti uguali.
2. La divisione di un angolo generico in 64 parti uguali.
3. La costruzione di un quadrato equivalente a un dato cerchio.
4. La costruzione di un cubo avente volume doppio di un dato cubo.
5. La costruzione di un poligono regolare di 9 lati, dato il lato.

Quesito 355. Nel piano cartesiano l'insieme dei punti che soddisfano l'equazione $y = x^2 + x|x| + 2$ è costituito

1. da due parabole.
2. dall'unione di due semirette.
3. dall'unione di due archi di parabola.
4. dall'unione di una semiretta e di un arco di parabola.
5. da una retta.

Quesito 356. Nel piano cartesiano il sistema $\begin{cases} y \leq x^2+1 \\ y = 2x+1 \end{cases}$ definisce

1. un segmento.
2. una semiretta.
3. l'unione di due semirette.
4. i punti di intersezione tra una parabola e una retta.
5. un arco di parabola.

Quesito 357. La disequazione $\dfrac{x}{x-2} \leq \dfrac{x-2}{x}$ ha come insieme di soluzioni

1. $x < 0 \vee x > 1$.
2. $1 \leq x < 2$.
3. $x < 0 \vee 1 \leq x < 2$.
4. $0 < x < 2$.
5. tutti gli x tranne $x = 0$ e $x = 2$.

Quesito 358. Si consideri il polinomio $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

1. Il polinomio non può avere più di 4 radici razionali.
2. Il polinomio deve necessariamente avere almeno una radice reale.
3. Il polinomio è divisibile per $x^2 - x + 1$.
4. Il polinomio ha la radice 1.
5. Il polinomio ha la radice 2.

Quesito 359. L'insieme di definizione della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$ è

1. $\emptyset$.
2. $x \leq -1$.
3. $x \geq 1$.
4. $-1 \leq x \leq 1$.
5. costituito solo da due punti.

Quesito 360. Siano $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = \cos x$. Una sola delle seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

1. $f(g(x)) = |\sin x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $g(f(x)) = \cos\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.
3. $g(g(x)) = \cos(\cos x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. $f(f(x)) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$.
5. $f(f(x)) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Quesito 361. Qual è la probabilità che la somma dei risultati del lancio di due dai non truccati sia 5?

1. 1/6.
2. 1/8.
3. 1/9.
4. 1/12.

Quesito 362. Un'urna contiene 10 palline rosse, 6 nere e 4 bianche. Qual è la probabilità che estraendo due palline esse siano una rossa e una nera?

1. 4/5.
2. 3/19.
3. 3/5.
4. 6/19.

Quesito 363. Tenendo conto dell'ordine di nascita, in quanti modi possibili si possono avere tre figli maschi e due figlie femmine in una famiglia con 5 figli?

1. 10.
2. 30.
3. 15.
4. 12.

Quesito 364. Qual è la probabilità che, lanciando tre volte di seguito uno stesso dado non truccato, si presenti sempre la stessa faccia?

1. 1/18,
2. 1/9.
3. 1/36.
4. 1/10.

Quesito 365. Una scatola contiene 14 fazzoletti neri, 6 fazzoletti rossi e 8 fazzoletti bianchi. Qual è la probabilità che, prendendone uno a caso esso non sia rosso?

1. 3/14.
2. 1/4.
3. 7/14.
4. 11/14.

Quesito 366. In quanti modi diversi si possono sistemare 4 camicie di colore diverso in 3 scatole, ammettendo anche che una o più scatole possano restare vuote?

1. 64.
2. 81.
3. 32.
4. 96.

Quesito 367. In quanti modi diversi posso distribuire 7 caramelle identiche a 3 persone?

1. 72.
2. 252
3. 36.
4. 54.

Quesito 368. Nello sviluppo di $(x-2y)^7$, qual è il coefficiente di x^4y^3?

1. 560.
2. −560.
3. 280.
4. −280.

Quesito 369. Avendo a disposizione 5 T-shirt, 3 paia di pantaloni, 2 paia si scarpe e 3 paia di calzini, in quanti modi diversi mi posso vestire?

1. 15.
2. 30.
3. 60.
4. 45.

Quesito 370. Nel gioco del lotto (90 numeri da estrarre) quante sono le cinquine che contengono un determinato terno?

1. 4005.
2. 3741.
3. 3916.
4. 3828.

Quesito 371. Quanti sono i numeri di quattro cifre distinte che contengono nelle prime tre cifre il 3 e il 5?

1. 336.
2. 200.
3. 168.
4. 268.

Quesito 372. Se si effettuano due lanci di una moneta, qual è la probabilità che esca "testa" almeno una volta?

1. 3/8.
2. 3/4.
3. 1/2.
4. 1/3.

Quesito 373. da un mazzo di 52 carte si estrae una carta. Qual è la probabilità che sia un asso oppure un re, oppure il 7 di quadri?

1. 16/52.
2. 3/52.
3. 9/52
4. Nessuna delle risposte precedenti.

Quesito 374. In quanti modi possibili si possono sedere 4 ragazzi e 3 ragazze in una panchina, se i ragazzi devono stare tutti vicini?

1. 144.
2. 288.
3. 576.
4. 720.

Quesito 375. 3 palline bianche, 3 palline rosse e 4 palline gialle devono essere sistemate in fila. In quanti modi si può fare se le palline dello stesso colore sono identiche?

1. 2100.
2. 864.

3. 4200.
4. 10!.

Quesito 376. 6 commensali devono sedersi a un tavolo tondo. In quanti modo si può fare se conta solo chi sta a destra e sinistra di ciascuno?

1. 120.
2. 720.
3. 240.
4. 360.

Quesito 377. Si lanciano due dadi non truccati. Qual è la probabilità che la somma dei risultati sia 5?

1. 1/8.
2. 1/9.
3. 5/36.
4. 5/6.

Quesito 378. Quanti sono gli anagrammi di "probabile" che cominciano per "p" e finiscono per "e" o viceversa?

1. 7!.
2. 9!.
3. 720.
4. 360.

Quesito 379. Si lanciano due dadi non truccati. Qual è la probabilità che si presenti la stessa faccia se si sa che la somma dei punteggi è 6?

1. 1/6.
2. 1/7.
3. 1/4.
4. 1/5.

Quesito 380. In un'urna ci sono 12 palline bianche e 4 nere. Estraendo a caso 3 palline, qual è la probabilità che siano tutte bianche?

1. 3/16.
2. 11/28.
3. 1/4.
4. 3/4.

8 Soluzioni dei quesiti

1 3.

2 1.

3 5.

4 5.

5 2.

6 2.

7 1.

8 2.

9 1.

10 3.

11 4.

12 4.

13 5.

14 2.

15 2.

16 2.

17 4.

18 5.

19 1.

20 5.

21 5.

22 4.

23 5.

24 4.

25 4.

26 1.

27 3.

28 5.

29 5.

30 3.

31 1.

32 4.

33 2.

34 5.

35 3.

36 2.

37 5.

38 2.

39 1.

40 2.

41 1.

42 1.

43 2.

44 5.

45 2.

46 3.

47 5.

48 5.

49 3.

50 3.

51 5.

52 1.

53 2.

54 4.

55 3.

56 5.

57 2.

58 1.

59 5.

60 3.

61 2.

62 4.

63 5.

64 4.

65 3.

66 3.

67 5.

68 3.

69 1.

70 2.

71 2.

72 1.

73 4.

74 3.

75 4.

76 3.

77 5.

78 3.

79 1.

80 4.

81 5.

82 3.

83 3.

84 4.

85 2.

86 2.

87 1.

88 1.

89 3.

90 4.

91 3.

92 2.

93 3.

94 1.

95 4.

96 3.

97 3.

98 3.

99 4.

100 1.

101 4.

102 2.

103 2.

104 3.

105 5.

106 3.

107 4.

108 3.

109 1.

110 3.

111 1.

112 2.

113 3.

114 1.

115 2.

116 1.

117 4.

118 4.

119 2.

120 1.

121 3.

122 1.

123 1.

124 4.

125 3.

126 2.

127 4.

128 2.

129 1.

130 4.

131 1.

132 3.

133 5.

134 1.

135 1.

136 4.

137 4.

138 3.

139 2.

140 4.

141 3.

142 2.

143 4.

144 2.

145 4.

146 3.

147 5.

148 3.

149 2.

150 4.

151 1.

152 2.

153 4.

154 3.

155 1.

156 3.

157 4.

158 3.

159 2.

160 5.

161 3.

162 2.

163 4.

164 2.

165 5.

166 2.

167 3.

168 5.

169 3.

170 3.

171 3.

172 1.

173 2.

174 4.

175 5.

176 3.

177 3.

178 1.

179 4.

180 2.

181 2.

182 4.

183 4.

184 1.

185 2.

186 2.

187 5.

188 4.

189 2.

190 2.

191 4.

192 1.

193 2.

194 2.

195 2.

196 1.

197 4.

198 2.

199 2.

200 3.

201 2.

202 2.

203 2.

204 4.

205 2.

206 2.

207 4.

208 1.

209 3.

210 2.

211 2.

212 2.

213 3.

214 2.

215 4.

216 1.

217 3.

218 1.

219 2.

220 4.

221 3.

222 3.

223 3.

224 4.

225 3.

226 2.

227 2.

228 3.
229 3.
230 5.
231 4.
232 2.
233 4.
234 3.
235 2.
236 3.
237 5.
238 2.
239 3.
240 3.
241 5.
242 3.
243 4.
244 5.
245 4.
246 2.
247 4.
248 2.
249 4.
250 3.
251 1.
252 2.
253 4.
254 4.
255 255.
256 5.
257 3.
258 4.
259 2.
260 3.
261 5.
262 2.
263 3.
264 3.
265 4.
266 1.
267 4.
268 2.
269 3.
270 3.
271 3.
272 3.
273 2.
274 5.
275 5.
276 4.
277 3.
278 3.
279 3.
280 2.
281 3.
282 3.
283 3.
284 4.
285 3.
286 4.
287 3.
288 4.
289 3.
290 3.
291 5.
292 2.
293 4.
294 3.
295 1.
296 5.
297 4.
298 3.
299 4.
300 5.
301 3.
302 3.
303 4.
304 5.
305 2.
306 2.
307 2.
308 3.
309 3.
310 4.
311 2.
312 3.
313 4.
314 4.
315 4.
316 4.
317 5.
318 3.
319 5.
320 4.
321 5.
322 3.
323 1.
324 5.
325 1.
326 5.
327 3.
328 5.
329 3.
330 4.
331 4.
332 4.
333 3.
334 2.
335 4.
336 5.
337 5.
338 4.
339 3.
340 4.
341 3.
342 4.
343 5.
344 3.
345 2.
346 4.
347 4.
348 3.
349 3.
350 4.
351 5.
352 3.
353 3.
354 2.
355 4.
356 3.
357 3.
358 5.
359 5.
360 5.
361 3.
362 4.
363 1.
364 3.
365 4.
366 2.
367 3.
368 4.
369 3.
370 2.
371 1.
372 2.
373 3.
374 3.
375 3.
376 1.
377 2.
378 1.
379 4.
380 2.

Notazioni utilizzate

Riportiamo l'elenco delle notazioni utilizzate in questi volumi di matematica di base, elenco già inserito nel volume 1-*Richiami teorici*, a cui rimandiamo per ulteriori delucidazioni.

Elenco delle notazioni

"," - "."	Separatore decimale. Le regole prescrivono l'uso della virgola come separatore decimale nelle lingue diverse dall'inglese, dove invece si deve usare il punto. Tuttavia in questo testo abbiamo preferito fare uno strappo e usare il punto.
$p \wedge q$	p "et" q, congiunzione logica.
$p \vee q$	p "or" q, disgiunzione logica.
$\neg p$	"not" p, negazione.
$p \Rightarrow q$	p implica q.
$p \Leftrightarrow q$	p è equivalente a q.
$\forall$	Per ogni, quantificatore universale.
$\exists$	Esiste, quantificatore esistenziale.
$\exists!$, $\exists^1$	Esiste un solo.
$x \in A$, $A \ni x$	x appartiene ad A.
$x \notin A$, $A \not\ni x$	x non appartiene ad A.
$\{\, x \in A \mid \mathscr{P}(x) \,\}$	Insieme degli x di A per cui vale la proprietà $\mathscr{P}(x)$.
$\operatorname{card} A$, $\lvert A \rvert$	Cardinalità dell'insieme A.
$B \subseteq A$, $A \supseteq B$	B è un sottoinsieme di A oppure A è un soprainsieme di B; sono tollerate anche le scritture $B \subset A$ e $A \supset B$, ma in questo caso per i sottoinsiemi propri si deve usare $B \subsetneq A$ oppure $B \supsetneq A$.
$B \subset A$, $A \supset B$	B è un sottoinsieme proprio di A.
$A \cup B$	Unione di insiemi.
$A \cap B$	Intersezione di insiemi.
$A \setminus B$	Differenza di insiemi.
$A \mathbin{\triangle} B$	Differenza simmetrica di due insiemi.
(a, b)	Coppia ordinata; se si usa la virgola come separatore decimale, e se a o b sono numeri con la virgola, va usato il ";" al posto della virgola come separatore della coppia.
$A \times B$	Prodotto cartesiano di insiemi.
$\complement_U A$	Complementare dell'insieme A rispetto all'insieme U.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$a \overset{\text{def}}{=} b$, $a := b$, $a =_{\text{def}} b$	a è uguale a b per definizione.
$a \propto b$	a è proporzionale a b.
$a \approx b$	a è circa uguale a b.
$a \ll b$	a è molto minore di b.
$a \gg b$	a è molto maggiore di b.
$a \mid b$	a divide b (negli interi).
$\mathrm{MCD}(a,b)$	Massimo comun divisore di a e b.
$\mathrm{mcm}(a,b)$	Minimo comune multiplo di a e b.
$a \equiv b \mod k$	a è congruo a b modulo k.
$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{P}$	Insieme dei naturali (compreso lo zero), degli interi, dei razionali, dei reali, dei complessi, dei primi; si possono usare anche i simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}$, e noi in questo testo abbiamo sempre usato questi; $\mathbf{N}^*$ oppure $\mathbb{N}^*$ indica i naturali senza lo zero (scritture analoghe per gli altri insiemi); $\mathbb{Z}^+$ indica gli interi maggiori o uguali a zero (scritture analoghe per gli altri insiemi); per indicare altre restrizioni si possono usare scritture del tipo $\mathbf{N}_{\geq 3}$, con ovvio significato.
$[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$	Intervallo di reali chiuso, aperto a sinistra, aperto a destra, aperto; la normativa prevede anche i simboli $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b) per gli intervalli aperti a sinistra, aperti a destra, aperti: ritengo che questi simboli vadano evitati, soprattutto l'ultimo per la confusione che può sorgere con il simbolo di coppia di reali.
$]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$	Intervallo inferiormente illimitato chiuso, intervallo inferiormente illimitato aperto.
$[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$	Intervallo superiormente illimitato chiuso, intervallo superiormente illimitato aperto.
$a \cdot b$, ab	Simboli usati per la moltiplicazione con operandi letterali.
3×5	Simbolo per la moltiplicazione con operandi numerici. Tuttavia a volte si usa anche il punto centrato come per gli operandi letterali.
$\mathsf{AB} \parallel \mathsf{CD}$, $\mathsf{r} \parallel \mathsf{s}$	La retta AB è parallela alla retta CD, la retta r è parallela alla retta s.
$\mathsf{AB} \perp \mathsf{CD}$, $\mathsf{r} \perp \mathsf{s}$	La retta AB è perpendicolare alla retta CD, la retta r è perpendicolare alla retta s.
$\overline{\mathsf{AB}}$	Segmento di estremi A e B.
$\overrightarrow{\mathsf{AB}}$	Vettore da A a B.
$d(\mathsf{A},\mathsf{B})$	Distanza tra A e B, lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$, modulo del vettore $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$. Per la lunghezza del segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ si usa anche la notazione $\lvert\overline{\mathsf{AB}}\rvert$, anche se non prevista nella normativa ISO.
$\lvert\overrightarrow{\mathsf{AB}}\rvert$, $\lVert\overrightarrow{\mathsf{AB}}\rVert$	Modulo o norma del vettore $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$, anche in alternativa al simbolo $d(\mathsf{A},\mathsf{B})$.
$\overset{\frown}{\mathsf{AB}}$	Arco di estremi A e B.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$\mathsf{A\widehat{O}B}$	Angolo di vertice O, individuato dalle semirette OA ed OB.
$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(\mathsf{ABC}\dots)$	Area, area della figura di vertici A, B, C, ...
$2p$	Perimetro di un poligono.
$n!$	Fattoriale di n.
$\mathsf{C}_n^k = \binom{n}{k}$	Combinazioni (semplici) di n oggetti di classe k, ovvero coefficienti binomiali.
${}^{\mathsf{R}}\mathsf{C}_n^k$	Combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k.
V_n^k	Disposizioni ("variazioni") semplici di n oggetti di classe k.
${}^{\mathsf{R}}\mathsf{V}_n^k$	Disposizioni ("variazioni") con ripetizione di n oggetti di classe k.
P_n	Permutazioni di n oggetti distinti.
$\mathsf{P}_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$	Permutazioni di n oggetti, di cui n_1 uguali tra di loro, n_2 uguali tra di loro, $\dots n_k$ uguali tra di loro.
$\lvert a\rvert$, $\operatorname{abs} a$	Valore assoluto di a.
$\operatorname{sgn} a$	Segno del numero reale a, definito come segue: $\operatorname{sgn} a = -1$ per $a < 0$, $\operatorname{sgn} a = 0$ per $a = 0$, $\operatorname{sgn} a = 1$ per $a > 0$.
$\operatorname{ent} a$, $\lfloor a \rfloor$, $\operatorname{floor} a$	Il più grande intero minore o uguale al numero reale a, detta anche *funzione floor*; questa funzione è normalmente chiamata *funzione parte intera* nei testi di matematica ed è indicata con il simbolo $[a]$; secondo lo standard ISO (e secondo i software più diffusi), invece, la funzione parte intera è definita come nella linea seguente; in ogni caso riteniamo assolutamente da evitare il simbolo $[a]$.
$\operatorname{int} a$	Parte intera del numero reale a, definita come $\operatorname{int} a = \operatorname{sgn} a \cdot \lfloor \operatorname{abs} a \rfloor$: si veda la nota alla riga precedente.
$\operatorname{frac} a$	Parte frazionaria del numero reale a, definita come $\operatorname{frac} a = a - \operatorname{int} a$; questa definizione costituisce lo standard ISO (ed è implementata con questo nome dai software più diffusi), mentre nei testi di matematica è di solito definita come $a - \operatorname{floor} a$.
$\lceil a \rceil$, $\operatorname{ceil} a$	Il più piccolo intero maggiore o uguale al numero reale a, detta anche *funzione ceil* o *funzione ceiling*.
$\min(a, b)$	Minimo di a e b.
$\max(a, b)$	Massimo di a e b.
$\sin x$, $\cos x$	Le funzioni seno e coseno.
$\tan x$	La funzione tangente; evitare la scrittura $\operatorname{tg} x$.
$\cot x$	La funzione cotangente; evitare la scrittura $\operatorname{ctg} x$.
$\sec x$	La funzione secante.
$\csc x$, $\operatorname{cosec} x$	La funzione cosecante.
$\arcsin x$	La funzione arcoseno.
$\arccos x$	La funzione arcocoseno.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$\arctan x$	La funzione arcotangente; evitare la scrittura $\operatorname{arctg} x$.
$\operatorname{arccot} x$	La funzione arcocotangente; evitare la scrittura $\operatorname{arcctg} x$.
$\operatorname{arcsec} x$	La funzione arcsecante.
$\operatorname{arccsc} x$	La funzione arccosecante; evitare la scrittura $\operatorname{arccosec} x$.
$\sinh x$	La funzione seno iperbolico.
$\cosh x$	La funzione coseno iperbolico.
$\tanh x$	La funzione tangente iperbolica.
$\operatorname{arsinh} x$	La funzione inversa del seno iperbolico.
$\operatorname{arcosh} x$	La funzione inversa del coseno iperbolico.
$\operatorname{artanh} x$	La funzione inversa della tangente iperbolica.
$f : A \to B$	Funzione di dominio A e codominio B (B non è l'insieme delle immagini).
$f : x \mapsto f(x)$	La funzione f manda $x \in A$ su $f(x) \in B$; $f(x)$ è un'espressione (di natura qualsiasi) che fornisce il valore della funzione f su x.
$g \circ f$	Composizione della funzione f con la funzione g.
Δf	Incremento finito della funzione f.
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, f'	Derivata della funzione f (per funzioni di una variabile); se la variabile è il tempo, si può usare $\dot{f}$ al posto di f'.
$\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$, $f'(a)$	Derivata della funzione f calcolata nel punto a.
$\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $f^{(n)}$	Derivata n-esima della funzione f.
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Integrale indefinito della funzione f.
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Integrale definito della funzione f da a a b.
$[f(x)]_a^b$, $f(x)\big\vert_a^b$	$f(b) - f(a)$.
e^x, $\exp x$	Esponenziale di x in base e.
a^x, $\exp_a x$	Esponenziale di x in base a.
$\log x$	Logaritmo di x, da usare quando non è necessario precisare la base; da notare che in molti testi (e spesso anche nelle calcolatrici e nei software) questa scrittura è usata per il logaritmo in base 10; purtroppo la stessa scrittura è usata anche in alcuni testi per il logaritmo naturale: è meglio attenersi alla norma ufficiale.
$\ln x$, $\log_{\mathrm{e}} x$	Logaritmo di x in base e.
$\lg x$, $\log_{10} x$	Logaritmo di x in base 10.
$\log_a x$	Logaritmo di x in base a.
$\operatorname{lb} x$, $\log_2 x$	Logaritmo binario (in base 2).

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$\lvert z\rvert$, $\operatorname{abs} z$	Valore assoluto del numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$, definito come $\sqrt{x^2+y^2}$.
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	Parti reale e immaginaria di un numero complesso z: $z = \operatorname{Re} z + \mathrm{i}\operatorname{Im} z$.
$\arg z$	Argomento del numero complesso z.
$\overline{z}$, z^*	Complesso coniugato di z: il primo è usato in matematica, il secondo in fisica e ingegneria.
$\operatorname{sgn} z$	Funzione segno del numero complesso z: $\operatorname{sgn} z = z/\lvert z\rvert$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$.
$\boldsymbol{v}$, $\vec{v}$	Simboli per i vettori.
$\vec{a} \times \vec{b}$	Prodotto vettoriale di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
$\lvert\vec{v}\rvert$, $\lVert\vec{v}\rVert$	Modulo o norma del vettore $\vec{v}$.
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Prodotto scalare di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$	Base canonica di V_3.
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$	Scritture di una matrice .
$\det A$, $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	Determinante di una matrice quadrata.
$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$	Trasposta di una matrice.
$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$	Rango di una matrice.
$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{I}$	Matrice unità.
$\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$	Traccia di una matrice quadrata.

Alfabeto greco

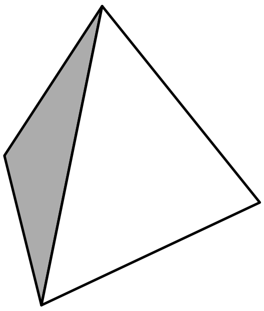
Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	α	A	nu (ni)	ν	N
beta	β	B	csi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	ro	ϱ	R
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	ϑ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	I	fi	φ	Φ
cappa	$\varkappa$	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu (mi)	μ	M	omega	ω	Ω

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

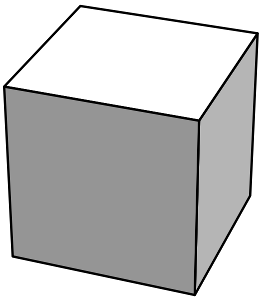
Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph $\aleph$



Matematica di Base

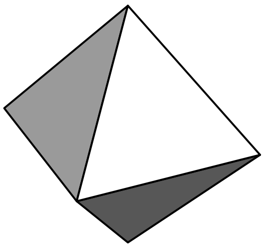
2 - Esercizi e quesiti a risposta multipla



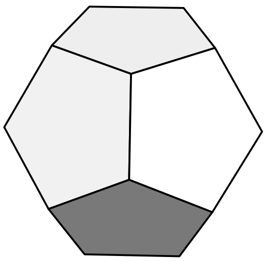
Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 6 marzo 2023



Questo testo è rivolto agli studenti che si accingono ad affrontare un corso universitario nel quale la Matematica sia un requisito essenziale del processo formativo. È ormai consuetudine che i candidati all'iscrizione ad uno di questi corsi di tipo tecnico-scientifico si cimentino in un test di matematica di base, contenente quesiti relativi agli argomenti matematici principali che sono stati oggetto del loro studio alle scuole secondarie superiori (calcolo differenziale ed integrale esclusi). In questo secondo volume è proposta una raccolta di esercizi e quesiti a risposta multipla, ispirati ai test universitari di ammissione.



Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine.