Introduzione

al

Calcolo Differenziale

Università degli Studi di Udine - Sede di Pordenone Facoltà di Ingegneria

Introduzione

al

Calcolo differenziale

Luciano Battaia

Versione del 16 febbraio 2016

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.
Dobbiamo prendere gli allievi così come sono, richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura.
Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento.

Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Indice

Premessa xi

1 Insiemi 1
- 1.1 Alcuni simboli logici di uso comune . . . 1
- 1.2 Insiemi . . . 2
- 1.3 Operazioni tra insiemi . . . 4
- 1.4 Relazioni binarie . . . 6
- 1.5 Funzioni o applicazioni . . . 10
- 1.6 Esercizi . . . 15

2 Numeri reali 19
- 2.1 I numeri naturali e i numeri interi . . . 19
- 2.2 I numeri razionali . . . 21
- 2.3 I numeri reali . . . 23
  - 2.3.1 Gli assiomi dei reali . . . 23
  - 2.3.2 Altre proprietà di $\mathbb{R}$ . . . 25
- 2.4 Esistenza dell'estremo superiore nei reali . . . 26
  - 2.4.1 Proprietà caratteristiche di sup e inf . . . 27
- 2.5 Cenno alla non numerabilità di $\mathbb{R}$ . . . 27
- 2.6 Elementi di topologia sulla retta reale . . . 29
  - 2.6.1 Intervalli . . . 29
  - 2.6.2 Intorni . . . 31
  - 2.6.3 Insiemi aperti. Punti di accumulazione . . . 31
- 2.7 Osservazioni e approfondimenti . . . 34
  - 2.7.1 Procedimento diagonale di Cantor e proprietà dell'ordine . . . 34
  - 2.7.2 Assioma di completezza e densità . . . 35
- 2.8 Esercizi . . . 35

3 Alcune funzioni elementari 39
- 3.1 Generalità . . . 39
- 3.2 Operazioni tra funzioni reali di variabile reale . . . 40
- 3.3 Alcune proprietà delle funzioni elementari . . . 41
- 3.4 Le funzioni trigonometriche . . . 42
  - 3.4.1 Angoli e loro misura . . . 42
  - 3.4.2 Circonferenza goniometrica e definizioni delle funzioni goniometriche 43
  - 3.4.3 Le funzioni trigonometriche inverse . . . 43
- 3.5 Classi separate e contigue di reali . . . 46
- 3.6 Potenze nei reali . . . 46
  - 3.6.1 Esponenti naturali positivi . . . 46
  - 3.6.2 Esponente 0 . . . 47

3.6.3 Esponenti interi negativi 47
3.6.4 Esponenti razionali 48
3.6.5 Esponenti reali 49
3.7 Le funzioni potenza 50
3.8 Le funzioni esponenziali 51
3.9 Le funzioni logaritmo 51
3.9.1 Le proprietà dei logaritmi 53
3.10 Esercizi 54

4 Limiti e continuità per le funzioni reali di variabile reale 59
4.1 Osservazioni ed esempi introduttivi 59
4.2 La definizione di limite 61
4.3 Teoremi sui limiti 66
4.4 L'algebra dei limiti 67
4.4.1 Forme di indecisione 70
4.5 Funzioni monotone 70
4.6 Esempi 71
4.7 Limiti, periodicità e valore assoluto 72
4.8 Funzioni continue 73
4.9 Teoremi sulle funzioni continue 74
4.9.1 Continuità dell'inversa 74
4.10 Funzioni elementari e continuità 75
4.10.1 Funzioni razionali e radici 75
4.10.2 Funzioni trigonometriche 76
4.10.3 Funzioni esponenziali e logaritmo 76
4.10.4 Conclusioni ed esempi 77
4.11 Osservazioni e approfondimenti 78
4.11.1 Limiti e dimostrazioni "grafiche" 78
4.12 Esercizi 79

5 Limiti notevoli. Proprietà delle funzioni continue 83
5.1 Due limiti notevoli 83
5.2 Altri limiti importanti 86
5.2.1 Applicazioni dei limiti notevoli 86
5.2.2 Altri limiti relativi ad esponenziali e logaritmi 87
5.3 I teoremi fondamentali sulle funzioni continue 88
5.4 La continuità uniforme (cenni) 89
5.5 Osservazioni e approfondimenti vari 91
5.5.1 Osservazioni sulla continuità 91
5.5.2 Proprietà "grafiche" della continuità 96
5.6 Esercizi 97

6 Derivate per funzioni reali di variabile reale 99
6.1 Definizione di derivata. Prime proprietà 99
6.2 Algebra delle derivate 103
6.3 Le derivate delle funzioni elementari 106
6.3.1 Le funzioni potenza n-esima 106

6.3.2 Le funzioni radice n-esima . . . 106
6.3.3 Le funzioni circolari . . . 107
6.3.4 Le funzioni trigonometriche inverse . . . 108
6.3.5 Le funzioni esponenziali, logaritmo, potenza con esponente reale . . . 108
6.4 Le funzioni iperboliche (cenni) . . . 109
6.5 Esercizi . . . 111

7 Proprietà locali - Funzioni derivabili in un intervallo **117**
7.1 Funzioni crescenti e decrescenti in un punto. Massimi e minimi relativi . . . 117
7.2 Asintoti . . . 119
7.3 I teoremi fondamentali per le funzioni derivabili in un intervallo . . . 121
7.4 Proprietà di Darboux e derivate . . . 124
7.5 Esercizi . . . 125

8 Infiniti e infinitesimi **129**
8.1 Infinitesimi e loro confronto . . . 129
8.2 Ordine di infinitesimo rispetto a un campione . . . 131
8.3 Il principio di sostituzione degli infinitesimi . . . 132
8.4 Infiniti e loro confronto . . . 133
8.5 Ordine di infinito rispetto a un campione . . . 135
8.6 Il principio di sostituzione degli infiniti . . . 135
8.7 Osservazioni e approfondimenti . . . 136
8.7.1 Ordine rispetto a un campione . . . 136
8.8 Esercizi . . . 138

9 Polinomi di Taylor - Convessità **141**
9.1 Derivate successive . . . 141
9.2 Approssimante lineare e approssimazioni polinomiali . . . 141
9.3 Polinomio di Taylor di una funzione . . . 143
9.4 Concavità e convessità in un intervallo . . . 149
9.5 Proprietà locali del secondo ordine (cenni). Flessi . . . 151
9.6 Condizioni sufficienti per massimi, minimi, flessi (cenni) . . . 152
9.7 Esercizi . . . 152
9.8 Esercizi sui grafici delle funzioni reali . . . 153

10 Successioni e serie numeriche **155**
10.1 Successioni e sottosuccessioni . . . 155
10.2 Limiti di successioni . . . 157
10.3 Il numero di Nepero . . . 160
10.4 Serie numeriche . . . 160
10.5 Criteri di convergenza . . . 163
10.5.1 Serie a termini positivi . . . 165
10.6 Serie a termini di segno qualunque . . . 167
10.7 Qualche osservazione conclusiva . . . 168
10.8 Esercizi . . . 168

11 Serie di potenze **173**

11.1 Serie di funzioni 173
11.2 Serie di potenze 174
11.3 Serie di potenze e derivabilità 176
11.4 Sviluppabilità in serie di Taylor 177
11.5 Esercizi 180

12 Numeri complessi **185**
12.1 Definizioni. Forma algebrica 185
12.2 Il piano di Argand-Gauss 188
12.3 Forma trigonometrica 189
12.4 Radici nei complessi 190
12.5 Successioni e serie nei complessi. Cenni 192
12.6 Le funzioni elementari nei complessi. Cenni 195
12.7 Esercizi 197

13 Esercizi riepilogativi - Temi d'esame **201**

Notazioni utilizzate **243**

Alfabeto greco **245**

Indice analitico **247**

Premessa

Questo testo contiene sostanzialmente il diario delle lezioni di Matematica I - 1° modulo tenute, nell'anno accademico 2008/2009, presso la sede di Pordenone dell'Università degli studi di Udine. Il testo è adatto a un corso di 50 ore di lezione, comprensive di esercitazioni: la ristrettezza dei tempi a disposizione impone numerose limitazioni sia nella scelta degli argomenti sia nel grado di approfondimento degli stessi.

La raccolta comprende lo schema delle lezioni svolte e non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi, trattandosi di un *diario delle lezioni*, alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione più estesa e approfondita. In ogni caso si rimanda ai testi consigliati per i necessari completamenti che non trovano posto in questi appunti.

Il testo contiene anche la raccolta degli esercizi svolti e/o proposti durante il corso. Alcuni argomenti teorici sono sviluppati anche negli esercizi, che fanno integralmente parte del corso.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo `batmath@gmail.com`.

1 Insiemi

Scopo di questo capitolo è principalmente quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso per gli sviluppi futuri del corso, anche richiamando brevemente concetti che in buona parte dovrebbero essere noti dagli studi precedenti.

In questo capitolo utilizzeremo, specie negli esempi, l'insieme dei numeri reali, le cui proprietà essenziali dovrebbero essere note dalla scuola media superiore. L'insieme dei numeri reali sarà comunque oggetto di studio nei capitoli succesivi.

1.1 Alcuni simboli logici di uso comune

Senza alcuna pretesa di completezza, proponiamo un elenco di alcuni simboli logici di uso comune in matematica. In questo paragrafo $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ rappresentano due proposizioni.

Connettivi

I connettivi (come "o" ed "e") collegano tra di loro due proposizioni, oppure (come "non") si applicano a una sola proposizione; quelli che più ci interesseranno sono:

- $\vee$, "vel", oppure "o": $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$ è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, altrimenti è falsa;
- $\wedge$, "et", oppure "e": $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ è vera se tutte due le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa;
- *non*, negazione: *non*$\mathscr{P}$ è vera, se $\mathscr{P}$ è falsa;
- $\Rightarrow$, "implica": $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ è falsa solo quando $\mathscr{P}$ è vera e $\mathscr{Q}$ è falsa, in particolare da una proposizione falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- $\Leftrightarrow$, "se e solo se", "condizione necessaria e sufficiente": $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ è vera se $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.

Dimostrare un teorema significa dimostrare la verità di $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, dove $\mathscr{P}$ è detta *ipotesi* e $\mathscr{Q}$ *tesi*.

Quantificatori

I quantificatori sono

$$\begin{aligned} &\forall, \text{ quantificatore universale: “per ogni”;} \\ &\exists, \text{ quantificatore esistenziale: “esiste (almeno) un”;} \\ &\exists!, \text{ quantificatore esistenziale: “esiste uno e uno solo”.} \end{aligned}$$

Per chiarire il significato e l'uso dei quantificatori utilizziamo alcuni esempi in cui compaiono numeri reali.

- $\exists\, x$ tale che $x^2 \geq 2$: è vera;
- $\exists\, x$ tale che $x^2 \geq -2$: è vera;
- $\exists\, x$ tale che $x^2 \leq -2$: è falsa;
- $\exists\, x$ tale che $x^2 \leq 0$: è vera;

– $\exists\, x$ tale che $x^2 < 0$: è falsa;
– $\forall\, x\ x^2 \geq 0$: è vera;
– $\forall\, x\ x^2 > 0$: è falsa;
– $\forall\, x\ x^2 \geq -5$: è vera.

Nel caso di uso contemporaneo di più quantificatori si deve prestare particolare attenzione all'ordine con cui sono scritti. Un esempio chiarirà il senso di questa affermazione.

Consideriamo il *predicato*[1] $\mathscr{P}(x, y) =$ "x è uno studente in grado di risolvere il problema y". Allora

$$\forall y\ \exists x \text{ tale che } \mathscr{P}(x, y)$$

significa: "qualunque sia il problema y c'è uno studente in grado di risolverlo". Invece

$$\exists x\ \forall y \text{ tale che } \mathscr{P}(x, y)$$

significa: "c'è uno studente in grado di risolvere qualsiasi problema". Evidentemente si tratta di due proposizioni radicalmente diverse.

1.2 Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo "un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*", ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire "un insieme è un insieme". Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: A, B, ...

La scrittura

$$x \in A \tag{1.1}$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge "x appartiene ad A". La (1.1) si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della (1.1) si scrive

$$x \notin A\,, \tag{1.2}$$

che si legge, naturalmente, "x non appartiene ad A". La (1.2) si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando i simboli logici sopra introdotti,

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,. \tag{1.3}$$

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con $\emptyset$, privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi, per esempio $A = \left\{\, 0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone} \,\right\}$.

[1] Anche se esula un po' dagli scopi di questo breve capitolo introduttivo, ricordiamo che *predicato* è una espressione logica contenente delle variabili, che può diventare una proposizione (vera o falsa) a seconda dei valori che si assegnano alle variabili.

2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A = \{ x \mid x \text{ è un numero naturale pari} \}$.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{ 3, 6, 9, 12, \dots \}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{ 2, 3, \dots \}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

Occorre poi prestare ancora più attenzione alle rappresentazioni intensive. Esse non presentano problemi quando si usano per assegnare sottoinsiemi di un insieme noto, possono invece produrre gravi difficoltà logiche in altri casi, come mostra il famoso *Paradosso del barbiere*: se il barbiere è definito come colui che fa la barba a chi non se la fa da solo, non è possibile stabilire se il barbiere si faccia o no la barba.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P, dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15\,485\,863 \in P$, e per verificare che $2^{43\,112\,609} - 1 \in P$ (uno dei più grandi primi conosciuti alla data del 20 settembre 2008, con ben 12 978 189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un *sottoinsieme* di B, o che è *contenuto* in B, o anche che B è un *soprainsieme* di A, o che *contiene* A, e scriveremo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A \,. \tag{1.4}$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$A \subset B, \text{ oppure } B \supset A \tag{1.5}$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A$, $\forall A$. Ci potrannno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{ a \} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli $\in$ e $\subset$ (o $\subseteq$): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con $\mathscr{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{ a, b \}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, A \} \,.$$

Usando l'insieme delle parti si possono costruire, "sul vuoto", insiemi molto complessi. Si vedano gli esempi che seguono.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\emptyset) &= \{\,\emptyset\,\}\\ \mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) &= \{\,\emptyset, \{\,\emptyset\,\}\,\}\\ \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))) &= \{\,\emptyset, \{\,\emptyset\,\}, \{\,\{\,\emptyset\,\}\,\}, \{\,\emptyset, \{\,\emptyset\,\}\,\}\,\}\end{aligned}$$

Mentre l'insieme vuoto non ha elementi, gli insiemi qui sopra proposti hanno, nell'ordine, 1, 2, 4 elementi.

1.3 Operazioni tra insiemi

Definizione 1.1. *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* unione*, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi.*

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\} \,. \tag{1.6}$$

Esempio. Se $A = \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}$ e $B = \{\, 2, 3, 4 \,\}$, allora $A \cup B = \{\, 0, 1, 2, 3, 4 \,\}$.

Definizione 1.2. *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* intersezione*, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\} \,. \tag{1.7}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{\, 2, 3 \,\}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi.

Saremo anche interessati a considerare *famiglie di insiemi*: se a ogni elemento di un dato insieme $\mathcal{A} \neq \emptyset$ corrisponde un insieme A, la famiglia di insiemi sarà denotata con

$$\{\, A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A} \,\} \,.$$

Quando non si darà adito a equivoci potremo anche denotare ua famiglia di insiemi semplicemente con $\{\, A_\alpha \,\}$, senza precisare l'insieme $\mathcal{A}$ di variabilità degli indici. In molte situazioni l'insieme $\mathcal{A}$ sarà l'insieme dei numeri naturali o un suo sottoinsieme. Per le unioni di tutti gli insiemi di una famiglia useremo scritture del tipo

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \quad , \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \quad , \quad \bigcup_{n=0}^{10} A_n \quad , \quad \bigcup_{n \in \{1,2,\dots,k\}} A_n \quad , \quad \text{ecc.,}$$

e analoghe per le intersezioni. Potremo anche usare notazioni abbreviate come

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

se l'insieme di variabilità degli indici è chiaro dal contesto.

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione.

$$\begin{aligned} A \cup A = A; &\quad A \cap A = A; \\ A \cup B = B \cup A; &\quad A \cap B = B \cap A; \\ A \cup \emptyset = A; &\quad A \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cup B \supseteq A; &\quad A \cap B \subseteq A; \\ A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B; &\quad A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,. \tag{1.8}$$

Definizione 1.3. *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* differenza*, e si indica con $A \setminus B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.*

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}\ . \tag{1.9}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A \setminus B = \{\, 0,\, 1 \,\}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si chiama anche *complementare di B rispetto ad A* e si indica con $\complement_A B$, o semplicemente con $\complement B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi: questo evita di avere problemi tipo quelli del paradosso del barbiere. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Assumiamo(2) anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con (x, y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y:

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1\,.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{\, a, b \,\} = \{\, b, a \,\} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a)\,.$$

Definizione 1.4. *Dati due insiemi A e B si chiama loro* prodotto cartesiano*, o semplicemente* prodotto*, l'insieme, indicato con $A \times B$, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B:*

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \,\}\ .$$

È una conseguenza immediata della definizione che $A \times B \neq B \times A$. Nel caso particolare che $A = B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A \times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte si scriverà A^n in luogo di $A \times A \times \cdots \times A$.

[2] Si potrebbe anche definire una coppia ordinata ponendo

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x, \{\, x, y \,\} \,\}\,.$$

Definizione 1.5. *Se A è un insieme non vuoto, una famiglia* $\{ A_\alpha \}$ *di sottoinsiemi di A si dirà una* partizione *o* ripartizione *di A se:*

1. $A_\alpha \neq \emptyset \, \forall \, \alpha$;
2. $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, *se* $\alpha \neq \beta$;
3. $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = A$.

Gli elementi della famiglia si diranno anche *classi*.

Esempi.

- Sia A l'insieme dei punti di un piano e r una retta dello stesso piano. La famiglia di tutte le rette parallele a r costituisce una ripartizione di A.
- Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme degli interi: la famiglia di insiemi $\{ Z^-, \{0\}, Z^+ \}$ costituisce una ripartizione di $\mathbb{Z}$.
- Sia A l'insieme di tutte le rette di un piano e $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le rette del fascio avente centro in un punto O qualsiasi. Considerato l'insieme

$$A_\alpha = \{ r \mid r \text{ è una retta parallela a una retta } r_\alpha \text{ di } \mathcal{A} \},$$

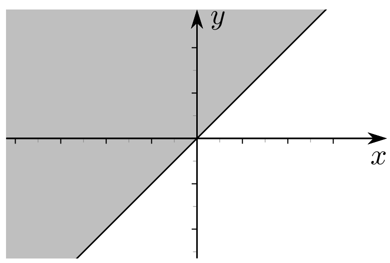
  la famiglia $\{ A_\alpha \}$ è una ripartizione di A.
- Sia $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei naturali positivi e consideriamo i sottoinsiemi A = insieme dei pari, B = insieme dei primi, C = insieme dei dispari non primi. Allora la famiglia $\{ A, B, C \}$ non costituisce una ripartizione di $\mathbb{N}^+$, in quanto l'unione degli elementi della famiglia riproduce $\mathbb{N}^+$, ma l'intersezione a due a due non è vuota perché $2 \in A \land 2 \in B$.

1.4 Relazioni binarie

Definizione 1.6. *Siano A e B insiemi non vuoti. Chiamiamo* relazione (binaria) *tra A e B un qualunque sottoinsieme, $\mathcal{R}$, del prodotto cartesiano $A \times B$. Se $A = B$ la relazione è detta relazione in A.*

Se $\mathcal{R}$ è una relazione e $(a, b) \in \mathcal{R}$, scriveremo $a\mathcal{R}b$ e diremo che a è in relazione con b. Trattandosi di un insieme, la relazione potrà essere data sia specificando l'insieme che assegnando una proprietà caratteristica che individui gli elementi della relazione, cioè le coppie (a, b) tali che a sia in relazione con b.

Esempio. La relazione "$\leq$" è una relazione in $\mathbb{R}$, cioè è un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Trattandosi di un sottoinsieme del piano, usando un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (monometrico) potremo costruirne una semplice rappresentazione grafica.



Esempio. "Essere divisibile" è una relazione in $\mathbb{N}$: $(4, 2)$ sta nella relazione (4 è divisibile per 2), $(4, 3)$ non sta nella relazione. La relazione "divide" è esattamente la simmetrica di questa: in questo caso è $(2, 4)$ che sta nella relazione (2 divide 4).

Proprietà delle relazioni

Le relazioni su un insieme A possono godere di alcune proprietà: ne elenchiamo le più significative.

Proprietà riflessiva $\forall x \in A \;\; x\mathcal{R}x$, ovvero "ogni elemento è in relazione con se stesso". Un esempio è fornito dalla relazione di parallelismo tra le rette dello spazio: $r \parallel r$ è vera per ogni retta r.

Proprietà simmetrica $\forall x,\, y \in A \;\; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, ovvero "se x è in relazione con y, anche y è in relazione con x". Un esempio è ancora fornito dalla relazione di parallelismo prima citata: se $r \parallel s$, allora $s \parallel r$.

Proprietà antisimmetrica $\forall x,\, y \in A \;\; x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$, ovvero "se x è in relazione con y e y è in relazione con x, x e y sono uguali. Un esempio è fornito dalla relazione $\leq$: se $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Proprietà asimmetrica $\forall x,\, y \in A \;\; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\not\mathcal{R}x$, ovvero "se x è in relazione con y, y non può essere in relazione con x". Un esempio è fornito dalla relazione $<$: se $x < y$ non può essere $y < x$.

Proprietà transitiva $\forall x,\, y,\, z \in A \;\; x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$, ovvero se x è in relazione con y e y è in relazione con z, allora x è in relazione con z. Esempi sono forniti dalle relazioni di parallelismo, $\leq$ e $<$ prima citate.

Relazioni di equivalenza

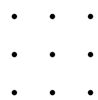
Un primo tipo di relazioni molto importante nelle applicazioni è quello delle relazioni di equivalenza.

Definizione 1.7. *Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione in A. $\mathcal{R}$ è detta una* relazione di equivalenza *se gode delle proprietà*

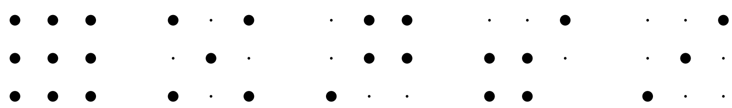
– *riflessiva,*
– *simmetrica,*
– *transitiva.*

Esempio. La relazione di parallelismo tra rette dello spazio è di equivalenza.

Esempio. Se A è un insieme di 3 elementi, possiamo rappresentare nel piano il prodotto cartesiano $A \times A = A^2$ con una griglia di 9 punti, come segue:



Le relazioni di equivalenza possibili in questo caso sono rappresentate graficamente con le seguenti 5 figure, dove gli elementi delle relazioni (cioè dei sottoinsiemi di A^2) sono evidenziati dalle maggiori dimensioni dei punti.



Se in un insieme A è definita una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ è possibile costruire una speciale famiglia di sottoinsiemi di A: per ogni $x \in A$ si definisce

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \in A \mid x\mathcal{R}y \,\}\,.$$

Non è difficile provare (e lo si lascia per esercizio) che la famiglia delle classi di equivalenza costituisce una partizione di A stesso. Questa famiglia prende il nome di *insieme quoziente* di A rispetto alla relazione di equivalenza $\mathcal{R}$. In molte situazioni queste classi di equivalenza prendono nomi speciali, come risulta dagli esempi che seguono.

Esempi.

- Nell'insieme delle rette dello spazio dove si è introdotta la relazione di parallelismo, le classi di equivalenza prendono il nome di *direzioni*.
- Nell'insieme dei piani dello spazio dove si è introdotta la relazione di parallelismo, le classi di equivalenza prendono il nome di *giaciture*.
- Nell'insieme delle coppie di numeri interi, con il secondo elemento diverso da zero (insieme delle frazioni), si può definire una relazione di equivalenza ponendo $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$ (è la usuale relazione di equivalenza tra frazioni). In questo caso le classi di equivalenza sono i *numeri razionali*.
- Se nell'insieme dei segmenti dello spazio consideriamo la relazione di congruenza, le classi di equivalenza sono le *lunghezze* dei segmenti.
- Se nell'insieme dei segmenti orientati consideriamo la relazione, detta di equipollenza, che considera equivalenti due segmenti orientati che siano congruenti e abbiano stessa direzione e stesso verso, le classi di equivalenza si chiamano *vettori*.

Spesso le relazioni di equivalenza sono indicate con il simbolo $\sim$.

Relazioni d'ordine

Un secondo tipo di relazioni, importante per le applicazioni che ne faremo, è quello delle relazioni d'ordine.

Definizione 1.8. *Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione in A. $\mathcal{R}$ è detta una* relazione d'ordine *se gode delle proprietà*

- *riflessiva,*
- *antisimmetrica,*
- *transitiva.*

Esempi.

- Se $\mathscr{P}(A)$ è l'insieme delle parti di un insieme A, la relazione $\subseteq$ è una relazione d'ordine.
- Negli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ la relazione $\leq$ è d'ordine.

Si presti attenzione al fatto che la relazione $<$ negli insiemi numerici citati non è d'ordine nel senso ora definito: essa gode della proprietà *antiriflessiva* (nessun elemento è in relazione con se stesso), *asimmetrica* e *transitiva*. Tuttavia è sempre possibile passare dalla relazione $\leq$ alla relazione $<$ ponendo $a < b$ se e solo se $a \leq b \wedge a \neq b$. Il passaggio è ovviamente possibile anche in senso inverso. In un certo senso queste due relazioni sono equivalenti, cioè forniscono lo stesso tipo di informazione relativamente all'insieme su cui sono definite. È più che altro una questione di convenzioni scegliere l'una o l'altra.

Le relazioni d'ordine sono di solito indicate con simboli del tipo $\preccurlyeq$: la scrittura $a \preccurlyeq b$ si legge *a precede b* o anche *b segue a*. In una relazione d'ordine indicata con $\preccurlyeq$, per indicare che b segue a si scrive anche $b \succcurlyeq a$.

È evidente che se A è un insieme ordinato con la relazione $\preccurlyeq$, ogni suo sottoinsieme è ancora ordinato con la stessa relazione "ristretta" al sottoinsieme. Useremo continuamente questo fatto.

Una relazione d'ordine si dice *totale* se dati due elementi a e b, accade sempre che $a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$: in altri termini una relazione d'ordine è totale se due elementi qualunque sono sempre confrontabili.

Esempi.

- Se A è un insieme con un solo elemento, la relazione $\subseteq$ in $\mathscr{P}(A)$ è d'ordine totale.
- Se A è un insieme con più di un elemento, la relazione $\subseteq$ in $\mathscr{P}(A)$ non è d'ordine totale. Per esempio se $A = \{\, a, b \,\}$ si ha $\mathscr{P}(A) = \{\, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\, a, b \,\} \,\}$ ed è chiaro che $\{a\}$ non è contenuto né contiene $\{b\}$.
- La relazione $\leq$ negli insiemi numerici sopra citati è d'ordine totale.

Una relazione d'ordine che non sia d'ordine totale si dice d'ordine *parziale*.

Definizione 1.9. *Sia A un insieme ordinato con la relazione $\preccurlyeq$. Se esiste un elemento $m \in A$ tale che $m \preccurlyeq x \ \forall x \in A$, allora m si dice il* minimo *di A. Analogamente se esiste un elemento $M \in A$ tale che $x \preccurlyeq M \ \forall x \in A$, allora M si dice il* massimo *di A.*

L'articolo determinativo usato sia davanti al minimo che al massimo è giustificato dal seguente teorema che ne garantisce l'unicità.

Teorema 1.10. *Se un insieme ordinato ha minimo e/o massimo, essi sono unici.*

Dimostrazione. Se m_1 ed m_2 sono due minimi si deve avere

$$(m_1 \preccurlyeq m_2) \wedge (m_2 \preccurlyeq m_1),$$

da cui $m_1 = m_2$, per la proprietà antisimmetrica. Analogo discorso per il massimo. □

Esempi.

- Nell'insieme delle parti di un dato insieme A, l'insieme vuoto è sempre il minimo e l'insieme A stesso è sempre il massimo rispetto alla relazione di inclusione tra insiemi $\subseteq$.
- L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ ha lo zero come minimo e non ha massimo, rispetto all'ordine usuale.
- L'insieme degli interi non ha né massimo né minimo rispetto all'ordine usuale.

Come mostrano gli esempi appena considerati un insieme può tranquillamente non avere massimo e/o minimo. Per questo motivo si "inventa" un surrogato del massimo e del minimo che gioca un ruolo simile, ma ovviamente non identico. Purtroppo nemmeno questo surrogato esiste sempre, come vedremo.

Definizione 1.11. *Sia A un insieme ordinato con la relazione $\preccurlyeq$ e B un sottoinsieme di A (eventualmente coincidente con A stesso). Se esiste un elemento $l \in A$ tale che $l \preccurlyeq x \ \forall x \in B$, l si dice un* minorante *o una* limitazione inferiore *per B.*

Analogamente se esiste un elemento $L \in A$ tale che $x \preccurlyeq L \ \forall x \in B$, L si dice un maggiorante *o una* limitazione superiore *per B.*

Un sottoinsieme B che abbia maggioranti si dice superiormente limitato*, uno che abbia minoranti si dice* inferiormente limitato*. Se il sottoinsieme ha sia maggioranti che minoranti si dice semplicemente* limitato*.*

È ovvio, considerando il caso $B = A$, che l'insieme A stesso può avere come maggioranti solo l'eventuale massimo e come minoranti solo l'eventuale minimo.

Per un generico sottoinsieme B possiamo considerare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti (che potrebbero anche essere vuoti). Ha interesse sapere se questi due insiemi hanno, oppure no, minimo (il primo) e massimo (il secondo).

Definizione 1.12. *Sia A un insieme ordinato con la relazione $\preccurlyeq$ e B un sottoinsieme di A. Se l'insieme dei maggioranti di B ha un minimo, esso si chiama l'*estremo superiore *di B e si indica con* $\sup B$*; se l'insieme dei minoranti ha un massimo esso si chiama l'*estremo inferiore *di B e si indica con* $\inf B$.

Come già fatto con il massimo e il minimo si può osservare che non ci può essere più di un estremo superiore (o inferiore).

Esempi.

- Sia $B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 4 \}$. Allora $\sup B = 2$ e $\inf B = -2$.
- Sia $B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 < 2) \}$. Allora $\inf B$ non può esistere perché B non è inferiormente limitato, e non esiste nemmeno $\sup B$, nonostante B abbia ovviamente dei maggioranti. L'esistenza di sottoinsiemi dei razionali che, pur essendo superiormente limitati, non hanno estremo superiore è, come vedremo, un grave "handicap" dell'insieme dei razionali, ed è per questo che si è costretti a introdurre l'insieme dei reali, dove le cose vanno in maniera completamente diversa.

1.5 Funzioni o applicazioni

Tra tutte le possibili relazioni tra due insiemi A e B, hanno particolare interesse le funzioni o applicazioni, le cui caratteristiche ci apprestiamo a esaminare.

Definizione 1.13. *Una relazione f tra due insiemi non vuoti A e B si dice una* funzione *(o* mappa *o* applicazione*) se*

$$\forall x \in A\ \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f\,. \tag{1.10}$$

L'insieme A si dice dominio*, l'insieme B* codominio *e usualmente si scrive $y = f(x)$ in luogo di $(x, y) \in f$. L'elemento x si dice la* variabile *(indipendente) ed $f(x)$ il* valore *di f in x.*

In sostanza la caratteristica delle funzioni è che *ad ogni* x di A *deve* corrispondere un *unico* y di B che sia in relazione con x: si esprime quest'ultimo fatto dicendo che la corrispondenza è *univoca*.

L'unico valore $y \in B$ che è in relazione con un dato $x \in A$ si chiama anche *immagine* di x tramite f.

Usando un linguaggio un po' meno rigoroso, ma significativo, si può dire che una funzione è una *legge* che associa ad ogni x di un insieme A detto dominio un unico elemento y di un insieme B detto codominio. È molto importante tenere presente che per assegnare una funzione occorre assegnare *tre* oggetti: l'insieme A, la "legge" f e l'insieme B.

Notazioni

La notazione più comune per rappresentare una funzione è la seguente

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\mapsto f(x)\,, \end{aligned} \tag{1.11}$$

notazione che può anche essere scritta su una sola riga per semplicità[3]:

$$f\colon A \to B\,,\ x \mapsto f(x)\,.$$

Purtroppo si tratta di una notazione non semplice e non facilmente maneggiabile. In molti casi si usano notazioni abbreviate o semplificate. Per esempio per indicare la funzione definita nell'insieme dei reali e che fa corrispondere a ogni reale x il seno di x si dovrebbe scrivere

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sin x\,.$$

In molti casi casi si scrive invece semplicemente "la funzione $x \mapsto \sin x$" (sottintendendo il dominio e il codominio) o, ancora più spesso, "la funzione $f(x) = \sin x$". È indispensabile tenere conto, particolarmente nel secondo caso, che si tratta solo di una scrittura compatta: in realtà $\sin x$ non è la funzione, ma solo il valore che la funzione assume in corrispondenza del valore x della variabile, cioè l'immagine di x tramite la funzione. In un caso come questo, comunque, è facile, nella scrittura $f(x) = \sin x$, individuare il nome della funzione ("la funzione seno o sin"); la cosa diventa molto più difficile in scritture del tipo $f(x) = x^2$, in cui è difficile enucleare il nome esplicito della funzione (che potrebbe essere chiamata funzione "elevamento al quadrato"). Questi problemi sono molto importanti per esempio nella stesura di un codice per un linguaggio di programmazione.

In pratica, in particolare nel caso delle funzioni che hanno come dominio un insieme numerico, il simbolo $f(x)$ rappresenta il complesso delle operazioni da eseguire sulla variabile x per ottenere il corrispondente valore $f(x)$. Anzi in situazioni come queste (che saranno quelle di nostro interesse in questo corso) assegneremo abitualmente proprio solo il complesso di regole $f(x)$, sottintendendo che il codominio sia l'insieme numerico che stiamo trattando (di solito l'insieme dei reali) e che il dominio sia il massimo sottoinsieme dello stesso insieme numerico in cui le regole stesse sono applicabili. Avranno dunque senso problemi del tipo: "Si calcoli il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$", la cui soluzione è costituita dell'insieme $[-1, 1]$.

Segnaliamo che in molti testi si riserva il nome di *funzione* solo ad applicazioni in cui il codominio sia un insieme numerico.

Nel caso in cui il dominio di una funzione f sia costituito dall'insieme $\mathbb{N}$ o da un suo sottoinsieme (quasi sempre infinito), si usa più spesso il nome *successione* e al posto di $f(n)$ si usa sempre la notazione f_n (a_n se, come è tradizione in questi casi, si usano le lettere a, b, ... al posto di f, g, ... per denominare le funzioni). In questi casi inoltre la funzione stessa (la successione) si indica con la scrittura $(a_n)_{n\in N}$, o anche semplicemente $(a_n)_n$.

Se è data una funzione $f\colon A \to B$, l'insieme di tutti gli $f(x)$ al variare di x in A si chiama *immagine* della funzione f o, a volte, immagine di A tramite f e si indica con $f(A)$:

$$f(A) = \{\, f(x) \in B \mid x \in A \,\} = \{\, y \in B \mid \exists x \in A\,,\ f(x) = y \,\}\,. \tag{1.12}$$

Analogamente se $A' \subseteq A$, si può considerare l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di A': questo insieme si indica con $f(A')$ e si chiama *immagine* di A' tramite f.

[3] Si può anche usare una notazione ancora più compatta

$$A \xrightarrow{f} B$$

Si presti particolare attenzione al fatto che, nella scrittura $f(A')$, f non rappresenta più una funzione da A a B, ma da $\mathscr{P}(A)$ a $\mathscr{P}(B)$. Questo doppio uso dello stesso simbolo non genera, di solito, alcuna ambiguità, basta tenere conto del tipo di variabile che compare all'interno delle parentesi: se è un elemento di A, allora si tratta della funzione $f\colon A \to B$, se si tratta di un sottoinsieme di A allora si tratta della funzione $f\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$.

Se $f(A)$ è costituito da un unico elemento di B, allora la funzione si dice *costante*.

Si tenga ben presente che, in generale, $f(A) \subsetneq B$, ed è per questo che abbiamo usato due nomi diversi per B e per $f(A)$[(4)].

Se B' è un sottoinsieme di B (eventualmente coincidente con B stesso), ha interesse considerare l'insieme (che potrebbe anche essere vuoto) degli $x \in A$ che hanno per immagine uno degli elementi di B': questo insieme si indica con $f^{-1}(B')$ e si chiama *controimmagine* o *immagine inversa* di B' tramite f. È chiaro che $f^{-1}(B) = A$.

Purtroppo la scrittura usata non è delle più felici, in quanto, per analogia con $f(A')$ usata prima, potrebbe far venire il sospetto che f^{-1} possa essere una funzione da B in A, cosa che è vera solo in particolari casi, come vedremo tra poco. È invece vero che f^{-1} è una funzione da $\mathscr{P}(B)$ a $\mathscr{P}(A)$, in perfetta simmetria con la funzione f tra $\mathscr{P}(A)$ a $\mathscr{P}(B)$.

Nelle applicazioni interessano funzioni con alcune speciali proprietà, come risulta dalle seguenti definizioni.

Definizione 1.14. *Una funzione $f\colon A \to B$ si dice* suriettiva *se $f(A) = B$.*

Ciò equivale a dire che ogni elemento y di B è immagine di *almeno un* x di A.

Esempi.

- La funzione $f(x) = x^2$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ non è suriettiva, in quanto per esempio il valore $y = -1$ non è immagine di alcun x del dominio.
- La funzione $f(x) = x^3$, sempre di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, è invece suriettiva.

Definizione 1.15. *Una funzione $f\colon A \to B$ si dice* iniettiva *se $f^{-1}(\{y\})$ è costituito al più da un elemento di A.*

Ciò equivale a dire se $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ovvero che elementi distinti del dominio hanno sempre immagini diverse, o ancora che ogni y di B è immagine di *al più un* elemento di A.

Dei due esempi citati sopra la prima funzione non è iniettiva, la seconda lo è.

Definizione 1.16. *Una funzione $f\colon A \to B$ si dice* biiettiva *o* biunivoca *se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

Ciò equivale a dire che ogni $y \in B$ è immagine di *esattamente un* x di A.

È opportuno riportare in uno schema il senso di tutte e tre le definizioni date, per consentire facili e utili confronti.

- Funzione suriettiva: ogni y di B è immagine di *almeno un* x di A.
- Funzione iniettiva: ogni y di B è immagine di *al più un* x di A.
- Funzione biiettiva: ogni $y \in B$ è immagine di *esattamente un* x di A,

Definizione 1.17. *Se $f\colon A \to B$ è una funzione e $A' \subseteq A$, l'applicazione che a ogni elemento x di A' associa l'elemento $f(x)$ di B si dice una* restrizione *di f ad A', e si indica con $f|_{A'}$, o a volte anche con f stesso se non sono possibili ambiguità.*

[4] Alcuni, pochi, testi usano nomi leggermente diversi dai nostri. Precisamente chiamano codominio l'insieme $f(A)$ e, genericamente, *insieme di arrivo* l'insieme B.

Avremo spesso bisogno di considerare restrizioni di funzioni, molte volte per ottenere funzioni iniettive a partire da funzioni che non lo sono. Per esempio la funzione $f(x) = x^2$ di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ non è iniettiva, ma se ne considero la restrizione ai reali maggiori o uguali a zero, questìultima è iniettiva.

A volte considereremo anche *restrizioni sul codominio*, in particolare saremo interessati a considerare la restrizione del codominio all'immagine: questo ci consentirà di passare da una funzione non suriettiva a un'altra che invece è suriettiva.

Definizione 1.18. *Sia ora $A' \subseteq A$ e supponiamo di avere una funzione $f\colon A' \to B$. Chiameremo* prolungamento *di f aD A* ogni *funzione di A in B che, ristretta ad A', coincida con f.*

Si noti come di restrizioni di una funzione a un dato sottoinsieme del dominio ce ne sia una sola, mentre di prolungamenti di una funzione a un soprainsieme del dominio ce ne possano anche essere infiniti.

Esempio. Sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia data la funzione $f\colon A \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$. La funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq 0 \\ 3, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

è un prolungamento di f a tutto $\mathbb{R}$.

L'importanza delle funzioni biiettive discende dalla seguente definizione.

Definizione 1.19. *Sia $f\colon A \to B$ una funzione biiettiva. Allora è possibile considerare una funzione, che si indica con f^{-1} e si chiama* funzione inversa *da B in A, ponendo, per ogni y di B,*

$$f^{-1}(y) = \textit{all'unico } x \textit{ di } A \textit{ tale che } f(x) = y. \tag{1.13}$$

Si presti particolare attenzione al fatto, già segnalato, che la scrittura $f^{-1}(B')$ ha senso per ogni funzione, se $B' \subseteq B$, mentre la scrittura $f^{-1}(y)$ ha senso *solo ed esclusivamente* per le funzioni biiettive (e non si confonda quest'ultima scrittura con la $f^{-1}(\{y\})$, che ha sempre senso).

In molte situazioni, avendo a che fare con funzioni non iniettive né suriettive (e dunque non invertibili), considereremo opportune restrizioni (sia sul dominio che sul codominio) per ottenere funzioni biunivoche. Un esempio di enorme importanza è quello della funzione $f(x) = x^2$, che non è né iniettiva né suriettiva. Se si opera una restrizione, sia sul dominio che sul codominio, ai reali maggiori o uguali a zero, si ottiene una funzione biunivoca, e dunque invertibile: la sua inversa si chiama funzione *radice quadrata*. Dunque la funzione radice quadrata è l'inversa di una speciale restrizione della funzione elevamento al quadrato.

Definizione 1.20. *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Allora ha senso considerare la funzione, indicata con $g \circ f$, e detta* funzione composta *di f e g, definita come segue:*

$$g \circ f\colon A \to C,\ x \mapsto g\big(f(x)\big).$$

Si noti che, ai fini della costruzione della composta, quello che conta è che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g: eventuali valori del codominio dei f che non sono immagine di alcun valore del dominio di f non intervengono nella definizione.

Esempio. Si consideri la funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$ e la funzione di $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{t}$. Allora ha senso considerare la funzione composta $g \circ f$ data da $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, anche se il codominio di f non è uguale al dominio di g: l'immagine di f è costituita solo dai reali maggiori o uguali a 2, e questo è un sottoinsieme del dominio di g.

Esempio. Si considerino le due funzioni, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, definite da $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$. Allora la funzione $f \circ g$ è la funzione data dalla regola $f \circ g(x) = (\sin x)^2$; la funzione $g \circ f$ è invece data dalla regola $g \circ f(x) = \sin(x^2)$. Come si vede si tratta di due funzioni completamente diverse.

Questo esempio prova che, in generale, $f \circ g \neq g \circ f$ (supposto naturalmente che abbia senso considerare entrambe le composizioni. È invece vero che l'operazione di composizione tra funzioni gode della proprietà associativa:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\,.$$

Definizione 1.21. *Dato un insieme A, chiameremo* identità *in A, e la indicheremo con* id_A *la funzione definita da*

$$\mathrm{id}_A(x) = x\,,\ \forall x \in A\,.$$

Proprietà di immediata dimostrazione della funzione id sono le seguenti: se $f\colon A \to B$ è una funzione, allora

$$f = \mathrm{id}_B \circ f = f \circ \mathrm{id}_A\,.$$

È immediato (e lo si lascia per esercizio) provare che se $f\colon A \to B$ è una funzione invertibile allora

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad , \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B\ . \tag{1.14}$$

Anzi, si potrebbe definire come inversa di una funzione f quella funzione g, se esiste, che gode delle due proprietà

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad , \quad f \circ g = \mathrm{id}_B\ .$$

Se si adotta questa definizione si può provare facilmente poi che l'inversa, se esiste, è unica. Supponendo infatti che una funzione f abbia due inverse g_1 e g_2 si ha:

$$g_1 = \mathrm{id}_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ \mathrm{id}_B = g_2\,.$$

Poiché una funzione è una particolare relazione, in base alla nostra definizione essa è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Tuttavia abitualmente a questo sottoinsieme si dà un nome speciale, precisamente quello di *grafico*.

Definizione 1.22. *Data una funzione $f\colon A \to B$, l'insieme*

$$G(f) = \{\ (x, f(x)) \mid x \in A\ \}$$

si chiama grafico *della funzione f.*

Nel caso particolare di funzioni in cui A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, questo insieme può essere rappresentato nel piano dove si sia introdotto un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali) e, nelle situazioni più comuni che a noi capiterà di considerare, sarà costituito da uno o più rami di una curva, nel senso intuitivo del termine. La condizione di univocità che distingue le funzioni dalle generiche relazioni si può allora tradurre in una semplice proprietà grafica: una retta "verticale" può intersecare il grafico in al più un punto.

1.6 Esercizi

Esercizio 1.1. *Siano A e B due insiemi. Provare che*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \,.$$

Esercizio 1.2. *Siano A e B due insiemi. Provare che*

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \quad , \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \,.$$

(Queste formule sono dette Formule di de Morgan*).*

Esercizio 1.3. *Siano A e B due insiemi. Mostrare che*

$$A = B \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B \,.$$

Esercizio 1.4. *Siano A e B due insiemi. L'insieme*

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

si chiama differenza simmetrica di A e B*. Provare che*

1. $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $A \vartriangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
3. $A \vartriangle B = A \setminus (A \cap B)$

Esercizio 1.5. *Siano A e B due insiemi. Dimostrare le formule seguenti*

1. $\complement A \vartriangle \complement C = A \vartriangle B\,;$
2. $\complement()A \vartriangle B = \complement A \vartriangle B = A \vartriangle \complement B\,.$

Esercizio 1.6. *Usando solo l'insieme vuoto e l'insieme delle parti costruire un insieme che abbia 5 elementi.*

Esercizio 1.7. *Dire quali fra le seguenti scritture sono corrette.*

1. $a \in \{\, a \,\}$
2. $a \subseteq \{\, a \,\}$
3. $a = \{\, a \,\}$
4. $a \subseteq \{\, a, \{\, a \,\} \,\}$
5. $\{\, a \,\} \subseteq \{\, a, \{\, a \,\} \,\}$
6. $\{\, \{\, a \,\} \,\} \subseteq \{\, a, \{\, a \,\} \,\}$

Esercizio 1.8. *Siano A, B, C tre insiemi. Provare che*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Esercizio 1.9. *Si considerino gli insiemi*

$$A_i = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq i \,\} \,, \quad i \in \mathbb{N}$$

(ovvero gli insiemi dei naturali maggiori o uguali a 0, 1, ...).

Dimostrare che

$$\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = \emptyset \,.$$

Esercizio 1.10. *Trovare i seguenti insiemi.*

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [1-{}^1\!/\!_n\,,\,1+{}^1\!/\!_n]$
2. $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [1-{}^1\!/\!_n\,,\,1+{}^1\!/\!_n]$
3. $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [0\,,\,1-{}^1\!/\!_n]$
4. $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} [0\,,\,1-{}^1\!/\!_{n^2}]$

Esercizio 1.11. *Trovare una possibile rappresentazione nel piano cartesiano per gli insiemi seguenti.*

1. $\mathbb{R}\times\{a\}$
2. $\{a\}\times\mathbb{R}$
3. $[a,b]\times[c,d]$

(a, b, c, d sono numeri reali con $a\le b$ e $c\le d$).

Esercizio 1.12. *Siano A, B, C tre insiemi. Provare che, in generale,*

$$A\cup(B\times C)\neq(A\cup B)\times(A\cup C)\,.$$

Esercizio 1.13. *Sia E un insieme. Esiste un sottoinsieme A di E tale che $A\in\mathscr{P}(E)$ e $A\subseteq\mathscr{P}(E)$?*

Esercizio 1.14. *Siano A, B, C tre insiemi, con $A\neq\emptyset$. Provare che*

$$A\times B=A\times C\Rightarrow B=C\,.$$

Esercizio 1.15. *Se $A=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4\,\}$ e $B=[0,1]$, come si può rappresentare in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nello spazio l'insieme*

$$A\times B\;?$$

Esercizio 1.16. *Rappresentare in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano l'insieme*

$$A=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x|<1\wedge|y|<1\,\right\}.$$

Esercizio 1.17. *Siano A, B, C tre insiemi. Provare che*

$$(A\cap B=A\cap C)\wedge(A\cup B=A\cup C)\Rightarrow B=C\,.$$

Esercizio 1.18. *Se A e B sono due insiemi, provare che*

1. $A\cap B=\complement(\complement A\cup\complement B)\,;$
2. $A\cup B=\complement(\complement A\cap\complement B)\,;$
3. $A\setminus B=A\cap\complement B=\complement(\complement A\cup B)\,.$

Esercizio 1.19. *Siano A e B due insiemi. Mostrare che A e B sono disgiunti se e solo se $\complement A\cup\complement B=U$ (U è l'insieme universo).*

Esercizio 1.20. *Se A e B sono insiemi non vuoti, mostrare che*

$$A\times B=B\times A\Rightarrow A=B\,.$$

Esercizio 1.21. *Siano A e B due insiemi. Mostrare che*

$$\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)\,.$$

Mostrare su un esempio che, invece, generalmente

$$\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)\,.$$

Esercizio 1.22. *Si consideri la relazione, nell'insieme dei numeri reali,*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2\,.$$

Si provi che la relazione non è d'ordine. Quale delle proprietà delle relazioni d'ordine viene a mancare?

Esercizio 1.23. *Siano E e F due insiemi, $f\colon E \to F$. Provare che*

- $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad (A \subseteq B) \Rightarrow (f(A) \subseteq f(B))$*; provare poi con un esempio che non è necessariamente vero il viceversa, cioè se $f(A) \subseteq f(B)$ non è detto che $A \subseteq B$;*
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
- $\forall A, B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
- $\forall A \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Esercizio 1.24. *Siano A e B due insiemi. Si considerino le funzioni*

$$p_1\colon A \times B \to A,\ p_1(a,b) = a \quad e \quad p_2\colon A \times B \to B,\ p_2(a,b) = b\,,$$

dette rispettivamente prima e seconda proiezione *sono suriettive.*

Esercizio 1.25. *Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni. Dimostrare che*

- *se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva;*
- *se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva.*

Esercizio 1.26. *L'applicazione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto 2x$ è iniettiva? suriettiva? biiettiva?*

Esercizio 1.27. *Può accadere che in un insieme ordinato il massimo coincida con il minimo?*

2 Numeri reali

2.1 I numeri naturali e i numeri interi

L'insieme dei numeri naturali potrebbe essere introdotto in maniera assiomatica (Assiomi di Peano), ma noi daremo per noto questo insieme, denotato con

$$\mathbb{N} = \{\, 0,\, 1,\, 2,\, \dots \,\},$$

e le operazioni in esso definite, e segnaleremo solo alcune delle proprietà essenziali.

1. Nell'insieme $\mathbb{N}$ è definita una relazione di ordine totale che si chiama di *ordine naturale*, indicata con $\leq$. Il fatto che l'ordine considerato sia totale ha come conseguenza la cosiddetta *legge di tricotomia*: dati due naturali n ed m, vale una e una sola delle tre alternative
$$n < m\,, \quad n = m\,, \quad n > m\,.$$
2. Ogni numero naturale ha un immediato successivo (o seguente), nel senso che dato un naturale n qualunque esiste un unico naturale $n' > n$[1] e con la proprietà che tra n ed n' non si trova alcun altro numero naturale. Analogamente ogni naturale $n > 0$ ha un immediato precedente.
3. Ogni sottoinsieme non vuoto di N ha minimo, in particolare $\mathbb{N}$ stesso ha lo 0 come minimo. Ogni sottoinsieme superiormente limitato di $\mathbb{N}$ ha massimo.
4. In $\mathbb{N}$ sono definite le due operazioni di somma e prodotto con le ben note proprietà che richiamiamo brevemente e senza commenti:
   - proprietà *associativa* della somma: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
   - esistenza dell'*elemento neutro* della somma: $a + 0 = 0 + a = a$;
   - proprietà *commutativa* della somma: $a + b = b + a$;
   - proprietà *associativa* del prodotto: $(ab)c = a(bc)$;
   - esistenza dell'*elemento neutro* del prodotto: $a1 = 1a = a$;
   - proprietà *commutativa* del prodotto: $ab = ba$;
   - proprietà *distributiva* del prodotto rispetto alla somma: $a(b + c) = ab + ac$;
   - legge dell'*annullamento del prodotto*: $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$;
   - legge di *cancellazione* della somma: $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$;
   - legge di *cancellazione* del prodotto: $a = b \Leftrightarrow ac = bc$, $\forall c \neq 0$;
   - *compatibilità* tra ordine e somma: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$;
   - *compatibilità* tra ordine e prodotto: $a < b \Leftrightarrow ac < bc$, $\forall c > 0$.
5. In $\mathbb{N}$ si definisce anche l'operazione di *elevamento a potenza* ponendo

$$m^1 \overset{\text{def}}{=} m, \quad m^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{m \times m \times m \times \cdots \times m}_{n \text{ volte}}; \tag{2.1}$$

[1] Per i legami tra le relazioni $\leq$ e $<$ vedi la discussione nella pagina 8.

si definisce poi anche

$$m^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1,\ \forall m > 0. \tag{2.2}$$

Dunque *non* si attribuisce alcun significato al simbolo 0^0.

Tra le molte altre proprietà di $\mathbb{N}$ che useremo, segnaliamo in particolare i due teoremi che seguono, di cui ci limiteremo a fornire solo l'enunciato.

Teorema 2.1 (Divisione con resto)**.** *Dati due numeri naturali a e b, con $b > 0$, esiste una e una sola coppia di numeri naturali q ed r tali che:*

$$a = bq + r, \quad (0 \leq)\, r < b\,.$$

Il numero q si chiama *quoziente*, il numero r *resto* della divisione di a per b. Se il resto è 0, si dice che a è un *multiplo* di b, oppre che a è divisibile per b, o ancora che b è un *divisore* di a.

Si chiamano *primi* i numeri naturali maggiori di 1 che siano divisibili solo per se stessi e per 1.

Segnaliamo che questa "divisione con resto" è la prima "operazione"[2] di divisione che si studia alle scuole elementari. Come dovrebbe essere noto, anche nel caso dei polinomi in $\mathbb{R}$ si considera un'operazione analoga.

Teorema 2.2 (Principio di induzione)**.** *Sia A è un sottoinsieme di N che gode delle seguenti proprietà:*

1. *il numero 0 appartiene ad A;*
2. *se $n \in A$ anche $n + 1 \in A$.*

Allora A coincide con N.

Se la prima condizione del teorema è sostituita da $m \in A$, allora A coincide con il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ costituito da tutti i numeri maggiori o uguali a m.

Questo teorema è spesso enunciato in un'altra forma, utilizzata in numerose dimostrazioni. Supponiamo che ad ogni numero naturale maggiore o uguale a m sia associata una proposizione $\mathscr{P}(n)$. Se

1. $\mathscr{P}(m)$ è vera;
2. l'essere vera $\mathscr{P}(n)$ implica che è vera $\mathscr{P}(n+1)$;

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq m$.

Sulla stessa idea sono basate anche le definizioni ricorsive, o induttive, per le quali proponiamo solo un esempio, precisamente una definizione alternativa della potenza in $\mathbb{N}$.

Definizione 2.3. *Sia m un naturale maggiore di 0. Allora m^n è definito come segue:*

$$m^0 = 1, \quad m^{n+1} = m \times m^n\,.$$

È abbastanza evidente che, in questo modo, si è definito a^n per ogni naturale n.

Se consideriamo, nell'insieme dei numeri naturali, l'equazione

$$a + x = b, \tag{2.3}$$

[2] Abbiamo usato le virgolette per racchiudere la parola "operazione" perchè in realtà non si tratta di un'operazione nel vero senso del termine.

sappiamo che essa non ha soluzioni se $a > b$. Questo rende l'insieme dei naturali insoddisfacente per molti scopi. Si introduce allora l'insieme degli interi

$$\mathbb{Z} = \{\, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \,\}$$

in cui un'equazione del tipo (2.3) ha sempre soluzione. In aggiunta alle proprietà già viste per i naturali, in questo insieme vale anche la proprietà seguente:

– esistenza dell'*opposto* per la somma: $\forall x \in \mathbb{Z}$ esiste $-x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + (-x) = 0$.

In questo insieme si può considerare una divisione con resto come già visto per i naturali (vedi il teorema 2.1). L'unica modifica da fare è che dei due numeri a e b che compaiono nell'enunciato, a può ora essere un intero qualunque; tutto il resto rimane identico.

2.2 I numeri razionali

Purtroppo anche dopo l'introduzione degli interi rimangono equazioni di primo grado non risolubili. Basta considerare l'equazione

$$ax = b\,, \ \text{con } a \neq 0 \tag{2.4}$$

che, come sappiamo, ha soluzioni solo se b è un multiplo di a. La risoluzione di questo tipo di problemi si ha con l'introduzione dei numeri razionali. Senza pretendere di entrare nei dettagli dell'introduzione di questo insieme numerico, ricordiamo solo che si tratta dell'insieme delle frazioni con numeratore intero e denominatore intero non nullo (o anche semplicemente denominatore naturale maggiore di 0), insieme in cui si sia introdotta una relazione che renda identiche, dal punto di vista del numero che rappresentano, due frazioni equivalenti nel senso elementare del termine:

$$^{p}/_{q} \text{ è equivalente a } {}^{r}/_{s} \text{ se } ps = rq.$$

L'insieme dei numeri razionali così introdotto ha le stesse proprietà già viste per l'insieme degli interi, con l'aggiunta della seguente:

– esistenza dell'*inverso* del prodotto (reciproco): $\forall r \in \mathbb{Q}$, con $r \neq 0$, esiste $r^{-1} \in \mathbb{Q}$ tale che $r \cdot r^{-1} = 1$.

L'insieme degli interi può essere pensato come un sottoinsieme dei razionali, precisamente quello costituito dalle frazioni con denominatore 1 (e naturalmente quelle ad esse euqivalenti); nello stesso modo l'insieme dei naturali può essere pensato come un sottoinsieme degli interi (e quindi in ultima analisi dei razionali) e precisamente il sottoinsieme degli interi non negativi. Si può dunque scrivere

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Per completezza ricordiamo che i numeri razionali, oltreché come frazioni, possono essere rappresentati come allineamenti decimali, con le seguenti proprietà:

– le frazioni che hanno al denominatore un naturale che è un prodotto di sole potenze del 2 e del 5 sono rappresentabili con decimali finiti (che si possono anche considerare periodici con periodo 0;
– le frazioni che hanno al denominatore un naturale che, scomposto in fattori primi, non contiene né il 2 né il 5 sono rappresentabili con decimali periodici semplici (cioè senza antiperiodo);

– le frazioni che hanno al denominatore un naturale che, scomposto in fattori primi, contiene sia il 2 o il 5 che altri fattori, sono rappresentabili con decimali periodici misti.

Segnaliamo infine che il procedimento della divisione decimale, che consente di ottenere la rappresentazione come allineamento decimale di un qualunque numero razionale, non può *mai* dare luogo ad un allineamento decimale con periodo 9. Una trattazione rigorosa degli allineamenti decimali porta a concludere che gli allineamenti decimali con periodo 9 (che *non* si possono ottenere dalla divisione) devono in ogni caso essere considerati equivalenti agli allineamenti decimali finiti, secondo la regola che si può ricavare facilmente dal seguente esempio:

$$3,286\overline{9} = 3,287\,.$$

Noi troveremo una giustificazione di questo fatto studiando le serie numeriche.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ è possibile risolvere una qualunque equazione lineare (cioè di primo grado) con coefficienti razionali: $ax + b = c$. Purtroppo anche questo insieme è insufficiente per servire alle esigenze dell'Analisi matematica e della Geometria Analitica e ne elenchiamo di seguito i motivi essenziali.

1. Non esiste in $\mathbb{Q}$ la radice quadrata (e più in generale n-esima) di un numero che non sia un quadrato perfetto (e più in generale che non sia una potenza n-esima): questo pregiudica la risoluzione di semplici equazioni di grado superiore al primo come $x^2 = 2$.
2. Fissato un segmento come unità di misura delle lunghezze, esistono segmenti che non hanno come misura rispetto a esso alcun numero razionale, come la diagonale del quadrato se il lato è assunto come unità di misura: questo pregiudica la costruzione di una soddisfacente teoria della misura.
3. Esistono sottoinsiemi superiormente limitati di $\mathbb{Q}$ che non hanno un estremo superiore (si veda un esempio a pagina 10): questo pregiudica, come vedremo, la possibilità di costruire una soddisfacente teoria dei limiti.

Verifichiamo esplicitamente il primo dei fatti sopra citati, cioè proviamo che non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Se infatti un tale x esistesse, dovrebbe essere

$$x = \frac{m}{n}\,,$$

con m ed n opportuni numeri interi positivi. Da qui seguirebbe che $2n^2 = m^2$. Se scomponiamo m ed n in fattori primi ed eleviamo al quadrato queste scomposizioni, troviamo che in entrambe il numero dei fattori uguali a 2 sarebbe pari (proprio a conseguenza dell'elevazione al quadrato), non essendo esclusa la possibilità che il fattore 2 non compaia mai. Ma allora nell'uguaglianza $2n^2 = m^2$ il fattore 2 comparirebbe a sinistra un numero dispari di volte e a destra un numero pari di volte, il che è impossibile, vista l'unicità della scomposizione in fattori primi di un qualunque naturale.

Questi fatti costringono ad estendere l'insieme dei numeri razionali, cioè a costruire un nuovo insieme numerico che abbia $\mathbb{Q}$ come sottoinsieme e nel quale queste difficoltà siano superate: questo insieme è l'*insieme dei numeri reali*, che denotiamo con $\mathbb{R}$.

Purtroppo l'ampliamento da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ non è così semplice come è stato (nella sostanza) quello da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ e successivamente a $\mathbb{Q}$, e ce ne occuperemo con un po' più di dettaglio, anche se saremo costretti a sorvolare su molte questioni.

2.3 I numeri reali

L'introduzione dei numeri reali si può fare in diversi modi. Seguiremo la strada cosiddetta della presentazione assiomatica, che è basata sul seguente teorema di isoformismo, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

Teorema 2.4. *Esiste ed è unico (a meno di isomorfismi)*[3] *un insieme* $\mathbb{R}$ *verificante gli assiomi* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ *seguenti.*

L'esistenza si prova "costruendo" operativamente $\mathbb{R}$ (in un modo che sarà indicato sommariamente nel seguito), l'unicità richiede un'apposita dimostrazione.

Veniamo ora alla annunciata costruzione assiomatica: stabiliremo alcune proprietà (assiomi) di cui l'insieme $\mathbb{R}$ deve godere, elencandole in 4 gruppi.

2.3.1 Gli assiomi dei reali

Assioma $\mathcal{A}_1$ (somma)

È definita in $\mathbb{R}$ un'operazione, detta *addizione* e denominata $+$, che gode delle seguenti proprietà:

1. **commutativa**: $a + b = b + a$ per ogni a, $b \in \mathbb{R}$;
2. **associativa**: $(a + b) + c = a + (b + c)$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{R}$;
3. **esistenza dell'elemento neutro**: esiste un elemento, denotato con 0 e detto *zero*, tale che $a + 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (e si dimostra che è unico);
4. **esistenza dell'opposto**: per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con $-a$ e detto *opposto* di a, tale che $a + (-a) = 0$ (anche per questo si dimostra che è unico).

Queste proprietà sono godute anche dall'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi e dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali; le prime 3 anche dall'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali. Un qualunque insieme su cui sia definita un'operazione che verifica questo assioma si chiama un *gruppo commutativo*.

Assioma $\mathcal{A}_2$ (prodotto)

È definita in $\mathbb{R}$ un'operazione, detta *moltiplicazione* e denominata $\cdot$, che gode delle seguenti proprietà:

1. **commutativa**: $a \cdot b = b \cdot a$ per ogni a, $b \in \mathbb{R}$;
2. **associativa**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{R}$;
3. **esistenza dell'elemento neutro**: esiste un elemento, denotato con 1 e detto *unità*, tale che $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ (e si dimostra che è unico);
4. **esistenza del reciproco**: per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con a^{-1} e detto *reciproco* od *opposto* di a, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ (anche per questo si dimostra che è unico);
5. **distribuitiva**: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{R}$.

[3] Non possiamo qui spiegare esattamente il significato dell'espressione "a meno di isomorfismi". Ci limitiamo a fornire una spiegazione intuitiva usando un esempio preso da un contesto noto. L'insieme dei numeri razionali può essere introdotto sia come insieme delle frazioni, con un'opportuna relazione di equivalenza, sia come insieme degli allineamenti decimali finiti o periodici: si tratta di due insiemi diversi, ma "isomorfi" nel senso che possono essere messi in corrispondenza biunivoca e che le operazioni possono essere eseguite indifferentemente su uno o sull'altro. Si tratta, come si può ben comprendere, di una situazione molto comune.

Le proprietà degli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ sono godute anche dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali; per quello degli interi manca la 4ª dell'assioma $\mathcal{A}_2$. Un qualunque insieme su cui siano definite due operazioni verificanti gli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ si chiama un *corpo commutativo* o anche un *campo*.

Come è a tutti noto, questa operazione si indica anche per semplice giustapposizione dei due simboli a e b, quando non sono possibili equivoci: ab sta al posto di $a \cdot b$. Si può usare anche, particolarmente nel caso di elementi di $\mathbb{R}$ indicati con cifre, il simbolo $\times$: in genere si preferisce la scrittura 2×3 alla $2 \cdot 3$, mentre è assolutamente da evitare la $2\,3$ che può portare a ovvi equivoci.

Assioma $\mathcal{A}_3$ (ordinamento)

È definita in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine totale, indicata con il simbolo $\leq$ che si legge "minore o uguale", che gode delle seguenti proprietà:

1. **compatibilità con la somma**: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{R}$;
2. **compatibilità con il prodotto**: $(a \leq b \wedge 0 \leq c) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ per ogni a, b, $c \in \mathbb{R}$ (con $0 \leq c$).

Un insieme verificante gli assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ si dice un *corpo commutativo ordinato*. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con le usuali operazioni e l'usuale ordine è un esempio di corpo commutativo ordinato.

La scrittura $a \leq b$ si legge anche "b è maggiore o uguale ad a" e si può scrivere anche $b \geq a$. Come già osservato (nella pagina 8) la scrittura $a < b$ significa che $a \leq b \wedge a \neq b$ e si legge "a è strettamente minore di b".

Tutte queste proprietà, come già osservato, sono godute anche dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Il vero assioma che introduce una caratteristica innovativa dell'insieme dei reali è l'assioma di completezza che segue.

Assioma $\mathcal{A}_4$ (completezza)

Per ogni coppia di sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b, \text{ per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B,$$

cioè che sia maggiore o uguale di tutti gli elementi di A e minore o uguale di tutti gli elementi di B. L'elemento c si chiama *elemento separatore* ed è unico nel caso che $A \cup B = \mathbb{R}$.

Per provare che $\mathbb{Q}$ non gode di quest'ultima proprietà è sufficiente considerare i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ così definiti:

$$A = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \,\} \cup \left\{\, x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x > 0 \wedge x^2 < 2 \,\right\},$$
$$B = \left\{\, x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x \geq 0 \wedge x^2 \geq 2 \,\right\}.$$

L'elemento separatore di questi due insiemi non può esistere perchè altrimenti dovrebbe essere tale che $x^2 = 2$ e abbiamo già provato (nella pagina 22) che questa equazione non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Una costruzione di $\mathbb{R}$

Come già accennato, l'esistenza di un insieme che goda delle proprietà espresse negli assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ si può provare operativamente costruendone uno che le verifichi.

Ci sono diversi modi per farlo e vogliamo qui soltanto fare un brevissimo accenno a uno dei possibili, precisamente quello delle *sezioni di Dedekind*.

Definizione 2.5. *Una sezione di* $\mathbb{Q}$ *è un sottoinsieme* A *di* $\mathbb{Q}$ *tale che*

1. $A \neq \emptyset \wedge A \neq \mathbb{Q}$;
2. *se* $s \in A$, *ogni* $r < s$ *appartiene ancora ad* A;
3. A *non ha massimo.*

Ebbene, se si considera l'insieme di tutte le sezioni di $\mathbb{Q}$, è possibile definire in esso due operazioni e una relazione d'ordine in modo da verificare tutti i quattro assiomi introdotti: detto in altri termini l'insieme di tutte le sezioni di $\mathbb{Q}$ è una delle possibili implementazioni dell'insieme $\mathbb{R}$. Il teorema di isomorfismo ci assicura che se costruiamo un altro insieme che verifichi i quattro assiomi esso sarà "isomorfo" a quello costruito con le sezioni, cioè, per quanto ci riguarda, sarà lo stesso insieme.

È evidente che non è affatto agevole maneggiare l'insieme delle sezioni di $\mathbb{Q}$, e questo è una riprova del fatto che l'ampliamento numerico da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ è decisamente più complesso che non i precedenti ampliamenti.

Solo a titolo d'esempio mostriamo come si potrebbe definire, nell'insieme delle sezioni di $\mathbb{Q}$, l'operazione di addizione. Date due sezioni A e B di $\mathbb{Q}$, la sezione somma è quella definita da

$$C = A + B = \{\, a + b \mid a \in A \wedge b \in B \,\}\,.$$

Naturalmente a questo punto bisognerebbe provare che valgono tutte le proprietà della somma indicate nell'assioma $\mathcal{A}_1$ ...

Per le applicazioni è assai importante il fatto che i numeri reali possono essere rappresentati come allineamenti decimali, questa volta anche di tipo qualunque, cioè finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici. Sarebbe anche possibile introdurre operativamente i numeri reali come allineamenti decimali anziché con le sezioni come qui accennato, ma le difficoltà tecniche sarebbero ancora maggiori: si pensi per esempio alla difficoltà che nascerebbero nel definire una somma (o peggio ancora un prodotto) di due allineamenti decimali illimitati.

L'insieme $\mathbb{R}$, come più volte accennato, è da intendersi come un ampliamento di $\mathbb{Q}$: questo significa che possiamo ritenere l'insieme $\mathbb{Q}$ stesso come un sottoinsieme di $\mathbb{R}$[(4)]. L'insieme dei numeri reali non razionali, cioè l'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ prende il nome di insieme degli *irrazionali*: sulla base di quanto detto $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Non esiste una notazione specifica universalmente adottata per l'insieme degli irrazionali e il motivo è da ricercarsi nel fatto che l'insieme degli irrazionali non gode di nessuna delle proprietà richieste a un insieme numerico; per esempio la somma o il prodotto di irrazionali può tranquillamente essere razionale.

2.3.2 Altre proprietà di $\mathbb{R}$

Dagli assiomi si deducono ulteriori proprietà dell'insieme dei numeri reali. Alcune di queste le abbiamo già citate enunciando gli assiomi, per esempio l'unicità di 0 e 1. Altre proprietà comprendono la definizione di sottrazione, le leggi di semplificazione della somma

[4] Per i più pignoli segnaliamo che, in realtà, dovremmo dire che esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ "isomorfo" a $\mathbb{Q}$, ma siccome abbiamo già deciso altre volte di identificare insiemi tra di loro isomorfi, diciamo semplicemente che $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

e del prodotto, la legge di annullamento del prodotto, ecc. Segnaliamo, senza dimostrarlo, il seguente teorema.

Teorema 2.6 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè dati due numeri reali a e b qualunque, con $a < b$, esiste sempre un numero razionale r che sia compreso tra a e b, cioè tale che $a < r < b$.*

Si tratta di una proprietà cruciale nelle applicazioni. Per valutarne l'importanza si pensi, per esempio, alle applicazioni all'informatica: i numeri reali implementati nei computer sono in realtà un sottoinsieme dell'insieme dei razionali che, appunto in base alla proprietà di densità sopra considerata, possono approssimare "quanto serve" i "veri numeri reali".

Vale anche il teorema analogo del 2.6 per gli irrazionali.

Teorema 2.7 (Densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè dati due numeri reali a e b qualunque, con $a < b$, esiste sempre un numero irrazionale j che sia compreso tra a e b, cioè tale che $a < j < b$.*

Questi due teoremi possono essere enunciati dicendo che un qualsiasi intervallo aperto $]a, b[$ di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.

2.4 Esistenza dell'estremo superiore nei reali

Conseguenza quasi immediata e straordinariamente importante dell'assioma di completezza è il teorema di esistenza e unicità dell'estremo superiore di un qualsiasi sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.8. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato. Allora esiste ed è unico l'estremo superiore di A.*

Dimostrazione. L'unicità del sup è garantita dal fatto che il sup, se c'è, è il minimo di un insieme (quello dei maggioranti) e di minimi un insieme ne può avere al massimo uno. Consideriamo allora l'insieme dei maggioranti di A (non vuoto perché A è superiormente limitato):

$$M = \{\, b \in \mathbb{R} \mid b \text{ è un maggiorante di } A \,\}.$$

Gli insiemi A ed M verificano le condizioni dell'assioma di completezza, e quindi esiste un numero reale c tale che

$$a \leq c \leq b, \text{ per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in M.$$

Ma allora c è un maggiorante di A (perché $c \geq a$ per ogni $a \in A$) ed è il minimo dei maggioranti (perché $c \leq b$ per ogni $b \in M$), dunque c è l'estremo superiore di A. □

Analogo discorso vale ovviamente per l'estremo inferiore degli insiemi non vuoti e inferiormente limitati.

Se un insieme A non è superiormente limitato si pone $\sup(A) = +\infty$, se non è inferiormente limitato si pone $\inf(A) = -\infty$. Con queste definizioni possiamo dire che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ ha sia estremo superiore che inferiore[5].

[5] Alcuni, per ragioni di completezza, pongono anche, per definizione $\sup(\emptyset) = -\infty$ e $\inf(\emptyset) = +\infty$ Queste definizioni sono giustificate dal fatto che se $A = \emptyset$ ogni reale è un maggiorante di A (e quindi il "più piccolo" dei maggioranti è proprio $-\infty$. Analogo discorso per i minoranti.

2.4.1 Proprietà caratteristiche di sup e inf

Valgono i seguenti due teoremi che caratterizzano l'estremo superiore e inferiore di un insieme.

Teorema 2.9. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, superiormente limitato. Allora* $\sup(A) = L$ *se e solo se*

1. $\forall a \in A,\ a \le L$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ *esiste* $a \in A$ *tale che* $a > L - \varepsilon$.

Dimostrazione. La prima proprietà traduce in formule il fatto che L è un maggiorante. Vediamo la seconda proprietà. Basta osservare che essa equivale a dire che L è il più piccolo dei maggioranti, ovvero che non esistono maggioranti più piccoli di L. Se infatti L è il più piccolo dei maggioranti, allora $L - \varepsilon$ non è un maggiorante e dunque deve esistere $a \in A$ tale che $a > L - \varepsilon$. Viceversa se $L \ge a$ per ogni $a \in a$ ed esiste $a \in A$ tale che $a > L - \varepsilon$, allora nessun numero minore di L può essere un maggiorante, ovvero L è il più piccolo dei maggioranti. □

Teorema 2.10. *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, inferiormente limitato. Allora* $\inf(A) = l$ *se e solo se*

1. $\forall a \in A,\ l \le a$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ *esiste* $a \in A$ *tale che* $a < l + \varepsilon$.

Dimostrazione. Analoga a quella del teorema precedente. □

La radice n-esima aritmetica

L'esistenza dell'estremo superiore consente di introdurre la radice n-esima aritmetica di un qualunque reale positivo. Si può ragionare nel modo di seguito descritto.

Dato un numero reale $a \ge 0$ e un naturale $n > 0$ si consideri l'insieme

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \vee (x > 0 \wedge x^n \le a \,\}\ .$$

Ebbene A, come ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato, ha un estremo superiore e questo estremo superiore si chiama *radice n-esima aritmetica di a* e si indica con

$$\sqrt[n]{a}.$$

Si prova poi, ma rinunciamo a farlo, che questo numero è l'unica soluzione positiva dell'equazione $x^n = a$.

2.5 Cenno alla non numerabilità di $\mathbb{R}$

Una delle caratteristiche degli insiemi che interessano nelle applicazioni è la possibilità di valutare "quanti elementi contengono". Si dà precisamente la seguente definizione.

Definizione 2.11. *Due insiemi A e B hanno la stessa* cardinalità *se esiste una corrispondenza biunivoca tra di loro.*

In questo contesto giocano un ruolo molto importante i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ del tipo $A_n = \{\, 1,\, 2,\, \dots,\, n \,\}$.

Definizione 2.12. *Un insieme A che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con uno degli insiemi A_n si dice* finito *e precisamente che* contiene n elementi. *Un insieme che non possa essere messo in corrispondenza biunivoca con nessun insieme del tipo A_n si dice* infinito.

Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sono tutti infiniti.

Definizione 2.13. *Un insieme infinito A che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ si dice* numerabile. *Un insieme infinito B che non possa essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ si dice* non numerabile.

È facile provare, e lo si lascia per esercizio, che l'insieme dei numeri naturali pari è numerabile. Analogamente per l'insieme dei numeri interi. Un risultato molto più sorprendente è il seguente.

Teorema 2.14. *L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è numerabile.*

Dimostrazione. Stabiliremo solo la numerabilità dell'insieme $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$, lasciando al lettore di concludere per quanto riguarda la numerabilità di $\mathbb{Q}$. Disponiamo allo scopo $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ secondo il seguente schema

$$
\begin{array}{llllllll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots & \cdots & (1,n) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & & \cdots(2,n-1)\cdots & & \\
(3,1) & (3,2) & \cdots & & & & & \\
(4,1) & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
\cdots(n-1,2)\cdots & & & & & & & \\
(n,1) & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

Per "*numerare*" $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ basta allora attuare la corrispondenza seguente, direttamente suggerita dallo schema su riportato,

$$
\begin{aligned}
1 &\to (1,1)\\
2 &\to (1,2)\\
3 &\to (2,1)\\
4 &\to (1,3)\\
5 &\to (2,2)\\
6 &\to (3,1)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 7 &\to (1,4) \\ 8 &\to (2,3) \\ &\text{ecc}\ldots \end{aligned}$$

□

Invece l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile, come risulta dal teorema che segue.

Teorema 2.15. *L'insieme dei reali non è numerabile.*

Dimostrazione. Ci limiteremo a considerare solo i reali x con $0 < x < 1$ e supporremo nota l'esistenza della rappresentazione decimale (eventualmente illimitata e non periodica) dei reali. Se questi reali fossero numerabili, dovrebbe esistere una corrispondenza biunivoca tra di essi e i naturali, e si potrebbe costruire una tabella che visualizzi la corrispondenza, come nell'esempio che segue.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.236789\ldots \\ x_2 &= 0.018993\ldots \\ x_3 &= 0.979234\ldots \\ x_4 &= 0.869123\ldots \end{aligned}$$

Consideriamo ora un allineamento decimale che abbia al primo posto dopo la virgola una cifra diversa da quella di x_1, al secondo posto una cifra diversa da quella di x_2, e così via (per esempio possiamo prendere sempre la cifra successiva, intendendo che la successiva di 9 sia 0):

$$x = 0.3202\ldots$$

È chiaro che questo allineamento decimale non corrisponde ad alcun numero della tabella precedente e che dunque quella tabella non può contenere, come avevamo supposto, tutti i reali compresi tra 0 e 1. □

Senza poter entrare ulteriormente nei dettagli esprimeremo questo fatto dicendo che *la cardinalità dei reali è maggiore di quella dei naturali.*

2.6 Elementi di topologia sulla retta reale

2.6.1 Intervalli

Definizione 2.16. *Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano* intervalli*, con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

$]a,b[$	$\{\, x \mid a < x < b \,\}$	*intervallo limitato* aperto
$[a,b]$	$\{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}$	*intervallo limitato* chiuso
$[a,b[$	$\{\, x \mid a \leq x < b \,\}$	*intervallo limitato* chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a,b]$	$\{\, x \mid a < x \leq b \,\}$	*intervallo limitato* aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a,+\infty[$	$\{\, x \mid x > a \,\}$	*intervallo superiormente illimitato* aperto
$[a,+\infty[$	$\{\, x \mid x \geq a \,\}$	*intervallo superiormente illimitato* chiuso
$]-\infty,a[$	$\{\, x \mid x < a \,\}$	*intervallo inferiormente illimitato* aperto
$]-\infty,a]$	$\{\, x \mid x \leq a \,\}$	*intervallo inferiormente illimitato* chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo*. Gli intervalli limitati si chiamano anche* segmenti*, quelli illimitati anche* semirette*.*

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due: lo si provi per esercizio.

Anche per l'intero insieme $\mathbb{R}$ si usa la scrittura $]-\infty,+\infty[$ e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che $a=b$ l'intervallo chiuso $[a,b]$ si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo.*

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0=\frac{a+b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta=b-x_0=x_0-a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza.* L'intervallo (aperto) di centro x_0 e raggio δ è allora

$$]x_0-\delta\,,\,x_0+\delta[\,.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

Avremo bisogno nel seguito del seguente Teorema di Cantor, che è un'altra conseguenza dell'assiome di continuità.

Teorema 2.17 (Teorema di Cantor)**.** *Considerata una successione $(I_n)_n$ di intervalli chiusi e limitati "inscatolati", ovvero tali che $I_{n+1}\subseteq I_n$, esiste almeno un numero reale c comune a tutti gli intervalli. Se poi l'ampiezza degli intervalli diventa arbitrariamente piccola al crescere di n allora tale numero c è unico.*

Dimostrazione. Consideriamo gli insiemi A e B contenenti, rispettivamente, la successione di tutti gli estremi sinistri e destri degli intervalli dati. È immediato che si tratta di due insiemi che verificano le condizioni richieste dall'assioma di continuità e che quindi esiste almeno un elemento di separazione c che, necessariamente, appartiene a tutti gli intervalli per le proprietà dell'elemento di separazione. Se poi l'ampiezza degli intervalli diventa arbitrariamente piccola, di tali numeri c ce ne deve essere solo uno, perché se ce ne fossero due, c_1 e c_2, anche l'intero intervallo $[c_1,c_2]$ dovrebbe essere comune a tutti, contro l'ipotesi che l'ampiezza diventi arbitrariamente piccola. □

Notiamo che è indispensabile, per la validità del teorema di Cantor, che gli intervalli siano chiusi. Se si considerano gli intervalli

$$I_n=\left]0,\frac{1}{n}\right]\ ,$$

la loro intersezione è vuota. Parimenti è indispensabile che gli intervalli siano limitati. Se si considerano gli intervalli $[n,+\infty[$, la loro intersezione è ancora vuota.

2.6.2 Intorni

Definizione 2.18. *Dato un punto*[6] $x_0 \in \mathbb{R}$ *diremo* intorno di x_0 *un qualunque intervallo aperto* $]a, b[$ *che contenga il punto stesso*[7]. *In particolare chiameremo* intorno circolare di centro x_0 e raggio δ *l'intervallo* $]x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta[$.

Definizione 2.19. *Nelle stesse ipotesi della definizione 2.18, si dice* intorno sinistro *di* x_0 *un intervallo del tipo* $]x_0 - \delta, x_0]$*;* intorno destro *un intervallo del tipo* $[x_0, x_0 + \delta[$.

Definizione 2.20. *Si dice* intorno di $+\infty$ *ogni semiretta aperta superiormente illimitata,* intorno di $-\infty$ *ogni semiretta aperta inferiormente illimitata.*

Esempi.

- Un intervallo aperto è un intorno di ogni suo punto.
- Un intervallo $[a, b]$ è intorno di ogni suo punto interno, è intorno destro di a, intorno sinistro di b.

Il concetto di intorno consente di dare un significato preciso all'idea di *vicinanza*: dato un punto x_0 e considerato un suo intorno I_{x_0}, i punti di I_{x_0} potranno essere considerati "vicini" a x_0, secondo la misura stabilita da I_{x_0} stesso; cambiando intorno, la qualifica di "vicino" può cambiare.

2.6.3 Insiemi aperti. Punti di accumulazione

Nel seguito, salvo esplicito avviso contrario, tutti gli insiemi considerati saranno sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 2.21. *Dato un insieme A, un punto x_0 si dice* interno *ad A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A. Un punto x_0 si dice* esterno *ad A se è interno al complementare di A (rispetto a $\mathbb{R}$). L'insieme dei punti interni a un insieme A si indica con $\mathring{A}$ e si chiama l'interno di A.*

È ovvio che per un intervallo i punti diversi dagli estremi sono interni all'intervallo stesso, in accordo con una definizione che abbiamo già dato a fronte, e di cui questa può essere considerata una generalizzazione.

Non si confonda il concetto di punto interno con quello di appartenenza: gli estremi di un intervallo chiuso appartengono all'intervallo ma non sono interni allo stesso. È però ovvio che un punto interno a un insieme A appartiene ad A, mentre un punto esterno non gli appartiene.

Esempi.

- I punti di un'unione qualunque di intervalli aperti sono tutti interni all'unione degli intervalli stessi.
- L'insieme $\mathbb{Q}$ non ha punti interni.
- L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non ha punti interni.

[6] La naturale corrispondenza biunivoca esistente tra l'insieme dei reali e una retta su cui si sia introdotto un sistema di coordinate cartesiane consente di chiamare *punti* i numeri reali.

[7] Una definizione più generale, e più soddisfacente sotto certi aspetti, è quella che chiama intorno di un punto x_0 un insieme qualunque che contenga un intervallo aperto del tipo da noi considerato. In questo corso non avremo però bisogno di usare questa definizione più generale di intorno.

Definizione 2.22. *Dato un insieme A, un punto x_0 che non sia né interno né esterno ad A si dice di* frontiera *per A. L'insieme dei punti di frontiera per A si indica con $\mathcal{F}(A)$ e si chiama la* frontiera *di A.*

Una semplice rilettura della definizione permette di concludere agevolmente con il teorema seguente che caratterizza i punti di frontiera.

Teorema 2.23. *Un punto x_0 è di frontiera per un insieme A se e solo se ogni intorno di x_0 contiene sia punti di A che punti del complementare.*

Immediata conseguenza di questo teorema è che un insieme e il suo complementare hanno la stessa frontiera.

Si noti che un punto di frontiera per A può appartenere oppure no all'insieme A.

Esempi.

- Un intervallo di qualunque tipo ha per frontiera l'insieme degli eventuali estremi.
- L'insieme $\mathbb{Q}$ ha per frontiera tutto $\mathbb{R}$; analogo per $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- L'insieme
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n > 0 \right\}$$
ha per frontiera l'insieme $A \cup \{0\}$.
- Tutto $\mathbb{R}$ ha frontiera vuota.

Definizione 2.24. *Un insieme A si dice* aperto *se $A = \mathring{A}$, ovvero se è formato solo da punti interni*

È immediato che un intervallo aperto è un insieme aperto, anzi la definizione che abbiamo dato costituisce in un certo senso la generalizzazione del concetto di intervallo aperto a insiemi più complessi.

Esempi.

- L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ è un insieme aperto.
- L'insieme unione di due intervalli aperti qualunque è un insieme aperto.
- L'insieme intersezione di due intervalli aperti è un insieme aperto, mentre l'insieme intersezione di infiniti intervalli aperti può non essere un insieme aperto. Un esempio è fornito dagli intervalli
$$I_n = \left] -\frac{1}{n}\,, \frac{1}{n} \right[\,, \quad n \in \mathbb{N},\, n > 0\,,$$
la cui intersezione è costituita solo da $\{0\}$.

Definizione 2.25. *Un insieme A si dice* chiuso *se il suo complementare è aperto.*

È anche qui immediato che un intervallo chiuso è un insieme chiuso.

Un generico insieme A di solito non è né aperto né chiuso.

Esempi.

- Un intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra non è né aperto né chiuso.
- L'insieme $\mathbb{Q}$ non è nè aperto né chiuso.
- L'insieme $\mathbb{N}$ è chiuso.

– L'insieme
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n > 0 \right\}$$
non è né aperto né chiuso.

Definizione 2.26. *Un punto x_0 si dice di* accumulazione *per un insieme A se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A.*

Esempi.

– Se A è un intervallo di qualunque tipo, sono di accumulazione per A i suoi punti con l'aggiunta degli eventuali estremi.
– Se A è l'insieme, già più volte considerato,
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n > 0 \right\} ,$$
il punto 0 è l'unico punto di accumulazione per A.
– L'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ non ha punti di accumulazione.
– Se si considera l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, ogni numero reale è di accumulazione per $\mathbb{Q}$.

Si noti che un punto di accumulazione per A può appartenere oppure o no ad A stesso. Come utile esercizio su questi concetti si possono dimostrare i seguenti teoremi.

Teorema 2.27. *Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi eventuali punti di accumulazione.*

Teorema 2.28. *Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi eventuali punti di frontiera.*

Un altro teorema che può essere dimostrato come utile esercizio per approfondire il concetto di punto di accumulazione è il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Teorema 2.29 (di Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni insieme A infinito e limitato ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Sia I un intervallo che contenga A (I esiste di certo perché A è limitato) e consideriamone il punto medio: esso divide I in due intervalli in almeno uno dei quali cadono infiniti punti di A. Procedendo nello stesso modo su questo secondo intervallo ne costruiremo un terzo e di seguito una successione di intervalli ciascuno contenuto nel precedente e con ampiezza che diventa arbitrariamente piccola. Esiste dunque un unico punto c comune a tutti. Ebbene c è di accumulazione per A: infatti un intorno di c contiene almeno uno degli intervalli della successione, e quindi infiniti punti di A. Al lettore il compito di precisare i dettagli. □

Definizione 2.30. *Sia A un insieme e x_0 un suo punto. Se x_0 non è di accumulazione per A, si dice* isolato *in A.*

Esempi.

– Nell'insieme $\mathbb{N}$ tutti i i punti sono isolati.
– Un intervallo non ha punti isolati.
– L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali non ha punti isolati.
– L'insieme A sopra considerato
$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n > 0 \right\} ,$$
è costituito solo da punti isolati.

2.7 Osservazioni e approfondimenti

2.7.1 Procedimento diagonale di Cantor e proprietà dell'ordine

Come è noto (vedi il teorema 2.14 nella pagina 28) l'insieme delle frazioni con numeratore e denominatore positivo può essere facilmente "numerato" con il procedimento diagonale di Cantor, di cui riportiamo qui solo la visualizzazione grafica.

$$
\begin{array}{llllllll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots & \cdots & (1,n) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & & \cdots(2,n-1)\cdots & & \\
(3,1) & (3,2) & \cdots & & & & & \\
(4,1) & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
\cdots(n-1,2)\cdots & & & & & & & \\
(n,1) & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

Se cancelliamo dalla tabella tutte le frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale, avremo una "numerazione" dei razionali positivi, i quali dunque potranno essere pensati come un insieme ordinato con un ordine, che possiamo indicare con $\preceq$. Precisamente i primi elementi di $\mathbb{Q}^+$ con questo ordine sono:

$$1 \prec \frac{1}{2} \prec 2 \prec \frac{1}{3} \prec 3 \prec \frac{1}{4} \prec \frac{2}{3} \prec \frac{3}{2} \prec 4 \prec \frac{1}{5} \prec 5 \prec \frac{2}{5} \prec \frac{3}{4} \prec \frac{4}{3} \prec \frac{5}{2} \prec \frac{3}{5} \prec \frac{5}{3} \prec \frac{4}{5} \prec \frac{5}{4} \prec \dots$$

Osserviamo che si tratta ancora di un ordine totale, ma con caratteristiche completamente diverse dall'ordine "naturale" di $\mathbb{Q}^+$. In particolare $\mathbb{Q}^+$ con questo ordine non è denso (esattamente come succede per i naturali) e ogni suo sottoinsieme limitato ha sia massimo che minimo (ancora esattamente come succede per i naturali).

È da segnalare però il fatto che questo ordine non è compatibile con la somma. Infatti si ha, per esempio

$$2 \prec \frac{1}{4},$$

mentre

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \succ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

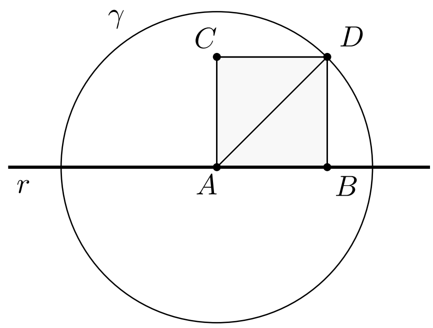
Si tratta dunque di un tipo di ordine, pur perfettamente legittimo, ma di nessuna utilità pratica.

Questo esempio dovrebbe far capire l'importanza dell'assioma $\mathcal{A}_3$ dei reali in cui si chiede esplicitamente che l'ordine sui reali sia totale e *compatibile* sia con la somma che con il prodotto.

2.7.2 Assioma di completezza e densità

Come più volte segnalato nel testo, l'assioma di completezza gioca un ruolo cruciale tra le proprietà dei reali. Il fatto che l'insieme dei razionali non soddisfi questo assioma è un handicap molto grave. Per valutarne a fondo l'importanza si consideri la costruzione grafica che segue.

Su una retta r si prenda un segmento AB, costituente l'unità di misura e, su di esso, si costruisca il quadrato $ABCD$: se sulla retta r ci sono solo i punti P tali che AP abbia misura razionale rispetto all'unità scelta, il circolo di centro A e passante per D non interseca la retta r stessa in nessun punto. Questo fatto è palesemente insoddisfacente per gli scopi applicativi.



In sostanza possiamo esprimere geometricamente la mancanza di completezza di $\mathbb{Q}$ dicendo che se su una retta piazziamo solo i punti che hanno ascissa razionale, rispetto a un prefissata unità di misura, rimangono sulla retta stessa moltissime "lacune". Tuttavia il fatto che $\mathbb{Q}$ sia denso in $\mathbb{R}$ fa si che queste lacune siano "puntiformi": non ci può essere nessun segmento, per quanto piccolo, della retta in cui non ci sono punti con ascissa razionale. Anche se ingrandiamo con una potentissima lente un piccolo tratto della retta le lacune "non si allargano".

La non completezza di $\mathbb{Q}$ si può anche visualizzare con la costruzione che segue. Nel piano cartesiano segnamo l'insieme di tutti i punti con entrambe le coordinate razionali. Immaginiamo di "piantare", verticalmente al piano, una palizzata (con pali privi di spessore) mettendo un palo su ognuno dei punti segnati. È chiaro che si otterrà una palizzata fittissima e apparentemente impenetrabile. Ebbene se spariamo un proiettile (puntiforme) dall'origine secondo la direzione che forma un angolo di 60° con il semiasse positivo delle x, questo proiettile procederà in linea retta senza incontrare alcun palo! Infatti il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di ogni punto P su cui sono piantati i pali è razionale e questo rapporto fornisce, come è noto, la tangente trigonometrica dell'angolo tra la semiretta OP e il semiasse positivo delle ascisse: se l'angolo è di 60°, però, questa tangente è irrazionale (vale $\sqrt{3}$).

2.8 Esercizi

Esercizio 2.1. *Provare, mediante esempi, che la somma e il prodotto di due numeri irrazionali possono essere razionali.*

Esercizio 2.2. *Dimostrare che* $\sqrt{3}+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.3. *Dimostrare che* $(\sqrt[3]{2})^2 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.4. *Dimostrare che se* a *e* b *sono due razionali positivi tali che* $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, *allora anche* $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.5. *Provare mediante un esempio che se* a *e* b *sono due razionali positivi tali che* $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$ *non è detto che* $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.6. *Dimostrare che* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.7. *Dimostrare che* $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.8. *Dimostrare che*

$$a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}\,.$$

Risoluzione. Se a fosse razionale si dovrebbe avere

$$a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{m}{n}\,,$$

con m ed n che possiamo supporre primi fra di loro. Ma allora

$$3n^2 = 5m^2.$$

Dunque n deve essere divisibile per 5 ed m per 3: $n = 5p$, $m = 3q$. Ne segue

$$3 \cdot 5^2 p^2 = 5 \cdot 3^2 q^2\,,$$

cioè

$$5p^2 = 3q^2\,.$$

Esattamente come prima possiamo concludere che p deve essere divisibile per 3 e q per 5: $p = 3h$, $q = 5k$. Infine abbiamo

$$n = 5p = 5 \cdot 3h, \quad m = 3q = 3 \cdot 5k\,.$$

Questo comporta che m ed n hanno almeno il fattore 15 in comune, contro l'ipotesi che fossero primi tra di loro. □

Esercizio 2.9. *Come è noto, dato un numero reale* x *si chiama* valore assoluto *o* modulo *di* x *il numero* $|x|$ *così definito:*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si verifichino le seguenti proprietà del valore assoluto (a *e* b *sono numeri reali qualunque):*

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0$ *se e solo se* $a = 0$;
- $|a| = |-a|$;
- $|ab| = |a|\,|b|$;
- $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- $||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$;

– $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ $(b > 0)$;
– $|a| > b \Leftrightarrow (a < -b) \vee (a > b)$ $(b > 0$.

Esercizio 2.10. *Del seguente insieme A si trovino i punti di accumulazione e di frontiera; si dica se è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.*

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 2.11. *Si indichi con A l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:*

$$\sqrt{|2x+1|-1} \geq x - 3\,.$$

Si determinino i punti di accumulazione, di frontiera, interni di A; si dica se A è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 2.12. *Si indichi con A l'insieme delle soluzioni della seguente disequazione:*

$$x^3 - x^2 \geq 0\,.$$

Si determinino i punti di accumulazione, di frontiera, interni, isolati di A; si dica se A è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

Esercizio 2.13. *Si dimostri che un punto x_0 è di accumulazione per un insieme A se e solo se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A diverso da x_0 stesso.*

Risoluzione. Se x_0 è di accumulazione per A allora in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A e dunque ne cadrà almeno uno diverso da x_0 stesso.

Supponiamo viceversa che in ogni intorno di x_0 cada almeno un punto di A diverso da x_0 stesso e proviamo che x_0 è di accumulazione per A. Per far questo supponiamo per assurdo che x_0 *non* sia di accumulazione per A: allora esiste almeno un intorno di x_0 nel quale non cade un numero infinito di punti di A, ovvero o non ne cade nessuno, o un numero finito. Che non ne cada nessuno è da escludere perchè, per ipotesi, ne cade almeno uno diverso da x_0; se ne cadesse un numero finito indichiamo con x_1 quello più vicino a x_0, ma diverso da x_0. Indichiamo con x_1' il simmetrico di x_1 rispetto a x_0. Allora nell'intorno $]x_1', x_1[$ (oppure $]x_1, x_1'[$) non cade alcun punto di A diverso da x_0, ma questo è contro l'ipotesi. □

Esercizio 2.14. *Si dica chi è l'insieme dei punti di accumulazione per l'insieme $\mathbb{Q}$. E l'insieme dei punti di frontiera? E l'interno di $\mathbb{Q}$? E l'insieme dei punti esterni?*

3 Alcune funzioni elementari

3.1 Generalità

In questo corso, come già osservato nella pagina 11, saremo prevalentemente interessati allo studio delle proprietà delle funzioni *funzioni reali di variabile reale*, ovvero di funzioni che hanno come dominio un sottoinsieme dell'insieme dei reali e come codominio l'insieme dei reali. La maggior parte delle funzioni saranno inoltre assegnate fornendo un complesso di regole di calcolo che, a partire da un valore di x, restituiscono un valore di $f(x)$. In questi casi, salvo diversa specificazione, sottintenderemo che il dominio sia il massimo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale le regole date sono applicabili: lo chiameremo anche *dominio naturale*. Sempre salvo esplicito avviso del contrario, sottintenderemo che il codominio sia tutto $\mathbb{R}$. Invitiamo anche il lettore a rileggere quanto scritto nella pagina 11 a proposito della notazione utilizzata per le funzioni.

Le funzioni che più ci interesseranno saranno quelle costruite utilizzando regole di calcolo "elementari", in un senso che diventerà via via più chiaro; per ora citiamo le operazioni definite su $\mathbb{R}$, le estrazioni di radice, le funzioni trigonometriche, le funzioni potenza ed esponenziale. Alcune di queste saranno anche considerate con un certo dettaglio nelle pagine che seguono. Tutte queste funzioni saranno dette *elementari*.

Nel seguito del corso studieremo altre regole di calcolo che ci permetteranno di costruire funzioni (che in genere non saranno più chiamate elementari); qui segnaliamo la possibilità di costruire funzioni non elementari utilizzando definizioni cosiddette *composite* o *a tratti*, come nell'esempio che segue.

Esempio. La funzione *signum*, denotata con sgn è definita[1] come segue:

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

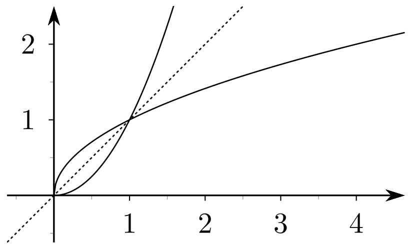
Per le funzioni reali di variabile reale, come già osservato nella pagina 14, il grafico è spesso costituito da uno o più rami di curva, nel senso intuitivo del termine, e lo studio delle sue caratteristiche costituisce uno degli scopi di questo corso.

Per le funzioni biunivoche, e quindi invertibili, la costruzione del grafico dell'inversa di una funzione f è particolarmente semplice. Si tratta sostanzialmente di osservare che la funzione f "mappa" la x nella y, l'inversa fa la mappatura opposta, "rimandando indietro le frecce". Se decidessimo di tracciare il grafico di f con il dominio sull'asse delle ascisse e il codominio su quello delle ordinate (convenzione usuale), e usassimo la convenzione opposta per l'inversa, i grafici sarebbero ovviamente identici. È chiaro che si tratta di una convenzione nom praticabile: poiché l'inversa dell'inversa è la funzione originaria, quale

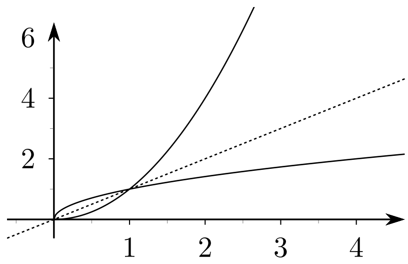
[1] Per completezza segnaliamo che quella qui proposta è la definizione più comune, adottata per esempio in tutti i software di calcolo simbolico, ma non è l'unica possibile; alcuni preferiscono non assegnarle alcun valore in corrispondenza di $x = 0$.

delle due avrebbe il diritto di essere considerata la funzione originaria e quale l'inversa? Se allora vogliamo scegliere una volta per tutte una convenzione (dominio sull'asse delle ascisse e codominio su quello delle ordinate), e se abbiamo tracciato il grafico di una funzione biunivoca, per avere il grafico dell'inversa basterà scambiare l'asse delle ascisse con quello delle ordinate, ovvero fare una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esempio. Sia $f\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, definita da $f(x) = x^2$. Si tratta di una funzione chiaramente biunivoca e quindi invertibile. La sua inversa $f^{-1}\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ è notoriamente definita da $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e i due grafici sono qui di seguito rappresentati.



Si presti però particolare attenzione al fatto che la simmetria è anche una simmetria geometrica, come nel caso appena considerato, se si usa la stessa unità di misura sui due assi, mentre se si usano unità di misura diverse sugli assi questo fatto si perde. Si riveda lo stesso esempio di prima in una situazione di questo tipo.



3.2 Operazioni tra funzioni reali di variabile reale

Se consideriamo l'insieme, $\mathcal{F}$, di tutte le funzioni definite in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R}$, possiamo definire in $\mathcal{F}$ alcune operazioni, come segue.

$$
\begin{array}{rcl}
f+g\colon A \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\
-f\colon A \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & (-f)(x) = -f(x) \\
fg\colon A \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & (fg)(x) = f(x)g(x) \\
{}^1\!/_g\colon A' \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & ({}^1\!/_g)(x) = \dfrac{1}{g(x)} \\
{}^f\!/_g\colon A' \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & ({}^f\!/_g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \\
f\vee g\colon A \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & (f\vee g)(x) = \max(f(x),g(x)) \\
f\wedge g\colon A \to \mathbb{R}, & \text{definita da} & (f\wedge g)(x) = \min(f(x),g(x))
\end{array}
$$

L'insieme A' è il sottoinsieme di A dove $g(x) \neq 0$.

Si noti che in $\mathcal{F}$ non vale la legge di annullamento del prodotto: il prodotto di due funzioni può essere la funzione nulla, anche se nessuna delle due funzioni è nulla. Un esempio è fornito dalle due funzioni seguenti.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3.3 Alcune proprietà delle funzioni elementari

Definizione 3.1. *Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* pari *(a volte anche simmetrica rispetto all'asse y) se*

- *A è simmetrico rispetto all'origine, ovvero se $x \in A$ allora anche $-x \in A$;*
- *$f(-x) = f(x)$.*

Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice dispari *(a volte anche simmetrica rispetto all'origine) se*

- *A è simmetrico rispetto all'origine, ovvero se $x \in A$ allora anche $-x \in A$;*
- *$f(-x) = -f(x)$.*

Esempi.

- La funzione $f(x) = x^2$ è pari.
- La funzione $g(x) = x^3$ è dispari.
- La funzione $h(x) = x/(x^2+1)$ è dispari.
- La funzione $l(x) = x^2 + x - 1$ non è né pari né dispari.

Definizione 3.2. *Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* periodica *di periodo $\tau > 0$ se*

- *da $x \in A$ segue $x \pm \tau \in A$;*
- *$f(x + \tau) = f(x)$.*

Il numero positivo τ si dice un periodo *per f.*

Esempi.

- Ogni funzione costante è periodica e tutti i reali $\tau > 0$ sono periodi.
- Le funzioni sin e cos sono periodiche e i numeri 2π, 4π, ... sono periodi.
- La funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
è periodica e ogni numero razionale r è un periodo (lo si provi per esercizio, ricordando che la somma tra due razionali è razionale, mentre la somma tra un irrazionale e un razionale è irrazionale).

È immediato che se τ è un periodo anche 2τ, 3τ, ... sono periodi. Infatti intanto

$$f(x + 2\tau) = f([x + \tau] + \tau) = f(x + \tau) = f(x);$$

poi se $f(x + (n-1)\tau) = f(x)$, allora

$$f(x + n\tau) = f([x + (n-1)\tau] + \tau) = f(x + (n-1)\tau) = f(x)\,,$$

e questo permette di concludere per induzione. Dunque non esiste un massimo periodo.

Alcune funzioni periodiche hanno un *minimo periodo* (come le funzioni trigonometriche), altre no, come le funzioni costanti e la funzione del terzo esempio di sopra. Di solito quando si considerano funzioni periodiche con minimo periodo, parlando di periodo ci si riferisce sempre al minimo periodo.

Definizione 3.3. *Una funzione* $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice*

- strettamente crescente *se da* $x_1 < x_2$ *segue* $f(x_1) < f(x_2)$*;*
- strettamente decrescente *se da* $x_1 < x_2$ *segue* $f(x_1) > f(x_2)$*;*
- crescente in senso lato *se da* $x_1 < x_2$ *segue* $f(x_1) \leq f(x_2)$*;*
- decrescente in senso lato *se da* $x_1 < x_2$ *segue* $f(x_1) \geq f(x_2)$*.*

Si usa il termine monotona *quando non ha interesse precisare se si tratta di funzione crescente o decrescente*[2].

Esempi.

- La funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente.
- La funzione $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ è strettamente crescente.
- Ogni funzione costante è sia crescente che decrescente in senso lato.

È molto importante l'osservazione che una funzione *strettamente monotona è iniettiva.* Non è invece vero il viceversa, come mostra l'esempio della funzione $f(x) = 1/x$, oppure quello della funzione

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

che è iniettiva senza essere monotona nemmeno se ne considero la restrizione a un qualunque intervallo di $\mathbb{R}$.

3.4 Le funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche sono già note al lettore dalla scuola media superiore e ne richiamiamo qui solo alcune caratteristiche essenziali, accontentandoci di una introduzione "elementare".

3.4.1 Angoli e loro misura

Precisiamo subito che gli angoli non sono abitualmente intesi come parti di piano limitate da ua coppia di semirette aventi l'origine in comune (come è nella geometria elementare), ma come *le rotazioni* di una semiretta attorno alla sua origine. Queste rotazioni saranno considerate positive in un verso e negative in quello opposto. Precisamente se nel piano è fissato un sistema cartesiano ortogonale (monometrico), considereremo positive le rotazioni concordi a quelle che portano il semiasse positivo delle ascisse a sovrapporsi a quello delle ordinate secondo un angolo retto, negative le altre. Questa definizione ci permetterà di considerare anche angoli maggiori di un angolo giro, oppure angoli negativi, angoli che chiameremo generalizzati[3].

[2] Alcuni usano il nome *non decrescente* al posto di crescente in senso lato e *non crescente* al posto di decrescente in senso lato. Riteniamo che queste nomenclature possano portare a confusione e siano da evitare.

[3] Per una trattazione dettagliata di tutti i problemi legati alla misura delle lunghezze e delle ampiezze si veda il testo *Argomenti di Matematica per l'ingegneria, 2 volume*, adottato per il parallelo corso di Matematica 1, II modulo.

Dalla geometria elementare sappiamo inoltre che la lunghezza di un arco di circonferenza di raggio r è proporzionale all'ampiezza del corrispondente angolo al centro. Questo ci consente di introdurre come misura di un angolo (per ora solo degli angoli compresi tra quello nullo e quello giro) il rapporto tra la misura dell'arco di una circonferenza di raggio r avente centro nel vertice dell'angolo e il raggio stesso della circonferenza. È immediato come si possa estendere questa misura agli angoli generalizzati. Questo sistema di misura degli angoli si chiama *misura in radianti*. Si noti che se si considera la circonferenza di raggio 1, la misura dell'angolo in radianti e la misura dell'arco sono espressi dallo stesso numero reale: si può dire che assegnare un angolo equivale ad assegnare un numero reale. Useremo continuamente questo fatto.

3.4.2 Circonferenza goniometrica e definizioni delle funzioni goniometriche

In un piano in cui si sia fissato un sistema cartesiano ortogonale monometrico, la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 1 è usualmente detta *circonferenza goniometrica* o *trigonometrica*. Ogni semiretta uscente da O è chiaramente individuata univocamente dal suo punto P di intersezione con γ. Un angolo α, se misurato a partire dal semiasse positivo delle ascisse, individua chiaramente una semiretta uscente da O e quindi un punto $P(\alpha)$. Si tenga però presente che angoli che differiscono per multipli interi di 2π individuano la stessa semiretta e quindi lo stesso punto P su γ.

Si danno le definizioni che seguono.

Definizione 3.4. *Dato un angolo x o, ciò che è lo stesso, un numero reale x, l'ascissa e l'ordinata del corrispondente punto $P(x)$ sulla circonferenza goniometrica prendono rispettivamente il nome di* coseno *e* seno *di x e si indicano con* $\sin(x)$ *e* $\cos(x)$*.*

Per quanto detto, risulta evidente che così si ottengono due funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, periodiche di periodo 2π.

Definizione 3.5. *Dato un angolo x, con $x \notin \{\, \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$, si chiama* tangente *di x il numero reale definito da* $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$*.*

Si verifica facilmente che la funzione così ottenuta è periodica di periodo π.

Si considerano anche le funzioni

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}\,, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}\,,$$

ove i domini sono da interpretarsi nel senso generale detto per le funzioni del tipo che stiamo considerando (il massimo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove le regole di calcolo sono applicabili).

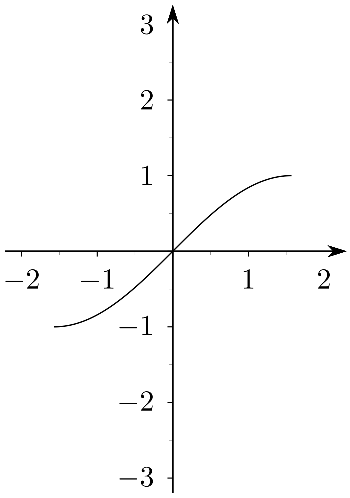
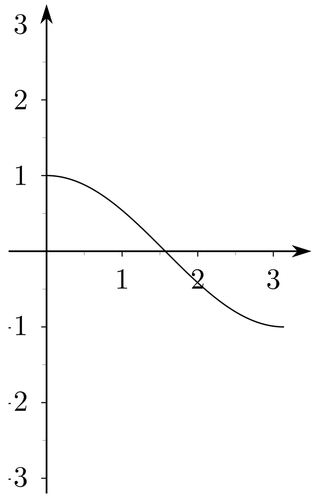
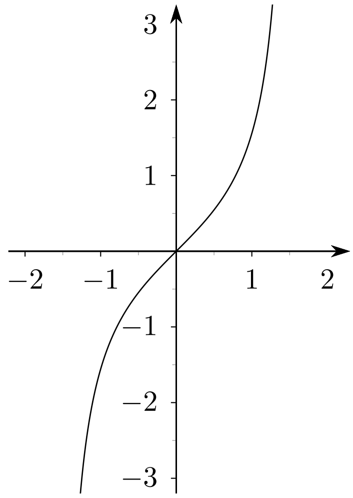
3.4.3 Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche introdotte non sono né iniettive né suriettive, quindi il problema della loro invertibilità non si pone neppure. Possiamo però considerare opportune restrizioni (sul dominio e sul codominio) in modo da ottenere delle *nuove* funzioni che siano invertibili.

Tratteremo in dettaglio le restrizioni seguenti, lasciando al lettore di fare le considerazioni analoghe per le restanti funzioni trigonometriche prima introdotte.

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]}\colon\ \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]\,,\quad x\mapsto\sin x$$
$$\cos|_{[0\,,\,\pi]}\colon\ [0\,,\,\pi]\to[-1,1]\,,\quad x\mapsto\cos x$$
$$\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}[}\colon\ \left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}\,,\quad x\mapsto\operatorname{tg}x$$

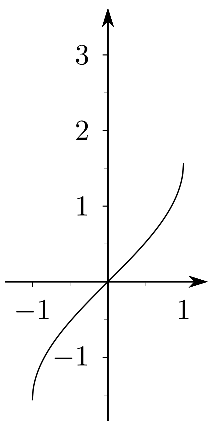
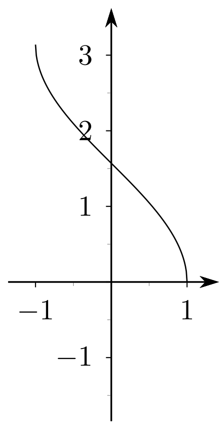
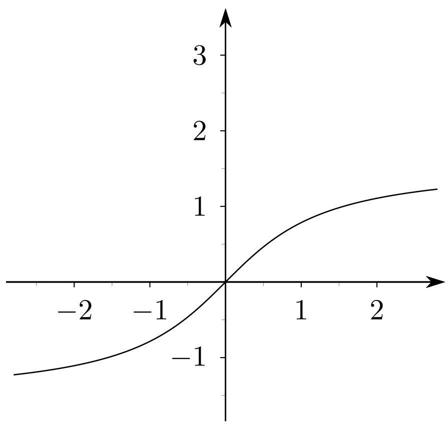
Si tratta in tutti i tre casi di funzioni invertibili, i cui grafici sono rappresentati, nell'ordine, qui di seguito.

Le funzioni inverse prendono il nome di funzione *arcseno*, *arccoseno*, *arctangente* rispettivamente:

$$\arcsin\colon[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\arccos\colon[-1,1]\to[0\,,\,\pi]$$
$$\operatorname{arctg}\colon\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$$

e hanno i grafici qui di seguito rappresentati, sempre nell'ordine.

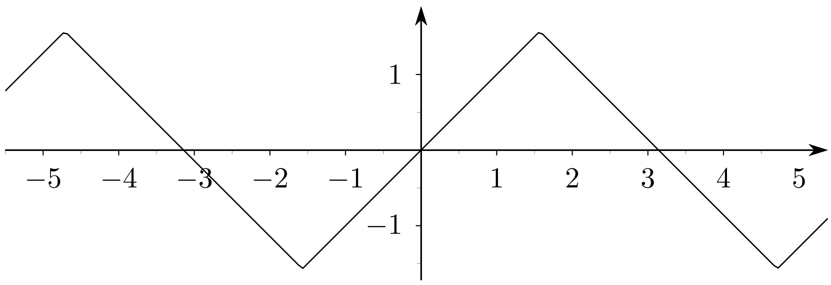




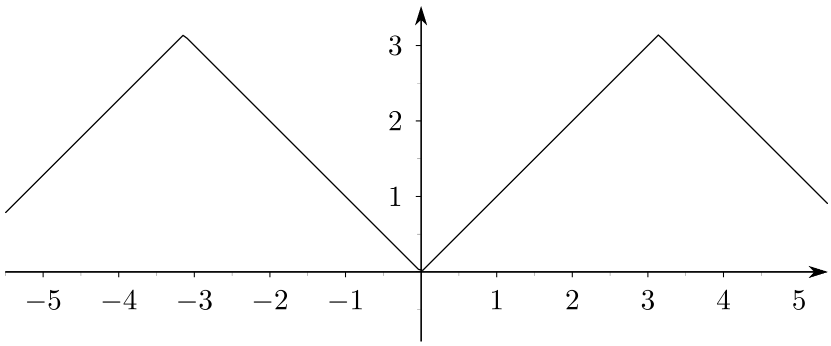
È estremamente importante ricordare che queste funzioni *non* sono le inverse delle funzioni seno, coseno e tangente (che non sono invertbili), ma solo di una opportuna *restrizione* di queste funzioni (sia sul dominio che sul codominio, ma bisogna porre particolare attenzione alla restrizione sul dominio).

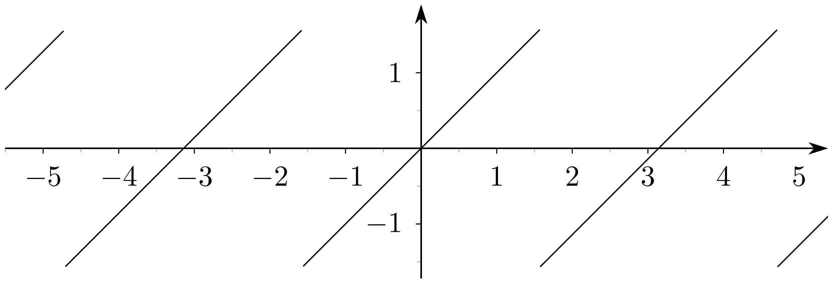
Tenendo conto delle proprietà dell'inversa di una funzione, possiamo trarre facilmente le seguenti conclusioni.

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin(x)) &= x, \quad \forall x \in [-1, 1] & \arcsin(\sin(x)) &= x, \quad \forall x \in [-\pi/2\,,\, \pi/2] \\
\cos(\arccos(x)) &= x, \quad \forall x \in [-1, 1] & \arccos(\cos(x)) &= x, \quad \forall x \in [0\,,\, \pi] \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) &= x, \quad \forall x \in \mathbb{R} & \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) &= x, \quad \forall x \in]-\pi/2\,,\, \pi/2[
\end{aligned}$$

Le tre funzioni $\arcsin(\sin(x))$, $\arccos(\cos(x))$ e $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x))$ che compaiono nella seconda colonna sono però ben definite anche al di fuori degli intervalli indicati. Al di fuori di quegli intervalli non si può concludere però a priori nulla sul loro valore, in quanto si tratta della composizione tra funzioni che *non* sono una l'inversa dell'altra. Tenendo anche conto della periodicità di queste tre funzioni si provi che i loro grafici sono quelli qui di seguito riportati, nell'ordine.







Un ulteriore interessante esercizio è quello di provare che valgono le seguenti identità:

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad \forall x \in [-1,1]\,.$$

Naturalmente si possono considerare anche altre composizioni tra le varie funzioni trigonometriche e le funzioni inverse considerate, ricordando sempre che le funzioni inverse considerate sono le inverse di opportune restrizioni delle funzioni seno, coseno e tangente.

3.5 Classi separate e contigue di reali

Due sottoinsiemi A e B di reali si dicono due *classi separate e contigue* se

- $a \le b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ (come nell'assioma di completezza dei reali);
- fissato arbitrariamente un reale $\varepsilon > 0$[4] esistono un $a \in A$ e un $b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$ (cioè esistono elementi di A e B "arbitrariamente vicini").

È chiaro, sulla base dell'assioma di completezza, che due classi separate hanno almeno un elemento di separazione. Il fatto che siano contigue ha come conseguenza che di elementi di separazione ce n'è uno solo. Siano infatti A e B separate e contigue e consideriamo il $\sup(A)$ (certamente esistente perchè A è superiormente limitato) e l'$\inf(B)$ (certamente esistente perché B è inferiormente limitato). Sia $\sup(A)$ che $\inf(B)$ sono elementi di separazione e ogni altro elemento di separazione deve essere compreso tra di essi. Se proviamo che $\sup(A) = \inf(B)$ avremo provato che l'elemento di separazione è unico. Poiché ovviamente $\sup(A) \le \inf(B)$ basterà provare che non può essere $\sup(A) < \inf(B)$. Se per assurdo $\sup(A) < \inf(B)$, posto $d = \inf(B) - \sup(A)$, e considerato un $\varepsilon < d$, non esisterebbe chiaramente nessuna coppia di elementi $a \in A$ e $b \in B$ con $b - a < \varepsilon$, contro l'ipotesi che A e B siano classi contigue.

Esempi.

- Siano $A = 1$ e $B = \{\, 1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N}^+ \,\}$. A e B sono classi separate contigue e 1 è l'unico elemento di separazione.
- Siano $A =]0,2[$ $B =]2,3[$. A e B sono classi separate contigue e 2 è l'unico elemento di separazione.

3.6 Potenze nei reali

3.6.1 Esponenti naturali positivi

Definizione 3.6. *Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, si pone*

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^{n+1} = a \cdot a^n\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Il numero a si chiama base*, il numero n si chiama* esponente*, a^n si chiama* potenza *di base a ed esponente n.*

[4] È tradizione nei testi di analisi matematica indicare con ε un reale positivo arbitrario. Nelle applicazioni in generale interessano i valori di ε "piccoli" ed è per questo che spesso si trova scritto: si consideri un $\varepsilon > 0$ *arbitrariamente piccolo*, o *piccolo a piacere*. Si presti attenzione al fatto che mentre il concetto di "arbitrariamente piccolo" ha senso, quello di "piccolo" non ne ha alcuno. Riteniamo sia preferibile dire semplicemente che ε è un numero positivo arbitrario.

La definizione è esattamente identica a quella data nell'insieme dei naturali (si veda la definizione data nella pagina 19).

Si dimostra facilmente (per induzione) il seguente teorema.

Teorema 3.7 (Proprietà delle potenze)**.** *Se a e b sono numeri reali ed m, n numeri naturali maggiori di* 0*, valgono le seguenti proprietà.*

$$a^n \cdot a^n = a^{n+m}\,, \tag{3.2}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}\,, \tag{3.3}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n\,. \tag{3.4}$$

3.6.2 Esponente 0

Ci chiediamo ora: è possibile estendere la definizione data di potenza in modo da includere anche altri esponenti, oltre ai naturali positivi? È chiaro che, a priori, si potrebbe estendere la definizione di potenza anche assegnando arbitrariamente un valore, per esempio, per a^0. Quello che *pretendiamo* è però la seguente circostanza:

L'estensione della definizione di potenza *deve* essere fatta
in modo da conservare la validità delle proprietà delle potenze.

Come vedremo questa richiesta ci porterà a concludere che esiste una sola possibilità di estendere la definizione di potenza.

Cominciamo a chiederci come possiamo definire a^0. Se vogliamo mantenere le proprietà citate, in particolare la 3.2, occorrerà che

$$a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n\,.$$

Se $a \neq 0$ da qui scende che siamo costretti a definire

$$a^0 = 1\,. \tag{3.5}$$

Se invece $a = 0$ questa richiesta risulta verificata qualunque sia la definizione che vogliamo dare ad a^0. Potremmo scegliere, in analogia con 3.5, di porre $0^0 = 1$, ma questo comporterebbe difficoltà in altre situazioni che incontreremo in futuro. Pertanto *rinunciamo* a definire 0^0: questo simbolo non ha, e non avrà in seguito,l alcun significato.

3.6.3 Esponenti interi negativi

Proseguendo sulla strada indicata, chiediamoci come possiamo definire a^{-n}, se $n \in \mathbb{N}^+$. Sempre se vogliamo mantenere le proprietà citate, in particolare la 3.2, occorrerà che

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1\,.$$

È chiaro che se $a = 0$ questa uguaglianza non ha nessuna possibilità di essere verificata, qualunque sia il valore che vogliamo attribuire ad a^{-n}, in quanto $a^n = 0$ se $a = 0$ ed $n \in \mathbb{N}^+$. Supponendo dunque $a \neq 0$, questa uguaglianza è verificata solo se definiamo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,. \tag{3.6}$$

Abbiamo dunque esteso la possibilità di scelta degli esponenti a tutti gli interi, con una piccola rinuncia: per esponenti minori o uguali a zero la base non può essere zero.

3.6.4 Esponenti razionali

Poniamoci ora il problema di vedere se è possibile definire $a^{m/n}$, sempre con le stesse condizioni. Dovremo naturalmente anche preoccuparci di dare una definizione in modo tale che se ${}^m\!/_n = {}^p\!/_q$, $a^{m/n} = a^{p/q}$.

Ci si accorge quasi subito che c'è un problema nel tentare di definire $a^{m/n}$ con $a < 0$. Per esempio se tentiamo di definire $(-2)^{1/2}$ in modo che valga la proprietà 3.3 dovremmo avere:

$$-2 = (-2)^1 = (-2)^{2/2} = \left((-2)^{1/2}\right)^2 .$$

Qualunque significato vogliamo attribuire al numero $(-2)^{1/2}$, l'ultimo membro di questa catena di uguaglianze sarà un numero positivo, e non potrà essere uguale a -2. Per questo motivo *rinunciamo* a definire le potenze con base negativa ed esponente razionale. Concentriamoci dunque sulle basi positive e cominciamo a vedere come si può definire $a^{1/n}$, con $a > 0$. Dovrà necessariamente essere:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a\,.$$

Questo significa che il numero $a^{1/n}$ deve essere una soluzione dell'equazione $x^n = a$, con $a > 0$. Sappiamo già, vedi la pagina 27, che quest'equazione ha una sola soluzione positiva per ogni n e che si tratta della radice n-esima aritmetica di a. Porremo dunque, per definizione,

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,, \quad a > 0\,. \tag{3.7}$$

Per definire ora $a^{m/n}$ basterà tenere conto che deve essere, per la proprietà 3.3,

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}\ ,$$

per cui dovremo porre

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,. \tag{3.8}$$

Se poi ${}^m\!/_n = {}^p\!/_q$, ovvero $mq = np$, avremo, per le note proprietà dei radicali,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}\ ,$$

come volevamo.

Per concludere l'estensione della definizione di potenza al caso di esponenti razionali conveniamo anche di porre

$$0^{\frac{m}{n}} = 0 \quad \text{se } \frac{m}{n} > 0\,. \tag{3.9}$$

Non è difficile provare che valgono le seguenti proprietà di monotonia, importanti per la successiva estensione della definizione di potenza a esponenti reali qualunque.

1. Se $a > 1$ ed $r < s$ sono due numeri razionali, allora $a^r < a^s$.
2. Se $a = 1$, $a^r = 1$ per ogni razionale r.
3. Se $0 < a < 1$ ed $r < s$ sono due numeri razionali, allora $a^r > a^s$.

3.6.5 Esponenti reali

Come già è successo per le estensioni numeriche, il passaggio da esponenti razionali a esponenti reali è decisamente più complesso e prevede l'uso dell'assioma di completezza, che è la radicale novità dell'insieme dei reali rispetto a quello dei razionali.

Proponiamoci dunque di dare un significato al simbolo a^α, con $\alpha \in \mathbb{R}$, naturalmente sempre alle stesse condizioni. Per fare questo cominciamo a supporre $a > 1$ e consideriamo le seguenti due classi di numeri reali:

$$\begin{aligned} C &= \{\, a^r \mid r \in \mathbb{Q} \land r < \alpha \,\} \,, \\ D &= \{\, a^s \mid s \in \mathbb{Q} \land s > \alpha \,\} \,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Per la citata proprietà di monotonia della potenza con esponente razionale, le due classi sono separate e anzi, visto che $a > 1$, si ha $c \leq d$ per ogni $c \in C$ e per ogni $d \in D$. Proviamo ora che le due classi sono anche contigue. Premettiamo il seguente lemma.

Lemma 3.8. *Se $a > 1$, per ogni $\delta > 0$ esiste un naturale n tale che*

$$a^{1/n} < 1 + \delta \,.$$

Dimostrazione. Basterà provare che esiste n tale che $a < (1+\delta)^n$. Poiché, per la formula del binomio di Newton, si ha

$$(1+\delta)^n = 1 + n\delta + \cdots + \delta^n = 1 + n\delta + k \quad \text{con } k > 0 \,,$$

basterà provare che esiste n tale che $a < 1 + n\delta$; per questo è sufficiente prendere un n tale che $n > {}^{a-1}/_{\delta}$, e di n siffatti ne esistono infiniti. □

Questo lemma si può enunciare a parole dicendo che se $a > 1$ la radice n-esima di a può essere resa vicino quanto si vuole a 1, pur di prendere l'indice della radice sufficientemente grande. La cosa è intuitivamente comprensibile se si tiene conto che al crescere di n ${}^1/_n$ diventa sempre più vicino a 0 e quindi $a^{1/n}$ diventa sempre più vicino ad a^0 cioè a 1.

Siamo ora pronti a provare che le due classi C e D sono contigue. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e consideriamo un qualunque razionale $k > 0$ e cerchiamo due razionali r ed s, con $r\alpha < s\,(< k)$, tali che $a^s - a^r < \varepsilon$. Ora

$$a^s - a^r = a^r\left(a^{s-r} - 1\right) < a^k\left(a^{s-r} - 1\right).$$

Se l'ultimo membro è minore di ε a maggior ragione lo sarà il primo. Dovremo avere

$$a^k\left(a^{s-r} - 1\right) < \varepsilon \Rightarrow a^{s-r} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^k}.$$

Per il lemma 3.8, se poniamo $\delta = {}^{\varepsilon}/_{a^k}$, esiste un n tale che $a^{1/n} < 1 + \delta$. Se allora prendiamo due numeri s ed r tali che $s - r < {}^1/_n$ (e due razionali siffatti, uno maggiore e uno minore di α, esistono sicuramente) avremo proprio

$$a^{s-r} < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \delta = 1 + \frac{\varepsilon}{a^k} \,,$$

come volevamo.

Le due classi C e D sono dunque contigue, ovvero $\sup(C) = \inf(D)$, e potremo dare la definizione seguente.

$$a^\alpha = \sup C = \inf D\,, \quad a > 1\,. \tag{3.11}$$

Se poi $0 < a < 1$ si può porre:

$$a^\alpha = \frac{1}{(1/a)^\alpha}\,. \tag{3.12}$$

Naturalmente se $a = 1$ si potrà porre, in tutta tranquillità, $1^\alpha = 1$. Per concludere si porrà anche $0^\alpha = 0$ se $\alpha > 0$.

Rimane da provare, ma la cosa richiede una certa fatica e rinunciamo a farlo, che valgono tutte le proprietà dell'elevazione a potenza. Non è invece difficile mostrare, e invitiamo il lettore a farlo come esercizio, che se $\alpha \in \mathbb{Q}$, questa definizione riproduce esattamente la potenza già nota con esponente razionale.

3.7 Le funzioni potenza

La definizione di potenza che abbiamo dato ci consente di introdurre le *funzioni potenza*

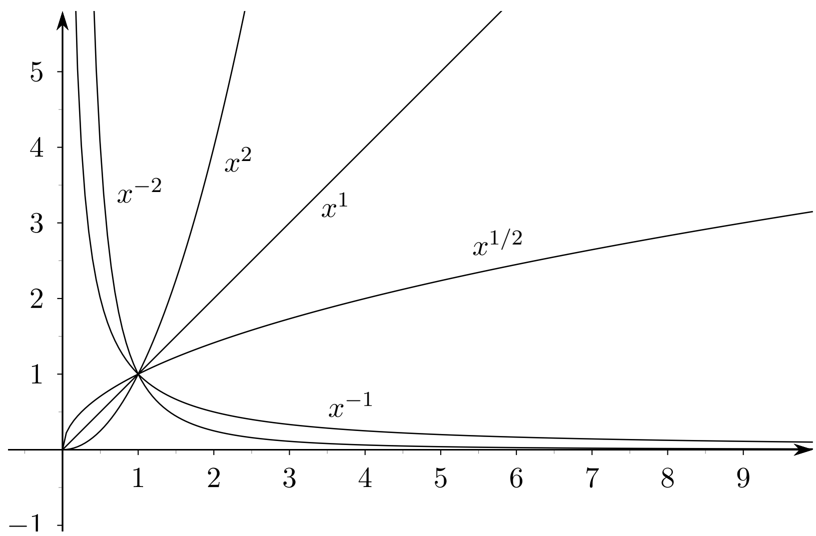
$$f_\alpha\colon D \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^\alpha\,, \tag{3.13}$$

dove D è dato da

- $\mathbb{R}$ se $\alpha \in \mathbb{N}^+$;
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se α è un intero minore o uguale a 0;
- $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se α è un reale non intero e non negativo;
- $\mathbb{R}+$ se α è un reale non intero e minore o uguale a 0.

Nel caso che l'esponente sia intero è immediato che le x^α sono funzioni pari per n pari e dispari per n dispari. Basterà dunque studiarle solo per $x > 0$. Per gli altri α le funzioni sono definite sono per x maggiori o tutt'al più maggiori o uguali a 0 e quindi non si pongono problemi di simmetria.

Nella figura qui di seguito sono proposti i grafici corrispondenti ad alcuni valori di α.



3.8 Le funzioni esponenziali

La stessa definizione di potenza ci consente anche di introdurre le *funzioni esponenziali*

$$g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g_a(x) = \exp_a(x) = a^x\,, \quad a > 0\,. \tag{3.14}$$

Il seguente teorema è conseguenza immediata della definizione e delle proprietà delle potenze.

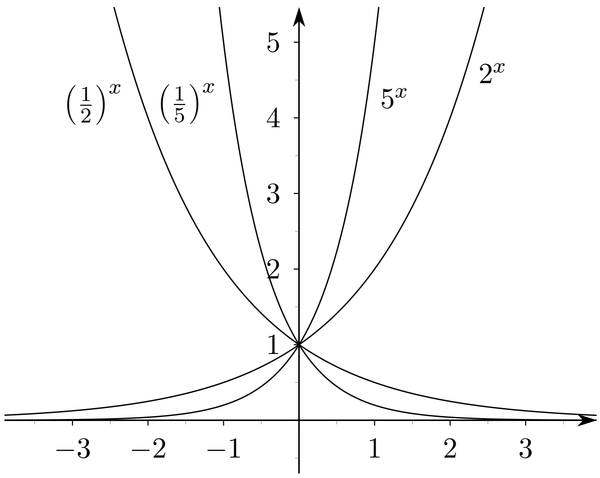
Teorema 3.9. *Le funzioni esponenziali assumono solo valori positivi, sono strettamente crescenti se $a > 1$, strettamente decrescenti se $0 < a < 1$, costanti (con valore 1) se $a = 1$.*

Il seguente teorema, fondamentale per gli sviluppi futuri, è invece di dimostrazione più difficile e ci limitiamo a enunciarlo.

Teorema 3.10. *Se a è un reale positivo diverso da 1, la funzione esponenziale $\exp_a$ come funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^+$ è biunivoca e quindi invertibile.*

Quest'ultimo teorema afferma in sostanza che la funzione esponenziale $\exp_a$, con $a \neq 1$ assume (esattamente una volta essendo strettamente crescente o decrescente) tutti i valori positivi.

Nella figura qui di seguito sono rappresentati i grafici di alcune funzioni esponenziali.

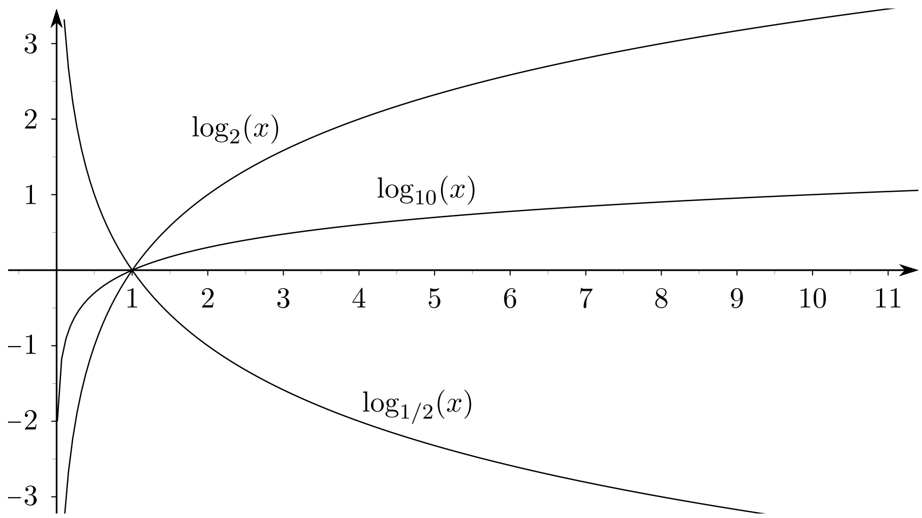


3.9 Le funzioni logaritmo

Poiché le funzioni $\exp_a$ sono, per $0 < a < 1 \vee a > 1$, biiettive, ne possiamo considerare le inverse, che si chiamano *funzioni logaritmo* in base a e si indicando con $\log_a$:

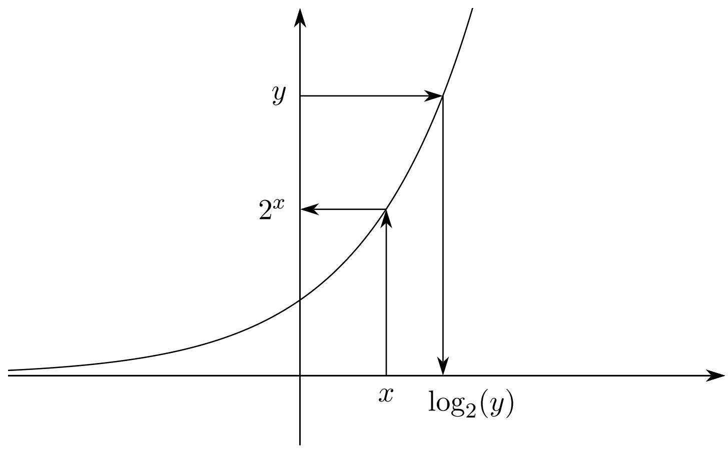
$$\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_a(x)\,, \quad 0 < a < 1 \vee a > 1.$$

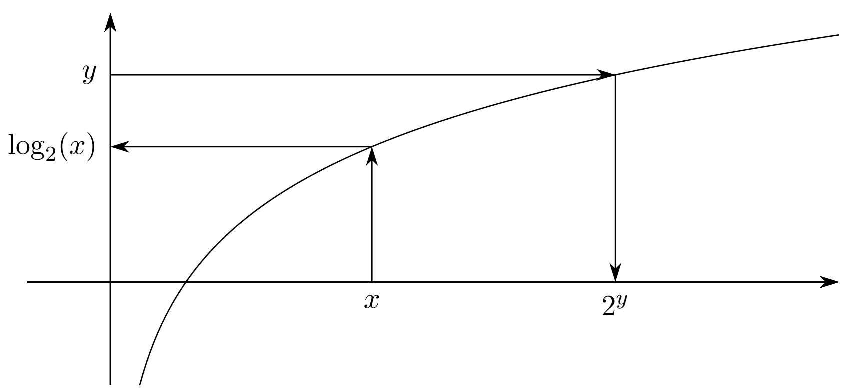
I grafici si ottengono chiaramente per simmetria (se l'unità di misura sui due assi è la stessa!) rispetto a quelli delle funzioni esponenziali. Nella figura che segue sono rappresentati, a titolo d'esempio, i grafici di alcune funzioni logaritmo.



È molto importante imparare a "leggere" con disinvoltura questi grafici, in particolare per risolvere equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Si vedano in particolare le due figure che seguono, relative al caso di 2^x e $\log_2(x)$: un loro esame accurato dovrebbe chiarire il modo in cui questi grafici devono essere usati.





3.9.1 Le proprietà dei logaritmi

Dalla definizione di logaritmo come inversa dell'esponenziale seguono naturalmente le seguenti identità:

$$a^{\log_a(x)} = x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad , \qquad \log_a\left(a^x\right) = x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.15}$$

Dalle proprietà delle potenze si ricavano poi facilmente le proprietà dei logaritmi, che elenchiamo qui di seguito.

- $\log_a(1) = 0\,;$
- $\log_a(a) = 1\,;$
- $\log_a(\alpha \cdot \beta) = \log_a(\alpha) + \log_a(\beta)\,, \quad \alpha > 0 \wedge \beta > 0;$
- $\log_a(\alpha)^\beta = \beta \log_a(\alpha)\,, \quad \alpha > 0.$

Nell'uso delle proprietà si tenga conto che, naturalmente, $0 < a < 1 \vee a > 1$ e, in particolare nella terza e quarta proprietà, delle condizioni poste su α e β.
Si osservi altresì, perché importante in molti esercizi, che, come conseguenza delle proprietà, si ha

$$\log_a x^2 = 2 \log_a |x|\ .$$

Sono anche importanti per le applicazioni le formule di cambiamento di base nei logaritmi e negli esponenziali, conseguenze quasi immediate delle definizioni.

$$a^\alpha = b^{\alpha \log_b(a)} \qquad , \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\,. \tag{3.16}$$

In particolare la prima formula ci sarà utile nel trattare le funzioni del tipo

$$f(x)^{g(x)}\,. \tag{3.17}$$

La determinazione del dominio di una funzione di questo tipo è spesso delicata. Per esempio, seguendo la regola generale sul dominio naturale delle funzioni reali di variabile reale, la funzione x^x dovrebbe avere come dominio l'insieme

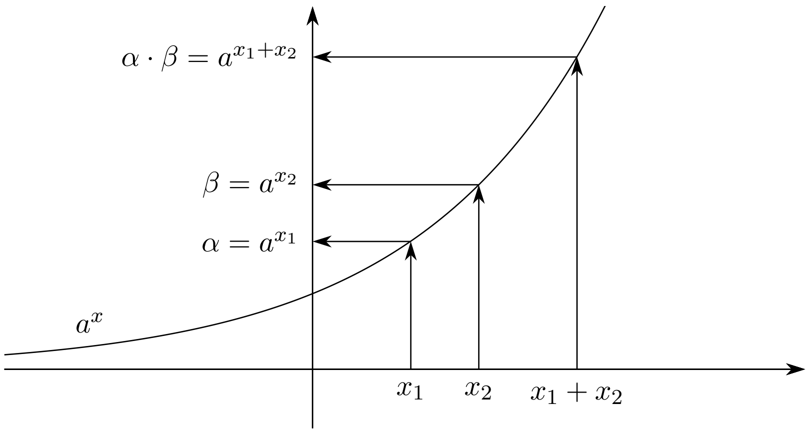
$$A = \{\, z \in \mathbb{Z} \mid z < 0 \,\} \cup \mathbb{R}^+\,.$$

Di solito però in questi casi si accetta come dominio solo l'insieme dei reali per cui $f(x) > 0$. Questo fatto risulta evidenziato dalla formula:

$$f(x)^{g(x)} = a^{g(x) \log_a f(x)}\,, \tag{3.18}$$

formula che permette di trasformare una potenza in cui variano sia la base che l'esponente, in una potenza in cui varia solo l'esponente.

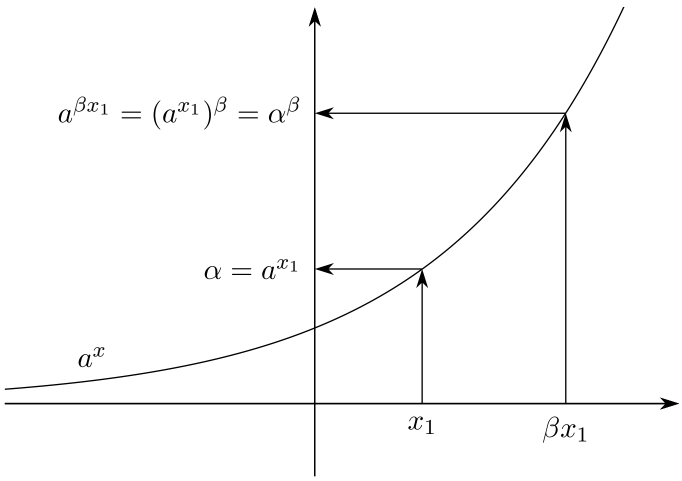
La dimostrazione delle proprietà citate dei logaritmi si può fare facilmente per via grafica, come segue. Cominciamo dalla $\log_a(\alpha \cdot \beta) = \log_a(\alpha) + \log_a(\beta)$.



Per dimostrare la formula è sufficiente osservare, "leggendo il grafico in senso inverso", che

$$\begin{aligned} x_1 &= \log_a(\alpha)\,, \\ x_2 &= \log_a(\beta)\,, \\ x_1 + x_2 &= \log_a(\alpha \cdot \beta)\,. \end{aligned}$$

Passiamo ora alla $\log_a(\alpha)^\beta = \beta \log_a(\alpha)$



Anche qui per dimostrare la formula è sufficiente osservare, ancora "leggendo il grafico in senso inverso", che

$$\begin{aligned} x_1 &= \log_a(\alpha)\,, \\ \beta x_1 &= \log_a(\alpha^\beta)\,. \end{aligned}$$

3.10 Esercizi

Esercizio 3.1. *Date due funzioni f, $g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si provi che*

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &= \frac{1}{2}\bigl[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\,\bigr]\,, \\ (f \wedge g)(x) &= \frac{1}{2}\bigl[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\,\bigr]\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3.2. *Siano f e g due funzioni entrambi crescenti o decrescenti. Si dimostri che allora la funzione composta $f \circ g$ è crescente.*

Esercizio 3.3. *Siano f e g due funzioni entrambi crescenti [decrescenti]. Si dimostri che allora $f + g$ è crescente [decrescente]. Si provi invece su un esempio che il prodotto $f \cdot g$ può non essere crescente [decrescente].*

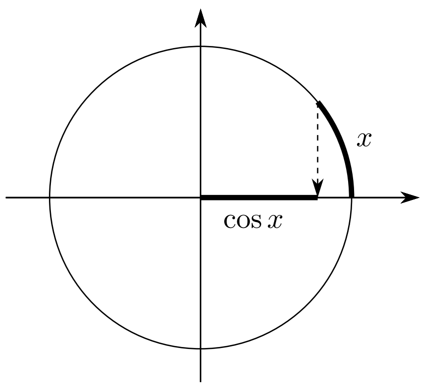
Esercizio 3.4. *Siano f e g due funzioni entrambi crescenti e positive. Si provi che allora $f \cdot g$ è crescente. Che cosa si può dire del prodotto $f \cdot g$ se sono entrambi crescenti e negative?*

Esercizio 3.5. *Si trovi il dominio delle seguenti funzioni.*

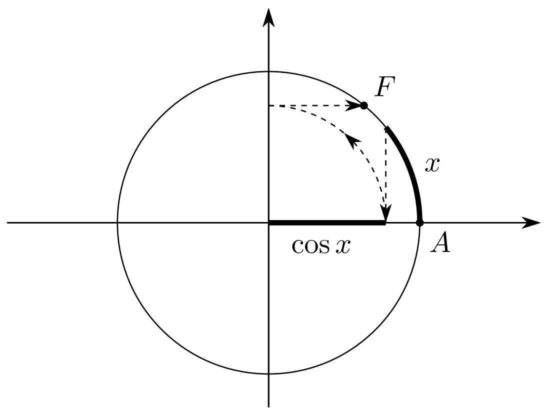
1. $\log_2(x^2 - 1) + \log_5(x + 2)$.
2. $\operatorname{arctg}(\arcsin(x))$.
3. $\log_2(\arcsin(x))$.
4. $\log_3 |\operatorname{arctg}(x)|$.
5. $\log_x x$.
6. $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$.

Esercizio 3.6. *Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(cos(x)$.*

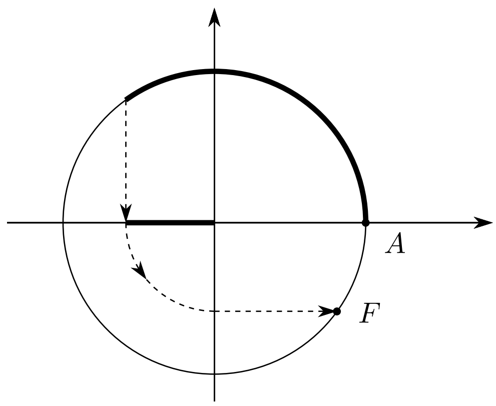
Risoluzione. Si comincia con l'osservare che la funzione ha come dominio naturale tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica di periodo 2π. Si tratta inoltre di una funzione pari (perché tale è il coseno): basterà quindi studiarla in un intervallo ampio π. Scegliamo il tratto $[0, \pi]$ e cominciamo con $[0, \pi/2]$. Per tracciare il grafico possiamo ragionare in maniera elementare usando la circonferenza goniometrica. A partire dall'arco x dobbiamo costruire il coseno di x (individuando un punto sull'asse delle ascisse).



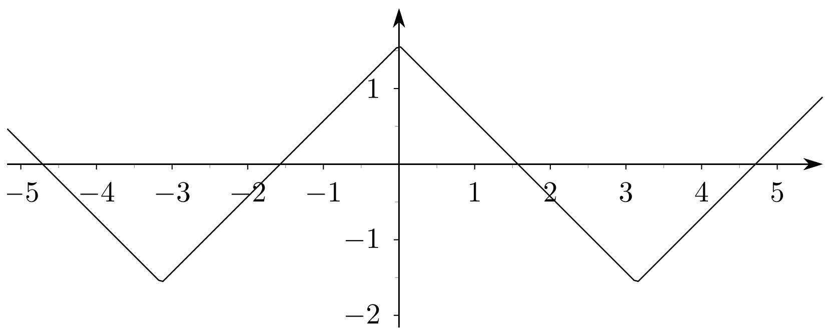
Ottenuto $\cos x$ lo riportiamo sull'asse delle ordinate, e infine troviamo l'arcseno.



L'arco $\widehat{AF}$ ottenuto corrisponde al valore cercato di $\arcsin(\cos(x))$. È altresì immediato dalla costruzione precedente che $x+\arcsin(\cos(x)) = \pi/2$, ovvero che $\arcsin(\cos(x)) = \pi/2-x$. A questo punto il grafico, su questo intervallo, è immediato. Si prova nello stesso modo che la cosa risulta valida anche nell'intervallo $[\pi/2\,,\,\pi]$. Riportiamo solo il grafico senza alcun commento.



Il grafico richiesto è allora il seguente.



$\square$

Esercizio 3.7. *Si tracci il grafico della funzione* $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.

Risoluzione. È come chiedersi: qual è la somma di due angoli che si scambiano il seno con il coseno? È ovvio che la risposta è $\pi/2$, naturalmente nell'intervallo $[-1, 1]$ dove le funzioni sono definite. $\square$

Esercizio 3.8. *Verificare che, per ogni naturale n, si ha*

$$\log_a b = \log_{a^n} b^n \,.$$

Esercizio 3.9. *Verificare che*

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1 \,,$$

precisando anche quali sono le condizioni da imporre sui numeri a, b e c.

Esercizio 3.10. *Verificare che, per ogni b positivo,*

$$\log_a b = \log_{\sqrt{a}} + \log_{\frac{1}{a}} b \,.$$

Esercizio 3.11. *Verificare, per induzione, che*

$$|sin(nx)| \le n\,|sinx| \,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risoluzione.

1. Per $n = 0$ si ha $0 \le 0$ che è vera.
2. Vediamo ora il secondo passo induttivo.
   - *Hp*: $|sin(nx)| \le n\,|sinx|$
   - *Th*: $|sin((n+1)x)| \le (n+1)\,|sinx|$

   Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned} |sin((n+1)x)| = |\sin(nx+x)| = |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| \le \\ \le |\sin(nx)|\,|\cos x| + |\cos(nx)|\,|\sin x| \overset{(*_1)}{\le} |\sin(nx)| + |\sin x| \le \\ \overset{(*_2)}{\le} n\,|\sin x| + |\sin x| = (n+1)\,|\sin x| \;. \end{aligned}$$

   Nel passaggio $(*_1)$ abbiamo usato il fatto che $|\cos x| \le 1$ e $|\cos(nx)| \le 1$; nel passaggio $(*_2)$ abbiamo usato l'ipotesi induttiva.

□

Esercizio 3.12. *Per quali $x \in \mathbb{R}$ sono valide le seguenti uguaglianze?*

1. $\log_a(2x-3)^{12} = 3\log_a(2x-3)^4$ *;*
2. $\log_a(2x-3)^{12} = 4\log_a(2x-3)^3$ *;*
3. $\log_a(2x-3)^{12} = 12\log_a(2x-3)$ *.*

Esercizio 3.13. *Si trovi il dominio naturale delle seguenti funzioni.*

1. $f(x) = \log_a |x|$.
2. $f(x) = \log_a(x^2+1)$.
3. $f(x) = \log_a \left(\frac{x}{x-1}\right)$.
4. $f(x) = \log_a \sqrt{x^2 - x}$.
5. $f(x) = \sqrt{\log_2 x}$.
6. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}$.
7. $f(x) = a^{x-1}$.
8. $f(x) = a^{\sqrt{2-x}}$.

9. $f(x) = \log(x-1)^2$.
10. $f(x) = 2\log(x-1)$.

Esercizio 3.14. *Si trovi il periodo delle seguenti funzioni (k è un reale maggiore di zero).*

1. $f(x) = \sin(kx)$.
2. $f(x) = \cos(kx)$.
3. $f(x) = \operatorname{tg}(kx)$.

Esercizio 3.15. *Si dica se le seguenti funzioni sono periodiche e in caso affermativo si calcoli, se c'è, il minimo periodo.*

1. $f(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$.
2. $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{3}x)$.
3. $f(x) = x\sin x$.
4. $f(x) = x + \sin x$.

Esercizio 3.16. *Se due funzioni f e g sono periodiche con minimo periodo T, che cosa si può dire riguardo alla periodicità delle funzioni*

1. $f + g$,
2. $f \cdot g$,
3. $|f|$?

Esercizio 3.17. *Dimostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\sin(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Esercizio 3.18. *Esprimere* $\sin(\arcsin(a) + \arcsin(b))$ *in maniera che non compaiano le funzioni trigonometriche o le loro inverse.*

Esercizio 3.19. *Utilizzando i grafici delle funzioni elementari studiate, tracciare i grafici sommari delle funzioni seguenti.*

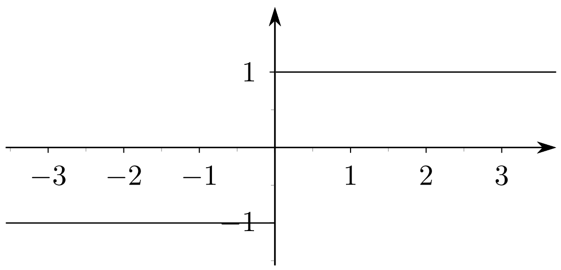
1. $f(x) = 2 + \sin x$.
2. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ *(sgn è la funzione "segno").*
3. $f(x) = \sin|x|$.
4. $f(x) = \min\{\sin x, \cos x\}$.
5. $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$.
6. $f(x) = \sin x - |\sin x|$.

4 Limiti e continuità per le funzioni reali di variabile reale

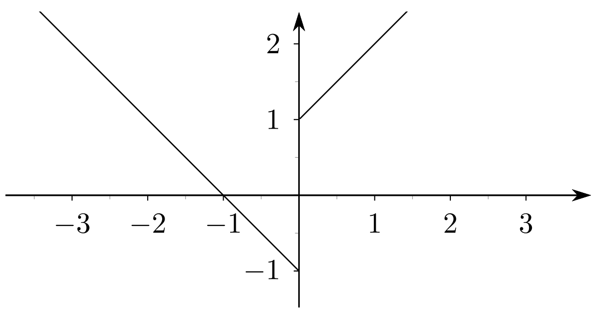
4.1 Osservazioni ed esempi introduttivi

Il concetto di limite gioca un ruolo di fondamentale importanza nello studio della matematica e in tutte le sue applicazioni. Per introdurlo consideriamo alcuni esempi, utilizzando grafici costruiti al computer, e teniamo conto che il problema che intendiamo affrontare è quello di analizzare il comportamento di un funzione "nei pressi" di un punto del dominio, senza interessarci direttamente di quello che succede esattamente in corrispondenza del punto stesso.

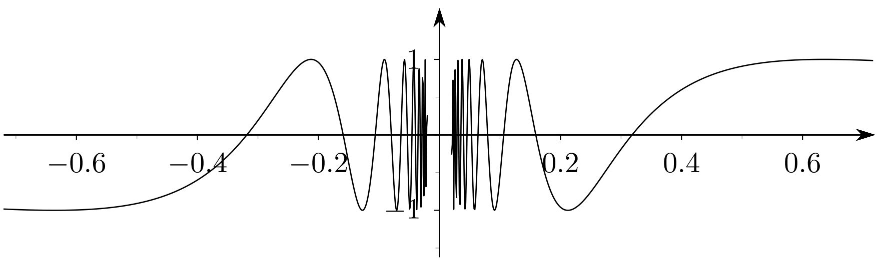
Esempio. $f(x) = \frac{x}{|x|}$.



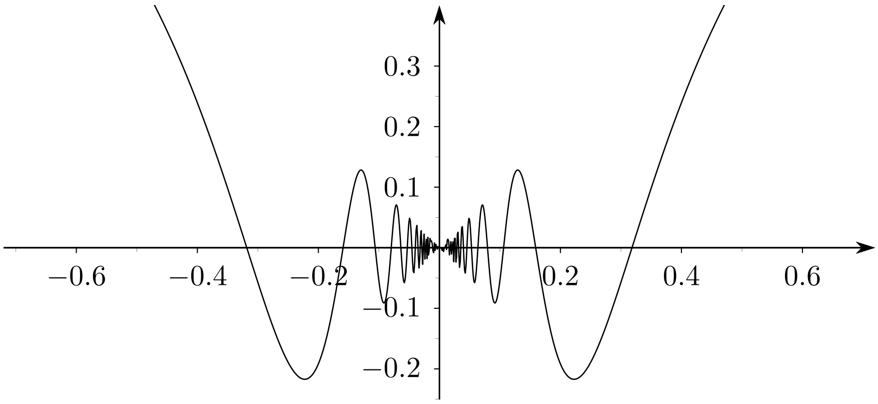
Esempio. $f(x) = \frac{x^2+x}{|x|}$



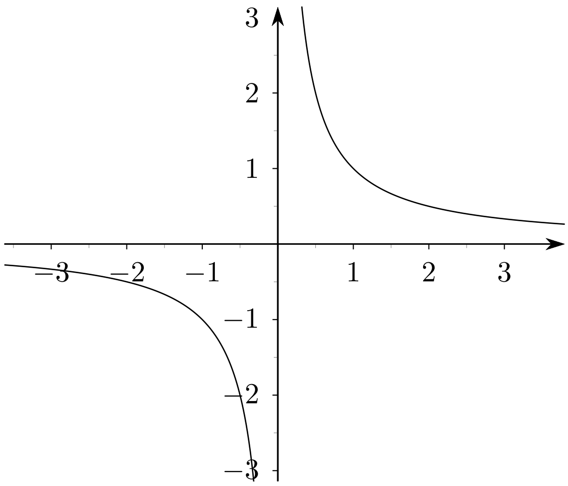
Esempio. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.



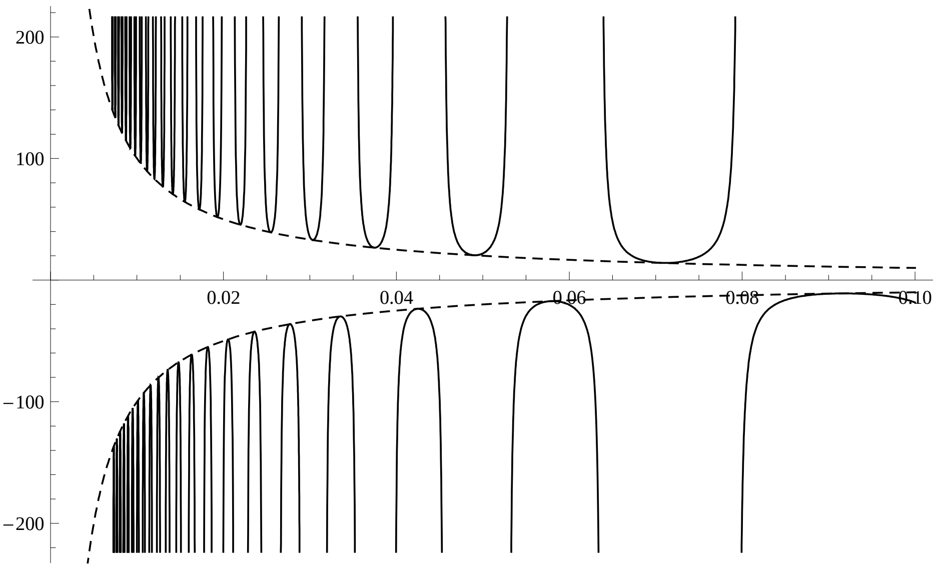
Esempio. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.



Esempio. $f(x) = \frac{1}{x}$.



Esempio. $f(x) = \frac{1}{x \sin(1/x)}$.



Osservazione 4.1. Nelle applicazioni che ci interesseranno, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che incontreremo più spesso saranno gli intervalli (di qualunque tipo) e le unioni di intervalli. Per questo tipo di insiemi la determinazione dei punti interni, esterni, ecc., è abbastanza semplice. In particolare segnaliamo i fatti seguenti.

- In un qualunque intervallo sono interni tutti i punti dell'intervallo stesso tranne gli eventuali estremi.
- In un qualunque intervallo sono di accumulazione tutti i punti dell'intervallo con l'eventuale aggiunta degli estremi.
- In un qualunque intervallo sono di frontiera solo gli eventuali estremi.
- In un qualunque intervallo non ci sono punti isolati.

Tenendo conto di queste considerazioni è facile ricavare quali sono i punti interni, esterni, ecc., per le unioni di intervalli.

Esempi.

- Per il dominio naturale della funzione $\operatorname{tg} x$, che è costituito da un'unione di infiniti intervalli aperti, si ha che il dominio stesso è un insieme aperto, che i punti di frontiera sono tutti e soli i punti $\pi/2 + k\pi$, con k intero qualunque, che tutti i reali sono di accumulazione, che non ci sono punti esterni o isolati.
- Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ è l'intervallo chiuso $[-1, 1]$, i suoi punti di accumulazione sono sempre i punti di $[-1, 1]$, i punti di frontiera sono $\{-1, 1\}$, i punti interni sono quelli di $]-1, 1[$, i punti esterni sono quelli di $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, non ci sono punti isolati.

Occasionalmente ci capiterà di incontrare qualche funzione che ha punti isolati nel dominio, come nell'esempio seguente.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2(x-1)^2(x-2)}$$

ha come dominio $\{0, 1\} \cup [2, +\infty[$. In questo caso sono interni i punti di $]2, +\infty[$, di accumulazione i punti di $[2, +\infty[$, isolati i punti $\{0, 1\}$ esterni i punti di $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, di frontiera i punti $\{0, 1, 2\}$.

4.2 La definizione di limite

La definizione di limite è basata sul concetto di intorno, cha abbiamo dato nella pagina 31. È utile anche rivedere la definizione di intorno di $\pm\infty$ (vedi la definizione 2.20, nella pagina 31). Ricordiamo poi che un numero reale x_0 si dice di accumulazione per un insieme A se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A. Poiché in ogni intorno di $+\infty$ cadono sempre infiniti punti di un insieme che sia superiormente illimitato (la cosa è quasi ovvia, ma la si può comunque provare per esercizio), diremo spesso, con un certo abuso di linguaggio, che $+\infty$ è un punto di accumulazione per un insieme superiormente illimitato. Analogo discorso per $-\infty$ nel caso di insiemi inferiormente illimitati. Si tenga però sempre ben presente che $\pm\infty$ non sono numeri reali, e quindi non corrispondono ad alcun punto della retta.

In alcune questioni avremo bisogno anche del concetto di *intorno di* ∞ (infinito senza segno). Daremo pertanto la seguente definizione.

Definizione 4.2. *Si dice* intorno di ∞ *l'unione di due arbitrari intorni, uno di* $+\infty$ *e uno di* $-\infty$*.*

Avendo dato questa definizione potremo, con ancora maggior abuso di linguaggio, dire a volte che ∞ è un "punto" di accumulazione per un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente[1].

Definizione 4.3 (Definizione generale di limite)**.** *Sia data una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A, con eventualmente x_0 anche $\in \{ +\infty, -\infty, \infty \}$. Diremo che l, con eventualmente l anche $\in \{ +\infty, -\infty, \infty \}$, è il* limite *di f per x tendente a x_0 se fissato comunque un intorno U_l di l è possibile in corrispondenza trovare un intorno I_{x_0} di x_0 tale che i valori della funzione calcolati in tutti i punti di I_{x_0},* tranne *eventualmente x_0 stesso, cadano nel prefissato intorno U_l di l. In formule*

$$\forall U_l \ \exists I_{x_0} \ \textit{tale che} \ \forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\} \ \textit{si abbia} \ f(x) \in U_l\,.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \text{o anche} \quad f(x) \to l \text{ se } x \to x_0\,.$$

Si noti come la definizione appena data *non* fornisca alcuna informazione su come calcolare il limite l, ma semplicemente un metodo per verificare se un certo l è oppure no il limite di una funzione quando x tende a x_0.

Si noti altresì che, in questa definizione, il valore che la funzione assume in corrispondenza di x_0 *non ha alcun interesse*, anzi, in x_0 la funzione potrebbe benissimo non essere definita. Per evidenziare questo fatto qualcuno usa la scrittura seguente

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = l\,;$$

questa scrittura sarebbe quanto mai opportuna, ma troppo pesante da implementare, per cui non la useremo.

Vediamo su un esempio che cosa significa questa definizione.

Esempio. Si verifichi se è vero oppure no che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0\,.$$

La verifica, secondo la definizione, deve procedere con i seguenti passi.

1. Si fissa arbitrariamente un intorno del numero 0 (cioè di l). Per fare questo si deve considerare un intervallo aperto che contenga il numero a: basterà prendere un intervallo $]a,b[$ con $a < 0 < b$.
2. Si controlla se è possibile oppure no trovare un intorno di 1, cioè un intervallo del tipo $]c,d[$ con $c < 1 < d$, tale che l'immagine tramite f di tutti i punti di questo intorno, tranne al più 1 stesso, cadano in $]a,b[$. Per fare questo basterà risolvere la doppia disequazione $a < f(x) < b$.
3. Si tirano le conclusioni:
   a) se tra le soluzioni della doppia disequazione c'è un intorno di 1, allora la scrittura di limite è verificata;

[1] Segnaliamo che la scelta di considerare sia la coppia $\pm\infty$ che il semplice ∞ non è condivisa da tutti: in molti casi si preferisce adottare solo una delle due definizioni. Tuttavia, come vedremo, esistono situazioni in cui è conveniente avere adottato entrambe le definizioni.

b) se tra le soluzioni della doppia disequazione non c'è un intorno di 1, allora la scrittura di limite non è verificata.

Dal punto di vista tecnico, dunque, tutto si riassume nel risolvere la doppia disequazione $a < f(x) < b$. Procediamo, tenendo conto che $a < 0 < b$.

$$a < f(x) < b \Leftrightarrow a < \frac{x-1}{x+1} < b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > a \\ \frac{x-1}{x+1} < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > a \\ \frac{x-1}{x+1} < b \end{cases}$$

Ora osserviamo che siamo interessati a trovare un intorno di 1, dunque possiamo tranquillamente supporre $x > -1$, di modo che il denominatore $x+1$ delle frazioni è sempre positivo, cosa che ci facilita notevolmente i calcoli.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} > a \\ \frac{x-1}{x+1} < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > ax+a \\ x-1 < bx+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-a) > 1+a \\ x(1-b) < 1+b \end{cases}$$

A questo punto possiamo risolvere banalmente la prima disequazione dividendo per $1-a$ che è sicuramente positivo, in quanto $a < 0$. Per la seconda supponiamo intanto $b < 1$, il che ci permette di risolverla facilmente dividendo per $1-b$. Otteniamo

$$\begin{cases} x > \frac{1+a}{1-a} \\ x < \frac{1+b}{1-b} \end{cases}$$

Per concludere basta osservare che

$$\frac{1+a}{1-a} < 1 \quad \wedge \quad \frac{1+b}{1-b} > 1\,,$$

da cui

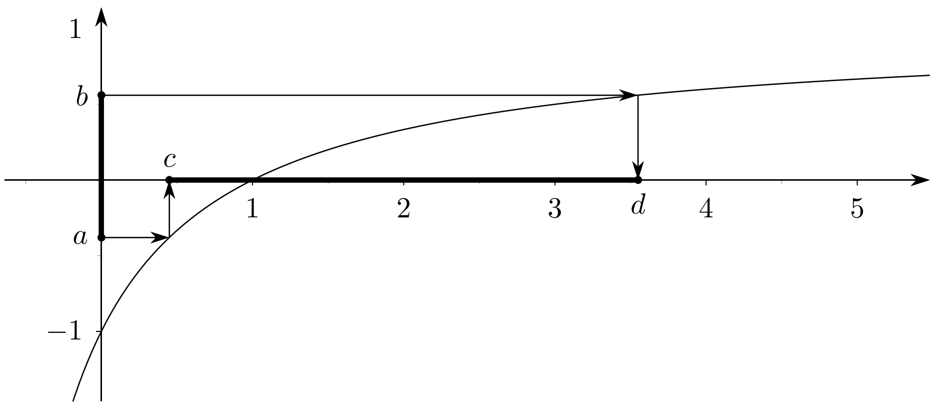
$$\frac{1+a}{1-a} < x < \frac{1+b}{1-b}\,.$$

E questo è un intorno di 1. Se fosse stato $b \geq 1$ la seconda disequazione sarebbe stata sempre vera e la soluzione del sistema sarebbe stata

$$x > \frac{1+a}{1-a}\,,$$

che costituisce ancora un intorno di 1 (questa volta superiormente illimitato, mentre prima era limitato). Dunque la scrittura di limite è corretta.

È utile rendersi conto graficamente del senso della verifica eseguita.



Risulta anche graficamente evidente che l'immagine di un qualunque punto del segmento $]c, d[$ appartiene al segmento $]a, b[$.

La circostanza evidenziata nel grafico può essere espressa con un linguaggio ancora più significativo dal punto di vista geometrico come segue.

> Il limite per x tendente a x_0 di f è l se fissato arbitrariamente un intorno U_l di l sull'asse delle ordinate, è possibile trovare un intorno I_{x_0} di x_0 sull'asse delle ascisse in modo tale che la porzione di "curva grafico" della funzione f che insiste sopra questo intorno I_{x_0} si proietta orizzontalmente sull'asse delle ordinate entro l'intorno U_l scelto, il che comporta che quella porzione risulta tutta interna alla striscia di piano delimitata dalle rette che hanno equazione $y = a$ e $y = b$.

Si noti che si può sempre supporre che l'intorno di l sia "piccolo quanto si vuole": se tutto funziona per gli intorni "piccoli", a maggior ragione funzionerà per gli intorni "grandi".

Risulta naturalmente evidente che il tipo di intorno da fissare per l dipende da l: se $l \in \mathbb{R}$ l'intorno potrà essere un segmento, come nell'esempio che abbiamo prima considerato; se $l \in \{\pm\infty, \infty\}$ allora l'intorno dovrà essere una semiretta opportuna o l'unione di due semirette. Analogo discorso per l'intorno di x_0 che bisogna individuare. Nel caso che sia l che x_0 siano numeri reali (e in questo caso si parla di limite finito per x che tende a un valore finito), è tradizione scegliere gli intorni di l centrati su l e con raggio che viene abitualmente indicato con ε, mentre per gli intorni di x_0 è tradizione cercare intorni centrati su x_0 e con un raggio che viene abitualmente indicato con δ. Con queste convenzioni la definizione di limite finito per x tendente a un valore finito può essere riformulata come segue.

Definizione 4.4 (Limite finito per x tendente a un valore finito)**.** *Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A, con $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che l, con $l \in \mathbb{R}$, è il* limite *di f per x tendente a x_0 se, fissato comunque un $\varepsilon > 0$, è possibile in corrispondenza ad esso trovare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x \in A \text{ tale che } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si abbia } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Questa definizione è anche nota con il nome di *definizione dell'$\varepsilon - \delta$*. Agli effetti pratici, in particolare nelle verifiche dei limiti e nelle dimostrazioni di molti teoremi, è quasi sempre conveniente, nel caso di limiti finiti, scegliere gli intorni di l centrati su l, mentre di solito è più conveniente lasciare completa arbitrarietà per gli intorni di x_0.

Anzi si può addirittura provare il seguente teorema, che facilita notevolmente i calcoli nelle dimostrazioni di molti teoremi.

Teorema 4.5. *Si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esiste un intorno } U \text{ di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in U \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < k\varepsilon \tag{4.2}$$

dove k è un numero reale positivo.

Dimostrazione. Se è vera la (4.1) allora, per definizione, si ha

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ esiste un intorno } U \text{ di } x_0 \text{ tale che } \forall x \in U \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

e questa è proprio la (4.2), con $k = 1$.

Viceversa, se è vera la (4.2), si fissi $\varepsilon > 0$ e si consideri $\varepsilon' = \varepsilon/k$. Poiché ε' è, al pari di ε, arbitrario, sempre per la (4.2), esisterà un intorno U' di x_0 tale che

$$\forall x \in U' \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < k\varepsilon' = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon\,,$$

ma questa è proprio la prova che vale la (4.1). □

In molte situazioni ha interesse esaminare il comportamento di una funzione nei pressi di un dato punto di accumulazione x_0 del suo dominio, ma rimanendo "sulla destra" oppure "sulla sinistra" di x_0 stesso. Per fare questo è sufficiente sostituire un intorno destro o, rispettivamente, sinistro di x_0 al generico intorno presente nella definizione di limite. Precisamente si possono dare le seguenti definizioni.

Definizione 4.6 (Limite destro e sinistro)**.** *Sia data una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A, con eventualmente x_0 anche $\in \{ +\infty, -\infty, \infty \}$. Diremo che l, con eventualmente l anche $\in \{ +\infty, -\infty, \infty \}$, è il* limite destro *(rispettivamente* limite sinistro *di f per x tendente a x_0 se fissato comunque un intorno U_l di l è possibile in corrispondenza trovare un intorno destro $I^+_{x_0}$ (rispettivamente sinistro $I^-_{x_0}$) di x_0 tale che i valori della funzione calcolati in tutti i punti di $I^+_{x_0}$ (rispettivamente $I^-_{x_0}$),* tranne *eventualmente x_0 stesso, cadano nel prefissato intorno U_l di l.*

In questo caso si scrive, rispettivamente,

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \quad , \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l\,.$$

Si dimostri per esercizio il seguente teorema.

Teorema 4.7. *Se x_0 è di accumulazione per il dominio di una funzione f, si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l\,.$$

Si osservi che il concetto di limite destro e sinistro può essere espresso in termini di restrizioni di una funzione. Precisamente il limite destro è il limite della restrizione della funzione agli $x > x_0$, il limite sinistro è il limite della restrizione della funzione agli $x < x_0$. A questo proposito si possono dimostrare le seguenti generalizzazioni del precedente teorema.

Teorema 4.8. *Se per una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha*[(2)]

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

[2]Poiché il concetto di limite ha senso solo per un punto di accumulazione del dominio di una funzione, nel seguito ometteremo di precisare ogni volta questo fatto.
Ometteremo anche, perché evidente, di scrivere ogni volta che le x su cui si calcolano le funzioni devono appartenere, oltreché ai vari intorni via via introdotti, anche al dominio delle funzioni stesse.

e se B è un sottoinsieme di A avente ancora x_0 come punto di accumulazione, allora

$$\lim_{x\to x_0} f|_B(x) = l$$

Teorema 4.9. *Se i limiti delle restrizioni di una funzione a due sottoinsiemi diversi del dominio sono diversi, allora la funzione non ha limite per x tendente a x_0.*

4.3 Teoremi sui limiti

Teorema 4.10 (Teorema dell'unicità del limite)**.** *Se l_1, $l_2 \in \mathbb{R}$ e*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

allora

$$l_1 = l_2\,,$$

cioè "se il limite esiste, è unico".

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $l_1 \neq l_2$, e consideriamo un intorno U_1 di l_1 e uno U_2 di l_2, tra di loro *disgiunti*. In corrispondenza di U_1 si può trovare un intorno I_1 di x_0 tale che l'immagine di tutti i punti di I_1 (tranne eventualmente x_0) stia in U_1; analogamente in corrispondenza di U_2 si può trovare un intorno I_2 di x_0 tale che l'immagine di tutti i punti di I_2 (tranne eventualmente x_0) stia in U_2. Se ora consideriamo i punti di $I = I_1 \cap I_2$, l'immagine dei punti di I dovrebbe cadere contemporaneamente in U_1 e in U_2, cosa impossibile visto che U_1 e U_2 sono disgiunti. □

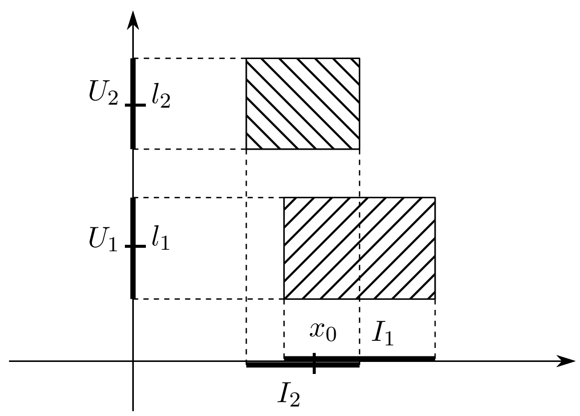
Con qualche precisazione il teorema vale anche se il limite non è finito. Bisogna solo tenere conto in questi casi del fatto che il simbolo ∞ "contiene" sia il simbolo $+\infty$ che $-\infty$ e dunque se, per esempio,

$$\lim_{x\to x_0} = +\infty\,,$$

si ha anche

$$\lim_{x\to x_0} = \infty\,.$$

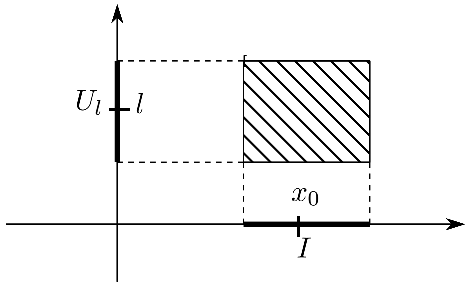
Conviene rendersi conto su un grafico della modalità con cui è stata condotta questa dimostrazione.



Teorema 4.11 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Se una funzione ha limite positivo (anche $+\infty$), allora esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale si ha $f(x) > 0$ (purché naturalmente x stia nel dominio); analogamente se il limite è negativo (anche $-\infty$), allora esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale si ha $f(x) < 0$ (purché naturalmente x stia sempre nel dominio).*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice ed è basata sul fatto che se, per esempio, il limite l è positivo, si può scegliere un intorno U_l di l che stia tutto sul semiasse positivo delle ordinate: ma allora i punti del corrispondente intorno di x_0 (certamente esistente per definizione di limite) avranno tutti immagine positiva. Analogo discorso se il limite è negativo. □

Il seguente grafico rende immediatamente evidente il senso della dimostrazione effettuata.



Teorema 4.12 (Teorema di limitatezza locale)**.** *Se una funzione ha un limite finito per x tendente a x_0, allora esiste un intorno di x_0 dove la f è limitata.*

Dimostrazione. È sufficiente applicare la definizione di limite, avendo l'accortezza di scegliere come intorno di l un segmento limitato. □

Teorema 4.13 (Teorema di confronto)**.** *Siano f, g e h tre funzioni che, in un opportuno intorno di x_0, soddisfano le disuguaglianze*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) .$$

1. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$, *allora anche* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$.
2. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, *allora anche* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
3. *Se* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *allora anche* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

La dimostrazione procede secondo lo schema delle precedenti ed è lasciata per esercizio.

4.4 L'algebra dei limiti

Teorema 4.14 (Limite della somma)**.** *Se è*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R} ,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = l + m .$$

Dimostrazione. È più facile, in questa dimostrazione, usare intorni di l ed m centrati su l ed m stessi. Fissiamo dunque un $\varepsilon > 0$ arbitrario. In corrispondenza ad esso sarà possibile trovare un intorno U_1 (relativo alla funzione f) e un intorno U_2 (relativo alla funzione g) di x_0 tali che

$$\forall x \in U_1 \text{ segue } |f(x) - l| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall x \in U_2 \text{ segue } |g(x) - m| < \varepsilon\,.$$

Consideriamo ora $U = U_1 \cap U_2$: per i punti di U valgono entrambe le disuguaglianze precedenti. Avremo allora:

$$|(f(x) + g(x)) - (l + m)| \le |f(x) - l| + |g(x) - m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

Ma questa è esattamente la prova che $f(x) + g(x)$ tende a $l + m$ (vedi anche il teorema 4.5 nella pagina 64). □

Teorema 4.15 (Limite del prodotto)**.** *Se è*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = l \cdot m\,.$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che, per il teorema di limitatezza locale (Teorema 4.12), esiste un intorno V di x_0 dove g è limitata, ovvero dove $|g(x)| < h$, con un opportuno $h > 0$. Dopodiché fissiamo $\varepsilon > 0$. In corrispondenza ad esso sarà possibile trovare un intorno U_1 (relativo alla funzione f) e un intorno U_2 (relativo alla funzione g) di x_0 tali che

$$\forall x \in U_1 \text{ segue } |f(x) - l| < \varepsilon \quad \wedge \quad \forall x \in U_2 \text{ segue } |g(x) - m| < \varepsilon\,.$$

Consideriamo ora $U = U_1 \cap U_2 \cap V$: per i punti di U valgono entrambe le disuguaglianze precedenti e inoltre l'ipotesi di limitatezza di g. Avremo allora:

$$\begin{aligned}|f(x) \cdot g(x) - l \cdot m| &= |f(x) \cdot g(x) - lg(x) + lg(x) - l \cdot m| = \\ &= |(f(x) - l)g(x) + l(g(x) - m)| \le |(f(x) - l)|\,|g(x)| + |l|\,|g(x) - m| \le \\ &\le \varepsilon \cdot h + |l| \cdot \varepsilon = (h + |l|)\varepsilon = k\varepsilon\,,\end{aligned}$$

e questo basta per concludere. □

Teorema 4.16 (Limite della reciproca)**.** *Se è*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}\,.$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che, se $l \neq 0$, allora per il teorema della permanenza del segno f, in un opportuno intorno V di x_0, è strettamente maggiore di un opportuno numero $h > 0$ (se $l > 0$) oppure minore di un numero $-h$ con $h > 0$ (se $l < 0$), e quindi $|f(x)| > h > 0$, ovvero $1/|f(x)| < 1/h$. Dopodiché fissiamo $\varepsilon > 0$. In corrispondenza ad esso sarà possibile trovare un intorno U_1 di x_0 tale che

$$\forall x \in U_1 \text{ segue } |f(x) - l| < \varepsilon \, .$$

Consideriamo ora $U = U_1 \cap V$. Avremo

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l - f(x)}{f(x) \cdot l} \right| = \frac{|l - f(x)|}{|f(x)|\,|l|} < \frac{\varepsilon}{h \cdot |l|} = k\varepsilon \, ,$$

e questo basta per concludere. □

Si presti particolare attenzione al fatto che questi teoremi (e i successivi sull'algebra dei limiti di cui parleremo) esprimono *solo* condizioni *sufficienti*, ma non necessarie. Per un esempio banale si considerino una qualunque funzione f che non abbia limite per x tendente a x_0 e la sua opposta $-f$ (che ovviamente non ha ancora limite): è chiaro che la somma delle due è la funzione identicamente nulla che ha limite 0.

Questi teoremi possono essere estesi, con opportune limitazioni, anche al caso che i limiti delle funzioni f e g non siano finiti, oppure, per il teorema sulla reciproca, al caso che il limite di f sia 0. Si tratta di una abbastanza lunga serie di teoremi che riguardano i vari casi che si possono presentare. Ci limiteremo a un elenco delle tesi di alcuni di questi teoremi, usando un linguaggio informale ma significativo per le applicazioni.

Consideriamo due funzioni f e g che abbiano limite per x tendente a x_0, con anche la possibilità che uno o entrambi i limiti non siano finiti. Allora, con ovvio significato dei simboli, si hanno i seguenti fatti.

1. $l \pm (+\infty) = \pm\infty \, , \quad \forall l \in \mathbb{R}$.
2. $l \pm (-\infty) = \mp\infty \, , \quad \forall l \in \mathbb{R}$.
3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
4. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
5. $l \cdot (\infty) = \infty \, , \quad \forall l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6. $(\infty) \cdot (\infty) = \infty$.
7. $\dfrac{l}{0} = \infty \, , \quad \forall l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
8. $\dfrac{l}{\infty} = 0 \, , \quad \forall l \in \mathbb{R}$.
9. $\dfrac{\infty}{l} = \infty \, , \quad \forall l \in \mathbb{R}$.

Tutte le volte che serve ed è possibile si applica inoltre la usuale "regola dei segni".

Valgono poi anche i teoremi seguenti, dei quali ci limitiamo ugualmente a dare un enunciato informale.

1. La somma tra una funzione che tende a $+\infty$ e una inferiormente limitata tende a $+\infty$.
2. La somma tra una funzione che tende a $-\infty$ e una superiormente limitata tende a $-\infty$.
3. La somma tra una funzione che tende a ∞ e una limitata tende a ∞.

4. Il prodotto tra una funzione che tende ∞ e una il cui modulo sia maggiore di un $k > 0$ tende all'infinito.
5. Il prodotto tra una funzione che tende a 0 e una limitata tende a 0.

4.4.1 Forme di indecisione

I teoremi sull'algebra dei limiti che abbiamo enunciato *non* ci permettono di trarre alcuna conclusione nei seguenti casi.

1. Somma di due funzioni di cui una tende a $+\infty$ e una a $-\infty$: *caso* $+\infty - \infty$.
2. Prodotto di due funzioni di cui una tende a 0 e l'altra a ∞: *caso* $0 \cdot \infty$.
3. Quoziente di due funzioni che tendono entrambe a 0: *caso* $0/0$.
4. Quoziente di due funzioni che tendono entrambe a ∞: *caso* ∞/∞.

In queste situazioni la determinazione del limite, se esistente, richiede un'analisi caso per caso. Li chiameremo *casi o forme di indecisione* (a volte anche *casi di indeterminazione*). La denominazione può trarre in inganno: non si tratta di casi che non possono essere decisi, ma solo di casi in cui la decisione non può essere presa solo sulla base dei teoremi sui limiti.

4.5 Funzioni monotone

Sussiste il seguente importantissimo teorema, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

Teorema 4.17. *Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e sia $\alpha = \sup(A)$ (anche con $\alpha = +\infty$) con l'ulteriore ipotesi che $\alpha \notin A$ (cioè α non è il massimo di A). In queste ipotesi la funzione ha sempre limite per x tendente ad α e si ha*

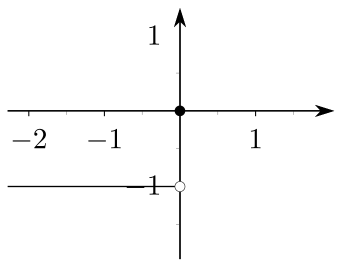
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \begin{cases} \sup(f(A)), & \text{se } f \text{ è crescente;} \\ \inf(f(A)), & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Analogo discorso per il limite con x tendente a $\inf(A)$.

Si tenga presente che è molto importante il fatto che $\alpha \notin A$. Si consideri per esempio la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (vedi la definizione nella pagina 39), ristretta all'intervallo $]-\infty, 0]$. È palese che

$$\lim_{x\to 0} f|_{]-\infty,0]} = -1\,,$$

mentre $\sup(f(]-\infty, 0])) = 0$. Si veda il grafico che segue per rendersi conto del problema.



4.6 Esempi

I seguenti limiti, dove c è un reale qualunque, sono immediate conseguenze della definizione.

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k \quad (f(x) = k$ è una funzione costante).
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$.

Utilizzando solo questi limiti e i teoremi sui limiti si possono fare alcuni esempi di calcolo di limiti[3].

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to +\infty} (x\cdot x) = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = \cdots = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2n} = \cdots = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2n+1} = \cdots = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^n\left(a_n + a_{n-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + a_0\dfrac{1}{x^n}\right) =$
  $= +\infty(a_n + 0 + \cdots + 0) = \operatorname{sgn}(a_n)\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\,(3 - 2/x + 1/x^2)}{x^2\,(2 - 1/x - 5/x)} = \cdots = \dfrac{3}{2}$

Si possono poi, sempre usando solo i limiti appena visti, produrre i seguenti esempi per chiarire il significato dell'espressione "forma di indecisione".

- $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$. La scrittura si presenta inizialmente nella forma $+\infty - \infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 2x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-x) = -\infty$. La scrittura si presenta inizialmente ancora nella forma $+\infty - \infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (0) = 0$. La scrittura si presenta inizialmente ancora nella forma $+\infty - \infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} ((x+1) - x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (1) = 1$. La scrittura si presenta inizialmente ancora nella forma $+\infty - \infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (2) = 2$. La scrittura si presenta inizialmente nella forma $\infty\cdot 0$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} (1) = 1$. La scrittura si presenta inizialmente nella forma $\infty\cdot 0$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. La scrittura si presenta inizialmente ancora nella forma $\infty\cdot 0$.

[3] In questi esempi abbiamo utilizzato, come è d'abitudine, le scritture informali già precedentemente menzionate

- $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x) = +\infty$. La scrittura si presenta ancora inizialmente nella forma $\infty \cdot 0$.

Come gli esempi mostrano chiaramente, in presenza di forme di indecisione identiche si possono avere risultati completamente diversi.

4.7 Limiti, periodicità e valore assoluto

Teorema 4.18. *Sia f una funzione periodica non costante. Allora f non può avere limite per $x \to \pm\infty$.*

Dimostrazione. Sia τ un periodo. Se la funzione f non è costante allora assume almeno 2 valori distinti. Siano $x_1 \neq x_2$ due punti del dominio tali che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Consideriamo gli insiemi

$$E = \{\, x_1 + n\tau \mid n \in \mathbb{N} \,\} \quad , \quad F = \{\, x_2 + n\tau \mid n \in \mathbb{N} \,\} \ .$$

Si tratta chiaramente di due insiemi superiormente illimitati, in ciascuno dei quali la funzione è costante, ma con valori diversi su E e su F. I limiti, per $x \to +\infty$, delle restrizioni di f a E e a F esistono chiaramente, ma con valori diversi, per cui la funzione non può avere limite. Analogo ragionamento per $-\infty$. □

Come conseguenza di questo teorema si può concludere che le funzioni trigonometriche non hanno limite per $x \to \pm\infty$. Tenendo conto di questo è facile portare esempi non banali di cui almeno una è priva di limite mentre la somma ha limite.

- $\lim_{x\to+\infty} \sin^2 x \nexists$, $\lim_{x\to+\infty} \cos^2 x \nexists$, mentre $\lim_{x\to+\infty} (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1$.
- $\lim_{x\to+\infty} \sin x \nexists$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} (\sin x + x) = +\infty$.

In relazione al secondo esempio si provi però, come esercizio, che se una funzione ha limite *finito* e un'altra non ha limite, allora la somma non può avere limite.

Teorema 4.19. *Se una funzione f ha un dato limite l (anche infinito), allora la funzione $|f(x)|$ ha per limite $|l|$ (intendendosi che $|-\infty| = |\infty| = +\infty$).*

Dimostrazione. Consideriamo il caso del limite finito. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste I_{x_0} tale che $\forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\}$ si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$. In corrispondenza agli stessi x si ha

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon \,,$$

e questo basta per concludere. □

Si tenga ben presente che non è vero il viceversa di questo teorema: il modulo di una funzione può benissimo avere limite senza che la funzione ce l'abbia. Si veda l'esempio che segue.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

non ha limite in corrispondenza a nessun x_0. La funzione $|f(x)|$, essendo costantemente uguale a 1, ha limite 1 in corrispondenza a ogni x_0.

La funzione dell'esempio precedente costituisce anche un interessante esempio di una funzione periodica con periodo un numero razionale qualunque, e con il modulo che ha invece come periodo un reale qualunque.

4.8 Funzioni continue

Definizione 4.20 (Funzione continua). *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto qualunque del suo dominio. Si dice che la funzione è* continua *in x_0 se*

$$\forall U_{f(x_0)}\ \exists I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} \text{ si abbia } f(x) \in U_{f(x_0)}\,. \tag{4.3}$$

Si dice che una funzione è *continua a destra* o *a sinistra* in un punto x_0, se sono continue, rispettivamente, la restrizione della funzione agli x maggiori o uguali o, rispettivamente, minori o uguali a x_0.

Una funzione si dice poi *continua in un insieme* E se è continua in ogni punto di E.

È opportuno mettere subito in evidenza le differenze, apparentemente minime ma in realtà sostanziali, tra questa definizione e quella di limite per una funzione. Precisamente:

- nella (4.3) il valore l è sostituito da $f(x_0)$;
- nella (4.3) non si richiede che x_0 sia di accumulazione per A, si richiede invece che x_0 appartenga al dominio;
- nella (4.3) non si esclude il punto x_0 tra quelli dove deve essere vero che $f(x) \in U_{f(x_0)}$.

Si noti poi quanto segue.

- Se il punto x_0 è isolato nel dominio, allora esiste un suo intorno dove non cade alcun altro punto del dominio. Se si prende questo intorno come l'intorno I_{x_0} della definizione (4.3), allora la $f(x) \in U_{f(x_0)}$ è banalmente vera: una funzione qualunque è continua in un punto isolato del dominio.
- Se il punto x_0 è di accumulazione per il dominio (e sta nel dominio), allora la (4.3) è esattamente la condizione perché

  $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

  cioè perché il limite della funzione esista e sia esattamente uguale al valore che la funzione assume nel punto x_0.

  Tenendo conto di quanto detto al punto precedente, è questa la situazione di interesse applicativo.

In sostanza possiamo dire, con un linguaggio significativo anche se formalmente poco rigoroso, che una funzione è continua in un punto x_0 del dominio che sia anche di accumulazione per il dominio se "quando x si avvicina a x_0, $f(x)$ si avvicina a $f(x_0)$".

Detto ancora in altri termini: se si sa che una funzione è continua in un punto x_0 del dominio (e di accumulazione per il dominio), allora il

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

si può calcolare semplicemente "sostituendo x_0 a x". Come vedremo, per una vasta classe di funzioni di grande interesse applicativo, la continuità si può stabilire a priori, almeno nella quasi totalità dei punti del dominio: in questi casi il calcolo del limite non comporta problemi.

4.9 Teoremi sulle funzioni continue

I teoremi sui limiti permettono di enunciare e dimostrare immediatamente i seguenti fatti.

- La somma di due funzioni continue è continua.
- Il prodotto di due funzioni continue è continuo.
- Il quoziente di due funzioni continue è continuo nei punti dove non si annulla il denominatore.
- Il modulo di una funzione continua è continuo.

Nei teoremi sui limiti non abbiamo enunciato esplicitamente un teorema riguardante la composizione di funzioni. In realtà è possibile formulare un teorema generale sul limite della composta di due funzioni, ma si tratta di un teorema delicato e di non facile enunciazione. Molto più semplice il teorema che segue, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato, valido in condizioni più restrittive, ma comunque sufficienti per le applicazioni che vogliamo fare.

Teorema 4.21 (Limite delle funzioni composte)**.** *Siano f e g due funzioni tali che abbia senso considerare la composta $f \circ g$. Sia poi x_0 un punto di accumulazione per il dominio di g. Allora se*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad f \text{ è continua in } l$$

esiste anche il limite della funzione composta per $x \to x_0$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(l)\,.$$

Se invece f non è definita in l (per esempio quando g tende a $\pm\infty$), allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{t \to l} f(t)\,.$$

Conseguenza immediata di questo teorema è che la composta di due funzioni continue è continua.

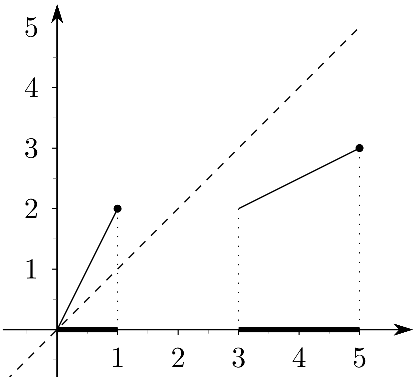
4.9.1 Continuità dell'inversa

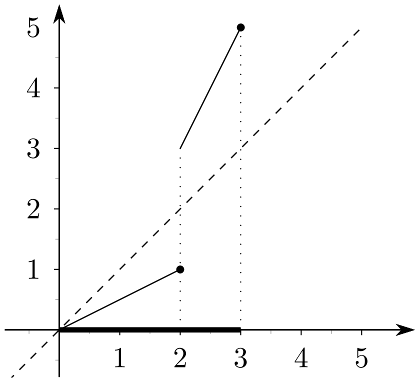
Se una funzione f è strettamente monotona, allora essa è invertibile. Purtroppo può succedere che l'inversa di una funzione continua non sia continua, come mostra il seguente esempio.

Esempio. Sia f la funzione definita da:

$$\begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}, & \text{se } 3 < x \le 5. \end{cases}$$

La funzione è chiaramente continua nel suo dominio, mentre l'inversa non lo è, come mostrano i grafici di f e di f^{-1} qui di seguito rappresentati.





Il problema, nell'esempio appena proposto, è legato al fatto che il dominio di f non è un intervallo. Se consideriamo funzioni definite su intervalli non ci sono problemi, come mostra il teorema che segue, di cui diamo solo l'enunciato.

Teorema 4.22. *Sia f una funzione strettamente monotona e definita in un intervallo I. Allora l'inversa di f è continua.*

Si noti che la funzione f potrebbe anche non essere continua, quello che conta è che sia monotona e definita su un intervallo. In ogni caso a noi interesserà l'applicazione nel caso di funzioni continue.

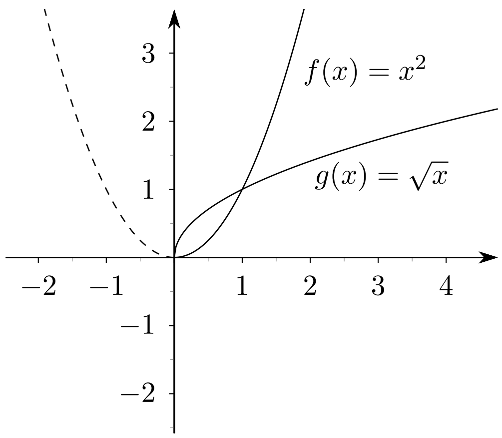
4.10 Funzioni elementari e continuità

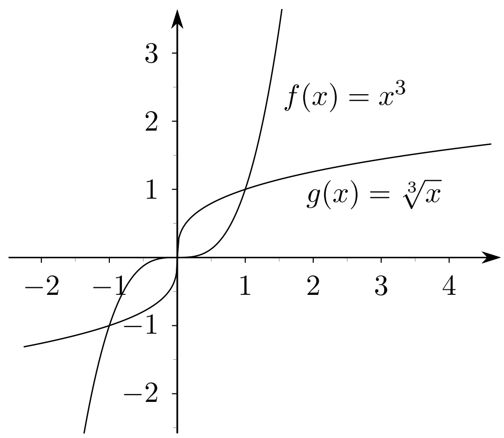
La continuità delle funzioni elementari è una conseguenza quasi immediata dei teoremi che abbiamo enunciato. Vediamo nel dettaglio le situazioni di maggior interesse.

4.10.1 Funzioni razionali e radici

Le funzioni costanti e la funzione $f(x) = x$ sono banalmente continue. La continuità di tutte le funzioni razionali segue allora dai teoremi sulla continuità di somme, prodotti e quozienti.

Per quanto riguarda le funzioni radice n-esima, basta ricordare che esse sono le inverse di funzioni strettamente monotone: precisamente si tratta delle inverse delle funzioni potenza nel caso di n dispari, delle inverse della restrizione delle funzioni potenza ai reali maggiori o uguali a zero, nel caso di n pari. Dunque la continuità segue dal teorema sulla continuità dell'inversa. Per maggiore chiarezza riportiamo i grafici nei casi $n = 2$ e $n = 3$.





4.10.2 Funzioni trigonometriche

Dimostriamo intanto che la funzione seno è continua ovunque, provando che

$$\lim_{x \to c} \sin(x) = \sin(c)\,.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dobbiamo provare che $|\sin x - \sin c| < \varepsilon$ in un opportuno intorno di c. Si ha, usando le formule di prostaferesi,

$$|\sin x - \sin c| = 2\left|\cos\frac{x+c}{2}\right|\left|\sin\frac{x-c}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{|x-c|}{2}\right| \le 2\frac{|x-c|}{2} = |x-c|\ .$$

Se dunque $|x - c| < \varepsilon$, anche $|\sin x - \sin c| < \varepsilon$, e questo basta per concludere (in sostanza nella definizione ε-δ abbiamo preso $\delta = \varepsilon$).

Per la funzione coseno basta osservare che

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ ,$$

e applicare il teorema sulla continuità delle funzioni composte.

Per le altre funzioni basta invocare i teoremi sulla continuità di prodotti e quozienti.

Infine per le funzioni inverse basta invocare il teorema apposito.

4.10.3 Funzioni esponenziali e logaritmo

Ricordiamo che, dato $a > 1$, a^α, è stato definito come il

$$\sup\{\, a^r \mid r < \alpha \wedge r \in \mathbb{Q}\,\}\ .$$

Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, si ha anche

$$a^\alpha = \sup\{\, a^x \mid x < \alpha \wedge x \in \mathbb{R}\,\}\ .$$

Basta allora applicare il teorema sul limite delle funzioni monotone per concludere che si ha

$$\lim_{x \to c} a^x = a^c\,,$$

cioè che la funzione a^x è continua. Analogo discorso per $0 < a < 1$.

La continuità delle funzioni logaritmo segue poi dal teorema della continuità dell'inversa.

4.10.4 Conclusioni ed esempi

Se si tiene anche conto della continuità delle funzioni composte, potremo concludere che le funzioni elementari e quelle costruite da esse mediante somme, prodotti, quozienti, composizione, sono continue in tutti i punti del dominio naturale.

Il calcolo dei limiti per questo tipo di funzioni potrà allora presentare problemi solo se x tende a un punto di accumulazione del dominio che non stia nel dominio, oppure naturalmente se x tende all'infinito (con qualunque segno).

Se si considerano invece funzioni non elementari, bisogna prestare la massima attenzione. Tra i metodi più comuni per costruire funzioni non elementari vi è quello di definire funzioni in modo *composito* o *a tratti* (*piecewise defined* in inglese). Si tratta di una tecnica che abbiamo già usato. Si veda l'esempio che segue.

Esempio. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \leq 1; \\ 3-2ax^2, & \text{se } x > 1; \end{cases} \qquad \text{ove } a \text{ è un reale qualunque.}$$

Si dica per quali a essa è continua.

Se si considera un punto $x \neq 1$, in un intorno di x la funzione coincide con una funzione elementare e dunque è continua(4). Rimane da valutare la continuità in 1. Per questo applichiamo la definizione, calcolando il limite per $x \to 1$ e confrontandone il valore con $f(1)$. Intanto $f(1) = 2$. Poi per calcolare il limite richiesto conviene calcolare separatamente il limite destro e quello sinistro, visto che l'espressione analitica della funzione è diversa a destra e a sinistra di x_0.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3-2ax^2) = 3-2a\,.$$

Dunque dovrà essere

$$3-2a = 2 \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\,.$$

La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 1/2$.

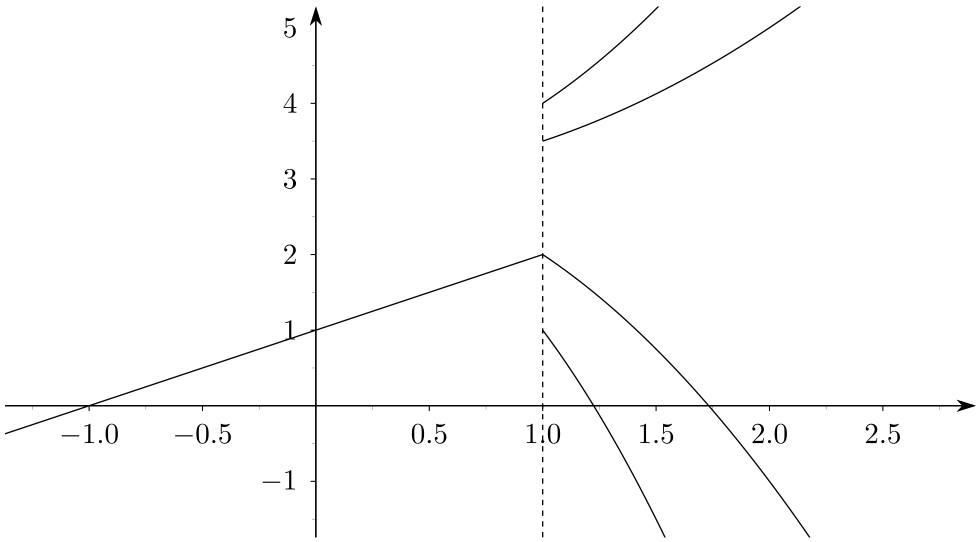
È utile rendersi conto graficamente del ragionamento usato per trarre la conclusione richiesta.

Nel grafico che segue sono rappresentate le funzioni date in corrispondenza dei valori

$$a = 1\,,\; a = \frac{1}{2}\,,\; a = -\frac{1}{4}\,,\; a = -\frac{1}{2}\,,$$

a partire dal basso verso l'alto. Come si può ben vedere, solo il valore di $a = 1/2$ consente una saldatura senza sbalzi tra la parte destra e quella sinistra del grafico.

(4) Si ricordi che la continuità, come del resto il limite, è una questione che riguarda solo un intorno opportuno di un punto e non tutto il dominio della funzione.



4.11 Osservazioni e approfondimenti

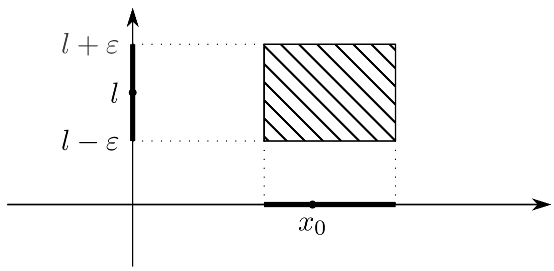
4.11.1 Limiti e dimostrazioni "grafiche"

Nel memorizzare le dimostrazioni dei teoremi via via proposti, è spesso utile visualizzare graficamente il senso dei passaggi effettuati, come abbiamo più volte segnalato. Qui vogliamo proporre un'ulteriore considerazione, relativa al teorema sul limite del modulo di una funzione, con riferimento al teorema 4.19 nella pagina 59 degli appunti.

Il fatto che dall'ipotesi che una funzione abbia limite l segua che ha limite anche il modulo della funzione, si può vedere dalle seguenti considerazioni grafiche.

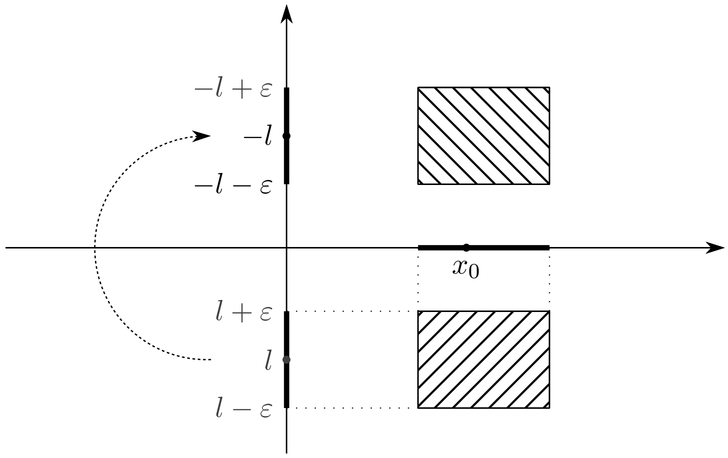
1 - **Il limite l è un reale positivo**

In questo caso prendere il modulo della funzione, almeno "vicino" a x_0, non modifica nulla se si è avuta l'accortezza di prendere un intorno di l tutto sopra l'asse delle ascisse, come è possibile, dunque la conclusione è ovvia.



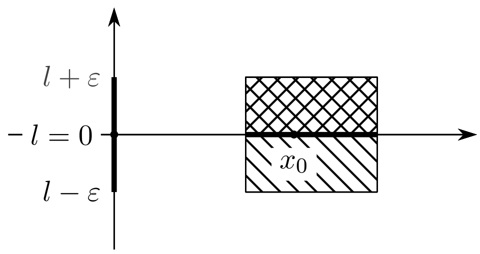
2 - **Il limite l è un reale negativo**

In questo caso passare da una funzione al suo modulo significa "ribaltare" la parte di grafico che sta sotto all'asse delle x, facendone la simmetrica rispetto all'asse x. Siamo interessati solo agli x vicini a x_0 e se abbiamo avuto l'accortezza di considerare un intorno di l situato tutto sotto l'asse delle ascisse, come è possibile, risulterà evidente che si passerà dal limite l al limite $-l$, cioè $|l|$, visto che l è negativo.



3 - **Il limite l vale** 0

In questo caso è sufficiente avere l'accortezza di prendere un intorno di l centrato su l, come è sempre possibile (anzi conveniente nel caso di limiti finiti). L'unica modifica che si ha nel passaggio dalla funzione f al suo modulo (sempre per gli x vicino a x_0) sta nel fatto che i valori dellla funzione modulo di f, anziché essere contenuti in tutto l'intorno fissato di l, saranno contenuti solo nella metà superiore di questo intorno: ma questo va ancora meglio, in quanto nella definizione di limite si chiede solo che questi valori siano contenuti nell'intorno prefissato di l.



4.12 Esercizi

Esercizio 4.1. *Verificare, in base alla definizione di limite, la validità delle seguenti scritture di limite.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

Esercizio 4.2. *Calcolare i seguenti limiti.*

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$.
2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$.
3. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^n+1}{x+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.
6. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Esercizio 4.3. *Calcolare i seguenti limiti.*

1. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.
2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
3. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
4. $\lim_{x\to}$.

Esercizio 4.4. *Trovare gli eventuali punti in cui le seguenti funzioni non sono continue.*

1. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. *La funzione* sgn *è la funzione, di* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$*, definita da*

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \textit{se } x < 0; \\ 0, & \textit{se } x = 0; \\ 1, & \textit{se } x > 0. \end{cases}.$$

2. $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$.
3. $f(x) = x \operatorname{sgn}(x)$.
4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{se } x < 0; \\ \sin x, & \textit{se } x \geq 0. \end{cases}.$
5. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \textit{se } x < \pi/4; \\ \cos x, & \textit{se } x \geq \pi/4. \end{cases}.$

6. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \textit{se } x < \pi/2; \\ \cos x, & \textit{se } x \geq \pi/2. \end{cases}$.

7. $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2)$.

8. $f(x) = \operatorname{sgn}\big((x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

9. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(x))$.

10. $f(x) = \operatorname{sgn}(2 + \sin(x))$.

Esercizio 4.5. *Trovare, se esistono, i valori dei reali a e b affinché la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & \textit{se } x \leq 1; \\ ax + b, & \textit{se } 1 < x < 2; \\ x^2, & \textit{se } x \geq 2. \end{cases}$$

sia continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.6. *Trovare, se esistono, i valori dei reali a, b e c affinché la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + b, & \textit{se } x < 0; \\ 3cx + 2b - 1, & \textit{se } 0 \leq x \leq 1; \\ cx^2 + 2, & \textit{se } x > 1. \end{cases}$$

sia continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4.7. *Trovare gli eventuali punti in cui la funzione seguente è continua.*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{se } x \in \mathbb{Q}; \\ -x, & \textit{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

5 Limiti notevoli. Proprietà delle funzioni continue

5.1 Due limiti notevoli

Teorema 5.1. *Se gli angoli sono misurati in radianti, si ha*

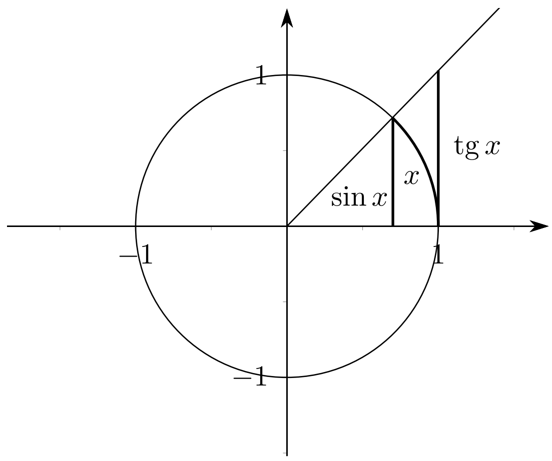
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo preventivamente che la funzione $f(x) = {}^{\sin x}\!/_x$ ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è una funzione pari. Basterà dunque provare che vale la (5.1) per $x \to 0^+$.

Per le note proprietà delle funzioni goniometriche si ha, per $0 < x < {}^{\pi}\!/_2$,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,, \tag{*}$$

come si può dedurre anche dal grafico che segue.



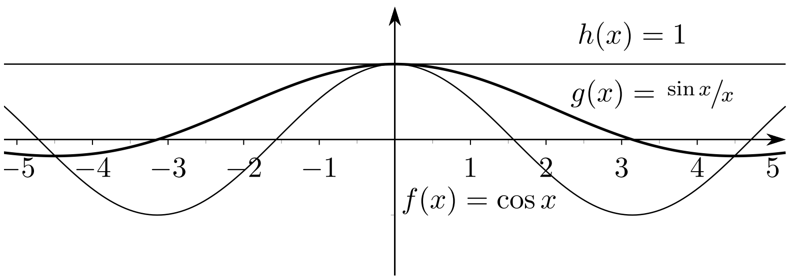
Se dividiamo la $(*)$ per $\sin x$ (sempre positivo e non nullo per $0 < x < {}^{\pi}\!/_2$), otteniamo

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \overset{(\#)}{\Rightarrow} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,,$$

ove il passaggio segnato con $(\#)$ è ottenuto prendendo i reciproci della doppia disuguaglianza precedente.

Per concludere basta ora applicare il teorema di confronto (Teorema 4.13, nella pagina 67), ricordando che la funzione coseno è continua e quindi ha limite 1 se $x \to 0$, che è lo stesso limite della funzione costantemente uguale a 1. □

Come sempre, è utile rendersi conto graficamente di come vanno le cose: nel grafico che segue sono rappresentate le tre funzioni che compaiono nell'ultima disuguaglianza.



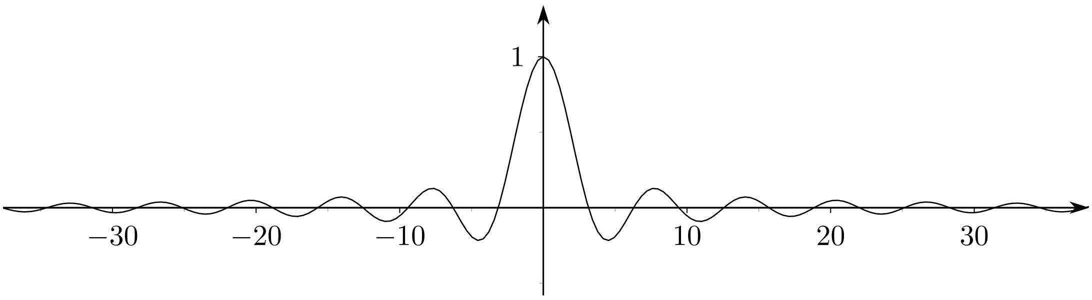
Si noti che, applicando uno dei teoremi sul limite del quoziente (vedi la pagina 69), si può concludere[1] che, invece,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\,, \tag{5.2}$$

in quanto si può scrivere

$$\frac{\sin x}{x} = \sin x \, \frac{1}{x}\,,$$

ottenendo il prodotto tra una funzione limitata e una funzione che tende a 0. Anche di questo fatto è opportuno rendersi conto con un grafico.



Si tenga presente che il limite (5.1) vale *solo se gli angoli sono misurati in radianti.* Se si misurano gli angoli in gradi la disuguaglianza $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ deve essere sostituita dalla

$$\sin x^\circ < x^\circ \, \frac{\pi}{180} < \operatorname{tg} x^\circ\,,$$

come si ricava tenendo conto del legame tra la misura in gradi e in radianti di uno stesso angolo. Da qui segue che

$$\lim_{x^\circ \to 0^\circ} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180}\,.$$

È proprio l'importanza che ha il limite (5.1) nelle applicazioni dell'analisi che fa propendere per l'uso dei radianti nella misura degli angoli. Studiando le derivate troveremo una interpretazione grafica significativa del perché ci sia questa differenza nel valore del limite a seconda del sistema di misura degli angoli.

Enunciamo ora, riservandoci di fornire successivamente la dimostrazione di almeno una parte, il seguente teorema.

[1] Si presti particolare attenzione a questo fatto: è un errore comunissimo pensare che il limite ${}^{\sin x}\!/\!_x$ sia sempre il limite notevole sopra considerato, mentre ciò è vero solo per $x \to 0$.

Teorema 5.2. *La funzione* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, *definita da*

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \tag{5.3}$$

ha limite finito per $x\to\pm\infty$ *e questo limite è un numero irrazionale (addirittura trascendente), strettamente compreso tra* 2 *e* 3.

Il valore di questo importantissimo limite si indica tradizionalmente con "e", e si chiama *Numero di Nepero*[2]. Si pone cioè

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\,. \tag{5.4}$$

Per le applicazioni è importante conoscere un'approssimazione, almeno con alcuni decimali, del numero appena introdotto. Si ha

$$\mathrm{e}\simeq 2.71828\,.$$

Osservazione 5.3. Si noti che la funzione che abbiamo appena considerato è del tipo $(f(x))^{g(x)}$, vedi la (3.17) nella pagina 53, e che, come indicato sempre nella pagina 53, conviene scriverla, scegliendo un'opportuna base a, per esempio $a=2>1$, nella forma

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2^{x\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,.$$

Con questa scrittura appare evidente la difficoltà nel calcolo del limite (5.4): l'esponente di 2 si presenta come il prodotto tra la funzione $g(x)=x$, che tende a $\pm\infty$, e la funzione $f(x)=(1+{}^1/_x)$ che tende a 0 (basta applicare il teorema sul limite delle funzioni composte e ricordare che la funzione $\log_2$ è continua). Siamo dunque in presenza di una *forma di indecisione*.

Segnaliamo anche che è opportuno utilizzare la tecnica qui proposta (trasformare una potenza con esponente e base entrambi variabili in una potenza con solo l'esponente variabile) in tutte le situazioni simili.

Osservazione 5.4. Il numero di Nepero, come è probabilmente già noto, gioca un ruolo fondamentale in matematica: è uno dei due irrazionali trascendenti[3] (l'altro è il π) di uso più comune.

Osservazione 5.5. Per motivi che saranno chiariti successivamente, il numero di Nepero è praticamente l'unico usato in matematica come base delle funzioni esponenziali e quindi delle funzioni logaritmo. Quando la base della funzione esponenziale è il numero e, spesso si dice semplicemente *funzione esponenziale* senza ulteriori precisazioni. Si pone cioè, di norma,

$$\exp(x)=\exp_{\mathrm{e}}(x)=\mathrm{e}^x\,. \tag{5.5}$$

[2] Questo numero si chiama anche *Numero di Eulero* ed è per questo motivo che si indica con "e". Eulero non ha bisogno di presentazioni, Nepero (John Napier) è il matematico scozzese che ha introdotto i logaritmi.

[3] Anche se non possiamo dilungarci sulla distinzione tra irrazionali trascendenti e irrazionali non trascendenti, è opportuno segnalare che gli irrazionali non trascendenti sono sempre soluzioni di equazioni razionali a coefficienti interi, quelli trascendenti no. In particolare sono non trascendenti tutti i numeri costruiti con le operazioni elementari a partire dai radicali.

Anche nel caso della funzione logaritmo in base e, si usa una nomenclatura speciale. Precisamente il logaritmo in base e è detto *logaritmo naturale* e indicato con “ln”. Si pone cioè, di norma,

$$\ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)\,. \tag{5.6}$$

In molte applicazioni ha comunque un interesse particolare anche il logaritmo in base 10: per esso si usa di norma la semplice scrittura “log”, tralasciando l’indicazione della base. Purtroppo queste convenzioni non sono universali e molti usano “log” per il logaritmo naturale, e “Log” per il logaritmo in base 10. Si presti dunque la massima attenzione nella lettura dei testi, e nella risoluzione degli esercizi, alle convenzioni adottate[(4)].

5.2 Altri limiti importanti

5.2.1 Applicazioni dei limiti notevoli

Utilizzando i due limiti notevoli considerati, e applicando i teoremi sui limiti, si possono calcolare alcuni altri limiti di grande importanza. Le tecniche applicate nei calcoli che seguono sono standard in problemi di calcolo di limiti.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

   Si ha infatti:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\times 1 = 1\,.$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1.$

   Il calcolo di questo limite fornisce l’occasione per mostrare la tecnica del *cambiamento di variabile*, di frequentissima applicazione e basata sul teorema del limite delle funzioni composte. Posto $\arcsin x = t$, ovvero $x = \sin t$,, si trova che $t \to 0$ se $x \to 0$. Il limite precedente si può allora calcolare come segue

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1\,.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

   Si procede esattamente come nell’esempio precedente con la sostituzione $\operatorname{arctg} x = t$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

   Si ha:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

[4] Le convenzioni che abbiamo adottato in questi appunti sono quelle ufficiali della normativa ISO 31 − 11. Segnaliamo che questa convenzione è seguita da tutte le calcolatrici tascabili e dalla quasi totalità dei software di calcolo simbolico (eccezione importante è Mathematica, che comunque usa anche in molte altre circostanze notazioni proprie). Il motivo per cui questa normativa è spesso disattesa è legato al fatto che, in linea di principio, essa è rivolta ai fisici e agli ingegneri e non ai “matematici puri”.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

   Si ha:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\ln \mathrm{e}=1\,.$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}.$

   Basta applicare al caso precedente la formula di cambiamento di base nei logaritmi.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$

   Se si pone $\mathrm{e}^x-1=t$, si trova $x=\ln(1+t)$ e inoltre se $x\to 0$, allora $t\to 0$. La conclusione segue ora immediatamente dal limite numero 5..

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

   Si ha
$$\frac{a^x-1}{x}=\ln a\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\ln a\,\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,,$$
   dopodiché la conclusione è immediata.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

   Si ha
$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\,\alpha\,\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,\alpha\,\frac{\ln(1+x)}{x}\,,$$
   dopodiché la conclusione è immediata.

I limiti 5, 6, 7, 8 costituiscono una giustificazione (che diventerà ancora più palese studiando le derivate) del perché la base dei logaritmi e delle funzioni esponenziali è normalmente 1.

5.2.2 Altri limiti relativi ad esponenziali e logaritmi

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$

   Si comincia con l'osservare che, per ogni $x>0$, si ha $\ln x<x$. Infatti se $0<x<1$ $\ln x<0$ e quindi $\ln x<x$; poi, per ogni $n\in\mathbb{N}$, se $\mathrm{e}^n\le x\le \mathrm{e}^{n+1}$, si ha $n\le\ln x\le n+1$ e dunque, ancora, $\ln x<x$. Si ha poi:
$$\ln x<x\Rightarrow \ln\sqrt{x}<\sqrt{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln x<\sqrt{x}\Rightarrow\ln x<2\sqrt{x}\,.$$
   Se dividiamo per x ambo i membri dell'ultima uguaglianza e osserviamo che, per $x>1$, $\ln x>0$, otteniamo
$$0<\frac{\ln x}{x}<2\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}\,.$$
   Poiché l'ultimo membro tende a zero, per il teorema del confronto possiamo concludere nel senso richiesto.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0.$

   Basta solo operare un cambiamento di base nel logaritmo per ricondursi al caso precedente:
$$\frac{\log_a x}{x}=\frac{1}{\ln a}\,\frac{\ln x}{x}\,.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^p}=0,\ p\in\mathbb{R}^+.$

   Si ha
$$\frac{\log_a x}{x^p}=\frac{1}{p}\,\frac{\log_a x^p}{x^p},$$
   da cui segue il risultato voluto.

4. $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^p\log_a x=0,\ p\in\mathbb{R}^+.$

   Si opera il cambiamento di variabile $x={}^1\!/t$, osservando che se $x\to0^+$, allora $t\to+\infty$.
$$x^p\log_a x=\frac{1}{t^p}\log_a\frac{1}{t}=-\frac{\log_a t}{t^p}\,,$$
   da cui segue il risultato voluto.

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty,\ a>1.$

   Si pone $a^x=t$, da cui $x=\log_a t$ e se $x\to+\infty$, anche $t\to+\infty$.
$$\frac{a^x}{x}=\frac{t}{\log_a t}\,.$$
   Questo permette di concludere osservando che si tratta del reciproco del limite numero 2.

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^p}=+\infty,\ a>1\wedge p>0$

   Si può osservare che
$$\frac{a^x}{x^p}=\left(\frac{(a^{1/p})^x}{x}\right)^p=\left(\frac{b^x}{x}\right)^p,$$
   da cui si conclude.

5.3 I teoremi fondamentali sulle funzioni continue

Teorema 5.6 (Zeri di una funzione continua)**.** *Sia $f\colon[a_0,b_0]\to\mathbb{R}$ una funzione continua, tale che*
$$f(a_0)\cdot f(b_0)<0,$$
cioè tale che $f(a_0)$ e $f(b_0)$ abbiano segno opposto.

Allora esiste almeno un punto c di $[a_0,b_0]$ tale che $f(c)=0$.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul teorema di Cantor. Si considera il punto medio, m_0, di $[a_0, b_0]$: se $f(m_0) = 0$ abbiamo finito, se invece $f(m_0) \neq 0$, si considera l'intervallo $[a_1, b_1] = [a_0, m_0]$ se $f(a_0) \cdot f(m_0) < 0$, altrimenti $[a_1, b_1] = [m_0, b_0]$: si avrà in ogni caso $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Ripetendo il discorso su $[a_1, b_1]$, o si conclude con un punto c come richiesto o si procede. Dunque o si trova a un certo punto un c adatto e si conclude, o si ottiene una successione di intervalli inscatolati la cui ampiezza tende a 0. In questo secondo caso, sia c l'unico punto comune a tutti gli intervalli. Vogliamo provare che $f(c) = 0$. Se per caso fosse $f(c) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno di c dove f è diversa da 0. Ma ciò non può essere in quanto in questo intorno di c deve essere contenuto almeno uno degli intervalli precedentemente costruiti (in quanto la loro ampiezza tende a 0), e sugli estremi di questo intervallo la f ha valori di segno opposto. □

Il metodo usato in questa dimostrazione si chiama anche *metodo di bisezione* ed è anche un metodo pratico per trovare una approssimazione di uno zero, nel caso non sia possibile trovarlo con i metodi tradizionali dell'algebra.

Segnaliamo che, anche in casi semplici, è possibile che "occorrano tutti i passi" della dimostrazione, cioè che non si concluda in un numero finito di passi: basta considerare la funzione $f(x) = x^2 - 2$, nell'intervallo $[0, 2]$. Si ha $f(0) = -2$ e $f(2) = 2$: siamo dunque nelle condizioni di applicare il teorema, ma non potremo mai trovare la radice tra punti che si ottengono dividendo successivamente a metà gli intervalli via via costruiti, perché tutti questi punti sono razionali, mentre l'unico zero della funzione in $[0, 2]$ è $\sqrt{2}$ che è irrazionale.

Il teorema vale anche se l'intervallo di definizione della funzione non è chiuso oppure non è limitato. Basta sostituire i valori $f(a_0)$ e $f(b_0)$ con i limiti da destra, sinistra, o all'infinito. La dimostrazione di questa "estensione" del teorema è una conseguenza del teorema di permanenza del segno e del teorema degli zeri che abbiamo provato. I volenterosi possono farla come utile esercizio.

Teorema 5.7 (Di connessione, o "Di tutti i valori", o "Dei valori intermedi")**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, $f\colon [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. Se $f(a) = f(b)$ non c'è nulla da provare, altrimenti basta prendere un γ tra $f(a)$ e $f(b)$ e applicare il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - \gamma$. □

Presi due punti c e d arbitrariamente tra a e b, il teorema si può applicare anche all'intervallo $[c, d]$: se ne deduce che la funzione assume tutti i valori compresi tra due suoi valori qualunque. Per questo si chiama "teorema di tutti i valori".

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, l'ultimo dei teoremi che ci interessano relativamente alle funzioni continue.

Teorema 5.8 (Di Weierstrass)**.** *Se una funzione f è continua in un insieme A* chiuso e limitato*, allora assume massimo e minimo, cioè esistono un punto c e un punto d di A tali che $f(c)$ sia il massimo e $f(d)$ il minimo dell'insieme immagine della funzione.*

5.4 La continuità uniforme (cenni)

Riesaminiamo la definizione di continuità per una funzione, in un punto non isolato del dominio:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Questo significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \text{ con } |x - x_0| < \delta \text{ si abbia } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Detto in altri termini,

"punti sufficientemente vicini a x_0 hanno immagini vicine quanto si vuole a $f(x_0)$".

Ci possiamo chiedere: da qui è per caso possibile dedurre che "punti vicini tra di loro hanno immagini vicine tra di loro"? Purtroppo la risposta è negativa, come mostra l'esempio della funzione $f(x) = x^2$. Se prendiamo un $\delta > 0$ e consideriamo i punti $x_1 = {}^1\!/\!_\delta$ e $x_2 = {}^1\!/\!_\delta + {}^\delta\!/\!_2$, la loro distanza è ${}^\delta\!/\!_2$, e può essere resa piccola quanto si vuole pur di prendere δ abbastanza piccolo. La distanza tra $f(x_1) = x_1^2$ e $f(x_2) = x_2^2$ è data da $1 + {}^{\delta^2}\!/\!_4$ e dunque è sempre maggiore di 1, cioè questa distanza non può essere resa arbitrariamente piccola.

Si dà allora la seguente definizione.

Definizione 5.9. *Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* uniformemente continua *se, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile in corrispondenza trovare un $\delta > 0$, tale che, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 con $|x_1 - x_2| < \delta$, si abbia $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.*

È evidente che una funzione uniformemente continua è anche continua, cioè che il concetto di continuità uniforme è più restrittivo che non quello di continuità, tuttavia l'esempio precedente mostra che non è vero il viceversa. Per la funzione $f(x) = x^2$, se fisso un $\varepsilon < 1$, non potrò mai trovare un δ che soddisfi alle richieste: qualunque sia δ trovo sempre due punti come quelli considerati che hanno distanza minore di δ e con la distanza delle immagini maggiore di ε. Si osservi che questa caratteristica è intuitivamente evidente per la funzione $f(x) = x^2$. La cosa può essere espressa, con linguaggio significativo anche se poco rigoroso, nel seguente modo: se prendo una coppia di punti "molto lontani dallo 0", anche se vicinissimi tra di loro, la distanza delle immagini potrà anche essere "grande", in quanto il grafico della funzione tende a essere "molto verticale" per x molto grandi.

Vale comunque il seguente importante teorema, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

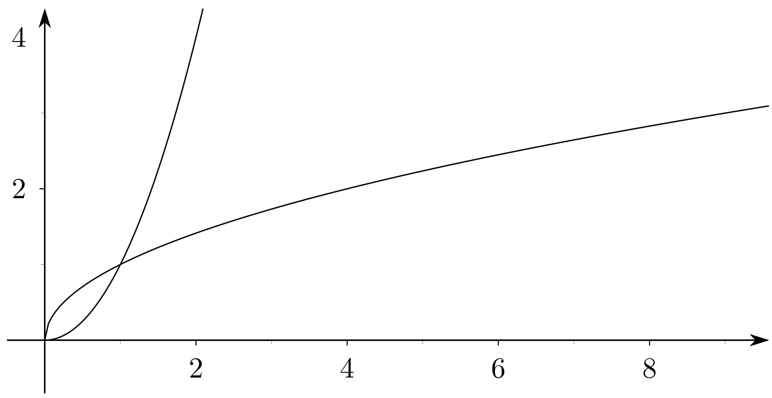
Teorema 5.10 (Di Heine)**.** *Ogni funzione continua e definita in un insieme chiuso e limitato è uniformemente continua.*

Si badi bene che questo teorema esprime solo una condizione sufficiente: anche funzioni continue definite in insiemi non chiusi o non limitati possono essere uniformemente continue. un esempio è fornito dalla funzione $f(x) = \sqrt{x}$, nell'intervallo $[1, +\infty[$. Dati infatti due punti x_1 e x_2, entrambi maggiori di 1, si ha:

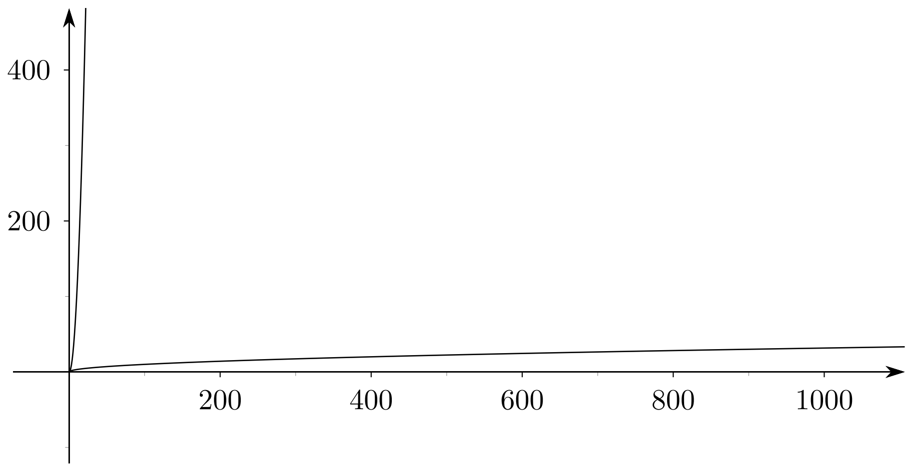
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < \frac{|x_1 - x_2|}{2}\,.$$

Se si prende $\delta = 2\varepsilon$ si ha subito che quando i due punti x_1 e x_2 distano meno di δ, le loro immagini distano meno di ε.

Si noti anche che la differenza con la funzione x^2 sopra considerata è costituita dal fatto che. mentre x^2 diventa "molto verticale" per x grandi, la funzione $\sqrt{x}$ rimane invece sempre "abbastanza piatta" anche per x grandi. Si vedano i due grafici, già comunque altre volte considerati.



La cosa diventa particolarmente evidente usando una scala opportuna che mostri le parti di grafico "lontane dall'origine".



Non insistiamo oltre su questo pur importante concetto, segnalando comunque che ne faremo uso nella teoria dell'integrazione delle funzioni continue.

5.5 Osservazioni e approfondimenti vari

5.5.1 Osservazioni sulla continuità

Come è noto una funzione è continua in un punto x_0 *non isolato* del suo dominio se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Se invece il punto x_0 è isolato nel dominio, allora f è automaticamente continua in x_0.

La contintuità di una funzione in x_0 ha dunque interesse solo in punti non isolati del dominio e richiede:

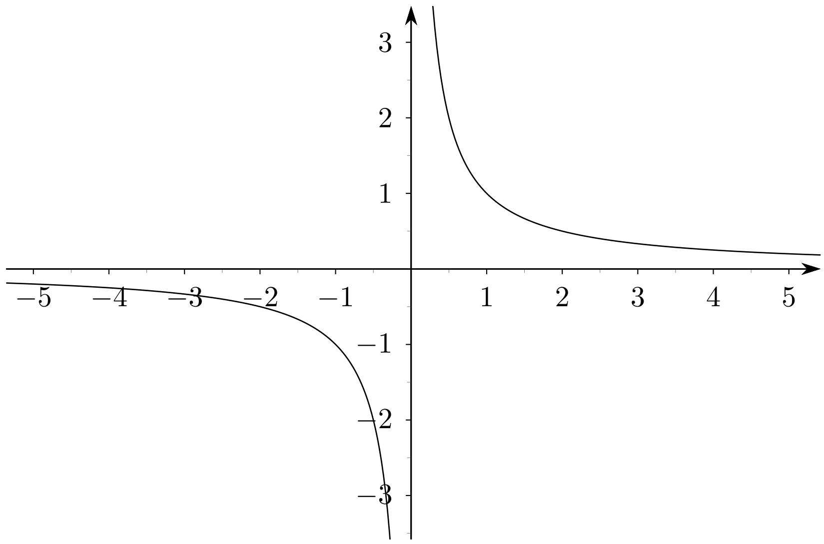
1. che il punto x_0 stia nel dominio;
2. che il limite della funzione per x tendente a x_0 esista finito;
3. che detto limite sia esattamente uguale al valore che la funzione assume in x_0.

Fissiamo particolarmente l'attenzione sulla prima condizione, perché in molti testi si usano espressioni, a nostro avviso, formalmente scorrette. Consideriamo alcuni esempi per chiarire il problema.

Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Il suo grafico è proposto qui di seguito.



Naturalmente, poiché 0 è di accumulazione per il dominio della funzione, ha perfettamente senso ricercare il limite per $x \to 0$ e si ha, banalmente,

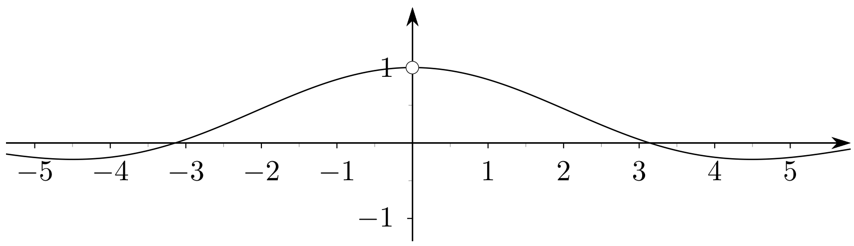
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \,,$$

ma non ha invece alcun senso chiedersi se la funzione è o no continua in 0.

Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.



Naturalmente, poiché 0 è di accumulazione per il dominio della funzione, anche in questo caso ha perfettamente senso ricercare il limite per $x \to 0$ e si ha, come è ben noto,

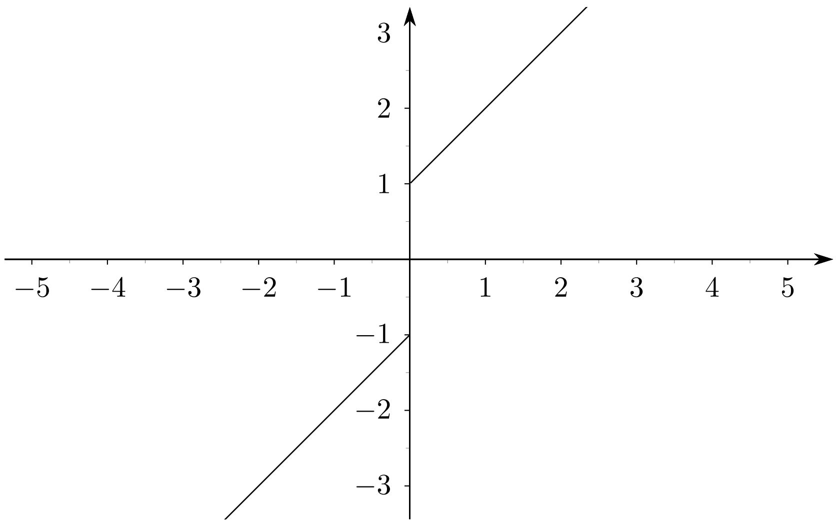
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

ma, anche in questo caso, non ha alcun chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = x + \frac{|x|}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.



Come nei due casi precedenti, poiché 0 è di accumulazione per il dominio della funzione, anche in questo caso ha perfettamente senso ricercare il limite per $x \to 0$ e si ha

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} x + \frac{|x|}{x} = -1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x + \frac{|x|}{x} = +1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} x + \frac{|x|}{x} = \nexists\,,$$

ma, ancora una volta, non ha alcun senso chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

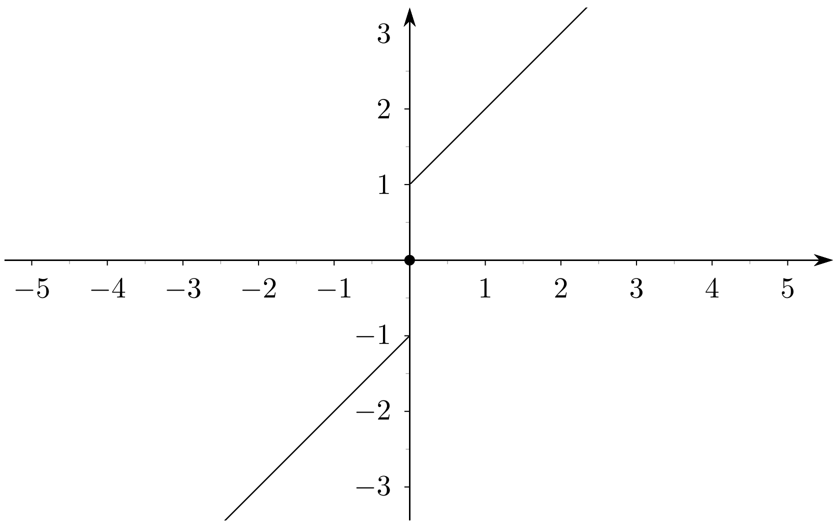
Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = x + \operatorname{sgn}(x)$$

ha come dominio naturale tutto $\mathbb{R}$ e dunque ha perfettamente senso chiedersi se essa è continua oppure no in corrispondenza a un qualunque reale. Ci interessa in particolare il punto 0. È immediato constatare che

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} x + \operatorname{sgn}(x) = -1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x + \operatorname{sgn}(x) = +1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} x + \operatorname{sgn}(x) = \nexists\,,$$

esattamente come nell'esempio precedente. Questa volta però, a differenza di prima, possiamo concludere che la funzione *non è continua* in 0. Si veda il grafico, che mostra come l'unica differenza con la funzione dell'esempio precedente sia costituita dal fatto che ora il punto 0 sta nel dominio.



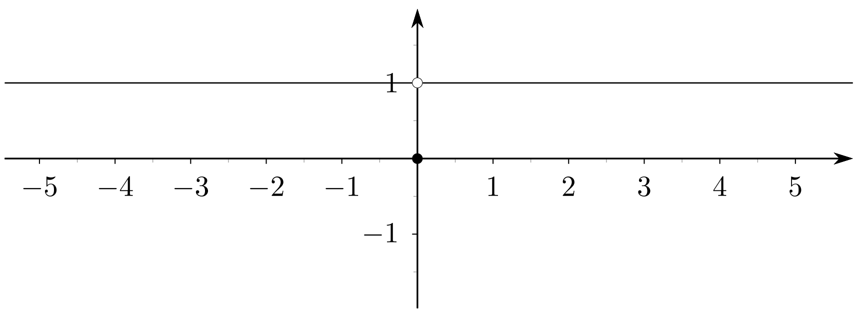
Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = |\mathrm{sgn}(x)|$$

ha come dominio naturale tutto $\mathbb{R}$ e dunque ha perfettamente senso chiedersi se essa è continua oppure no in corrispondenza a un qualunque reale. Ci interessa in particolare il punto 0. È immediato constatare che

$$\lim_{x \to 0} |\mathrm{sgn}(x)| = 1 \neq f(0) = 0\,.$$

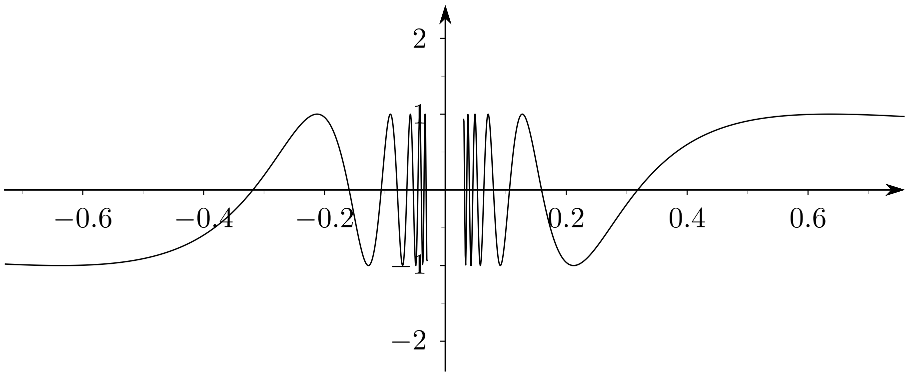
Anche ora possiamo concludere che la funzione *non è continua* in 0, seppure per una ragione diversa da prima (il limite esiste ma non coincide con il valore della funzione quando $x \to 0$). Il grafico che segue rende evidente il motivo della non continuità.



Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita.* Si veda il grafico di seguito proposto.

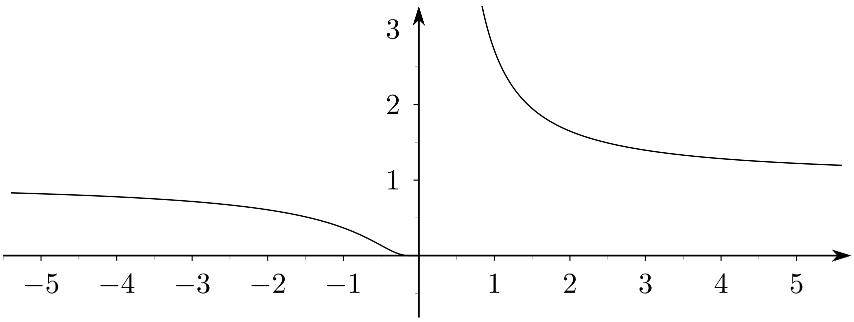


Anche in questo caso possiamo ricercare il limite per $x \to 0$ e troviamo, come è ben noto, che il limite non esiste, nemmeno se consideriamo il limite destro o quello sinistro; naturalmente non ha ancora alcun senso chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Esempio. La funzione definita da

$$f(x) = \mathrm{e}^{1/x} \quad \left(= \exp\frac{1}{x}\right)$$

ha come dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e, nel suo dominio, è sempre continua. Nel punto 0 la funzione non è definita, pertanto non è *né continua*, *né non continua*, semplicemente *non esiste*, ovvero *non è definita*. Si veda il grafico di seguito proposto.



Ancora una volta possiamo ricercare il limite per $x \to 0$ e troviamo

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \exp\frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \exp\frac{1}{x} = +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \exp\frac{1}{x} = \nexists\,,$$

ma, come ormai dovrebbe essere chiaro, non ha alcun senso chiedersi se la funzione è continua oppure no in 0.

Gli esempi che abbiamo proposto si riferiscono sempre a funzioni che sono non definite o non continue in un solo punto, che è comunque è di accumulazione per il dominio della funzione. In tutti i casi infatti abbiamo potuto ricercare il limite della funzione. È entrata nell'uso comune una nomenclatura per classificare le varie situazioni che si possono presentare (e che non sono solo quelle qui proposte). Anche se questa classificazione ha un certo interesse, non la riportiamo per evitare inutili confusioni, segnalando solo quanto segue.

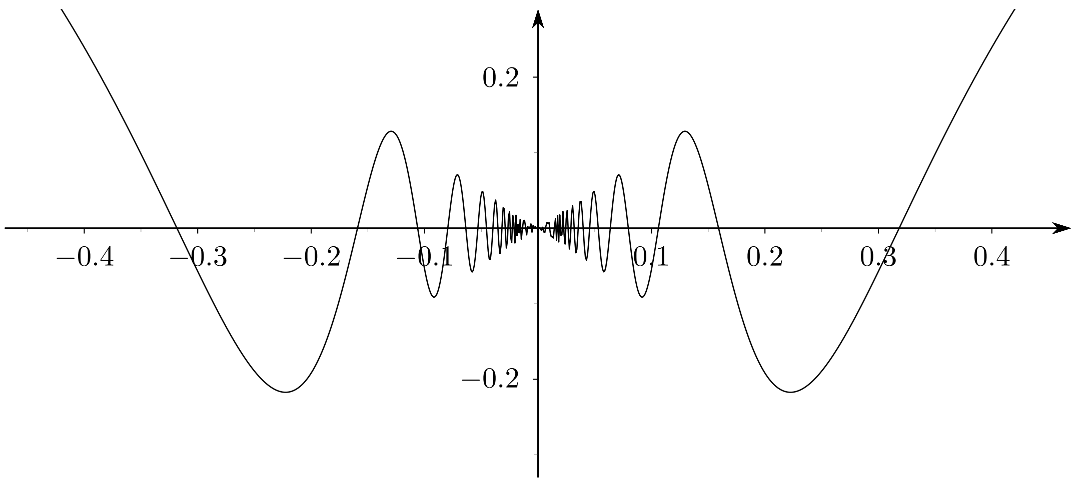
1. In situazioni in cui il limite destro e sinistro di una funzione per $x \to x_0$ esistono finiti ma diversi, si usa dire che la funzione presenta un *salto* in corrispondenza di x_0, indipendentemente dal fatto che si possa o no parlare di continuità.
2. In situazioni in cui la funzione ha un limite finito per $x \to x_0$
   - se x_0 *non appartiene* al dominio della funzione, si può *prolungare per continuità* in x_0 ponendo
   $$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)\,,$$
   ottenendo così una funzione definita e continua anche in x_0;
   - se x_0 *appartiene* al dominio della funzione, si può costruire una nuova funzione g ponendo
   $$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x_0; \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{se } x = x_0; \end{cases}$$
   si ottiene così una funzione continua *anche* in x_0 e che differisce da f solo nel punto x_0.

5.5.2 Proprietà "grafiche" della continuità

È tradizione pensare alle funzioni continue come a funzioni il cui grafico *si può tracciare senza staccare la penna dal foglio*. Gli esempi proposti sopra mostrano come l'espressione può non avere alcun senso. Si può naturalmente obiettare, a proposito di questi esempi, che la cosa è evidente visto che anche nel dominio c'è una lacuna. Per rispondere a questa obiezione consideriamo l'esempio seguente di funzione il cui dominio non ha alcuna lacuna.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

È immediato constatare che la funzione è ovunque continua. Il grafico è proposto qui di seguito.



Anche se non è facile provarlo, il tratto di grafico della funzione compreso in un intorno (anche "molto piccolo") dell'origine ha sempre lunghezza infinita: che senso può avere allora l'affermazione che detto grafico è tracciabile senza staccare la penna dal foglio?

5.6 Esercizi

Esercizio 5.1. *Usando i limiti notevoli si calcolino i seguenti limiti.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 3x}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$, *ove* α *è un reale qualunque.*
8. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$, *ove* α *è un reale qualunque.*
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$, *ove* α *e* β *sono due reali qualunque.*
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{1-\cos x}$.
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}$.
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$.
15. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$. *(Osservare che* $1+e^x=e^x(e^{-x}+1)$*).*
16. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-\ln x-x^{25}}{x^3}$.

17. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x$.

18. $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$.

Esercizio 5.2. *Si porti un esempio di funzione definita in un intervallo chiuso e limitato, che assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo, ma che non si annulla mai.*

Esercizio 5.3. *Si porti un esempio di funzione definita in un intervallo, discontinua in almeno un punto dell'intervallo, che assume massimo e minimo nell'intervallo e anche tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.*

Esercizio 5.4. *Dire se le seguenti equazioni hanno o no almeno una soluzione in* $\mathbb{R}$.

1. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
2. $x^5 + x\sqrt{3} + 1 = 0$.
3. $x + \ln x = 0$.
4. $x + \mathrm{e}^x = 0$.

6 Derivate per funzioni reali di variabile reale

6.1 Definizione di derivata. Prime proprietà

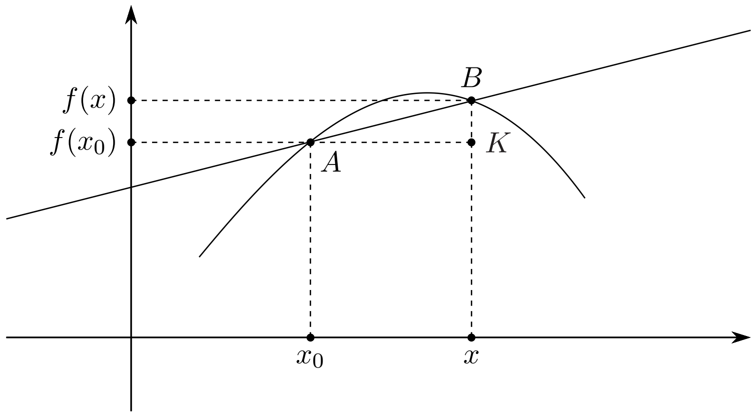
Nel seguito, salvo avviso contrario, parlando di dominio di una funzione (reale di variabile reale) sottintenderemo sempre che si tratta di intervalli o unioni di intervalli.

Definizione 6.1. *Data una funzione* $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e un punto* $x_0 \in A$*, la funzione*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}\,, \tag{6.1}$$

si chiama rapporto incrementale *della funzione* f *relativa al punto* x_0 *e all'incremento* $x - x_0$.

È utile rendersi conto del significato geometrico del rapporto incrementale. Esaminando il grafico che segue, si verifica facilmente che si tratta del coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(x_0\,, f(x_0))$ e $B(x, f(x))$, retta che si chiama *secante* il grafico.



Esempio. Siano $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 \geq 0$. Si ha, per $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\,.$$

Poiché il punto x_0 è un punto di un intervallo, esso è sicuramente di accumulazione per $A \setminus \{x_0\}$. Ha dunque senso calcolare il limite per $x \to x_0$ del rapporto incrementale. Nell'esempio precedente, se $x_0 = 0$ ha senso solo il limite destro e tale limite vale $+\infty$; se invece $x_0 > 0$ ha senso il limite normale e tale limite vale $1/2\sqrt{x_0}$.

Mostriamo subito su un esempio che tale limite può non esistere. Per questo basta considerare la funzione $f(x) = |x|$ e il punto $x_0 = 0$. Si ha, per $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x}\,,$$

ed è immediato provare che si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1\,,$$

dal che si conclude che il limite non esiste.

Ha particolare interesse il fatto che il limite del rapporto incrementale esista finito. Si dà in questo caso la seguente definizione.

Definizione 6.2. *Nelle ipotesi della definizione 6.1 precedente, se il limite del rapporto incrementale (eventualmente solo destro o solo sinistro)* esiste *ed è* finito*, la funzione f si dice* derivabile *in x_0 e il valore di tale limite si chiama* derivata *di f in x_0 e si indica con uno dei simboli*

$$f'(x_0)\,, \quad (\mathrm{D}f)(x_0)\,, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,. \tag{6.2}$$

Naturalmente se il limite vale solo da destra o da sinistra si parlerà di derivata destra o sinistra rispettivamente.

Osservazione 6.3. Alcuni attribuiscono il nome di derivata della funzione f in x_0 al limite del rapporto incrementale *anche nel caso di limite infinito*, parlando in questo caso di *derivata infinita*. Si tratta ovviamente di una questione di scelta personale. Per motivi che saranno chiariti subito dopo il teorema che segue, riteniamo sia preferibile parlare di derivata *solo* nel caso di limite finito.

Teorema 6.4 (Continuità delle funzioni derivabili)**.** *Se una funzione f è derivabile nel punto x_0 del suo dominio, allora f è continua in x_0.*

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice riscrittura della definizione di continuità. Per $x \neq x_0$ si ha:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\,.$$

Se ora $x \to x_0$, il secondo membro tende al prodotto $f'(x_0)$, che esiste finito per ipotesi, e 0, dunque tende a 0. Ma allora $f(x) \to f(x_0)$, ovvero la f è continua in x_0. □

Osservazione 6.5. Se il limite del rapporto incrementale fosse infinito, nulla si potrebbe dire del limite di $f(x) - f(x_0)$, in quanto si otterrebbe la forma di indecisione $\infty \cdot 0$. Nel caso di limite del rapporto incrementale infinito la funzione può essere continua oppure no, come mostrano i due esempi che seguono.

Esempio. Sia $f(x)) = \sqrt[3]{x}$, e $x_0 = 0$. Allora la funzione è chiaramente continua in 0, ma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\,.$$

Esempio. Sia $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, e $x_0 = 0$. Allora la funzione è chiaramente non continua in 0 e inoltre

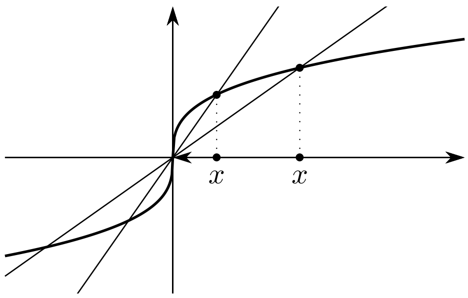
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{x}\,.$$

Conviene calcolare separatamente il limite destro e sinistro. Se ricordiamo che per $x > 0$ $f(x) = 1$, mentre per $x < 0$ $f(x) = -1$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,,$$

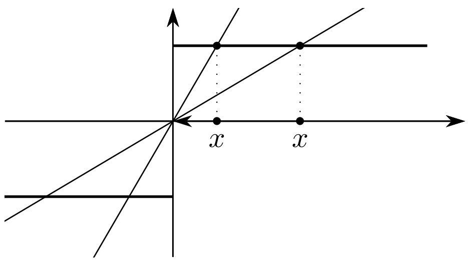
dal che si conclude che il limite del rapporto incrementale vale $+\infty$.

Come al solito, è utile rendersi conto graficamente di quello che succede.



Risulta evidente dal grafico, relativo alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, che quanto più x si avvicina a 0, tanto più la secante tende a diventare verticale, ovvero il suo coefficiente angolare cresce indefinitamente. La "posizione limite della secante" corrisponde a una retta tangente al grafico che risulta essere verticale.

Veniamo ora alla funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$



La situazione è molto simile alla precedente, solo che ora dal punto di vista geometrico la "posizione limite della secante" non corrisponde ad alcuna retta tangente.

Si noti che, come prova l'esempio della funzione $f(x) = |x|$ sopra considerato, non vale il viceversa di questo teorema: una funzione può benissimo essere continua in un punto, senza essere ivi derivabile. Il teorema può anche essere riformularo come segue:

Teorema 6.4 *Condizione necessaria ma non sufficiente perché una funzione sia derivabile in un punto x_0, è che sia continua in x_0.*

Sulla base di questo teorema si osservi che la ricerca della derivata di una funzione, ovvero del limite del rapporto incrementale, non è banale in quanto, dovendo essere la funzione continua perché il limite possa esistere finito, il limite stesso si presenta sempre nella forma di indecisione $0/0$.

Tenendo anche conto degli esempi precedenti, possiamo concludere che la derivabilità di una funzione in un punto x_0 del suo dominio può essere interpretata come la condizione per l'esistenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0\,,\ f(x_0))$. Se ne deduce che se f è una funzione derivabile in x_0 l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0\,,\ f(x_0))$ è data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{6.3}$$

Può naturalmente succedere che una funzione f sia derivabile in tutti i punti del suo dominio, o almeno in un sottoinsieme dello stesso. Si dà per questo la seguente definizione.

Definizione 6.6. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $B \subseteq A$. Allora la funzione*

$$x \mapsto f'(x), \ \textit{di } B \textit{ in } \mathbb{R}$$

si chiama funzione derivata *di f e si indica con uno dei simboli*[1] *seguenti*

$$f', \quad \mathrm{D}f, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}. \tag{6.4}$$

Osservazione 6.7. Se, nella definizione di rapporto incrementale e successivamente di derivata, poniamo $x - x_0 = \Delta x = h$, possiamo riscrivere la definizione di derivata come

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ o anche } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{6.5}$$

Questa scrittura, perfettamente equivalente alla precedente, facilita le cose (solo dal punto di vista formale!) in alcuni casi.

Teorema 6.8. *Una funzione f è derivabile in un punto x_0 se e solo se esistono una costante a e una funzione $\omega(h)$ tale che $\omega(h) \to 0$ se $h \to 0$ per cui si abbia*[2]*:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\omega(h), \tag{6.6}$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia derivabile e poniamo $a = f'(x_0)$ e

$$\omega(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), & \text{se } h \neq 0; \\ 0, & \text{se } h = 0. \end{cases}$$

Da qui segue subito la (6.6).

Viceversa supponiamo che valga la (6.6) e dividiamone ambo i membri per $h \, (\neq 0)$, ottenendo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = \omega(h).$$

Se passiamo al limite otteniamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = 0,$$

ovvero che la funzione è derivabile e che la derivata in x_0 è a. □

[1] Il primo dei tre simboli è sostanzialmente dovuto a Newton, che però usava un punto sovrapposto al simbolo di funzione, $\dot{f}$, anziché un apice. La notazione col punto è ancora in largo uso nei testi di meccanica per indicare la derivata di una funzione in cui la variabile indipendente sia il tempo. Il terzo dei tre simboli è invece dovuto a Leibniz e ricorda il fatto che, in base alla definizione, la derivata nasce come rapporto tra due quantità "infinitamente piccole": la variazione di una funzione e la variazione della variabile indipendente. Entrambe le notazioni hanno i loro vantaggi. Segnaliamo che Newton e Leibniz furono gli "inventori", in maniera indipendente uno dall'altro, del calcolo differenziale, ovvero della "teoria delle derivate".

[2] Ribadiamo ancora una volta che il dominio delle funzioni via via considerate, quando non precisato, è quello che "naturalmente" di deduce dal contesto. Per esempio la funzione ω che stiamo considerando avrà come dominio tutti gli h tali che $x_0 + h$ stia nel dominio della funzione f.

6.2 Algebra delle derivate

Teorema 6.9. *Se due funzioni f e g sono derivabili in un punto x_0, anche la somma, il prodotto e il quoziente (quest'ultimo se g è non nulla in x_0) sono derivabili e si ha precisamente quanto segue.*

1. $\mathrm{D}(f+g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $\mathrm{D}(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
3. $\mathrm{D}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Dimostrazione. Si tratta di dimostrazioni elementari che richiedono solo una attenta applicazione della definizione di derivata.

1. Per la somma:
$$\frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$
e prendendo il limite per $x \to x_0$ si conclude.
2. Per il prodotto:
$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.\end{aligned}$$
Basta ora calcolare il limite, ricordando anche che g è continua per cui $g(x) \to g(x_0)$ se $x \to x_0$.
3. Per il quoziente si deve osservare preventivamente che se $g(x_0) \neq 0$, allora $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0. Allora
$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)\left(\frac{1}{x-x_0}\right) &= \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{1}{x-x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}\,\frac{1}{x-x_0} = \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} - \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\right) = \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x_0) - f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right),\end{aligned}$$
e questo ci permette di concludere, esattamente come nel caso del prodotto.

□

Se teniamo conto che, banalmente, la derivata di una funzione costante è identicamente nulla, possiamo anche scrivere che $\mathrm{D}(cf)(x_0) = cf'(x_0)$, dove abbiamo usato la regola di derivazione del prodotto. Si può allora concludere con il seguente enunciato.

Teorema 6.10 (Linearità dell'operatore derivata)**.** *Se f e g sono funzioni derivabili in un insieme A, anche ogni loro combinazione lineare è derivabile e si ha*

$$\mathrm{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{D}(f) + \mu\,\mathrm{D}(g)\,, \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\,. \tag{6.7}$$

Teorema 6.11 (Derivata della funzione composta)**.** *Siano f e g due funzioni tali che abbia senso considerare la composta $f \circ g$. Se la funzione g è derivabile in x_0 e la funzione f è derivabile in $t_0 = g(x_0)$, allora la funzione composta è derivable in x_0 e si ha*

$$\mathrm{D}(f \circ g)(x_0) = f'(t_0)g'(x_0)\,. \tag{6.8}$$

Dimostrazione. Usiamo la notazione indicata nell'osservazione 6.7, nella pagina 102, e poniamo $g(x_0+h) - g(x_0) = k$, ovvero $g(x_0+h) = g(x_0) + k$. Consideriamo poi il rapporto incrementale della funzione composta $f \circ g$:

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(t_0+k) - f(t_0)}{h}\,. \tag{*}$$

Applichiamo ora il teorema 6.8 nella pagina 102 (con k al posto di h):

$$f(t_0+k) - f(t_0) = f'(t_0) \cdot k + k\omega(k)\,.$$

La $(*)$ diventa allora

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = f'(t_0)\frac{k}{h} + \frac{k}{h}\,\omega(k).$$

Da qui si conclude subito osservando che se $h \to 0$, anche $k \to 0$ (per la continuità di g) e che

$$\lim_{k\to 0} \omega(k) = 0\,, \quad \lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)\,.$$

□

Osservazione 6.12. Usando la notazione di Leibniz e ponendo $y = f(g(x))$ e $t = g(x)$, questo teorema si può scrivere con la seguente notazione

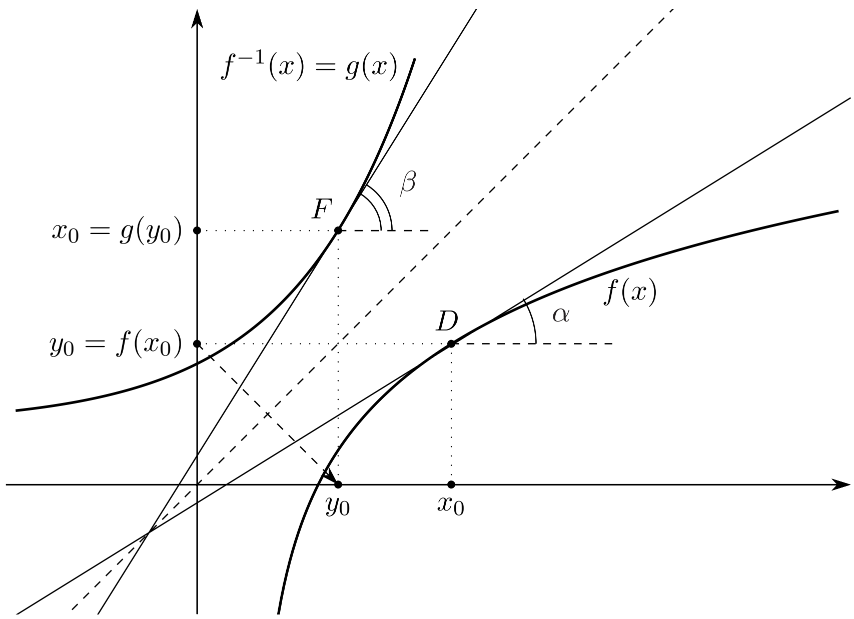
$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} =\right) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\,. \tag{6.9}$$

ed è come se si potesse "semplificare" il dt nel prodotto delle due "frazioni". Questo modo di procedere, seppure troppo informale, è molto vantaggioso nelle applicazioni, e sostanzialmente il teorema sulla derivata della funzione composta ne fornisce una giustificazione teorica.

Teorema 6.13 (Derivata della funzione inversa)**.** *Sia f una funzione strettamente monotona definita in un intervallo e sia g la sua inversa. Se f è derivabile in un punto x_0 con derivata non nulla, posto $y_0 = f(x_0)$, la funzione inversa è derivabile in y_0 e si ha*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{6.10}$$

Tralasciamo la dimostrazione di questo teorema, e ne forniamo invece una significativa giustificazione per via grafica.



Il grafico proposto e le note proprietà di simmetria tra una funzione e la sua inversa, rendono immediatamente evidente che gli angoli α e β della figura sono tra di loro complementari e quindi hanno tangenti trigomometriche reciproche: $\operatorname{tg}\beta = {}^1\!/_{\operatorname{tg}\alpha}$. Se si tiene conto che queste tangenti trigonometriche sono i coefficienti angolari delle tangenti ai grafici di f (in D) e di f^{-1} (in F), ci si rende subito conto del significato geometrico della formula (6.10). Si capisce anche da qui il perché della richiesta che la derivata di f sia non nulla in x_0: se così fosse α sarebbe zero e β dovrebbe essere ${}^\pi\!/_2$, ma una retta verticale non ha coefficiente angolare...

Si tenga ben presente che le derivate che compaiono nei due membri dell'equazione (6.10) sono *calcolate in punti diversi*, e ancora una volta il grafico proposto rende immediatamente evidente la necessità di questo fatto: ci può essere un collegamento tra le tangenti ai grafici di una funzione e della sua inversa solo in punti simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Osservazione 6.14. Tutti i teoremi enunciati in questo numero esprimono condizioni sufficienti ma non necessarie: per esempio la derivata di una somma può benissimo esistere anche se si sommano due funzioni non derivabili. Analogo per gli altri teoremi.

Come già accennato, il calcolo del limite del rapporto incrementale di una funzione non è un calcolo banale, in quanto (per le funzioni continue!) si presenta nella forma ${}^0\!/_0$. Ci poniamo allora il problema di controllare se è possibile, almeno per le funzioni di uso più comune, stabilire delle regole che permettano il calcolo della derivata *senza* dover ricorrere ogni volta alla definizione. La risposta è affermativa e si può concludere con una serie di *regole di derivazione* che permettono di trovare facilmente la derivata delle funzioni elementari, nei punti nei quali ciò è possibile.

Osservazione 6.15. È bene segnalare fin da subito che se, come abbiamo visto, le funzioni elementari sono continue in tutti i punti del loro dominio, altrettanto non può dirsi della loro derivabilità

Un esempio importante è fornito dalla funzione $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$, che abbiamo già visto non essere derivabile in $x_0 = 0$.

6.3 Le derivate delle funzioni elementari

Occupiamoci ora della ricerca delle regole di calcolo per le derivate delle funzioni elementari: una volta stabilite queste regole non sarà più necessario calcolare ogni volta il limite del rapporto incrementale.

6.3.1 Le funzioni potenza n-esima

È immediato che la funzione $f(x) = x$, funzione potenza di grado 1 o anche funzione identità (a ogni x fa corrispondere x stesso) è derivabile e che $f'(x) = 1\,\forall x \in \mathbb{R}$.

Sia ora $n \geq 2$ e consideriamo la funzione $x \mapsto x^n$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{x^n - x_0^n}{x - x^0} &= \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1}\,.\end{aligned}$$

Se facciamo tendere x a x_0, tutti gli addendi dell'ultimo membro tendono a x_0^n, per la continuità della funzione potenza; poichè gli addendi sono n, il limite sarà $nx_0^n - 1$. Possiamo dunque concludere con la seguente regola

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}\,, \quad n \geq 2,\ x \in \mathbb{R}\,, \tag{6.11}$$

dove abbiamo indicato con x anziché con x_0 il generico punto dove si calcola la derivata.

Osservazione 6.16. La scrittura di una formula come la (6.11) può essere semplificata se si utilizzata una scrittura come la seguente

$$\mathrm{D}(x^n) = nx^{n-1}\,.$$

Si tratta di una notazione che contiene un'improprietà, almeno con il tipo di notazioni che abbiamo usato noi, in quanto la derivata si applica alla funzione potenza e non a x^n che è l'immagine di x tramite la funzione potenza. La cosa comunque non porta in genere confusioni e spesso nel seguito useremo questo tipo di scrittura compatta.

6.3.2 Le funzioni radice n-esima

Come è noto, per n dispari le funzioni radice n-esima sono le inverse delle funzioni potenza n-esima, mentre per n pari sono le inverse della restrizione delle funzioni potenza agli $x \geq 0$. Osserviamo subito che tutte le funzioni potenza (ovviamente ci interessa solo il caso $n \geq 2$) hanno derivata nulla nell'origine, e dunque non potremo applicare il teorema sulla derivata dell'inversa nel punto y_0 corrispondente a $x_0 = 0$, punto che è ovviamente 0. Per gli $y_0 \neq 0$ applichiamo la regola della derivata dell'inversa, osservando che se si pone $y = x^n = f(x)$ si ha $x = \sqrt[n]{y} = g(y)$ e quindi

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y_0})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y_0^{n-1}}}\,.$$

Scrivendo x per il generico punto dove si calcola la derivata della funzione radice n-esima, avremo dunque la regola

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,, \quad \begin{cases} x \neq 0, & \text{se } n \text{ dispari;} \\ x > 0, & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases} \tag{6.12}$$

È poi banale provare che il limite del rapporto incrementale è $+\infty$ se $x_0 = 0$ (limite solo destro per n pari).

6.3.3 Le funzioni circolari

Cominciamo dalla funzione seno. Usando le formule di prostaferesi si trova

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\,2\sin\frac{x-x_0}{2}\,\cos\frac{x+x_0}{2} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\,\cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0\,.\end{aligned}$$

Per concludere abbiamo sfruttato il limite notevole relativo a ${}^{\sin x}/_{x}$ e la continuità del coseno.

Avremmo anche potuto procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0\cosh+\cos x_0\sin h-\sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\sin x_0\frac{\cos h-1}{h}+\cos x_0\frac{\sin h}{h}\right] = \cos x_0\,,\end{aligned}$$

usando il solito limite fondamentale e il fatto che

$$\frac{\cos h-1}{h} = \frac{\cos h-1}{h^2}\,h \to -\frac{1}{2}\times 0 = 0\,.$$

Possiamo dunque concludere con la regola

$$f(x)=\sin x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\cos x\,,\quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{6.13}$$

Passiamo ora alla funzione coseno, osservando che si ha

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,.$$

Si può ora applicare la regola di derivazione delle funzioni composte per concludere che se $f(x)=\cos x$ si ha

$$f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin x\,,$$

ovvero che vale la regola

$$f(x)=\cos x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\sin x\,,\quad x\in\mathbb{R}\,. \tag{6.14}$$

Per le funzioni tangente e cotangente basta ora applicare la regola di derivazione del quoziente e si ottiene

$$f(x)=\operatorname{tg}x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x\,,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,, \tag{6.15}$$

$$f(x)=\operatorname{ctg}x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,,\quad x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{6.16}$$

6.3.4 Le funzioni trigonometriche inverse

Cominciamo dalla funzione arcseno ricordando che è l'inversa della funzione seno, ristretta all'intervallo $[-\pi/2\,,\,\pi/2]$. Dovremo trattare a parte i valori estremi di questo intervallo dove la funzione seno ha derivata nulla. Poniamo allora $y=f(x)=\sin x$, ovvero $x=g(y)=\arcsin y$ e, procedendo come per le funzioni radice, otteniamo

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\cos(\arcsin y_0)}=\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}\,.$$

Se poi $y_0=\pm1$, il limite del rapporto incrementale diventa infinito.

Procedendo in maniera analoga per la funzione coseno, avremo $y=f(x)=\cos x$, da cui $x=g(y)=\arccos y$ e quindi

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{\sin x_0}=-\frac{1}{\sin(\arccos y_0)}=-\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}\,.$$

Se poi $y_0=\pm1$, il limite del rapporto incrementale diventa infinito.

Per la funzione tangente abbiamo $y=f(x)=\operatorname{tg}x$, $x=g(y)=\operatorname{arctg}y$, da cui

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x_0}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}y_0)}=\frac{1}{1+y_0^2}\,.$$

Lasciamo per esercizio di fare l'analogo calcolo per la funzione arccotangente, e riassumiamo le regole ottenute.

$$f(x)=\arcsin x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad x\in]-1,1[. \tag{6.17}$$

$$f(x)=\arccos x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad x\in]-1,1[. \tag{6.18}$$

$$f(x)=\operatorname{arctg} x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\,,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{6.19}$$

$$f(x)=\operatorname{arcctg} x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}\,,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{6.20}$$

6.3.5 Le funzioni esponenziali, logaritmo, potenza con esponente reale

Per la funzione esponenziale (di base "e") si ha:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{x_0}\frac{\mathrm{e}^{x-x_0}-1}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^{x_0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}=\mathrm{e}^{x_0}\,,$$

che ci permette di concludere con la regola

$$f(x)=\mathrm{e}^x\ (=\exp(x)) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\mathrm{e}^x\ (=\exp(x))\,. \tag{6.21}$$

Per le funzioni del tipo a^x si può osservare che

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a},$$

da cui (vedi anche l'osservazione 6.16 nella pagina 106 per quanto riguarda le notazioni)

$$\mathrm{D}\left(a^x\right) = \mathrm{D}\left(\mathrm{e}^{x\ln a}\right) = \mathrm{e}^{x\ln a}\cdot \ln a = a^x \ln a\,. \tag{6.22}$$

Per la funzione logaritmo potremmo procedere in maniera diretta, usando la definizione (e il lettore lo può fare per esercizio), ma preferiamo usare la regola di derivazione delle funzioni inverse. Posto $y = f(x) = \mathrm{e}^x$, otteniamo $x = g(y) = \ln y$, da cui

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x_0}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}\,,$$

da cui la regola

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}\,. \tag{6.23}$$

Per le altre basi si usi la formula di cambiamento di base:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\,,$$

da cui (vedi ancora l'osservazione 6.16 nella pagina 106)

$$\mathrm{D}\big(\log_a x\big) = \mathrm{D}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{\ln a}\,\ln x\right) = \frac{1}{\ln a}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}\,. \tag{6.24}$$

Le formule (6.21), (6.22), (6.23) e (6.24) rendono evidente il perché in analisi si preferisca, sia per il logaritmo che per l'esponenziale, la base "naturale" e.

6.4 Le funzioni iperboliche (cenni)

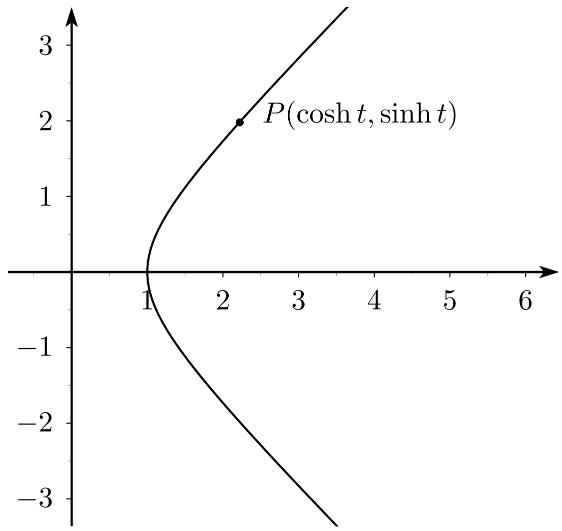
Alcune particolari combinazioni delle funzioni esponenziali sono di grande interesse applicativo: si tratta delle *funzioni iperboliche*. Precisamente si danno le seguenti definizioni.

seno iperbolico:	$\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$x \in \mathbb{R}$;
coseno iperbolico:	$\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$x \in \mathbb{R}$;
tangente iperbolica:	$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$	$x \in \mathbb{R}$;
cotangente iperbolica:	$\operatorname{ctgh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$	$x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Vale la seguente identità fondamentale, di immediata verifica,

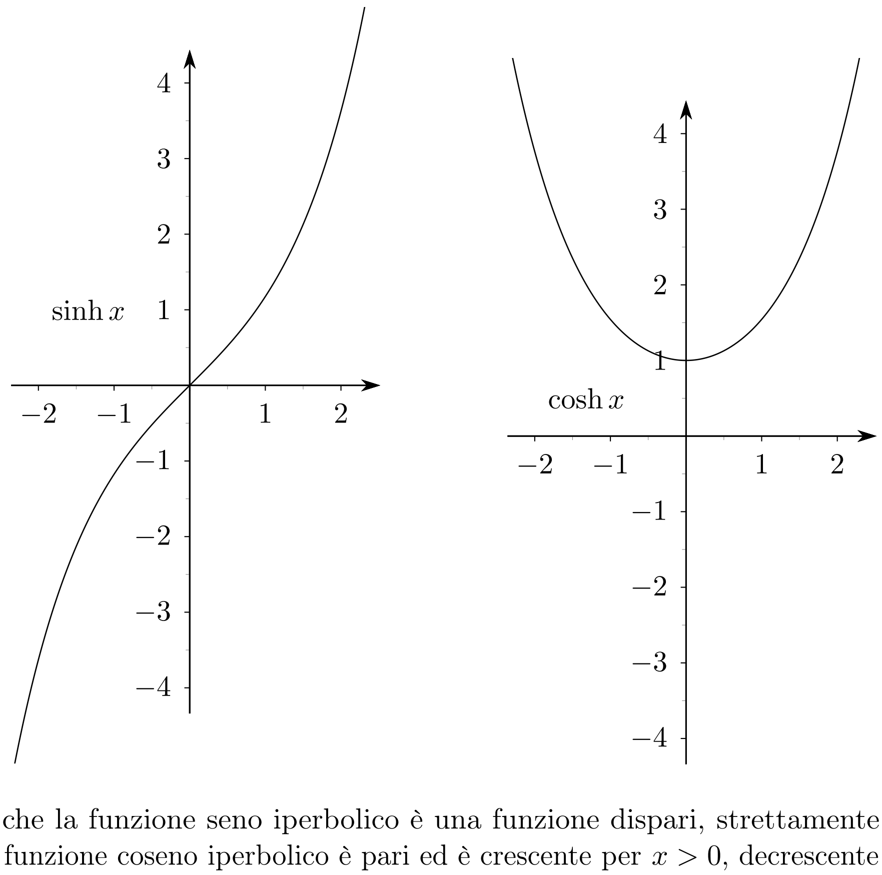
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,, \tag{6.25}$$

che giustifica il nome "iperboliche" attribuito a queste funzioni: il punto di coordinate $(\cosh t, \sinh t)$, al variare di t, appartiene al ramo di curva di equazione $x^2 - y^2 = 1$, con $x > 0$, e questa curva è un ramo di iperbole equilatera, di cui qui di seguito è proposto il grafico.



Le funzioni tangente e cotangente iperbolica sono così chiamate in analogia con le analoghe funzioni trigonometriche costruite a partire dalle funzioni seno e coseno.

I grafici delle funzioni seno e coseno iperbolico sono rappresentati nelle figure che seguono.



Si noti che la funzione seno iperbolico è una funzione dispari, strettamente crescente, mentre la funzione coseno iperbolico è pari ed è crescente per $x > 0$, decrescente per $x < 0$.

È un semplice esercizio provare che valgono le seguenti regole di derivazione.

$$\mathrm{D}(\cosh x) = \sinh x \tag{6.26}$$

$$\mathrm{D}(\sinh x) = \cosh x \tag{6.27}$$

$$\text{D}(\text{tgh}\, x) = 1 - \text{tgh}^2 x \tag{6.28}$$

$$\text{D}(\text{ctgh}\, x) = 1 - \text{ctgh}^2 x \tag{6.29}$$

Anche nelle regole di derivazione si nota una stretta analogia con le regole valide per le funzioni trigonometriche, cosa che fornisce una ulteriore giustificazione per i nomi utilizzati.

Poiché la funzione seno iperbolico è monotona, essa è invertibile e si ha

$$y = \sinh x = \frac{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{e}^{2x} - 2y\text{e}^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}\,,$$

dove abbiamo preso solo il segno + davanti al radicale, perché $\text{e}^x > 0$. Si trova allora

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})\,.$$

Questa formula fornisce un'espressione per l'inversa della funzione seno iperbolico, inversa che si chiama arcseno iperbolico, o settore seno iperbolico:

$$\text{arcsinh}\, x = \text{settsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,. \tag{6.30}$$

Anche per il coseno iperbolico si possono fare considerazioni analoghe, solo che occorre operare una restrizione all'intervallo $[0, +\infty[$. Si ottiene la funzione arccoseno iperbolico o settore coseno iperbolico data da

$$\text{arccosh}\, x = \text{settcosh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,. \tag{6.31}$$

Anche queste funzioni sono derivabili e le loro derivate si ricavano semplicemente usando le regole di derivazione delle funzioni elementari.

$$\text{D}(\text{arcsinh}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \tag{6.32}$$

$$\text{D}(\text{arccosh}\, x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \tag{6.33}$$

formule che risultano particolarmente utili per la ricerca di certe primitive.

Come utile esercizio sulle proprietà delle potenze, invitiamo il lettore a dimostrare le seguenti formule.

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\,, \tag{6.34}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,. \tag{6.35}$$

6.5 Esercizi

Esercizio 6.1. *Calcolare, usando la definizione, la derivata delle seguenti funzioni in un punto generico x_0 del dominio naturale.*

1. $f(x) = x^2 + x - 1$.

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Esercizio 6.2. *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni applicando le regole di derivazione delle funzioni elementari e l'algebra delle derivate, senza preoccuparsi dell'eventuale presenza di punti di non derivabilità.*

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
2. $f(x) = (\mathrm{e}^{-x})^2$.
3. $f(x) = \ln(x + \sin x)$.
4. $f(x) = (\sin x)\sqrt{x^2 + x}$.
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{\ln x + \mathrm{e}^{3x}}$.
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+1}}$.
7. $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$.
8. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.
9. $f(x) = \mathrm{e}^{\arcsin x}$.
10. $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + x^2 + x\sin x\right)$.
11. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.
12. $f(x) = \cos^5 x$.
13. $f(x) = \cos(x^5)$.
14. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
15. $f(x) = 2^{x^2}$.
16. $f(x) = \log_5 \dfrac{x}{\sin x}$.
17. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.
18. $f(x) = \arcsin^2 x$.

19. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.

20. $f(x) = \sin(x + \cos x)$.

Esercizio 6.3. *Dimostrare che la funzione* $f(x) = x\,|x|$ *è ovunque derivabile, nonostante sia il prodotto tra una funzione derivabile e una non derivabile.*

Esercizio 6.4. *Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni, nel punto indicato.*

1. $f(x) = \sin x\,, \quad x_0 = \dfrac{5}{4}\pi$.

2. $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3. $f(x) = \ln(1 + \sin^2 x)\,, \quad x_0 = \dfrac{3}{4}\pi$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,, \quad x_0 = 1$.

Esercizio 6.5. *Trovare, se esistono, i punti nei quali le seguenti coppie di funzioni hanno la stessa derivata.*

1. $f(x) = \sqrt{x} + \cos 1\,, \quad g(x) = 2x - 3 + \ln\pi$.

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x} + \pi^{\mathrm{e}}\,, \quad g(x) = \sin x + \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^{\pi}$.

3. $f(x) = x^3 + x^4 + \pi\,, \quad g(x) = 2x^3 - \sqrt{2}$.

Esercizio 6.6. *Dire se esiste qualche punto dove la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \textit{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è derivabile.

In quali punti è derivabile la funzione valore assoluto della precedente?

Esercizio 6.7. *Mostrare che le due curve di equazione* $y = 3x^2$ *e* $y = 2x^3 + 1$ *sono tangenti nel punto* $(1, 3)$.

Esercizio 6.8. *Tenendo presente la regola di derivazione delle funzioni radice n-esima, ricavare la regola di derivazione delle funzioni potenza con esponente razionale*

$$f(x) = x^{m/n}\,.$$

Esercizio 6.9. *Dimostrare, usando la definizione, che*

$$f(x) = x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1} \quad n \in \mathbb{N}^+,\, x \neq 0\,.$$

Esercizio 6.10. *Usando opportunamente la regola per la derivata della funzione esponenziale e della funzione composta, ricavare la regola per la derivata di*

1. $f(x) = x^{\alpha}\,, \quad x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = \big(g(x)\big)^{h(x)}$.

Esercizio 6.11. *È data la funzione*

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})\,.$$

1. *Trovarne il dominio naturale.*
2. *Dimostrare che la funzione è dispari.*
3. *Dimostrare che* $f|_{[0,+\infty[}$ *è crescente.*
4. *Utilizzando anche il punto* 5 *concludere che anche* f *è crescente.*
5. *Calcolare la derivata di* f *e verificare che è strettamente positiva.*
6. *Calcolare esplicitamente* $g = f^{-1}$.
7. *Calcolare la derivata di* g *sia direttamente utilizzando l'espressione trovata al punto* 6*, sia usando la regola di derivazione delle funzioni inverse, verificando la coincidenza dei risultati.*

Esercizio 6.12. *Sia* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione ovunque derivabile e tale che* $f'(x_0) = 0$ *in ogni punto* x_0 *dove* $f(x_0) = 0$*. Provare allora che* $|f|$ *è una funzione ovunque derivabile. Si noti che la funzione* $f(x) = x$ *costituisce un esempio dell'essenzialità dell'ipotesi che sia* $f'(x_0) = 0$ *in ogni punto* x_0 *dove* $f(x_0) = 0$*: in effetti la funzione* $|x|$*, come è noto, non è derivabile nell'origine, cioè dove* f *si annulla senza che si annulli la sua derivata prima.*

Esercizio 6.13. *Dire per quali valori di* a, $b \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x-1} + a, & \textit{se } x < 1 \\ bx^2 + 1, & \textit{se } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Se si considera un punto $x_0 \neq 1$, in un opportuno intorno di x_0 la funzione coincide o con la $\mathrm{e}^{x-1} + a$, o con la $bx^2 + 1$; queste ultime due sono funzioni continue e derivabili, per cui non ci sono problemi per la contintuità e derivabilità nemmeno di f (si ricordi che la continuità e la derivabilità di una funzione sono solo *proprietà locali*). Esaminiamo ora il punto $x_0 = 1$, cominciando a preoccuparci della continuità (se non fosse continua la funzione non potrebbe nemmeno essere derivabile).

Si ha:

1. $f(1) = b + 1$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\mathrm{e}^{x-1} + a\right) = 1 + a$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(bx^2 + 1\right) = b + 1\,.$

Dunque se $1 + a = b + 1$, ovvero $a = b$ il limite esiste ed è uguale al valore della funzione in $x_0 = 1$, ovvero la funzione è continua.

Preoccupiamoci ora della derivabilità. Non avendo, a questo punto, a disposizione alcun teorema (in particolare il teorema sul limite della derivata) usiamo il rapporto incrementale.

Dovremo calcolare
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\,.$$
Naturalmente potremo tenere conto che deve essere $a=b$, e ci converrà calcolare separatamente il limite destro e quello sinistro. Per quello sinistro abbiamo
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(\mathrm{e}^{x-1}+a)-(1+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\mathrm{e}^{x-1}+a)-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{x-1}=1\,.$$
Per quello destro abbiamo invece
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(bx^2+1)-(b+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax^2+1)-(a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2-a}{x-1}\lim_{x\to 1^+}a(x+1)=2a\,.$$
La funzione sarà quindi continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a=b={}^1\!/\!_2$. □

Esercizio 6.14. *Dire per quali valori di a, $b\in\mathbb{R}$ la funzione*
$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \textit{se } x\le 1\\ ax+b, & \textit{se } x>1\end{cases}$$
è continua e derivabile per ogni x.

Esercizio 6.15. *Delle seguenti funzioni dire se sono continue, nel caso siano continue se sono derivabili, nel caso siano derivabili se la funzione derivata è continua.*

1. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \textit{se } x\ne 0\\ 0, & \textit{se } x=0\end{cases}\,.$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \textit{se } x\ne 0\\ 0, & \textit{se } x=0\end{cases}\,.$

3. $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & \textit{se } x\ne 0\\ 0, & \textit{se } x=0\end{cases}\,.$

Esercizio 6.16. *Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ la funzione*
$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x+a+1, & \textit{se } x\le 0\\ 3x^2+4, & \textit{se } x>0\end{cases}$$
risulta continua? Per tali valori la funzione risulta derivabile?

Esercizio 6.17. *Si dimostri che la funzione $f\colon [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definita da*
$$f(x)=x^2+\mathrm{e}^x$$
è invertibile e, detta g l'inversa, si calcoli $g'(1+\mathrm{e})$.

Esercizio 6.18. *Si dimostri che la funzione $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ definita da*
$$f(x)=\arcsin x+\sin x$$
è invertibile e, detta g l'inversa, si calcoli $g'(0)$.

7 Proprietà locali - Funzioni derivabili in un intervallo

La continuità o la derivabilità di una funzione in un punto sono esempi di quelle che si chiamano *proprietà locali*: esse coinvolgono il comportamento di una funzione non in tutto il dominio, ma solo in un opportuno intorno del punto in esame. Consideriamo un esempio per chiarire meglio il concetto. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ -x^2, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

e il punto 0 del suo dominio. Di questa funzione è impossibile considerare un grafico nel senso intuitivo del termine: il grafico stesso è infatti contenuto in quello della parabola $y = x^2$ sui razionali e in quello della parabola $y = -x^2$ sugli irrazionali. In un intorno di ogni punto la funzione assume sia valori che stanno sulla prima parabola che valori che stanno sulla seconda, a causa della ensità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Pur tuttavia la funzione è continua e derivabile, con derivata nulla, nell'origine (e solo nell'origine!), come mostra un calcolo diretto. La derivabilità nell'origine comporta l'esistenza della tangente al grafico nell'origine (tangente che coincide con l'asse delle ascisse). È ovvio, sulla base di quanto detto, che tutte queste proprietà di regolarità nell'origine comportano che nei pressi di questo punto la funzione sia "approssimabile" con l'asse delle x, ma questo non si estende a nessun altro punto fuori dall'origine stessa.

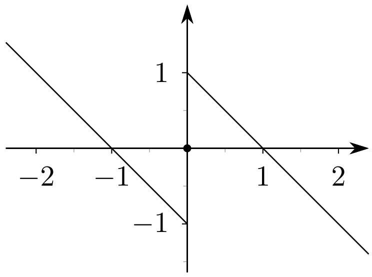
7.1 Funzioni crescenti e decrescenti in un punto. Massimi e minimi relativi

Definizione 7.1. *Sia data una funzione f e un punto x_0 del suo dominio. Se esiste un intorno I_{x_0} tale che per ogni suo punto (che stia naturalmente anche nel dominio della funzione*[1]*) si abbia*

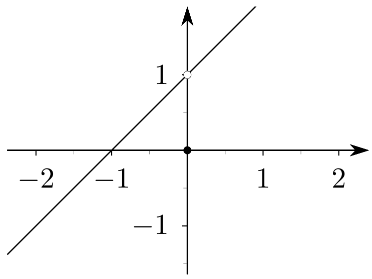
- *da $x < x_0$ segue $f(x) \leq f(x_0)$ e contemporaneamente da $x > x_0$ segue $f(x) \geq f(x_0)$, allora la funzione si dice* crescente *in x_0 (crescente in senso stretto se le disuguaglianze valgono senza l'uguale);*
- *da $x < x_0$ segue $f(x) \geq f(x_0)$ e contemporaneamente da $x > x_0$ segue $f(x) \leq f(x_0)$, allora la funzione si dice* decrescente *in x_0 (decrescente in senso stretto se le disuguaglianze valgono senza l'uguale);*
- *$f(x) \leq f(x_0)$, allora il punto x_0 si dice di* massimo relativo *(di massimo relativo proprio se la disuguaglianza vale in senso stretto);*
- *$f(x) \geq f(x_0)$, allora il punto x_0 si dice di* minimo relativo *(di minimo relativo proprio se la disuguaglianza vale in senso stretto).*

[1] Ribadiamo che, come già osservato, tutte le volte che si calcolano le funzioni è sottinteso che i punti debbano appartenere al dominio delle funzioni.

Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x) - x$ è crescente in 0, perchè a sinistra di 0 ha valori negativi e a destra di 0 ha valori positivi. Si veda il grafico che segue.



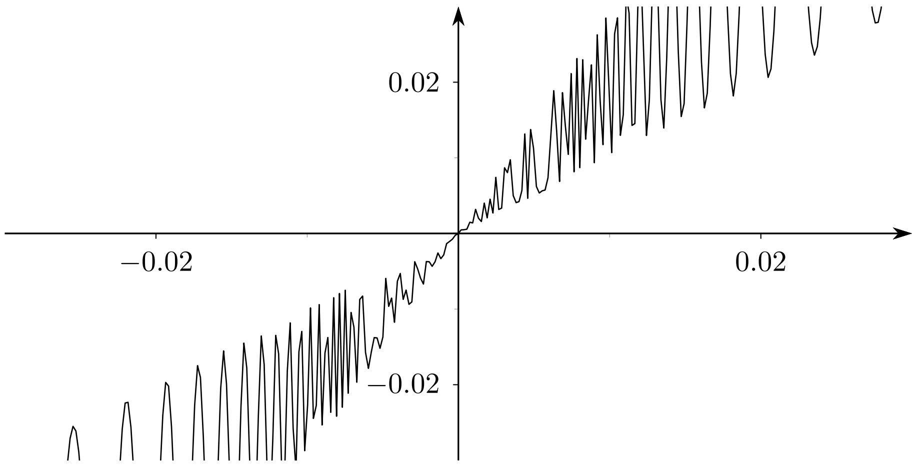
Esempio. La funzione $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|\,(x+1)$ ha un minimo nell'origine, perché nell'origine vale 0, e nei pressi dell'origine è positiva. Si veda il grafico che segue.



Esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x \sin\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è crescente nell'origine, in quanto a destra dell'origine è positiva, a sinistra è negativa. Si veda il grafico che segue, necessariamente molto approssimato.



Come si vede dagli esempi proposti, il concetto di crescenza o decrescenza in un punto, così come quelli di massimo o minimo relativo, possono comprendere situazioni che poco si conciliano con l'idea intuitiva di questi concetti.

Nel caso di funzioni derivabili valgono i seguenti due importanti teoremi.

Teorema 7.2. *Sia f una funzione derivabile in un punto x_0.*

1. *Se f ha derivata positiva in x_0, allora è crescente in x_0.*
2. *Se f ha derivata negativa in x_0, allora è decrescente in x_0.*
3. *Se f è crescente in x_0 allora $f'(x_0 \geq 0$ (attenzione: ≥ 0, non > 0).*
4. *Se f è decrescente in x_0 allora $f'(x_0 \leq 0$ (attenzione: ≤ 0, non < 0).*

Dimostrazione. Proviamo la prima proprietà, le altre si lasciano per esercizio (in particolare la terza e quarta si fanno per assurdo, come conseguenza delle prime due). Se $f'(x_0) > 0$, ne segue che il limite del rapporto incrementale è positivo, ovvero, per il teorema della permanenza del segno, che il rapporto incrementale è positivo in un intorno del punto x_0:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \text{ se } x > x_0,\ f(x) < f(x_0) \text{ se } x < x_0\,,$$

che è proprio la condizione perché f sia crescente in x_0. □

Teorema 7.3. *Se una funzione è derivabile in un punto x_0 che sia* interno *al dominio, e ha un massimo o minimo relativo in x_0, allora si ha necessariamente $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Sia x_0 un punto, per esempio, di massimo relativo interno al dominio. Se fosse $f'(x_0) > 0$, la funzione sarebbe crescente in x_0, per cui a destra di x_0 (e ci sono punti a destra di x_0 perché x_0 è interno) la funzione sarebbe più grande di $f(x_0)$, contro l'ipotesi che x_0 sia di massimo. Analogamente non può essere $f'(x_0) < 0$. Dunque $'f(x_0) = 0$. □

7.2 Asintoti

Definizione 7.4. *Se x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di una funzione e si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty\,,$$

con qualunque segno, allora la retta

$$x = x_0$$

si dice un asintoto verticale *per la funzione. La stessa definizione vale anche se il limite è solo destro o solo sinistro.*

Esempi.

- Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, tutte le rette di equazione $x = \pi/2 + k\pi$ sono asintoti verticali.
- Se $f(x) = \ln(x)$, la retta $y = 0$ è asintoto verticale.
- Se $f(x) = 1/(x+1)$, la retta $x = -1$ è asintoto verticale.

Osservazione 7.5. Se f è una funzione razionale fratta (quoziente di due polinomi), allora può avere un asintoto verticale solo in corrispondenza di una radice del denominatore. La condizione non è però sufficiente: anche in corrispondenza di una radice del denominatore può non esserci un asintoto verticale, come mostra l'esempio della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}\,,$$

per la quale si ha

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1}{x + 1} = 3\,.$$

Il grafico di questa funzione coincide con quello della parabola $y = x^2 - x + 1$, privato però del punto $(-1, 3)$.

Questa circostanza è comunque legata, nel caso delle funzioni razionali fratte, al fatto che il numeratore e il denominatore abbiano un fattore comune. Per le funzioni diverse da queste, la situazione è completamente diversa, come mostra l'esempio della funzione $f(x) = {}^{\sin x}\!/_{x}$ che, pur avendo un denominatore che si annulla per $x = 0$ e che "non si semplifica" con il numeratore, non ha asintoti verticali.

Osservazione 7.6. Per le funzioni diverse dalle funzioni razionali fratte, l'esistenza di un asintoto verticale è indipendente dalla presenza di eventuali denominatori, come mostra la funzione $f(x) = \ln(x)$ che ha per asintoto l'asse delle y senza avere alcun denominatore.

Definizione 7.7. *Due funzioni f e g, continue e definite in un insieme superiormente illimitato, si dicono* asintotiche per $x \to +\infty$ *oppure* asintotiche per $x \to -\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \big((f(x) - g(x)\big) = 0 \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to-\infty} \big((f(x) - g(x)\big) = 0 \tag{7.1}$$

In particolare se $g(x) = mx + q$, allora la retta $y = mx + q$ si dice un asintoto *per la f, precisamente un* asintoto orizzontale *se $m = 0$, un* asintoto obliquo *se $m \neq 0$.*

Il seguente teorema è una semplice rilettura della definizione di limite.

Teorema 7.8. *La retta $y = q$ è un asintoto orizzontale per la funzione continua f e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = q\,, \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = q\,.$$

Per gli asintoti obliqui vale poi il seguente teorema.

Teorema 7.9. *La retta $y = mx + q$ $(m \neq 0)$ è un asintoto obliquo a $+\infty$ per la funzione continua f se e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \tag{7.2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = q\,. \tag{7.3}$$

Analogo discorso per $-\infty$.

Dimostrazione. Se vale la (7.3) allora $f(x) - mx - q$ tende a zero se $x \to +\infty$, dunque $y = mx + q$ è un asintoto.

Se viceversa $y = mx + q$ è asintoto, allora $f(x) - mx - q$ tende a zero se $x \to +\infty$, ma allora $f(x) - mx$ tende a q e inoltre

$$f(x) - mx - q = x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right).$$

Poiché ${}^{q}\!/_{x}$ tende a 0, ne segue che ${}^{f(x)}\!/_{x}$ deve tendere a m. □

Esempi.

- La funzione $f(x) = e^x$ ha l'asse delle x come asintoto orizzontale a $-\infty$.
- La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ha le rette $y = \pm{}^{\pi}\!/_{2}$ come asintoti orizzontali (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$).
- La funzione $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ha l'asse delle x come asintoto orizzontale (a $-\infty$), e la retta $y = 2x$ come asintoto obliquo (a $+\infty$).
- La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ha la retta $y = \pm x$ come asintoti obliqui (una a $-\infty$ e l'altra a $+\infty$).

7.3 I teoremi fondamentali per le funzioni derivabili in un intervallo

Teorema 7.10 (Teorema di Lagrange)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile almeno in $]a,b[$. Allora esiste almeno un $c \in]a,b[$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Consideriamo i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. La retta che passa per A e B ha coefficiente angolare

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ed equazione

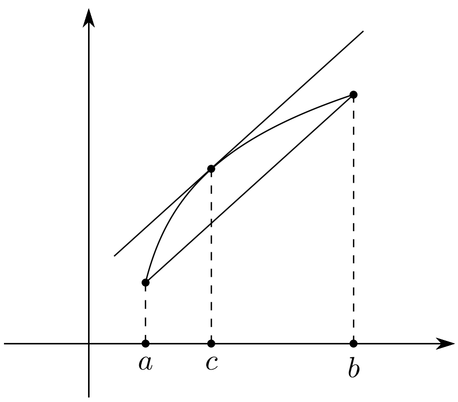
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) \quad \big(= h(x)\big).$$

Consideriamo ora la funzione $g(x) = f(x) - h(x)$; essa ha le stesse proprietà di regolarità della funzione f e, in più è tale che $g(a) = g(b) = 0$. Alla funzione g possiamo applicare il teorema di Weierstrass (teorema 5.8, nella pagina 89): esisteranno dunque due punti c e d in uno dei quali la funzione assume il suo massimo, mentre nell'altro assume il suo minimo. Se entrambi questi punti coincidessero con gli estremi di $[a,b]$, allora la funzione sarebbe costante in $[a,b]$ e avrei $g'(x) = 0$ su tutto $[a,b]$; se invece almeno uno dei due punti, diciamo c, è interno ad $]a,b[$, allora in esso deve essere (vedi il teorema 7.3 nella pagina 119) $g'(c) = 0$. In ogni caso in almeno un punto c di $]a,b[$ deve essere $g'(c) = 0$. Poichè

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

si conclude subito con la tesi. □

Il grafico che segue mostra l'interpretazione geometrica del teorema appena dimostrato: esiste un punto interno ad $[a,b]$ dove la tangente risulta parallela alla secante passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Corollario 7.11 (Teorema di Rolle)**.** *Se alle ipotesi del teorema di Lagrange si aggiunge quella che $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$*

Dimostrazione. Ovvia conseguenza di Lagrange. □

Corollario 7.12 (Funzioni a derivata nulla)**.** *Se una funzione ha derivata nulla in un* intervallo *allora è costante sull'intervallo.*

Dimostrazione. Sia $x \in I$ e applichiamo Lagrange all'intervallo $[x_0, x]$, ove x_0 è un punto fissato di I. Esiste c tale che

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Ma $f'(c) = 0$, da cui $f(x) = f(x_0)$, cioè $f(x)$ è costante. □

Corollario 7.13 (Funzioni con la stessa derivata)**.** *Se due funzioni f e g hanno la stessa derivata in un* intervallo*, allora differiscono per una costante.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente alla funzione $f - g$, che ha derivata nulla. □

Corollario 7.14 (Funzioni a derivata di segno costante)**.** *Se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, allora cresce nell'intervallo. Se ha derivata negativa allora decresce nell'intervallo.*

Dimostrazione. Sia $f'(c) > 0$ e siano $x_1 < x_2$ due punti dell'intervallo; applicando Lagrange a $[x_1, x_2]$ si trova che esiste c tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,.$$

Siccome $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, ne segue che anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, cioè che f è crescente. □

Osservazione 7.15. Negli ultimi tre corollari è indispensabile che il dominio sia un intervallo. Lo si può vedere dagli esempi che seguono.

Esempi.

– La funzione
$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$
ha derivata nulla nel suo dominio naturale, ma non è costante.

– La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha derivata sempre positiva, ma non è crescente nel suo dominio naturale.

Enunciamo, senza dimostrarlo, il Teorema di Cauchy che costituisce una generalizzazione del teorema di Lagrange.

Teorema 7.16 (Teorema di Cauchy)**.** *Sia f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili almeno nei punti interni di $[a, b]$ e con $g'(x) \neq 0$ in tutto $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto c interno ad $[a, b]$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{7.5}$$

È ovvio che il teorema di Lagrange discende da questo teorema: basta porre $g(x) = x$.

Enunciamo anche, senza dimostrarli, i seguenti due teoremi, di fondamentale importanza per il calcolo dei limiti. Abbiamo preferito raggrupparli in un unico enunciato, per facilitarne la memorizzazione.

Teorema 7.17 (Teoremi di l'Hôpital)**.** *Siano f e g due funzioni definite in un intorno I di un punto x_0 (eventualmente anche $\pm\infty$ o ∞), tranne al più x_0 stesso. Si supponga inoltre che entrambe le funzioni siano derivabili in I, eventualmente privato di x_0, e che*

$$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}\,.$$

Si hanno i seguenti fatti.

1. *Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (\textit{anche } \pm\infty)$$

anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,.$$

2. *Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ e se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad (\textit{anche } \pm\infty)$$

anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l\,.$$

Il secondo caso è applicabile anche se nulla si sa del limite di $f(x)$, ma, per quanto ci riguarda, la sua applicazione importante è al caso descritto.

Si osservi che i teoremi esprimono solo una condizione sufficiente per l'esistenza del limite del rapporto delle due funzioni.

Esempio. Siano $f(x) = x + \cos x$ e $g(x) = x + \sin x$. Se consideriamo il

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ci troviamo nella possibilità di applicare il secondo dei due teoremi di l'Hôpital. Il limite del rapporto delle derivate però non esiste, e quindi non possiamo trarre alcuna conclusione. È invece immediato che il limite del rapporto delle funzioni è 1.

Concludiamo questa carrellata sui teoremi relativi alle funzioni derivabili in un intervallo con il seguente teorema, utile per controllare la derivabilità delle funzioni in certi punti "critici".

Teorema 7.18 (Teorema sul limite della derivata)**.** *Sia f un funzione definita e continua in un intorno I di un punto x_0 (compreso x_0), e derivabile almeno in $I \setminus \{x_0\}$. Se esiste il limite, diciamolo l, per $x \to x_0$ di $f'(x)$, anche infinito, allora*

- *se il limite è finito, la funzione è derivabile in x_0 e la sua derivata è uguale a l;*
- *se il limite è infinito, allora il limite del rapporto incrementale di f in x_0 è infinito.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di l'Hôpital al rapporto incrementale di f relativo a x_0. $\square$

7.4 Proprietà di Darboux e derivate

Si dice che una funzione definita in un intervallo I ha la proprietà di Darboux[(2)] se presi due punti x_1e x_2 in I e considerato un y compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (o tra $f(x_2)$ e $f(x_1)$) esiste sempre un x appartenente a I tale che $f(x) = y$. Detto in altri termini la funzione assume tutti i valori compresi tra due suoi valori qualunque.

In base al teorema di connessione, ogni funzione continua su un intervallo ha la proprietà di Darboux. Ma anche funzioni discontinue possono avere la proprietà di Darboux. Un esempio è fornito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0, & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

È chiaro che il grafico di una funzione con questa proprietà non può avere "salti", ovvero punti in cui il limite sinistro e destro esistono entrambi finiti ma diversi; se per esempio ci fosse un punto x_0 in cui

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}\,, \quad l \neq m\,,$$

allora restringendo la funzione a un intorno opportuno di x_0 essa avrebbe un'immagine con una lacuna intermedia tra l ed m: basta per questo prendere un intorno di l e uno di m che siano disgiunti e applicare la definizione di limite.

È importante il fatto che la funzione derivata di una funzione derivabile su un intervallo ha la proprietà di Darboux, come afferma il seguente teorema.

Teorema 7.19 (Proprietà di Darboux per le funzioni derivabili)**.** *Sia f ua funzione derivabile in un* intervallo *I e siano $x_1 < x_2$ due punti di I tali che $f'(x_1) < f'(x_2$ (oppure $f'(x_1) > f'(x_2)$. Preso allora un punto y compreso tra $f'(x_1)$ e $f'(x_2$, esiste sempre almeno un punto c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f'(c) = y$.*

Questo teorema ha come conseguenza che la derivata di una funzione derivabile su un intervallo non può avere "salti", e quindi una funzione definita su un intervallo e che presenta qualche salto non può essere la derivata di nessuna funzione definita sullo stesso intervallo (cioè non può avere primitive nell'intervallo).

Per esempio la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ non può essere la derivata di nessuna funzione definita su tutto $\mathbb{R}$. Per contro la funzione $f(x) = {}^{x}/_{|x|}$ che ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, può essere la derivata di una funzione ($f(x)$ *non* è definita su un intervallo). In effetti questa funzione è la derivata della funzione $g(x) = |x|$, che è derivabile, ma in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che *non* è un intervallo.

Questa propietà ci consente di affermare quanto segue. Se una funzione è continua in un intervallo I ed è derivabile in tutto I tranne un punto x_0, e se il limite sinistro e destro della derivata in corrispondenza di x_0 sono finiti e diversi, la funzione non può essere derivabile in x_0. Si tratta di una proprietà largamente usata nel controllare la derivabilità di una funzione senza calcolare il limite del rapporto incrementale. Per esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

[2]Gaston Darboux (1842 – 1917)

ha, per $x \neq 0$, la derivata seguente

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ \cos x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e quindi non può essere derivabile in 0, perché il limite sinistro e destro di questa derivata per x tendente a 0 sono finiti e diversi (rispettivamente -1 e 1).

7.5 Esercizi

Esercizio 7.1. *Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \mathrm{sgn}(\arcsin(x))$ e dedurne se nel punto $x_0 = 0$ la funzione è crescente o decrescente oppure se ha un massimo o minimo relativo.*

Esercizio 7.2. *Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \mathrm{sgn}(\arccos(x))$ e dedurne se nel punto $x_0 = 1$ la funzione è crescente o decrescente oppure se ha un massimo o minimo relativo.*

Esercizio 7.3. *Dopo aver trovato il dominio naturale, trovare gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni.*

1. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + x}$.
2. $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} + 3x - \pi$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln(-x)$.
4. $f(x) = \mathrm{e}^x + 3x - 1$.
5. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} + 3)$.
6. $f(x) = x + \sin x$.
7. $f(x) = 2x + \dfrac{\sin x}{x} + \mathrm{e}$.
8. $f(x) = x + \sqrt{x}$.
9. $f(x) = \dfrac{x^2 + \sqrt{x}}{x}$.
10. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x}$.

Esercizio 7.4. *Dire se esiste una funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, derivabile e tale che*

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f'(x) < 2, \ \forall x \in [0,1] .$$

Esercizio 7.5. *Calcolare la derivata di $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Che cosa si può dedurre della funzione $f(x)$?*

Esercizio 7.6. *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}\,.$$

Che cosa si può dedurre della funzione $f(x)$?

Esercizio 7.7. *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Che cosa si può dedurre della funzione $f(x)$?

Esercizio 7.8. *Per le seguenti funzioni verificare se è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, trovare tutti i punti "c" di cui tratta il teorema.*

1. $f(x) = x^8 + x^6 + \pi\,, \quad I = [-1,1]$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}\,, \quad I = [1,2]$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,, \quad I = [-1,1]$.
4. $f(x) = \sqrt{x}\,, \quad I = [1,3]$.

Esercizio 7.9. *Calcolare, applicando opportunamente la regola di l'Hôpital, i seguenti limiti (gli ultimi tre limiti potrebbero anche essere calcolati, più velocemente, con tecniche elementari o basate sui limiti notevoli: per esercizio si può fare il calcolo anche in questo secondo modo, per un utile confronto).*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-\mathrm{e}^x}{x-\sin x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\ln(x+1)$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(1+\mathrm{e}^{-x})^x$.

Esercizio 7.10. *Verificare che l'applicazione delle regola di l'Hôpital al seguente limite porta in un vicolo cieco. Calcolare poi il limite per altra via.*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2^x+3^x)}{x}\,.$$

Esercizio 7.11. *Applicare la regola di l'Hôpital al seguente limite*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}\,,$$

constatando che si finisce in un vicolo cieco. Riapplicare la regola scrivendo la funzione nella forma

$$\frac{1/x}{e^{1/x}},$$

constatando che si raggiunge subito il risultato.

Calcolare lo stesso limite anche operando la sostituzione $1/x = t$ *e usando poi i limiti notevoli.*

Esercizio 7.12. *Utilizzando il teorema sul limite della derivata, verificare che le seguenti funzioni sono derivabili in* $x_0 = 0$, *dopo averne provato la continuità.*

1. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ \cos x, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$

3. $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$

Esercizio 7.13. *Verificare che la seguente funzione è derivabile in* $x_0 = 0$, *ma che il teorema sul limite della derivata non è applicabile.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 7.14. *Discutere, al variare del parametro* α, *la continuità e derivabilità della seguente funzione*

$$\begin{cases} |x|^\alpha \ln |x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 7.15. *Dire per quali* a, b, $c \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{se } -1 < x < 1 \\ \ln |x|, & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.16. *Dire per quali* a, $b \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$\begin{cases} a^2 \sin x + b^2 \cos x, & \text{se } x < 0 \\ \ln(x + 2), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

8 Infiniti e infinitesimi

In questo capitolo introdurremo due concetti molto utili nelle applicazioni e nel calcolo dei limiti, precisamente quelli di infinitesimo e di infinito. Ci sono molte possibili scelte per introdurre questi concetti: ci limiteremo ad una di queste, segnalando subito che non si tratta della scelta più generale, ma comunque sufficiente per i nostri scopi. La maggior parte dei teoremi di questo capitolo sono semplici riscritture di noti teoremi sui limiti: per questo quasi tutte sono lasciate per esercizio.

8.1 Infinitesimi e loro confronto

Definizione 8.1. *Una funzione f si dice* infinitesima *in x_0 o per x tendente a x_0 (anche ∞) se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\,.$$

Naturalmente x_0 deve essere di accumulazione per il dominio della funzione.

Definizione 8.2. *Due funzioni f e g entrambe infinitesime in x_0 si dicono* infinitesimi simultanei *in x_0.*

Esempi.

- Le funzioni $1-\cos x$ e x^2 sono infinitesimi simultanei in 0.
- Le funzioni $1/x$ e e^x sono infinitesimi simultanei in $-\infty$.
- Le funzioni $\ln x$ e $x-1$ sono infinitesimi simultanei in 1.

Nel seguito avremo quasi sempre a che fare con infinitesimi che siano *definitivamente diversi da* 0 ovvero tali che esista un intorno di x_0, privato di x_0, dove $f(x)\neq 0$. Tutte le volte che sarà necessario sottintenderemo questa ipotesi, che semplifica notevolmente la teoria.

Definizione 8.3. *Siano f e g due infinitesimi simultanei in x_0. Se*

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = l > 0 \tag{8.1}$$

diremo che f e g hanno lo stesso ordine di infinitesimo*. Se*

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0 \tag{8.2}$$

diremo che f ha ordine di infinitesimo superiore *a g o che f è un infinitesimo di ordine superiore a g. Se*

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty \tag{8.3}$$

diremo che f ha ordine di infinitesimo inferiore *a g o che f è un infinitesimo di ordine inferiore a g.*

Se nessuna delle tre eventualità si presenta, diremo che f e g sono infinitesimi non confrontabili.

Tenendo conto del teorema sul limite del modulo (teorema 4.19 nella pagina 72), si può anche calcolare il limite del rapporto delle due funzioni: nel caso questo limite esista si può subito concludere, se non esiste si calcolerà invece il limite del modulo del rapporto.

Osservazione 8.4. È bene chiarire con un linguaggio significativo, anche se un po' azzardato, il significato dell'espressione "infinitesimo di ordine superiore". Se riesaminiamo la definizione appena data, vediamo che f è di ordine superiore a g se f/g tende a zero. Poiché una frazione è "tanto più piccola quanto più il numeratore è piccolo nei confronti del denominatore", se ne deduce che dire "*f è di ordine superiore a g*" equivale a dire "*f è infinitamente più piccola di g*".

Esempi.

- Le funzioni $\sin x$ e x hanno lo stesso ordine di infinitesimo in 0.
- La funzione $x - \sin x$ ha ordine di infinitesimo superiore a x in 0.
- Le funzioni $x - \sin x$ e x^3 hanno lo stesso ordine di infinitesimo in 0 (si calcoli il limite del loro rapporto con l'Hôpital).
- La funzione $\mathrm{e}^x - 1$ ha ordine di infinitesimo minore di x^2 in 0.
- Le funzioni $\ln x^2$ e $x - 1$ hanno lo stesso ordine di infinitesimo in 1.
- La funzione e^{-x} ha ordine di infinitesimo superiore a $1/x^n$ in $+\infty$, per qualunque $n \in \mathbb{N}^+$.
- Le funzioni $x\,(\sin(1/x) + 2)$ e x sono infinitesimi non confrontabili in 0. Si noti che andrebbero bene come esempio di infinitesimi non confrontabili anche le funzioni $x \sin(1/x)$ e x: abbiamo aggiunto il 2 per avere entrambe le funzioni definitivamente diverse da zero. In molti dei teoremi che seguono la condizione che le funzioni siano definitivamente diverse da zero è essenziale e per questo è bene limitarsi solo a questo tipo di infinitesimi.

Si possono provare facilmente, usando i teoremi sui limiti, le seguenti proprietà, se f, g, h sono infinitesimi simultanei in x_0.

1. f ha lo stesso ordine di infinitesimo di f.
2. Se f ha lo stesso ordine di g e g ha lo stesso ordine di h, allora f ha lo stesso ordine di h.
3. Se f ha ordine superiore a g e g ha ordine superiore a h, allora f ha ordine superiore ad h.
4. Se f ha lo stesso ordine di g e g ha ordine superiore a h, allora f ha ordine superiore ad h.

È molto utile nelle applicazioni il seguente teorema che riguarda somme e prodotti di infinitesimi. La dimostrazione, come per quasi tutti gli altri teoremi di questo capitolo, è una semplice applicazione dei teoremi sui limiti ed è lasciata per esercizio.

Teorema 8.5. *Siano f e g due infinitesimi simultanei in x_0.*

- *Se f ha ordine inferiore a g, allora $f \pm g$ ha lo stesso ordine di f.*
- *Se f e g hanno lo stesso ordine, allora $f \pm g$ ha ordine non minore dell'ordine comune.*
- *Il prodotto $f \cdot g$ ha ordine superiore sia a f che a g.*

Invitiamo soprattutto a prestare attenzione al secondo caso, segnalando l'esempio che segue.

Esempio. Le funzioni $\sin x$ e x hanno lo stesso ordine in 0. La funzione $\sin x + x$ ha ancora lo stesso ordine, mentre la funzione $\sin x - x$ ha ordine superiore a entrambe.

8.2 Ordine di infinitesimo rispetto a un campione

Definizione 8.6. *Siano f e g infinitesimi simultanei in x_0. Diremo che f ha ordine $\alpha > 0$ rispetto a g se f e $|g|^\alpha$ hanno lo stesso ordine, ovvero se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = l > 0\,. \tag{8.4}$$

L'infinitesimo g si dice anche un *infinitesimo campione*.

Esempi.

- La funzione $\ln(1+x)$ ha ordine 1 rispetto a x in 0.
- La funzione $\sin x^2$ ha ordine 2 rispetto a x in 0. La stessa funzione $\sin x^2$ ha invece ordine 1 rispetto a $1 - \cos x$, sempre in 0.
- La funzione $\sin(x-1)\sin(x-2)^2$ ha ordine 1 rispetto a $x-1$ in 1, e ordine 2 rispetto a $x-2$ in 2.
- La funzione $\mathrm{e}^{x^2} - 1$ ha ordine 2 rispetto a x in 0.

Osservazione 8.7. Purtroppo non è possibile trovare un infinitesimo campione rispetto a cui confrontare tutti gli altri infinitesimi. Il motivo è legato ai seguenti fatti, già in parte constatati negli esempi:

- esistono infinitesimi non confrontabili;
- non è detto che sia possibile trovare un α che vada bene nella definizione 8.6. Per esempio, per $x \to +\infty$, e^{-x} e $1/x$ sono infinitesimi simultanei, ma non esiste $\alpha > 0$ che vada bene, in quanto il limite del rapporto

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1/x)^\alpha}$$

  vale sempre zero, qualunque sia α.

In relazione alle operazioni di somma, prodotto, potenza e quoziente vale il seguente utile teorema.

Teorema 8.8. *Siano f e g due infinitesimi simultanei di ordine α e β rispettivamente, rispetto allo stesso campione.*

- *Se $\alpha < \beta$, $f \pm g$ ha ordine α, sempre rispetto allo stesso campione.*
- *Se $\alpha = \beta$, $f \pm g$ ha ordine maggiore o uguale ad α.*
- *Il prodotto $f \cdot g$ ha ordine uguale alla somma $\alpha + \beta$.*
- *La potenza $|f|^\gamma$ ha ordine $\alpha \cdot \gamma$.*
- *Se $\alpha > \beta$, il quoziente f/g è ancora un infinitesimo e ha ordine $\alpha - \beta$.*

8.3 Il principio di sostituzione degli infinitesimi

Di notevole importanza per il calcolo dei limiti è il seguente teorema.

Teorema 8.9 (Principio di sostituzione degli infinitesimi)**.** *Siano f_1, f_2, g_1, g_2 infinitesimi simultanei in x_0, e si supponga che f_2 sia di ordine superiore a f_1, g_2 sia di ordine superiore a g_1. Si considerino i due limiti*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}\,, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,.$$

Se uno dei due limiti esiste, esiste anche l'altro e sono uguali.

Dimostrazione. Come per tutti gli altri teoremi di questo capitolo si tratta semplicemente di applicare le note proprietà dei limiti.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)\left(1+\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)}{g_1(x)\left(1+\dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}\right)}\,.$$

A questo punto basta tenere conto che

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{g_2(x)}{g_1(x)} \to 0$$

per concludere.

Si noti come appaia evidente da questo teorema (che esprime sostanzialmente una tra le proprietà più importanti connesse al concetto di infinitesimo) il perché ci siamo limitati a considerare solo infinitesimi definitivamente diversi da 0: è proprio questo che ci ha consentito di raccogliere a fattor comune f_1 al numeratore e g_1 al denominatore. □

Sostanzialmente il teorema si può enunciare brevemente così: nel calcolo del limite del rapporto di somme di *due* infinitesimi si possono tralasciare a numeratore e denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

Esempio. Si debba calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sin^3 x+1-\cos x}{\ln(1+x^2)+3\sin x}\,.$$

Si può, convenientemente, ragionare nel seguente modo.

– Al numeratore è presente la somma di 3 infinitesimi: $2x$, $\sin^3 x$, $1-\cos x$. Questi infinitesimi hanno, rispetto al campione x, ordine 1, 3, 2 rispettivamente. Quindi $\sin^3 x + 1 - \cos x$ ha ordine 2 (in quanto somma di infinitesimi con ordine diverso) e quindi ha ordine superiore rispetto a $2x$: esso potrà dunque essere tralasciato nel calcolo del limite.
– Al denominatore è presente la somma di due infinitesimi, uno di ordine 2 e uno di ordine 1 rispetto al campione x: quello di ordine 2 potrà essere trascurato.

Il limite si riduce allora solo a

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3\sin x} = \frac{2}{3}\,.$$

Esempio. Si debba calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+\sin x+\sin^3 x-\operatorname{tg}^3 x+\mathrm{e}^{x^2}-1}{x+\sin^2 x+\cos x-1}\,.$$

Si può ragionare nel seguente modo, confrontando tutti gli infinitesimi con il campione x.

- $\sqrt{x}$ ha ordine $1/2$;
- $\sin x$ ha ordine 1;
- $\sin^3 x$ e $\operatorname{tg}^3 x$ hanno ordine 3, quindi $\sin^3 x-\operatorname{tg}^3 x$ ha ordine almeno 3;
- $\mathrm{e}^{x^2}-1$ ha ordine 2.

Dunque al numeratore $\sin x+\sin^3 x-\operatorname{tg}^3 x+\mathrm{e}^{x^2}-1$ ha ordine 1, e quindi può essere trascurato rispetto a $\sqrt{x}$.

- x ha ordine 1;
- $\sin^2 x$ e $\cos x-1$ hanno ordine 2, quindi $\sin^2 x+\cos x-1$ ha ordine almeno 2.

Al denominatore $\sin^2 x+\cos x-1$ può quindi essere trascurato rispetto a x. Resta da calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\,.$$

Esempio. Si debba calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+\ln(x^2+1)}{x^2}\,.$$

Si può ragionare come segue, confrontando tutti gli infinitesimi con il campione x. Al numeratore ho la somma di 2 infinitesimi di ordine 1 e di un infinitesimo di ordine 2. Se però considero $x-\sin x$, esso è di ordine 3, e dunque può essere trascurato rispetto a $\ln(x^2+1)$. A questo punto il limite è banalmente 1 (si tratta di un limite fondamentale).

Questo esempio mostra come si debba prestare particolare attenzione per una corretta applicazione di questo importante principio di sostituzione.

8.4 Infiniti e loro confronto

La trattazione del concetto di infinito può essere svolta in maniera complementare a quella di infinitesimo, con opportuni adattamenti. Il lettore può constatare come il contenuto dei paragrafi relativi agli infiniti sia la quasi integrale trasposizione (con le opportune modifiche) di quanto detto a proposito degli infinitesimi. Per capire il senso di questa complementarità dei due concetti si tenga presente che se $f\to 0$, $1/|f|\to+\infty$, in base ai teoremi sui limiti.

Definizione 8.10. *Una funzione f si dice* infinita *in x_0 o per x tendente a x_0 (anche ∞) se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \ (\textit{con qualunque segno})\,.$$

Naturalmente x_0 deve essere di accumulazione per il dominio della funzione.

Definizione 8.11. *Due funzioni f e g entrambe infinite in x_0 si dicono* infiniti simultanei *in x_0.*

Esempi.

– Le funzioni $\ln|x|$ e $1/x$ sono infiniti simultanei in 0.
– Le funzioni $\ln x$ e e^x sono infiniti simultanei a ∞.
– Le funzioni $1/\ln x$ e $1/(x-1)$ sono infiniti simultanei in 1.

Definizione 8.12. *Siano f e g due infiniti simultanei in x_0. Se*

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = l > 0 \tag{8.5}$$

diremo che f e g hanno lo stesso ordine di infinito. *Se*

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0 \tag{8.6}$$

diremo che f ha ordine di infinito inferiore *a g o che f è un infinito di ordine inferiore a g. Se*

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty \tag{8.7}$$

diremo che f ha ordine di infinito superiore *a g o che f è un infinito di ordine superiore a g.*

Se nessuna delle tre eventualità si presenta, diremo che f e g sono infiniti non confrontabili.

Tenendo conto del teorema sul limite del modulo (teorema 4.19 nella pagina 72), si può anche calcolare il limite del rapporto delle due funzioni: nel caso questo limite esista si può subito concludere, se non esiste si calcolerà invece il limite del modulo del rapporto.

Osservazione 8.13. È bene chiarire con un linguaggio significativo, anche se un po' azzardato, il significato dell'espressione "infinito di ordine superiore". Se riesaminiamo la definizione appena data, vediamo che f è di ordine superiore a g se f/g tende a ∞. Poiché una frazione è "tanto più grande quanto più il numeratore è grande nei confronti del denominatore", se ne deduce che dire "*f è di ordine superiore a g*" equivale a dire "*f è infinitamente più grande di g*".

Esempi.
– Le funzioni $1/\ln x$ e $1/(x-1)$ hanno lo stesso ordine di infinito in 1.
– $\ln x$ e $\ln x^3$ hanno lo stesso ordine di infinito in $+\infty$.
– $\ln x$ ha ordine inferiore a x in $+\infty$.
– e^x ha ordine superiore a x in $+\infty$.

Si possono provare facilmente, usando i teoremi sui limiti, le seguenti proprietà, se f, g, h sono infiniti simultanei in x_0.

1. f ha lo stesso ordine di infinito di f.
2. Se f ha lo stesso ordine di g e g ha lo stesso ordine di h, allora f ha lo stesso ordine di h.
3. Se f ha ordine superiore a g e g ha ordine superiore a h, allora f ha ordine superiore ad h.
4. Se f ha lo stesso ordine di g e g ha ordine superiore a h, allora f ha ordine superiore ad h.

È molto utile nelle applicazioni il seguente teorema che riguarda somme e prodotti di infiniti.

Teorema 8.14. *Siano f e g due infiniti simultanei in x_0.*

- *Se f ha ordine superiore a g, allora $f \pm g$ ha lo stesso ordine di f.*
- *Il prodotto $f \cdot g$ ha ordine superiore sia a f che a g.*

Osservazione 8.15. Si noti che se f e g hanno lo stesso ordine, può anche succedere che $f \pm g$ non sia più un infinito: per esempio x e $2 - x$ sono infiniti dello stesso ordine a $+\infty$, mentre la loro somma vale 2 che non è più un infinito. Questa differenza tra gli infiniti e gli infinitesimi è legata al fatto che la somma di due infiniti può essere una "forma indeterminata".

8.5 Ordine di infinito rispetto a un campione

Definizione 8.16. *Siano f e g infiniti simultanei in x_0. Diremo che f ha ordine $\alpha > 0$ rispetto a g se f e $|g|^\alpha$ hanno lo stesso ordine, ovvero se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = l > 0\,. \tag{8.8}$$

L'infinito g si dice anche un *infinito campione*.

Esempi.

- La funzione $1/\ln x$ ha ordine 1 rispetto a $1/(x-1)$ in 1.
- La funzione e^{2x} ha ordine 2 rispetto a e^x in $+\infty$.

Osservazione 8.17. Esattamente come per gli infinitesimi, purtroppo non è possibile trovare un infinito campione rispetto a cui confrontare tutti gli altri infiniti e i motivi sono sostanzialmente simili.

In relazione alle operazioni di somma, prodotto, potenza e quoziente vale il seguente utile teorema.

Teorema 8.18. *Siano f e g due infiniti simultanei di ordine α e β rispettivamente rispetto allo stesso campione.*

- *Se $\alpha > \beta$, $f \pm g$ ha ordine α, sempre rispetto allo stesso campione.*
- *Il prodotto $f \cdot g$ ha ordine uguale alla somma $\alpha + \beta$.*
- *La potenza $|f|^\gamma$ ha ordine $\alpha \cdot \gamma$.*
- *Se $\alpha > \beta$, il quoziente f/g è ancora un infinito e ha ordine $\alpha - \beta$.*

8.6 Il principio di sostituzione degli infiniti

Di notevole importanza per il calcolo dei limiti è il seguente teorema.

Teorema 8.19 (Principio di sostituzione degli infiniti). *Siano f_1, f_2, g_1, g_2 infiniti simultanei in x_0, e si supponga che f_2 sia di ordine inferiore a f_1, g_2 sia di ordine inferiore a g_1, oppure che f_2 e g_2 siano funzioni limitate. Si considerino i due limiti*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)}\,, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,.$$

Se uno dei due limiti esiste, esiste anche l'altro e sono uguali.

Dimostrazione. Analoga a quella del principio di sostituzione degli infinitesimi, con in più l'osservazione che il rapporto tra una funzione limitata e un infinito tende a zero. □

Sostanzialmente il teorema si può enunciare brevemente così: nel calcolo del limite del rapporto di somme di *due* infiniti si possono tralasciare a numeratore e denominatore gli infiniti di ordine inferiore.

Esempio. Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x + \ln x + \sin x + x^2}{x^2 + \cos x - \sqrt{x}}\,.$$

Si può osservare che $\ln x$ è di ordine inferiore rispetto a x^2, per cui $\ln x + x^2$ ha lo stesso ordine di x^2. L'aggiunta di $\sin x$ non modifica nulla, perché $\sin x$ è una funzione limitata. Dunque $\ln x + x^2 + \sin x$ ha lo stesso ordine di x^2, che è minore di quello di e^x. Al denominatore x^2 ha ordine 2 rispetto a x, $\sqrt{x}$ ha ordine $1/2$, $\cos x$ è limitata. Quindi $\cos x - \sqrt{x}$ ha ordine minore di x^2. Resta solo da calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty\,,$$

perché e^x è infinito di ordine superiore a x^2.

8.7 Osservazioni e approfondimenti

8.7.1 Ordine rispetto a un campione

Richiamiamo la definizione di ordine di un infinitesimo o di un infinito rispetto a un campione.

Definizione 8.20. *Siano f e g due infinitesimi o due infiniti simultanei in un punto x_0. Se esiste $\alpha > 0$ tale che*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = l > 0\,, \tag{8.9}$$

si dice che f ha ordine α rispetto a g. L'infinito o infinitesimo g si dice anche un campione.

Naturalmente l'ordine di un infinitesimo o infinito dipende dal campione scelto. Per esempio la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ è infinitesima di ordine 2 in 0 rispetto a x, mentre è infinitesima di ordine $2/3$ rispetto a $\sin^3 x$, sempre in 0. Si ha infatti:

$$\lim_{x\to0} \frac{|1-\cos x|}{|x|^2} = \frac{1}{2} > 0\,, \quad \lim_{x\to0} \frac{|1-\cos x|}{\left|\sin^3 x\right|^{2/3}} = \lim_{x\to0} \frac{|1-\cos x|}{\left|\sin^2 x\right|} = \frac{1}{2} > 0\,.$$

Si noti che, a causa del teorema sul limite del modulo di una funzione, se ha senso ed esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)^\alpha} = m \neq 0 \tag{8.10}$$

esiste anche il limite (8.9) e si ha $l = |m|$. Però il limite (8.10) potrebbe non avere senso (per esempio con α non intero e $g(x) < 0$) oppure potrebbe non esistere, pur esistendo il limite (8.9). Si può quindi ragionare negli esempi "senza il valore assoluto", se tutto funziona, altrimenti bisogna prendere i valori assoluti, come vuole la definizione 8.20.

Purtroppo questa definizione non permette sempre di assegnare un ordine a un infinitesimo o a un infinito rispetto a un determinato campione. Proponiamo alcuni esempi relativi sia a infiniti che infinitesimi.

Esempio. Le funzioni $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $g(x) = x$ sono infinite per $x \to +\infty$, ma non esiste un ordine di f rispetto a g (o di g rispetto a f). Infatti, come è noto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

Si può esprimere questo risultato affermando che e^x è, per $x \to +\infty$, infinito di ordine superiore a x^α per ogni α, ovvero di ordine superiore ad α, per ogni α, rispetto a x. Si usa anche dire che un infinito come questo ha un ordine *soprareale* in $+\infty$ rispetto a x.

Si tenga anche ben presente che e^x può avere un ordine, in $+\infty$, rispetto a un campione diverso: per esempio rispetto al campione e^{2x} ha ordine $1/2$.

Esempio. Le funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x$ sono infinite per $x \to +\infty$, ma non esiste un ordine di f rispetto a g (o di g rispetto a f). Infatti, come è noto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

Si può esprimere questo risultato affermando che $\ln x$ è, per $x \to +\infty$, infinito di ordine inferiore a x^α per ogni α, ovvero di ordine inferiore ad α, per ogni α, rispetto a x. Si usa anche dire che un infinito come questo ha un ordine *sottoreale* in $+\infty$ rispetto a x.

Si tenga anche ben presente che $\ln x$ può avere un ordine, in $+\infty$, rispetto a un campione diverso: per esempio rispetto al campione $\ln(x^2)$ ha ordine 1.

Esempio. Le funzioni $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e $g(x) = 1/x$ sono infinitesime per $x \to +\infty$, ma non esiste un ordine di f rispetto a g. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\dfrac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

Si può esprimere questo risultato affermando che e^{-x} è, per $x \to +\infty$, infinitesimo di ordine superiore a $(1/x)^\alpha$ per ogni α, ovvero di ordine superiore ad α, per ogni α, rispetto a $1/x$. Si usa anche dire che un infinitesimo come questo ha un ordine *soprareale* in $+\infty$ rispetto a $1/x$.

Esempio. Le funzioni $f(x) = x \ln x$ e $g(x) = x$ sono infinitesime in 0 (ovviamente per f ha senso solo il limite destro in 0), ma non esiste ordine di f rispetto a g. Infatti

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x \ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} x^{1-\alpha} \ln x\,;$$

e possiamo osservare che

- se $0 < \alpha < 1$ si tratta di un limite fondamentale (che si presenta nella forma $0 \cdot \infty$) che vale 0;
- se $\alpha = 1$ coincide col limite di $\ln x$ in 0^+, che vale $-\infty$;
- se $\alpha > 1$ si ottiene la forma $+\infty \cdot (-\infty)$ e quindi il limite è $-\infty$.

Possiamo esprimere questo fatto affermando che $x \ln x$ è, per $x \to 0$, infinitesimo di ordine superiore a x^α, per ogni $\alpha < 1$, e di ordine inferiore a x^α, per ogni $\alpha \geq 1$. Si può anche affermare, ma l'espressione richiede una certa cautela interpretativa, che $x \ln x$ ha, per $x \to 0$, ordine superiore a ogni reale minore di 1 e inferiore a ogni reale maggiore o uguale a 1, rispetto a x. La cautela è legata al fatto che non esistono reali siffatti. Si usa dire che un infinitesimo come questo ha un ordine *infrareale* in 0, rispetto all'infinitesimo campione x.

In ogni caso al di là della nomenclatura utilizzata occorre avere ben chiaro il problema che la ricerca dell'ordine di un infinito o infinitesimo rispetto a un campione non ha sempre soluzione.

Campioni "standard"

Nella pratica si conviene spesso di assumere tacitamente alcuni infiniti o infinitesimi come campioni "standard" e, quando non si fanno ulteriori precisazioni, si sottintende che l'ordine sia riferito a questi campioni standard. Precisamente si conviene spesso che

- per $x \to \pm\infty$, l'infinito campione sia x, e l'infinitesimo campione sia $1/x$;
- per $x \to x_0$, l'infinito campione sia $1/(x - x_0)$, e l'infinitesimo campione sia $x - x_0$.

Si presti però particolare attenzione al testo degli esercizi, controllando se invece è stato scelto un campione diverso.

Infiniti e infinitesimi in diversi punti

Anche se è quasi ovvio, merita di essere segnalato il fatto che una funzione può essere infinita o infinitesima in corrispondenza di diversi punti: per esempio la funzione

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)$$

è infinitesima in corrispondenza dei naturali 0, 1, 2, ..., n.

È altresì importante segnalare che la stessa funzione può essere infinita o infinitesima di ordine diverso rispetto ai campioni standard nei diversi punti (ovviamente i campioni standard cambiano da punto a punto). Per esempio la funzione

$$f(x) = (x-1)^3(x-2)^5$$

è infinitesima di ordine 3 rispetto al campione $x - 1$ in 1, e infinitesima di ordine 5 rispetto al campione $x - 2$ in 2.

8.8 Esercizi

Esercizio 8.1. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + \operatorname{tg}^2 x + x}{\sqrt{x} + \sin x + x^2 + \operatorname{tg}^3 x}\,.$$

Esercizio 8.2. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^2 - \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 x + (\mathrm{e}^x - 1)^3}\,.$$

Esercizio 8.3. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x/2 + x^3}{\operatorname{tg} x - 1 + \cos x}\,.$$

Esercizio 8.4. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \mathrm{e}^x + \ln x + \sin x}{x^4 + 2\mathrm{e}^x + 1 - \cos x}\,.$$

Esercizio 8.5. *Calcolare il seguente limite, usando i principi di sostituzione di infiniti o infinitesimi.*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x^5 + x + \sin x}{x^2 - \ln x^7 + 5x}\,.$$

Esercizio 8.6. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $1/x$.

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3}\,.$$

Esercizio 8.7. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $1/x$.

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,.$$

Esercizio 8.8. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $1/x$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Esercizio 8.9. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x^2 \left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)\,.$$

Esercizio 8.10. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x^2(2 + \sin^2 x)\,.$$

Esercizio 8.11. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x^4 \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)\,.$$

Esercizio 8.12. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(1 + x)}\,.$$

Esercizio 8.13. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+1}{x-3}}\,.$$

Esercizio 8.14. *Verificare che la seguente funzione è infinita in* $+\infty$ *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $\ln x$.

$$f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)\,.$$

Esercizio 8.15. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* 0 *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* x.

$$f(x) = \frac{x^4 + \sin^3 x}{\ln x}\,.$$

Esercizio 8.16. *Verificare che la seguente funzione è infinitesima in* 0 *e calcolarne, se possibile, l'ordine rispetto a* $\sqrt{|\sin x|}$.

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin^3 x}{x + \sqrt{x}}\,.$$

9 Polinomi di Taylor - Convessità

9.1 Derivate successive

Se una funzione è derivabile in un insieme A, come già osservato possiamo considerare la funzione derivata $f'\colon A \to \mathbb{R}$ e possiamo chiederci se questa funzione è a sua volta derivabile (magari in un sottoinsieme di A). Se si, diremo la nuova funzione che così si viene a costruire *derivata seconda* e così via fin quando è possibile. Le funzioni via via ottenute si chiamano *derivate successive* e si indicano con i simboli

$$f'',\, f''',\, f^{iv},\, \dots,\, f^{(n)}\,.$$

Naturalmente l'esistenza della derivata seconda richiede come condizione necessaria che la derivata prima sia continua, e così via per le successive. Può comunque succedere che una funzione sia derivabile, ma che la sua derivata non sia continua, oppure che sia continua ma che non sia ulteriormente derivabile e lo stesso per le derivate successive. A questo proposito si dà la seguente definizione.

Definizione 9.1. *Una funzione si dice* di classe C^n *se è derivabile fino alla derivata n-esima e quest'ultima è continua (naturalmente sono continue, in quanto derivabili, anche le precedenti). Se la funzione è semplicemente continua si dice di classe C^0.*

9.2 Approssimante lineare e approssimazioni polinomiali

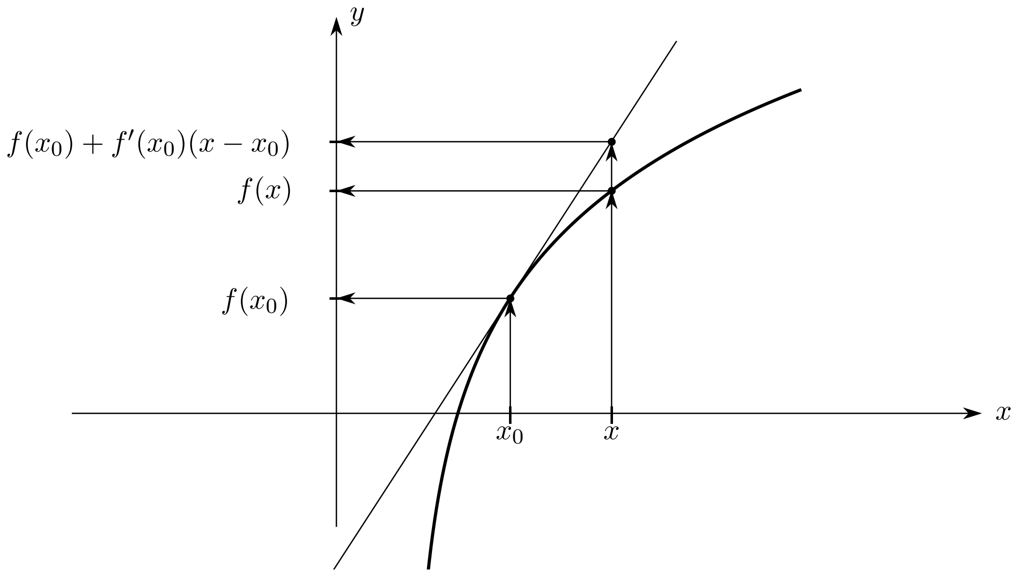
Come conseguenza del teorema 6.8 nella pagina 102 sappiamo che se una funzione è derivabile in un punto x_0 allora esiste una funzione $\omega(h)$ tale che

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+h\omega(h)\,,\quad \text{con} \quad \lim_{h\to 0}\omega(h)=0\,.$$

Se scriviamo $x-x_0$ al posto di h otteniamo

$$(9.1)\quad f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\omega(x-x_0)\,,\quad \text{con} \quad \lim_{x\to x_0}\omega(x-x_0)=0\,.$$

Usando il linguaggio degli infinitesimi possiamo dire che $\omega(x-x_0)$ è infinitesima in x_0 e che $(x-x_0)\omega(x-x_0)$ è infinitesima di ordine superiore a $x-x_0$ in x_0. Se teniamo conto che $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, possiamo rileggere la formula (9.1) come segue: *se una funzione è derivabile in un punto x_0, allora i valori della funzione differiscono dai valori calcolati sulla retta tangente per un infinitesimo di ordine superiore a $x-x_0$.* È questa lettura che ci permette di affermare che *una funzione può essere approssimata dalla sua retta tangente*, naturalmente per punti x "vicini" al punto di tangenza. Ed è sempre questa lettura che ci consente di chiamare *approssimante lineare* la retta tangente al grafico di una funzione in un dato punto. Si veda la figura che segue per maggiore chiarezza.



La domanda che sorge spontanea ora è: è possibile trovare approssimazioni "migliori" della funzione f, sempre nell'intorno di x_0, e considerando solo funzioni semplici come i polinomi? La risposta è affermativa in molti casi e porta alla considerazione dei polinomi di Taylor.

Per capire il modo con il quale si costruiscono i polinomi approssimanti di grado successivo al primo, partiamo dalla considerazione di una funzione polinomiale, per esempio di quarto grado, e analizziamo la situazione nei pressi di 0.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Calcoliamo il polinomio e le sue derivate successive in 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 && \Rightarrow \quad f(0) = a_0 = 0!a_0\,;\\
f'(x) &= 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 && \Rightarrow \quad f'(0) = a_1 = 1!a_1\,;\\
f''(x) &= 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2 && \Rightarrow \quad f''(0) = 2a_2 = 2!a_2\,;\\
f'''(x) &= 24a_4x + 6a_3 && \Rightarrow \quad f'''(0) = 6a_3 = 3!a_3\\
f^{iv}(x) &= 24a_4 && \Rightarrow \quad f^{iv}(0) = 24a_4 = 4!a_4\,.
\end{aligned}$$

Naturalmente tutte le altre derivate sono nulle. Non è difficile concludere (per induzione) che se il polinomio avesse grado n si otterrebbe

$$f^{(p)}(0) = p!a_p \quad \forall p \le n\,, \quad f^{(q)}(x) \equiv 0 \quad \forall q > n\,,$$

ovvero

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}\,, \quad \forall p \le n\,.$$

Se invece di prendere il punto 0 si prende un punto diverso, si procede in una maniera sostanzialmente analoga, anche se con calcoli un po' più complessi. Ragioniamo su un esempio concreto per semplicità. Sia $f(x) = 2x^3+x$ e $x_0 = 1$. Vogliamo scrivere il polinomio nella forma

$$f(x) = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0\,.$$

Si può procedere in diversi modi. È molto istruttivo il metodo delle divisioni successive. Si divide $2x^3+x$ per $x-1$ ottenendo $2x^2+2x+3$ come quoziente e 3 come resto. Si ha allora

$$2x^3+x=(x-1)(2x^2+2x+3)+3\,.$$

Si procede ancora dividendo il quoziente $2x^2+2x+3$ sempre per $x-1$, ottenendo $2x+4$ come quoziente e 7 come resto e quindi

$$2x^2+2x+3=(x-1)(2x+4)+7\,.$$

Infine dividendo $2x+4$ per $x-1$ si ottiene 2 come quoziente e 6 come resto, ovvero

$$2x+4=2(x-1)+6\,.$$

Procedendo a ritroso con le sostituzioni si può ottenere la seguente scrittura del polinomio dato:

$$2x^3+x=2(x-1)^3+6(x-1)^2+7(x-1)+3=a_3(x-1)^3+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0\,.$$

A questo punto, procedendo esattamente come prima, si trova che

$$a_3=\frac{f'''(1)}{3!}\,,\quad a_2=\frac{f''(1)}{2!}\,,\quad a_1=\frac{f'(1)}{1!}\,,\quad a_0=\frac{f(1)}{0!}\,.$$

9.3 Polinomio di Taylor di una funzione

La considerazione fatta sopra relativamente ai polinomi ci suggerisce di cercare condizioni affinchè la formula 9.1 a pagina 141 possa essere migliorata sostituendo l'approssimante lineare $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ con un polinomio approssimante di grado più elevato e del tipo:

$$\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

e in modo tale che la funzione differisca da questo polinomio per una quantità del tipo

$$\frac{\omega(x-x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n\,,\quad \text{con}\quad \lim_{x\to x_0}\omega(x-x_0)=0\,.$$

Il polinomio sopra considerato, costruibile solo per funzioni che siano derivabili n volte nel punto x_0, si chiama *Polinomio di Taylor*[1] *di ordine n della funzione f relativo al punto x_0* e si indica con T_{n,x_0}, cioè si pone

$$T_{n,x_0}(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{9.2}$$

Il seguente teorema fornisce delle condizioni sufficienti affinché il polinomio T_{n,x_0} goda delle proprietà richieste.

[1] Su alcuni testi si usa il termine *Polinomio di Taylor* quando si considera un punto x_0 qualunque, *Polinomio di MacLaurin* quando il punto x_0 coincide con lo zero. I nomi sono legati ai matematici inglesi Brook Taylor (1685 – 1731) e Colin Maclaurin (1698 – 1746) che li introdussero. Noi useremo solo il primo nome.

Teorema 9.2 (Formula di Taylor-Peano). *Sia f una funzione definita in un intervallo $I =]a, b[$ e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che per ogni $x \in I$ esista la derivata $(n-1)$-esima di f, e che in x_0 esista anche la derivata di ordine n. In queste ipotesi esiste una funzione $\omega(x - x_0)$ tale che per ogni $x \in I$ si abbia*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{\omega(x-x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} \omega(x - x_0) = 0\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di provare che

$$\lim_{x \to x_0} n!\,\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,,$$

o, il che è la stessa cosa, che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0\,.$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} &= \\ &= \frac{f(x) - \left[\dfrac{f(x_0)}{0!} + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}\right]}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,,\end{aligned}$$

basterà provare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left[\dfrac{f(x_0)}{0!} + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}\right]}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,.$$

Se $n = 1$ la cosa è ovvia per definizione di derivata. Se $n > 1$ al limite del primo membro è possibile applicare il teorema di l'Hôpital (forma $^0/_0$) e si perviene al calcolo del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \left[\dfrac{f'(x_0)}{1!} + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)}\right]}{n(x-x_0)^{n-1}}\,.$$

A questo limite si può ancora applicare il teorema di l'Hôpital, e così via fino a calcolare $n-1$ derivate, dopo di che si giunge al calcolo del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)}\,,$$

ma questo limite è proprio

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

per definizione di derivata n-esima. □

Il risultato del teorema appena dimostrato si può riassumere nella seguente formula:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\omega(x - x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \tag{9.3}$$

L'ultimo addendo del secondo membro, che misura "l'errore" che si commette se si approssima la funzione con il polinomio di Taylor, si chiama anche *termine complementare* o *resto* e la formula stessa prende il nome di *Formula di Taylor di punto iniziale* x_0 *e di ordine n, con il termine complementare di Peano*.

Il termine complemementare nell'equazione (9.3) è il prodotto tra $(x - x_0)^n$ e un infinitesimo per $x \to x_0$, dunque è un infinitesimo di ordine superiore a n rispetto al campione $x - x_0$.

Questo risultato è di grande importanza applicativa nei campi più svariati, ma è da osservare che sul termine complementare non abbiamo nessuna informazione, se non che tende a 0, al tendere di x a x_0, più velocemente di $(x - x_0)^n$: nulla sappiamo dei valori che questo termine assume in punti diversi da x_0 stesso. Si ricordi sempre che *infinitesimo* è una quantità che tende a zero al tendere di x a x_0, ma questo non fornisce alcuna informazione sui valori dell'infinitesimo stesso al di fuori di x_0.

Proponiamo un esempio di applicazione di questa formula al calcolo dei limiti.

Esempio. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} .$$

Siccome questo limite è calcolabile facilmente anche con la regola di l'Hôpital, si può controllare per questa via la bontà del risultato che otterremo.

Usiamo la formula di Taylor-Peano di punto iniziale 0 per la funzione seno del terzo ordine. Si ha, facilmente,

$$f(x) = \sin x\,, \quad f'(x) = \cos x\,, \quad f''(x) = -\sin x\,, \quad f'''(x) = -\cos x\,,$$

da cui

$$f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1\,, \quad f''(0) = 0\,, \quad f''(0) = -1\,.$$

Da qui si trova

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \omega(x)\frac{x^3}{3!} .$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \omega(x)\dfrac{x^3}{3!}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^3}{3!} - \omega(x)\dfrac{x^3}{3!}}{x^3} .$$

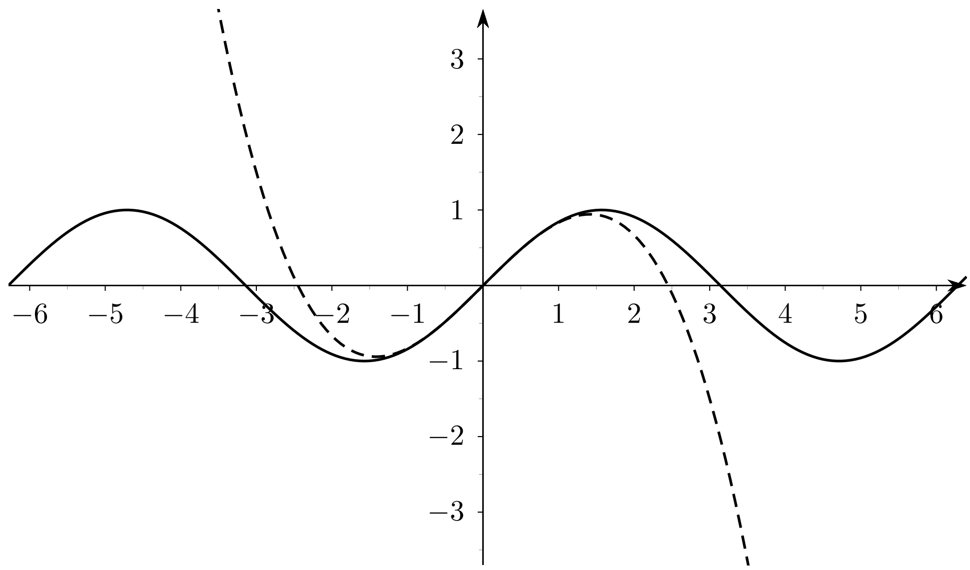
Il principio di sostituzione degli infinitesimi ci garantisce che possiamo trascurare il secondo addendo del numeratore e a questo punto il limite vale banalmente $1/6$.

Si noti come, per calcolare questo limite, abbiamo usato *esclusivamente* la proprietà che ω è una funzione infinitesima per $x \to 0$, mentre non ci siamo in alcun modo preoccupati di conoscere i valori di ω al di fuori di 0.

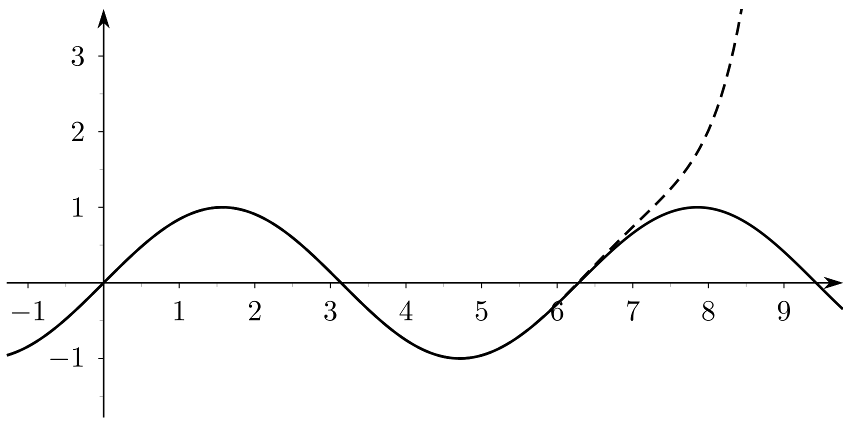
L'esempio proposto mostra anche che, per la funzione $\sin x$, il polinomio di Taylor di ordine 3 e punto iniziale 0 è il seguente

$$T_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} .$$

È molto istruttivo confrontare il grafico della funzione $\sin(x)$ e di $T_{3,0}(x)$, per verificare che cosa significa che il polinomio approssima la funzione. I grafici sono riportati nella figura che segue: in continuo il grafico di $\sin x$, in tratteggio quello di $T_{3,0}(x)$.



Nella figura che segue proponiamo anche il grafico della funzione $\sin(x)$ e di $T_{17,0}(x)$: poiché la funzione $\sin x$ è periodica, è chiaro che il polinomio $T_{17,0}(x)$, che approssima ottimamente la funzione $\sin x$ nel tratto $[0, 2\pi]$, può essere utilizzato vantaggiosamente per calcoli relativi alla funzione seno. Se poi si tiene conto che, in realtà, basterebbe conoscere solo i valori della funzione seno nel tratto $[0, \pi/2]$, si vede subito che basterebbe considerare polinomi ancora più semplici, e già il polinomio di ordine 3 comincia ad essere soddisfacente.



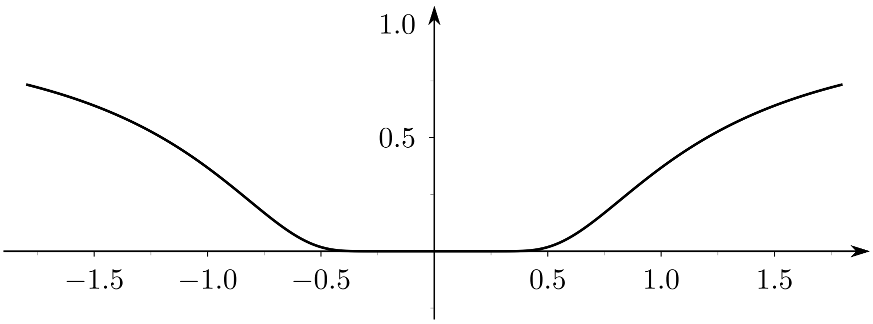
Per le applicazioni è comunque molto importante poter valutare il massimo errore che si commette nel sostituire a una data funzione un suo polinomio di Taylor e, purtroppo, la formula di Taylor-Peano non è di alcun aiuto in questo. Considereremo fra poco una nuova formula che ci permetterà di fare valutazioni sufficientemente precise per molti scopi.

Prima di procedere oltre vogliamo però mettere in guarda il lettore: il comportamento "decente" che ha la funzione seno non è la regola. Un esempio classico è molto importante è il seguente.

Esempio. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

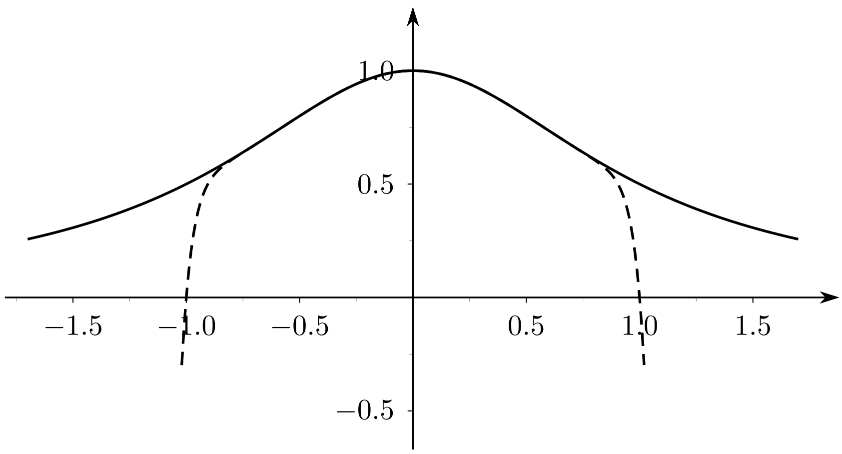
Si può provare (con un po' di pazienza!) che la funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e che tutte le derivate, di qualsiasi ordine, sono nulle nell'origine. Se ne deduce che il polinomio di Taylor di ordine qualsiasi, di punto iniziale 0, è sempre il polinomio identicamente nullo ed è evidente che il polinomio identicamente nullo *non* costituisce una buona approssimazione "globale" della funzione. Il grafico che segue mostra solo che l'approssimazione è "ad occhio" accettabile nei pressi dell'origine (il polinomio di Taylor non è rappresentato in quanto coincide con l'asse x).



Anche in casi decisamente più semplici, comunque, si verificano situazioni in cui i polinomi di Taylor, seppure con ordini molto alti, costituiscono approssimazioni che non possono essere estese ad intervalli arbitrari del dominio. Il grafico che segue si riferisce alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(con linea continua) e al suo polinomio di Taylor (in tratteggio) di ordine 22 nell'origine.



Per quanto si aumenti l'ordine, il polinomio non riesce a fornire un'approssimazione accettabile fuori dall'intervallo $[-1, 1]$. Come utile esercizio si può provare che il polinomio di Taylor di ordine 8 e di punto iniziale 0 della funzione appena considerata è

$$T_{8,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 .$$

E veniamo ora all'annunciato teorema, che proponiamo senza dimostrazione, che permette di fare delle valutazioni sull'ordine di grandezza dell'errore che si commette approssimando una funzione con un suo polinomio di Taylor.

Teorema 9.3 (Formula di Taylor-Lagrange)**.** *Sia f una funzione definita in un intervallo $I =]a, b[$ e sia x_0 un punto di I. Supponiamo che per ogni $x \in I$ esista la derivata di ordine n continua e che almeno in tutti i punti di $I \setminus \{x_0\}$ esista anche la derivata di ordine $n+1$ di f. Allora esiste almeno un punto c compreso tra x_0 e x o tra x e x_0 tale che per ogni $x \in I$ si abbia*

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Nelle ipotesi del teorema si può scrivere la seguente formula

$$(9.4)\quad f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,,$$

che prende il nome di *Formula di Taylor di punto iniziale x_0 e di ordine n, con il termine complementare di Lagrange*.

Se $n = 0$ la formula si riduce al Teorema di Lagrange, in quanto diventa

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)\,, \quad \text{ovvero} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)\,.$$

Mostriamo un esempio di come si possa usare questa formula per calcoli approssimati, comprendendo una valutazione del grado di approssimazione, cosa che è estremamente importante nelle applicazioni.

Esempio. Si calcoli $\sin 1$, utuilizzando il polinomio di Taylor di ordine 5 della funzione seno, di punto iniziale 0, e valutando l'errore massimo che si commette con questa approssimazione.

Teniamo conto che la funzione seno e tutte le sue derivate pari sono nulle nell'origine, mentre le derivate disperi valgono alternativamente 1 e -1. Otteniamo facilmente, con c numero compreso tra 0 e 1,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\cos c}{7!}x^7\,,$$

dove abbiamo preferito proseguire con le derivate fino alla $7^a pa$, considerato che la derivata sesta in 0 si annulla. Avremo dunque

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{\cos c}{7!}\,.$$

Anche se non abbiamo informazioni sul valore di c, possiamo però sicuramente affermare che $|\cos c| \leq 1$, e che quindi l'errore che si commette trascurando il termine complementare è, in modulo, inferiore a $1/7!$. Quindi

$$\sin 1 \simeq 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120}$$

con un errore minore di $1/5040$. Si può anche fare una verifica sommaria, con una calcolatrice tascabile, di quanto affermato:

$$\frac{101}{120} = 0.841\overline{6}\,, \quad \sin 1 = 0.84147098480789650665\ldots$$

L'esempio appena considerato prova che la formula di Taylor-Lagrange riesce a fornire valutazioni corrette sul grado di approssimazione del polinomio di Taylor, quando sia possibile stimare il massimo valore che raggiunge il modulo della derivata $n+1$-esima della funzione in esame, nell'intervallo tra x_0 e x (oppure tra x e x_0. Questo succede per tutte le funzioni elementari di uso comune.

Proponiamo a questo punto una lista dei polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari, di punto iniziale 0, invitando il lettore a ricavarli come utile esercizio. In alcuni casi, a fianco è indicato anche il modulo dell'errore che si commette approssimando la funzione con il polinomio indicato. Naturalmente c è un punto compreso tra 0 e x, o tra x e 0.

$$
\begin{array}{lll}
\sin x & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\,, & \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,|\cos c| \\
\cos x & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\,, & \dfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,|\cos c| \\
\mathrm{e}^x & 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}\,, & \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^c \\
\ln(1+x) & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\,, & \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)}\,\dfrac{1}{(1+c)^{n+1}} \\
\operatorname{tg} x & x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{7x^7}{315} & \\
\operatorname{arctg} x & x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dots+(-1)^{n}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} &
\end{array}
$$

9.4 Concavità e convessità in un intervallo

Definizione 9.4 (Insieme convesso)**.** *Un sottoinsieme (di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) si dice* convesso *se ogni volta che contiene due punti, contiene anche il segmento che li unisce.*

Gli unici sottoinsiemi convessi della retta sono gli intervalli. Gli angoli convessi (non superiori all'angolo piatto) sono insiemi convessi del piano, un cerchio è un insieme convesso del piano,...

Definizione 9.5. *Se $f\colon I\to\mathbb{R}$ è una funzione , si chiama* sopragrafico *di f l'insieme dei punti $P(x,y)$ del piano tali che*

$$x\in I,\quad y\ge f(x)\,.$$

ovvero l'insieme dei punti che "stanno sopra" al grafico di f. Analoga la definizione di sottografico.

Definizione 9.6. *Una funzione $f\colon I\to\mathbb{R}$, dove I è un intervallo, si dice* convessa *se il suo sopragrafico è convesso,* concava *se il suo sottografico è convesso.*

Al posto di funzione convessa si può anche usare l'espressione "funzione che volge la concavità verso l'alto", al posto di funzione concava quella di "funzione che volge la concavità verso il basso".

La condizione di convessità in un intervallo è una condizione molto restrittiva per una funzione. Si può per esempio dimostrare che una funzione convessa in un intervallo *aperto*[(2)] è sempre continua nell'intervallo e addirittura ammette derivata sinistra e destra in ogni punto dell'intervallo con la derivata sinistra minore o uguale alla derivata destra. Noi qui ci limiteremo a considerare condizioni sufficienti per la convessità. Premettiamo a questo fatto la seguente osservazione.

Osservazione 9.7. Per verificare la convessità di una funzione è sufficiente dimostrare che il segmento che congiunge due punti qualunque del suo grafico sta tutto nel sopragrafico della funzione. Questo si può esprimere come segue. Se x_1 e x_2 sono due punti qualunque del dominio I (un intervallo) della funzione, la retta che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha equazione

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

Dunque la condizione di convessità si scrive come segue:

$$\forall x \in]x_1\,,\, x_2[,\ f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,. \tag{9.5}$$

Se la disuguaglianza precedente vale in senso stretto la funzione si dice *strettamente convessa.*

Teorema 9.8. *Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in I. Se è $f''(x) \ge 0$ in ogni punto interno di I, allora la funzione è convessa in I; se $f''(x) \le 0$ in ogni punto interno di I, allora la funzione è concava in I.*

Dimostrazione. Per provare la convessità dobbiamo provare la (9.5), se $x_1 < x < x_2$, ovvero che

$$\big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)(x - x_1) \le 0\,.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned}
\big(f(x)-f(x_1)\big)&(x_2 - x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)(x - x_1) = \\
&= \big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x + x - x_1) - \big(f(x_2) - f(x) + f(x) - f(x_1)\big)(x - x_1) = \\
&= \big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x) + \big(f(x) - f(x_1)\big)(x - x_1) \\
&\qquad - \big(f(x_2) - f(x)\big)(x - x_1) - \big(f(x) - f(x_1)\big)(x - x_1) = \\
&= \big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x) - \big(f(x_2) - f(x)\big)(x - x_1)\,.
\end{aligned}$$

In base al teorema di Lagrange abbiamo

$$f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)\,, \quad f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)\,, \quad \text{con } c_1 < c_2\,.$$

Ne segue che l'ultimo membro dell'uguaglianza precedente diventa

$$f'(c_1)(x - x_1)(x_2 - x) - f'(c_2)(x_2 - x)(x - x_1) = \big(f'(c_1) - f'(c_2)\big)(x - x_1)(x_2 - x)\,.$$

[2] Attenzione: se l'intervallo è chiuso una funzione convessa può non essere continua; basta considerare ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x = \pm 1 \\ |x|\,, & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}\,.$$

Poichè la funzione f' è a sua volta derivabile, possiamo concludere, applicando Lagrange alla funzione f' nell'intervallo $[c_1\,,\,c_2]$, che

$$f'(c_1) - f'(c_2) = f''(c)(c_1 - c_2)\,.$$

Sostituendo concludiamo che si ha

$$\big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)(x - x_1) = f''(c)(c_1 - c_2)(x - x_1)(x_2 - x)\,.$$

Poiché i fattori dell'ultimo membro sono, nell'ordine, positivo (per ipotesi), negativo (perché $c_1 < c_2$), positivo (perché $x > x_1$), positivo (perché $x < x_2$), ne segue che il prodotto è negativo. Questo conclude la dimostrazione. □

9.5 Proprietà locali del secondo ordine (cenni). Flessi

Nello studio delle proprietà locali di una funzione abbiamo confrontato i valori della funzione in un intorno di un punto con il valore nel punto. Supponiamo ora che la funzione sia derivabile in un punto x_0 ed eseguiamo un confronto tra i valori della funzione in un intorno di x_0 e i valori calcolati sulla retta tangente in x_0. Si danno a questo proposito le seguenti definizioni.

Definizione 9.9. *Sia f una funzione definita in un intervallo I, derivabile in un punto x_0 di I. La funzione si dice* (localmente) convessa [(localmente) concava] *in x_0 se esiste un intorno U_{x_0} tale che in ogni suo punto si abbia*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \big[f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big]\,.$$

Se le disuguaglianze valgono in senso stretto (ovviamente per $x \neq x_0$) allora la funzione si dice strettamente convessa o concava.

Definizione 9.10. *Sia f una funzione definita in un intervallo I, derivabile in un punto x_0 di I. Se esiste un intorno U_{x_0} tale che*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x < x_0 \text{ e } f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x > x_0$$

oppure

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x < x_0 \text{ e } f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ per } x > x_0$$

allora il punto x_0 si dice di flesso *per la funzione f.*

È facile provare che se una funzione è derivabile e convessa in un intervallo è (localmente) convessa in ogni punto dell'intervallo. Può però succedere che una funzione sia convessa in un punto, senza esserlo in un intorno del punto, come vedremo su esempi.

È poi evidente che se un punto x_0 interno a I, dove la funzione è derivabile, è estremo comune di due intervalli in uno dei quali la funzione è convessa e nell'altro concava, o viceversa, allora x_0 è di flesso.

Per la convessità locale vale il seguente teorema.

Teorema 9.11. *Se una funzione è due volte derivabile in un intervallo I e x_0 è un punto interno di I, allora*

1. *se* $f''(x_0) > 0$ *la funzione è convessa in* x_0*;*
2. *se* $f''(x_0) < 0$ *la funzione è concava in* x_0*;*
3. *se* x_0 *è di flesso,* $f''(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Proviamo la prima proprietà usando la formula di Taylor-Peano.

$$f(x) - \big(f(x) + f'(x_0)(x - x_0)\big) = \left(\frac{f''(x_0) + \omega(x - x_0)}{2!}\right)(x - x_0)^2 .$$

Poiché

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x_0) + \omega(x - x_0)}{2!} = \frac{f''(x_0)}{2!} > 0 ,$$

per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno U_{x_0} in cui, tranne in x_0, tutta la quantità

$$\frac{f''(x_0) + \omega(x - x_0)}{2!}$$

è maggiore di zero. Questo basta per concludere. □

9.6 Condizioni sufficienti per massimi, minimi, flessi (cenni)

Concludiamo questo capitolo con l'enunciato di due teoremi che forniscono condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi, minimi, flessi, mediante la conoscenza delle derivate di una funzione in un punto.

Teorema 9.12. *Sia* f *una funzione definita in un intervallo aperto* I*, e sia* x_0 *un punto di* I *dove*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 , \quad \textit{mentre} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 .$$

Allora

- *se* n *è pari la funzione ha in* x_0 *un massimo (se* $f^{(n)}(x_0) < 0$*), un minimo (se* $f^{(n)}(x_0) > 0$*);*
- *se* n *è dispari la funzione è crescente in* x_0 *(se* $f^{(n)}(x_0) > 0$*), decrescente (se* $f^{(n)}(x_0) < 0$*).*

Teorema 9.13. *Sia* f *una funzione definita in un intervallo aperto* I*, e sia* x_0 *un punto di* I *dove*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 , \quad \textit{mentre} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 .$$

Allora

- *se* n *è pari la funzione è in* x_0 *concava (se* $f^{(n)}(x_0) < 0$*), convessa (se* $f^{(n)}(x_0) > 0$*);*
- *se* n *è dispari la funzione ha un flesso in* x_0*.*

9.7 Esercizi

Esercizio 9.1. *Calcolare il polinomio di Taylor dell'ordine indicato, relativo al punto* 0*, per le seguenti funzioni.*

- $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$*, ordine* 3.

– $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$, *ordine* 4.

– $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, *ordine* 4.

Esercizio 9.2. *Calcolare il polinomio di Taylor di ordine* n *di*

– $f(x) = \mathrm{e}^x$, *relativo al punto* 1;

– $f(x) = \ln x$, *relativo al punto* 2;

– $f(x) = \sin x$, *relativo al punto* $\pi/4$.

Esercizio 9.3. *Dire quali tra le seguenti funzioni sono convesse in* $\mathbb{R}$.

– $f(x) = \mathrm{e}^{x+5}$;

– $f(x) = \begin{cases} x \ln|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$;

– $f(x) = x^4 + x^2$.

Esercizio 9.4. *Delle seguenti funzioni determinare gli intervalli ove sono convesse, concave e i punti di flesso.*

– $f(x) = x^3 - x^2 + x$;

– $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$;

– $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2$.

Esercizio 9.5. *Calcolare i seguenti limiti, facendo uso opportuno della formula di Taylor delle funzioni elementari.*

– $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\ln(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$;

– $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^5}{3\operatorname{arctg} x - 3x + x^3}$;

– $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{e}^x - 2 - 2x - x^2}{\sin^3 x}$.

Esercizio 9.6. *Utilizzando gli sviluppi di taylor delle funzioni elementari, trovare i polinomi di Taylor di ordine* 5 *delle seguenti funzioni, senza calcolarne le derivate successive.*

– $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$;

– $f(x) = \sin(x^2 + x)$;

– $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$.

9.8 Esercizi sui grafici delle funzioni reali

Esercizio 9.7. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2\sin\frac{1}{x}.$$

Determinare gli asintoti della funzione. Dire se esiste un intorno destro di 0 *dove la funzione è monotona. Dire se esiste un intorno di* $+\infty$ *dove la funzione è monotona.*

Esercizio 9.8. *Con un opportuno confronto di grafici dire se la seguente equazione ha o no soluzioni:*

$$\sin(\pi x) = x\,.$$

Esercizio 9.9. *Utilizzando un opportuno grafico, trovare il numero e il segno delle radici della seguente equazione:*

$$x^3 - 5x + \pi = 0\,.$$

Esercizio 9.10. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^6 \sin\dfrac{1}{x}, & \textit{se } x \neq 0 \\ 0, & \textit{se } x = 0 \end{cases}\,.$$

Si provi che $f''(0) = 0$. *Si dica se la funzione è convessa, concava, oppure ha un flesso nel punto* 0.

Esercizio 9.11. *Della funzione*

$$f(x) = x^{\dfrac{x+1}{x+2}}$$

si determini il dominio naturale, la derivata prima e i limiti della derivata prima per $x \to 0^+$ *e per* $x \to +\infty$.

Esercizio 9.12. *Si dimostri che la funzione*

$$f(x) = \ln x - \mathrm{e}^x$$

non si annulla mai.

Esercizio 9.13. *Si tracci un grafico sommario delle seguenti funzioni, nel loro dominio naturale.*

- $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.
- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
- $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.
- $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
- $f(x) = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
- $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

10 Successioni e serie numeriche

10.1 Successioni e sottosuccessioni

Tra tutte le funzioni di $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hanno un interesse specifico quelle dove A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, in particolare un sottoinsieme infinito[(1)] (e dunque superiormente illimitato) di $\mathbb{N}$. Ne abbiamo già fatto un cenno nella pagina 11. Le tratteremo ora con un certo dettaglio, vista la loro importanza applicativa.

Cominciamo con l'introdurre le speciali nomenclature e scritture che si usano in questo caso.

Definizione 10.1. *Sia A un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$; una funzione $a\colon A \to \mathbb{R}$ si chiama una* successione *o anche una successione in $\mathbb{R}$.*

Per questo tipo di funzioni si usano generalmente, come già nella definizione, le lettere a, b, ..., anziché le lettere f, g, ... Inoltre l'immagine di un naturale n tramite la funzione stessa si indica di solito con a_n anziché con $a(n)$. L'elemento a_n è anche detto il *termine generale* o termine n-esimo della successione. La successione stessa si indica spesso con la scrittura

$$(a_n)_{n\in A} \quad \text{o anche semplicemente} \quad (a_n)_n\,, \quad \text{o ancora} \quad (a_n)\ .$$

Naturalmente in presenza di una specifica regola di calcolo per la successione, potremo usare anche la stessa scrittura già usata per le funzioni. Per esempio, scrivendo

$$a_n = \frac{1}{n}$$

intenderemo riferirci alla successione che ad ogni $n \in \mathbb{N}^+$ fa corrispondere il reciproco di n stesso.

L'immagine della successione si indica, come già per le funzioni, con

$$\{\, a_n \mid n \in A \subseteq \mathbb{N} \,\}\ .$$

In molti casi per indicare una successione si scrivono esplicitamente i "primi" termini, cioè le immagini dei primi elementi del dominio, come nel seguente esempio.

Esempio. La successione $a_n = {}^1\!/_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, si indica anche con la scrittura

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

[1] In realtà si possono considerare anche funzioni definite su un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$, ma per esse non si può dare una definizione di limite, per cui sono poco interessanti per i nostri scopi, anche se hanno notevole interesse applicativo nei campi più svariati. Se ci capiterà di considerarle le chiameremo *successioni finite*.

Naturalmente una scrittura di questo tipo può dare luogo a equivoci e va usata con grande cautela e solo se tutto è chiaro dal contesto.

Se per esempio scrivo
$$3,\ 5,\ 7,\ \dots$$
posso riferirmi sia alla successione dei numeri primi dispari (per cui il successivo sarà 11), sia alla successione dei dispari (per cui il successivo sarà 9).

A proposito della successione dei primi
$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \dots$$
è da segnalare che non esiste una formula per determinare chi è l'immagine di 1000, cioè il 1000° numero primo, ci si deve limitare a consultare una tabella: in un certo senso si può dire che la funzione che associa a ogni numero naturale n l'n-esimo numero primo non è una funzione elementare, anche se il teorema di Euclide sull'infinità dei primi ci garantisce che esiste l'n-esimo numero primo, per ogni n.

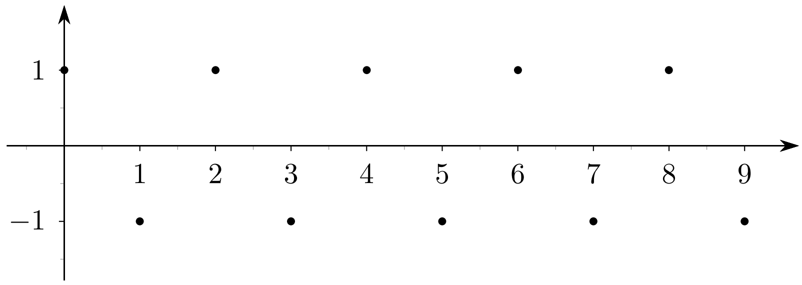
Esempi.

- Sia $a_n = 1/(n-2)$. È chiaro che si tratta di una successione definita in $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, i cui primi elementi sono
$$-\frac{1}{2},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots$$
Volendo potrei anche considerarla una successione definita in $\mathbb{N}$, con la definizione seguente:
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}, & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n < 2 \\ \dfrac{1}{n-1}, & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \end{cases} .$$
Lo stesso vale per ogni altra successione, ma di solito la cosa non è molto utile, anche se logicamente importante, perché permette di avere tutte le successioni con lo stesso dominio.
- Sia $a_n = (-1)^n$. Si tratta di una successione definita su tutto $\mathbb{N}$, i cui primi elementi sono
$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots$$
- La successione $a_n = n!$ è la successione i cui primi elementi sono i seguenti
$$1,\ 1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ \dots$$

Definizione 10.2. *Se è data una successione $a\colon A \to \mathbb{R}$ e B è un sottoinsieme infinito di A, anche la restrizione della funzione a all'insieme B è ancora una successione, che si chiama una* sottosuccessione. *Nel caso che il sottoinsieme B sia costituito da tutti gli elementi di A maggiori o uguali a un determinato naturale p, si parla anche di* coda *della successione, o di coda che inizia con p.*

Si presti particolare attenzione a non confondere una successione con il suo insieme immagine, esattamente come non si deve confondere una qualunque funzione con l'insieme immagine.

Di una successione, come di ogni funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, possiamo fare un grafico cartesiano. Per esempio il grafico della successione $a_n = (-1)^n$ ha l'andamento seguente.



Si tratta di una successione che "oscilla indefinitamente" tra -1 e 1.

Sulla base del principio di induzione (vedi la pagina 20), si possono definire le successioni anche per ricorrenza, come nell'esempio che segue.

Esempio. Si consideri la successione, detta di *Fibonacci*, definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$$

I primi termini della successione sono i seguenti

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$$

Anche per le successioni si possono introdurre le definizioni di *successione crescente* e *decrescente* e, più in generale, di successione monotona.

Definizione 10.3. *Diremo che una certa proprietà è verificata* definitivamente *per una successione se esiste p tale che la coda della successione che inizia con p verifica la proprietà suddetta.*

Esempi.

- La successione $a_n = {}^1\!/\!_{(n-2)}$ è definitivamente decrescente, in quanto la coda che inizia con $n = 3$ è decrescente (si veda uno degli esempi sopra considerati).
- La successione $a_n = 1 - \ln n$ è definitivamente negativa, in quanto la coda che inizia con 3 è costituita tutta da numeri negativi.

10.2 Limiti di successioni

Essendo le successioni particolari funzioni reali di variabile reale, possiamo chiederci se ha senso considerare per esse il concetto di limite. Poiché la definizione di limite richiede che il punto x_0 in cui si calcola il limite sia di accumulazione per il dominio della funzione, oppure, nel caso di insiemi opportunamente illimitati, sia uno dei simboli di infinito, si vede subito che per le successioni il concetto ha senso solo per $n \to +\infty$ e non richiede alcuna ulteriore precisazione rispetto alla definizione data per le funzioni "ordinarie".

In considerazione del fatto che il limite si può calcolare solo a $+\infty$, spesso si scrive solo

$$\lim a_n \quad \text{anziché, più esplicitamente,} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

Per ragioni di completezza riformuliamo comunque la definizione di limite adattandola al caso delle successioni, ed esplicitandola in tutti i casi possibili.

Definizione 10.4. *Sia (a_n) una successione.*

1. *Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che* $\lim a_n = l$ *se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $|a_n - l| < \varepsilon$. È come dire che la successione è definitivamente compresa tra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$, qualunque sia $\varepsilon > 0$. In questo caso la successione si dice anche* convergente.
2. *Se $l = +\infty$, si dice che* $\lim a_n = l$ *se per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $a_n > k$. È come dire che la successione è definitivamente maggiore di k, qualunque sia k. In questo caso la successione si dice anche* divergente a $+\infty$ *o* positivamente divergente.
3. *Se $l = -\infty$, si dice che* $\lim a_n = l$ *se per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $a_n < k$. È come dire che la successione è definitivamente minore di k, qualunque sia k. In questo caso la successione si dice anche* divergente a $-\infty$ *o* negativamente divergente.
4. *Se $l = \infty$, si dice che* $\lim a_n = l$ *se per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $|a_n| > k$. È come dire che la successione è, in modulo, definitivamente maggiore di k, qualunque sia k.*
5. *Nel caso che sia $l = \infty$ senza essere né $l = +\infty$, né $l = -\infty$, oppure nel caso il limite non esista, la successione si dice* indeterminata.

Naturalmente per le successioni non si porranno il concetto di continuità (il dominio è fatto solo da punti isolati) ne, tantomeno, quello di derivata.

Osservazione 10.5. In molti casi di interesse pratico si può facilmente interpretare una successione come la restrizione a $\mathbb{N}$ (o a un suo sottoinsieme) di una funzione definita in un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Esempio. La successione $a_n = 1/n$ può essere interpretata come la restrizione a $\mathbb{N}^+$ della funzione, definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = 1/x$.

In altri casi la cosa non è possibile, o perlomeno non è facile.

L'osservazione è abbastanza importante per quanto riguarda il calcolo dei limiti. Infatti per le funzioni abbiamo delle tecniche che si basano sul calcolo differenziale, cosa che non è possibile con le successioni. Se è possibile calcolare il limite di queste funzioni a $+\infty$, e se questo limite esiste, esisterà anche il limite della successione, in base al teorema sul limite delle restrizioni. Se invece il limite della funzione non esiste, nulla si potrà dire sul limite della successione.

Esempi.

– Si debba calcolare
$$\lim n \sin \frac{1}{n}\,.$$
La successione può essere pensata come la restrizione a $\mathbb{N}^+$ della funzione
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}\,.$$
Poiché si ha
$$\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\, \sin t = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\,,$$
se ne deduce che anche $\lim a_n = 1$.

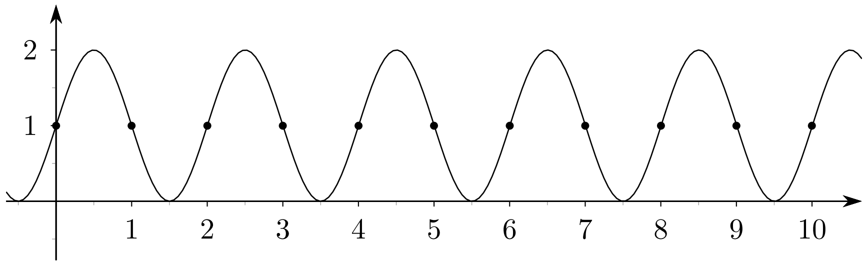
– Si debba calcolare

$$\lim(\sin(n\pi) + 1)\,.$$

La successione può essere pensata come la restrizione a $\mathbb{N}$ della funzione

$$f(x) = \sin(\pi x) + 1\,.$$

La funzione non ha però limite, se $x \to +\infty$, dunque nulla si potrà dire, per questa via, del limite della successione. Tuttavia la successione è costantemente uguale a 1, dunque il suo limite sarà ancora 1. Si veda anche il grafico che segue per rendersi conto di come vanno le cose.



Per le successioni continuano a valere i teoremi di unicità, confronto, permanenza del segno, nonché tutti quelli sull'algebra dei limiti che già abbiamo considerato per le funzioni.

In genere non è agevole il calcolo di limiti di successioni che non si possano ricondurre al calcolo di limiti di opportune funzioni, oppure a cui non siano applicabili i teoremi sull'algebra dei limiti. Proponiamo un esempio per mostrare come si può procedere, segnalando che esistono comunque anche alcuni teoremi che facilitano la ricerca in casi di interesse pratico.

Esempio. Si debba calcolare il limite seguente.

$$\lim \frac{n!}{n^n}\,.$$

Si ha

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{n}\,\frac{2}{n}\,\ldots\,\frac{n-1}{n}1 < \frac{1}{n}\,.$$

Per il teorema del confronto possiamo dire che il limite richiesto vale 0.

È evidente, in base alla definizione, che una successione e una sua coda qualunque hanno lo stesso comportamento nei riguardi del limite.

È altresì evidente che se due sottosuccessioni diverse di una successione hanno limite diverso, allora la successione non può avere limite. Questo è spesso un criterio usato per provare che una successione non ha limite.

Un metodo spesso applicato è anche di calcolare il limite solo sui termini corrispondenti a valori pari di n e quello solo sui termini corrispondenti a valori dispari di n; se i due limiti sono diversi si può concludere che il limite non esiste, se sono entrambi uguali a l si può invece concludere che il limite della successione è proprio l: lo si provi per esercizio.

Esempio. La successione definita da $a_n = (-1)^n$ non ha limite perché la successione dei termini pari vale costantemente 1, e dunque ha limite 1, quella dei termini dispari ha limite -1 in quanto vale costantemente -1.

10.3 Il numero di Nepero

Abbiamo già considerato (vedi la pagina 85), il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x ,$$

senza fornire una dimostrazione di questo risultato. È evidente che, una volta acquisito questo limite, si può anche calcolare il seguente

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e che questo limite vale ancora il numero e di Nepero.

In realtà la dimostrazione procede esattamente in senso contrario: si valuta cioè prima il limite della successione e poi si passa a quello della funzione. I passi di questa dimostrazione sono i seguenti.

- Si prova che la successione è strettamente compresa tra 2 e 3.
- Si prova che la successione è crescente.
- Si deduce (teorema sul limite delle funzioni monotone) che il limite esiste finito.
- Si prova che il limite è un numero irrazionale, addirittura trascendente, che si indica con "e".
- Con opportuni procedimenti se ne calcola un'approssimazione, con il grado voluto di approssimazione.

Alcuni di questi passi potrebbero costituire un utile esercizio, altri (in particolare il quarto) sono decisamente più complessi ed esulano dagli scopi di questo corso. In ogni caso non tratteremo il problema in dettaglio, invitando comunque il lettore interessato a consultare un qualunque buon testo di analisi.

10.4 Serie numeriche

Tra le successioni numeriche sono particolarmente importanti quelle costruite con il criterio che esporremo in questo paragrafo, il cui scopo è quello di estendere, in un certo senso, l'operazione di addizione da un numero finito a uno infinito di addendi.

Si presti però fin da subito attenzione al fatto che, anche se riusciremo in un certo senso a costruire somme di infiniti addendi, queste somme non godranno delle stesse proprietà delle ordinarie somme, in particolare non varranno sempre le proprietà commutativa e associativa che sono essenziali nella somma ordinaria.

Cominciamo a proporre un esempio per capire il senso di quanto esporremo.

Consideriamo la rappresentazione in base 10 di un numero razionale, che sia un decimale finito, per esempio 325.6432. Come ben sappiamo questa scrittura può essere interpretata come segue:

$$325.6432 = 3\times10^2+2\times10^1+5\times10^0+6\times10^{-1}+4\times10^{-2}+3\times10^{-3}+2\times10^{-4} ,$$

e il punto decimale nella scrittura 325.6432 ha proprio lo scopo di separare i coefficienti delle potenze di 10 con esponente positivo da quelle con esponente negativo. Fissando l'attenzione solo sulla parte dopo il punto decimale, la scrittura precedente può essere così riformulata:

$$325.6432 = 325 + \frac{6}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{2}{10^4}\,.$$

Si può cioè vedere la parte dopo il punto decimale come la somma di un certo numero (in questo caso 4) di frazioni.

La domanda che sorge spontanea ora è la seguente: è possibile estendere questa idea al caso dei numeri razionali che hanno una rappresentazione decimale periodica? Possiamo per esempio chiederci se ha senso una scrittura come la seguente:

$$1,\overline{3} = 1,33333333\dots = 1 + \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots\,.$$

La risposta è chiaramente *no*, in quanto non abbiamo alcuna idea di come si possa fare una "somma di infiniti addendi".

Ebbene vogliamo ora costruire una teoria rigorosa che permetta di dare un senso all'idea a cui abbiamo accennato: si tratta della teoria delle *serie numeriche*, di cui comunque considereremo soltanto i concetti essenziali.

Per fare questo supponiamo sia data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, a partire da essa, costruiamo una nuova successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nel modo seguente.

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0;\\
s_1 &= a_0 + a_1;\\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2;\\
&\dots\\
s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n;\\
&\dots
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Definizione 10.6. *La successione (s_n) costruita come indicato dalla formula (10.1) si chiama* successione delle ridotte *(o anche delle somme parziali) associata alla successione (a_n), o* serie *associata alla successione (a_n).*

Gli elementi della successione (a_n) si chiamano termini della serie *e la serie si indica anche con la notazione*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{o anche} \quad \sum_n a_n\,,$$

quando sia chiaro dal contesto quale sia il "valore iniziale" della somma e il fatto che la somma stessa si estenda "fino all'infinito".

Naturalmente si scriverà anche

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p\,.$$

Definizione 10.7. *Se la successione (s_n) ha un limite finito l, allora l si chiama* somma della serie *e si scrive*

$$l = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,.$$

In questo caso si dice che la serie converge. Se la successione delle ridotte diverge si dice che la serie diverge, se la successione delle ridotte è indeterminata si dice che la serie è indeterminata.

La caratteristica di una serie di essere convergente, divergente o indeterminata, si chiama il carattere *della serie.*

Osservazione 10.8. La terminologia e i simboli in uso per le serie non sono quanto di meglio si possa desiderare. Per esempio, se si rivedono le definizioni appena date si noterà che si è usato la stesso simbolo per indicare la serie e la sua somma, cose che sono radicalmente diverse: una serie è una successione, cioè una funzione, la somma di una serie, quando esiste, è il limite della successione. Tuttavia questo tipo di notazioni sono così radicate nell'uso che non avrebbe senso cambiarle.

Esempio. Sia data la successione

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n > 0 .$$

La serie di termine generale a_n si può costruire abbastanza facilmente osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} .$$

Allora

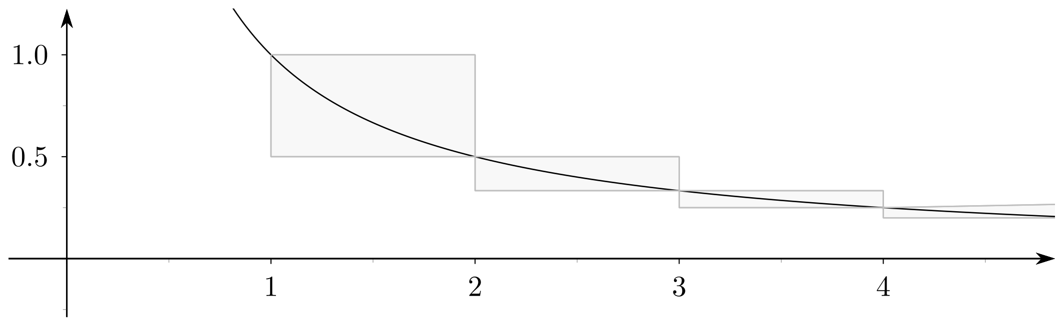
$$\begin{aligned} &s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \\ &s_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \\ &\quad \dots \\ &s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} . \end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 .$$

La serie considerata in questo esempio si chiama di Mengoli, in quanto studiata da Pietro Mengoli $(1626 - 1686)$.

La figura seguente mostra un'interpretazione geometrica del risultato di questo esempio: la somma delle aree dei rettangoli evidenziati, che "racchiudono" il grafico della funzione $f(x) = 1/x$ nel tratto da 1 a $+\infty$, vale 1.



Esempio. Sia $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 1$.

Usando le proprietà delle progressioni geometriche si trova subito che

$$s_n = \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Se ne deduce che

- se $|a| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \dfrac{1}{1-a}$;
- se $a > 1$ la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge;
- se $a \leq 1$ la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ è indeterminata.

La serie considerata in questo esempio è particolarmente importante e si chiama *serie geometrica*; il numero a si chiama *ragione* e il risultato dell'esempio si può sintetizzare dicendo che una serie geometrica converge se e solo se la sua ragione è in modulo minore di 1.

Naturalmente non è sempre così semplice costruire la successione (s_n) a partire dalla (a_n), e quindi, in generale, non sarà facile trovare la somma della serie stessa.

Definizione 10.9 (Serie a termini di segno costante)**.** *Se la successione del termine generale di una serie è una successione di segno costante, allora la serie si dice a termini di segno costante.*

Si conclude facilmente che una serie siffatta è o monotona crescente o monotona decrescente e quindi, per il teorema sul limite delle funzioni monotone, ha sicuramente limite: una serie a segno costante o converge o diverge (positivamente o negativamente).

Definizione 10.10. *Sia data una serie*

$$\sum_n a_n\,. \tag{10.2}$$

Se la serie

$$\sum_n |a_n| \tag{10.3}$$

è convergente, allora la serie (10.2) *si dice* assolutamente convergente.

10.5 Criteri di convergenza

Come abbiamo già osservato, non è in genere agevole scrivere esplicitamente in maniera compatta la successione (s_n) che definisce una serie, e quindi non è in generale agevole determinarne il limite, ovvero la somma della serie, se esistente. Molto più agevole è spesso valutare se una serie converge oppure oppure no. Questo consentirà poi, almeno nei casi di interesse, di fare una valutazione approssimata, con un grado di approssimazione valutabile opportunamente, della sua somma nel caso che converga. Per questo si considerano i cosiddetti *criteri di convergenza*, di cui considereremo i principali.

Teorema 10.11 (Condizione necessaria per la convergenza). *Se una serie converge, allora il suo termine generale è infinitesimo.*

Dimostrazione. Sia $\lim s_n = l$; allora ovviamente anche $\lim s_{n-1} = l$. Dunque, essendo

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

a_n tende a 0. □

Quindi una serie il cui termine generale non sia infinitesimo non può convergere. Per esempio la serie

$$\sum_n \frac{n}{n+1}$$

non può convergere perché il termine generale tende a 1.

Purtroppo la condizione espressa non è sufficiente, come vedremo fra poco su un esempio.

È una semplice conseguenza dei teoremi sui limiti il teorema seguente.

Teorema 10.12. *Siano date due serie*

$$\sum_n a_n \quad e \quad \sum_n b_n \,. \tag{10.4}$$

Allora:

- *se esse convergono rispettivamente a l ed m, allora si ha*

$$\sum_n (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda l + \mu m, \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R};$$

- *se entrambe divergono a $+\infty$ oppure a $-\infty$, anche la serie*

$$\sum_n (a_n + b_n)$$

  diverge rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$;
- *se una delle due diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$, mentre l'altra converge, anche la serie*

$$\sum_n (a_n + b_n)$$

  diverge rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$.

Definizione 10.13. *Se è data una serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,,$$

la serie

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n \,,$$

cioè la serie ottenuta tralasciando i primi p termini della precedente si chiama serie resto *p-esimo.*

Poiché le somme parziali delle due serie differiscono solo per una costante (la somma dei primi p termini), è chiaro che le due serie hanno lo stesso carattere (ma non la stessa somma!). Si usa esprimere questo fatto dicendo che il carattere di una serie *non* è influenzato dai primi p termini della serie stessa.

10.5.1 Serie a termini positivi

Dal fatto che una serie a termini positivi può solo convergere o divergere, e dal teorema sul confronto dei limiti, si deduce il seguente importantissimo criterio di convergenza, da cui sostanzialmente dipendono gli altri che considereremo.

Teorema 10.14 (Criterio del confronto). *Se*

$$\sum_n a_n \quad e \quad \sum_n b_n . \tag{10.5}$$

sono due serie a termini positivi e se $a_n \leq b_n$ per ogni n, allora

- *se $\sum_n b_n$ converge, converge anche $\sum_n a_n$;*
- *se $\sum_n a_n$ diverge, diverge anche $\sum_n b_n$.*

Il risultato di questo teorema si usa esprimere dicendo che

- la minorante a termini positivi di una serie convergente converge;
- la maggiorante di una serie a termini positivi e divergente diverge.

Esempio. Proviamo che la cosiddetta *serie armonica*, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente.

Intanto notiamo che il suo termine generale è infinitesimo, ma, come sappiamo, questo non è sufficiente per garantire la convergenza. Nel trattare il numero di Nepero abbiamo detto che la successione che lo definisce è crescente, dunque

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} .$$

Prendendo i logaritmi di ambo i membri si ottiene

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \quad \text{ovvero} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} .$$

Consideriamo la serie di termine generale

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n .$$

Essa è una serie del tipo di quella di Mengoli[2], ed s_n è facilmente calcolabile.

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) .$$

Questa serie diverge ovviamente, per cui anche la serie armonica diverge.

Si può invece provare, ma omettiamo la dimostrazione, che vale il seguente teorema.

[2] Serie come queste sono dette *telescopiche*, con evidente significato del termine.

Teorema 10.15. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

detta serie armonica generalizzata*, converge se* $\alpha > 1$*, diverge se* $0 < \alpha \leq 1$ *.*

La serie armonica generalizzata è spesso utilizzata nei confronti, per decidere se una serie converge o diverge.

Enunciamo ora, senza dimostrarli e nella loro forma più semplice, due criteri di largo uso per determinare il carattere di una serie a termini positivi.

Teorema 10.16 (Criterio del rapporto)**.** *Sia*

$$\sum_n a_n$$

una serie a termini positivi e

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\,.$$

- *Se* $l < 1$*, la serie converge.*
- *Se* $l > 1$*, la serie diverge.*
- *Se* $l = 1$*, nulla si può dire circa il carattere della serie.*

Teorema 10.17 (Criterio della radice)**.** *Sia*

$$\sum_n a_n$$

una serie a termini positivi e

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l\,.$$

- *Se* $l < 1$*, la serie converge.*
- *Se* $l > 1$*, la serie diverge.*
- *Se* $l = 1$*, nulla si può dire circa il carattere della serie.*

Esempio. La serie

$$\sum_n \frac{1}{n!}$$

converge. Infatti

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1\,.$$

Esempio. La serie

$$\sum_n \frac{1}{(\ln n)^n}$$

converge. Infatti

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_n \frac{1}{\ln n} = 0 < 1\,.$$

10.6 Serie a termini di segno qualunque

La trattazione delle serie a termini di segno qualunque è decisamente più complessa, in generale. Il primo risultato importante è il seguente.

Teorema 10.18. *Se una serie è assolutamente convergente è anche convergente.*

Dimostrazione. Sia

$$(*) \qquad \sum_n a_n$$

una serie e

$$(**) \qquad \sum_n |a_n|$$

la serie dei valori assoluti. Costruiamo le due serie

$$\sum_n b_n \quad \text{e} \quad \sum_n c_n$$

mettendo nella prima 0 al posto di tutti i termini negativi e nella seconda 0 al posto di tutti quelli positivi e cambiando segno a tutti quelli negativi. Le due serie di termine generale b_n e c_n sono minoranti della serie $(**)$ e dunque convergono. La serie $(*)$ è somma delle due serie appena considerate, quindi converge. □

Per quanto riguarda poi le *serie a segno alterno* vale il seguente criterio di convergenza, che è l'unico che considereremo per questo tipo di serie.

Teorema 10.19 (Criterio di Leibniz)**.** *Sia*

$$\sum_n a_n$$

una serie a termini di segno alterno. Se

- $\lim_n a_n = 0$;
- $|a_{n+1}| < |a_n|$,

la serie converge.

Questo criterio si può enunciare nel seguente modo: una serie a segno alterno, infinitesima e decrescente in valore assoluto, converge.

Esempio. L'esempio più importante di questo tipo di serie è costituito dalla serie armonica a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

che converge per il criterio di Libniz. Si può provare che questa serie ha per somma $\ln 2$.

10.7 Qualche osservazione conclusiva

Come già accennato all'inizio, nonostante l'apparente somiglianza, una serie è un concetto completamente diverso da una somma. In particolare in generale non si possono applicare le proprietà associativa e commutativa tipiche della somma.

Esempio. Si consideri la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

Sappiamo che non può convergere perchè il suo termine generale non è infinitesimo. Se però la scriviamo così (associando i termini)

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

otteniamo chiaramente una serie che converge a 0.

Se invece la scriviamo così (associando i termini in un altro modo)

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

otteniamo chiaramente una serie che converge a 1.

Se la scriviamo così (permutando i termini pari con i dispari e poi associando i termini)

$$-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

otteniamo una serie che converge a -1.

La situazione può però essere ancora più drammatica. Consideriamo per esempio di nuovo la serie armonica a segno alterno, che abbiamo detto essere convergente a $\ln 2$. Ebbene è possibile provare che se riordiniamo i suoi termini come segue

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

(uno positivo e due negativi), la serie è ancora convergente ma a ${}^{\ln 2}\!/_{2}$. Si può addirittura provare che è possibile riordinare i termini in modo da ottenere una serie divergente, oppure una serie convergente a un reale qualsiasi.

Solo per le serie assolutamente convergenti (in particolare quelle positive) le proprietà associativa e commutativa continuano a valere: è questo il motivo principale della loro importanza applicativa.

10.8 Esercizi

Esercizio 10.1 (Criterio dell'ordine). *Dimostrare che se il termine generale di una serie a termini positivi è infinitesimo di ordine ≤ 1 rispetto al campione ${}^{1}\!/_{n}$ allora la serie diverge, se invece esiste $\alpha > 1$ tale che il termine generale sia infinitesimo di ordine maggiore o uguale ad α, allora la serie converge*[(3)].

[3] Si tenga ben presente che, nella seconda parte, *non è sufficiente* che l'ordine sia maggiore di 1, rispetto a ${}^{1}\!/_{n}$, perché altrimenti potrei solo concludere che la serie è una minorante della serie armonica e questo non fornisce alcuna informazione. Si può per esempio provare (ma ora non abbiamo strumenti sufficienti

Risoluzione. Si tratta di una semplice applicazione del teorema relativo alla serie armonica generalizzata e del criterio del confronto. Se infatti la serie di termine generale a_n è infinitesima di ordine 1 rispetto a $1/n$, significa che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n} = l > 0, \quad (l \in \mathbb{R}).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ tale che $l - \varepsilon > 0$, si ha, da un certo $\overline{n}$ in poi,

$$\frac{a_n}{1/n} > l - \varepsilon,$$

ovvero

$$a_n > (l - \varepsilon)\frac{1}{n}.$$

Questo significa che la serie è maggiorante della serie armonica e dunque diverge. Se poi l'ordine di infinitesimo è minore di 1, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n} = +\infty,$$

e, fissato $k > 0$, da un certo $\overline{n}$ in poi si ha

$$a_n > k\,\frac{1}{n},$$

dal che si trae la stessa conclusione di prima.

Se invece esiste α tale che la serie sia infinitesima di ordine maggiore o uguale ad α, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = l \geq 0, \quad (l \in \mathbb{R}).$$

Ma allora fissato $\varepsilon > 0$ si ha, da un certo $\overline{n}$ in poi,

$$a_n < (l + \varepsilon)\frac{1}{n^\alpha},$$

ovvero la serie è una minorante, a termini positivi, di una serie armonica generalizzata convergente, dunque converge.

□

Esercizio 10.2. *Calcolare i seguenti limiti.*

1. $\lim \dfrac{n^2 - \sin n}{n^2 + \cos n}$.
2. $\lim \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.

---

per farlo) che la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

diverge, nonostante sia infinitesima di ordine superiore a 1, rispetto a a $1/n$. Sostanzialmente, con un linguaggio intuitivo, si può dire che una serie a termini positivi converge se il termine generale è "sufficientemente infinitesimo", altrimenti diverge.

3. $\lim \dfrac{e^n}{n!}$.

Esercizio 10.3. *Stabilire il carattere delle seguenti serie.*

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$.
3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$.
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$.
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$ *(applicare il criterio della radice).*
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$.
8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2}$.
10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.
11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n+1}$.
13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\operatorname{arctg} n}{n^2+n+2}$.
14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n+1}$.

Esercizio 10.4. *Stabilire il carattere delle seguenti serie, valutando anche la convergenza assoluta.*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cos(n\pi)$.

11 Serie di potenze

11.1 Serie di funzioni

Se consideriamo una successione $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ di funzioni definite in uno stesso insieme A, fissato un punto c del dominio comune, possiamo considerare la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(c)\,.$$

Questa serie può convergere per certi valori di c, divergere o essere indeterminata per altri. Per esempio, data la successione di funzioni

$$x^0,\, x^1,\, x^2,\, \ldots,\, x^n,\, \ldots\,, \text{[1]}$$

la serie ottenuta prendendo il punto $c = 2$ diverge; la serie ottenuta prendendo il punto $c = 1/2$ converge, la serie ottenuta prendendo il punto $c = -1$ è indeterminata (si tratta di serie geometriche).

In generale, data la successione $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ di funzioni definite in uno stesso insieme A, potremo considerare la serie, detta *serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,, \tag{11.1}$$

e chiederci per quali x la serie stessa converge. L'insieme, diciamolo B, di tutti gli x per cui si ha convergenza è detto insieme di convergenza, e in B risulta definita una nuova funzione, detta funzione somma della serie di funzioni. Si usa, naturalmente, la seguente scrittura:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,, \quad \forall x \in B.$$

Per esempio, riprendendo in esame la successione di funzioni sopra considerata, è chiaro, dalle proprietà della serie geometrica, che si ha

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,, \quad \forall x \in]-1,1[\,.$$

La determinazione dell'insieme di convergenza di una serie di funzioni è una questione legata semplicemente alle proprietà delle serie numeriche. Molto più difficile il problema seguente: se le funzioni f_n sono continue, derivabili, ecc, che ne è della somma f, naturalmente dove esiste? Purtroppo in generale nulla si può dire: può tranquillamente succedere

[1] In contesti come questo, considereremo la funzione x^0 definita anche in 0, ponendo $x^0 = 1$ se $x = 0$. Si noti che questo *non* significa che abbiamo dato un senso al simbolo 0^0, solo che abbiamo prolungtao per continuità la funzione x^0, defininendola anche in 0.

che le funzioni f_n siano continue, mentre la somma della serie no, e questo in contrasto con quanto succede per le somme finite. Proponiamo un semplice esempio che illustra la situazione.

Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x)\,, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

Allora:

– se $x = 1$ si ha, banalmente,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0;$$

– se $0 \leq x < 1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1\,.$$

Dunque la funzione somma non è continua.

Non entreremo comunque nei dettagli di questo problema in quanto intendiamo occuparci solo di un particolare tipo di serie di funzioni, le serie di potenze, per le quali molti concetti si semplificano notevolmente.

11.2 Serie di potenze

Definizione 11.1. *Fissato un $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo* serie di potenze *di $x - x_0$, una serie di funzioni del tipo*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\,,$$

dove, come già osservato, intendiamo che la funzione $(x-x_0)^0$ sia prolungata per continuità in 0*, assegnandole il valore* 1*. I numeri reali a_0, a_1, … sono detti* coefficienti della serie*.*

È ovvio che una serie di potenze converge sempre in $x = x_0$. A proposito dell'insieme di convergenza di una serie vale il seguente teorema.

Teorema 11.2 (Lemma di Abel)**.** *Se una serie di potenze converge in un punto c, allora converge assolutamente anche per ogni x tale che*

$$|x-x_0| < |c-x_0|\ .$$

Detto in altri termini, se una serie di potenze converge in un punto c, converge assolutamente anche in tutto l'intervallo aperto di centro x_0 e raggio $|c-x_0|$.

Dimostrazione. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c-x_0)^n$$

converge, allora è infinitesima, dunque limitata. Ne segue che esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n(c-x_0)^n| < M\,.$$

Allora

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n|\,|x-x_0|^n = |a_n|\,|c-x_0|^n \left|\frac{(x-x_0)^n}{(c-x_0)^n}\right| < M\left|\frac{(x-x_0)^n}{(c-x_0)^n}\right|.$$

Ora la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left|\frac{(x-x_0)^n}{(c-x_0)^n}\right|$$

converge perché è una serie geometrica di ragione minore di 1 (moltiplicata per M), dunque anche la serie data converge perchè minorante di una serie convergente. □

Consideriamo ora l'insieme dei numeri reali positivi $|c-x_0|$ tali che la serie converga in c e indichiamo con r (eventualmente $+\infty$) l'estremo superiore di questo insieme. È una semplice conseguenza delle proprietà dell'estremo superiore che la serie converge sicuramente in tutto l'intervallo aperto di centro x_0 e raggio r, non converge sui punti esterni a questo intervallo, mentre nulla si può dire riguardo alla convergenza negli estremi dell'intervallo.

Definizione 11.3. *Il numero r di cui sopra si chiama* raggio di convergenza *della serie di potenze; l'intervallo di centro x_0 e raggio r si chiama* intervallo di convergenza *della serie di potenze, e non va confuso con l'insieme di convergenza che potrebbe comprendere, oltre all'intervallo di convergenza, anche uno o entrambi gli estremi.*

Per trovare il raggio di convergenza si usano i già noti criteri di convergenza e, tra questi, principalmente quelli del rapporto o della radice (almeno nei casi semplici che noi considereremo). Particolare attenzione va poi prestata alla valutazione del comportamento agli estremi dell'intervallo stesso.

Esempio. Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{|x|^n} = \lim_n |x|\,\frac{1}{n+1} = 0.$$

Poiché il limite è minore di 1 per qualunque x reale, ne segue che il raggio di convergenza è $+\infty$.

Esempio. Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto.

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{|x|^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{|x|^n} = \lim_n |x|\,\frac{n}{n+1} = |x|.$$

Dunque la serie converge se $|x| < 1$. Il raggio di convergenza è 1. Si può osservare che per $x = -1$ si ottiene la serie
$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$
che, a parte il segno, è la serie armonica, e dunque diverge. Invece per $x = 1$ si ottiene la serie
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$
che sappiamo già essere convergente.

11.3 Serie di potenze e derivabilità

Per quanto riguarda i problemi di regolarità cui abbiamo fatto cenno sopra, per le serie di potenze si dimostrano i seguenti importanti teoremi, che ci limitiamo a enunciare.

Teorema 11.4 (Di derivazione per serie). *Se una serie di potenze*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$
ha raggio di convergenza $r > 0$, anche la serie delle derivate
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$
ha lo stesso raggio di convergenza e, inoltre, la funzione somma della serie di potenze
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$
è derivabile in $]x_0 - r, x_0 + r[$ e si ha
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$
sempre in $]x_0 - r, x_0 + r[$.

È ovvio, come conseguenza di questo teorema, che la funzione somma di una serie di potenze è continua in $]x_0 - r, x_0 + r[$. Si presti però particolare attenzione al fatto che questo teorema non afferma nulla riguardo al comportamento sugli estremi dell'intervallo di convergenza.

Anche se non abbiamo ancora parlato di primitive di una funzione, anticipiamo il seguente importante risultato, sempre relativo alle serie di potenze, e la cui dimostrazione è una semplice conseguenza del teorema di derivazione per serie.

Teorema 11.5 (Di integrazione per serie). *Sia data una serie di potenze*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con raggio di convergenza $r > 0$. Allora anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza e inoltre la sua somma, $F(x)$, ha per derivata la somma, $f(x)$, della serie precedente, ovvero è una primitiva di $f(x)$, nell'intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Quest'ultimo teorema è di particolare importanza applicativa. In molti casi infatti non si riesce a calcolare con metodi elementari primitive di funzioni anche semplici, di cui però si conosce una serie che ha una di quelle funzioni come somma. Si procede quindi a una integrazione per serie e successivamente si valuta come si possa approssimare la serie degli integrali. Un esempio è fornito dalla serie seguente

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

che ha per somma la funzione $\sin x/x$, prolungata in 0 attribuendole il valore 1. Di questa funzione non si può calcolare una primitiva con metodi elementari. Si può però applicare il teorema di integrazione per serie per concludere che lo sviluppo in serie di una primitiva di $\sin x/x$ è

$$x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots .$$

11.4 Sviluppabilità in serie di Taylor

Il teorema che segue è una conseguenza del teorema di derivazione per serie.

Teorema 11.6. *La somma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

di una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ è derivabile infinite volte nell'intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

ovvero

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n . \tag{11.2}$$

Dimostrazione. Basta ricordare che la serie derivata di una serie di potenze ha sempre lo stesso raggio di convergenza della serie originaria e procedere con le derivate fino all'ordine n per trovare la formula richiesta. □

La somiglianza tra la formula (11.2) e la formula di Taylor suggerisce la seguente domanda: se una funzione è infinitamente derivabile (di classe C^∞) in un certo intervallo di numeri reali $I =]x_0 - r, x_0 + r[$ è ovviamente possibile costruire la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n . \tag{11.3}$$

Ebbene la serie (11.3) converge per caso alla funzione $f(x)$? La risposta è purtroppo negativa in generale: la serie può convergere a una funzione diversa da quella che l'ha generata (escluso ovviamente il punto x_0, dove non ci sono problemi). L'esempio classico è costituito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

Seppure con calcoli non semplicissimi, si prova che tutte le derivate di questa funzione sono nulle nell'origine: dunque la serie di Taylor generata da questa funzione nell'origine è costituita da termini tutti nulli, e quindi converge alla funzione identicamente nulla, che è diversa dalla funzione f sopra considerata.

In relazione a questo problema si dà la seguente definizione:

Definizione 11.7 (Funzione analitica). *Sia I un intervallo aperto. Una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ si dice* analitica *in I se ogni x_0 di I ammette un intorno nel quale la funzione f coincide con la somma della sua serie di Taylor relativa a x_0. Una funzione con questa proprietà si dice anche* sviluppabile in serie *di Taylor.*

Riconsideriamo la formula di Taylor, in una delle due forme, e indichiamo con

$$R_n(x) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$$

il *resto*. È chiaro che la serie di Taylor converge a f solo se per il resto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in I\,. \tag{11.4}$$

In generale non è facile calcolare il limite (11.4). La forma di Lagrange relativa al resto può venire in aiuto e permette di concludere in molti casi. Senza entrare nei dettagli, che esulano dagli scopi di questo corso, segnaliamo i seguenti importanti risultati che riguardano le funzioni elementari più importanti.

Le funzioni dell'elenco che segue sono analitiche nell'intervallo evidenziato, e il loro sviluppo in serie di Taylor è quello indicato.

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,, \qquad -1 < x < 1.$
- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}\,, \qquad -1 < x \leq 1.$
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \qquad .$

Esempio. Usando il teorema di derivazione per serie, calcolare lo sviluppo di Taylor di

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Da

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,,$$

per derivazione si ottiene subito lo sviluppo richiesto

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\,, \qquad -1 < x < 1\,.$$

Esempio. Calcolare la somma della serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Basta sostituire $x = 1$ nello sviluppo della funzione $\ln(x+1)$ per ottenere che la serie proposta converge a 2.

Esempio. Calcolare la somma della serie

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Basta sostituire $x = 1$ nello sviluppo della funzione e^x per ottenere che la serie proposta converge a e.

Nelle applicazioni le serie di potenze sono utili perché consentono di sostituire una funzione qualunque con una somma (di infiniti addendi!) tutti costituiti da potenze, e quindi facilmente calcolabili. Poichè sappiamo che una serie converge solo se il termine generale è infinitesimo, è chiaro che prendendo un numero sufficiente di addendi si potrà approssimare bene la serie, e quindi la funzione stessa, addirittura con un polinomio. Il problema importante è che bisogna poter valutare l'errore che si commette con questa approssimazione. La cosa non è sempre semplice, e la formula di Taylor-Lagrange può spesso venire in aiuto. Esiste anche una stima, valida per le serie a segno alterno, di cui forniamo solo l'enunciato.

Teorema 11.8. *In una serie a segno alterno la somma dei primi n termini della serie approssima la somma della serie stessa con un errore non superiore al valore assoluto del termine a_{n+1}.*

Esempio. La somma

$$\sum_{n=1}^{100} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

approssima il valore di $\ln 2$ con un errore minore di $1/101$.

11.5 Esercizi

Esercizio 11.1. *Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze di* $\ln(1+x)$ *trovare quello di* $\ln(1-x)$ *e, successivamente, quello di*

$$\ln\frac{1+x}{1-x}\,.$$

Risoluzione. Lo sviluppo di $\ln(1+x)$ è dato da

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,,\quad -1<x\leq 1\,.$$

Scrivendo $-x$ al posto di x si ottiene

$$\begin{aligned}\ln(1-x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n x^n}{n}=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\frac{x^n}{n}\,,\quad -1\leq x<1\,.\end{aligned}$$

Si ha poi

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\frac{x^n}{n}=\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)\frac{x^n}{n}\,.\end{aligned}$$

In quest'ultima somma tutti i termini con n pari si annullano, perché $(-1)^{n-1}+1=0$; rimangono solo i termini dispari, con coefficiente 2:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)\frac{x^n}{n}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\right)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$

dove dovremo tenere conto delle limitazioni

$$-1<x<1\,,$$

in quanto devono valere contemporaneamente i due sviluppi precedenti.

Dunque

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\quad -1<x<1\,.$$

□

Esercizio 11.2. *Utilizzando il risultato dell'esercizio 11.1 trovare una serie che abbia per somma ln*(5).

Risoluzione. Notiamo intanto che la cosa non si può dedurre dalla serie di $\ln(1+x)$, in quanto x può essere solo compreso tra -1 e 1.

Cerchiamo allora se esiste un x tale che $-1 < x < 1$ e che

$$\frac{1+x}{1-x} = 5\,.$$

Basterà per questo che $1 + x = 5 - 5x$ ovvero $x = 2/3$. Dunque

$$\ln 5 = \ln \frac{1+2/3}{1-2/3} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}\,.$$

Si noti come lo stesso procedimento consenta di determinare una serie che abbia per somma il logaritmo naturale di un numero reale positivo a qualunque. Se infatti $a > 0$, si ha

$$\frac{1+x}{1-x} = a \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x = a - ax \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a-1}{a+1}\,,$$

e l'ultima frazione è compresa tra -1 e 1, per cui si potrà applicare lo sviluppo precedente.

Un'osservazione abbastanza interessante dal punto di vista applicativo sullo sviluppo oggetto dell'esercizio 11.1 e sull'applicazione che ne è stata fatta in questo esercizio.

La serie che abbiamo ottenuto permette il calcolo approssimato del logaritmo di un qualunque numero reale positivo, ma non è questo il suo solo vantaggio: si tratta di una serie che "converge abbastanza rapidamente", nel senso che si ottengono approssimazioni buone con un numero relativamente limitato di addendi. Anche se non possiamo entrare nei dettagli di questo problema, possiamo usare un software di calcolo simbolico, come Mathematica, per verificare questo fatto.

Per questo consideriamo il problema di calcolare $\ln 2$, utilizzando lo sviluppo di $\ln(1+x)$, dove basterà porre $x = 1$ ottenendo la ben nota serie armonica a segno alterno e, successivamente, usando lo sviluppo trovato nell'esercizio 11.1 dove basterà porre $x = 1/3$; useremo in entrambi i casi i primi 20 addendi soltanto.

Otteniamo nel primo caso

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{19}}{19} - \frac{x^{20}}{20}\,,$$

da cui

$$\ln 2 \approx \frac{155685007}{232792560} \approx 0.6687714032\,.$$

Nel secondo caso invece

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots + \frac{2x^{19}}{19}$$

da cui

$$\ln 2 \approx \frac{1302374561632216}{1878929321474205} \approx 0.6931471805\,.$$

Il valore di $\ln 2$ con dieci cifre decimali esatte, sempre fornito da Mathematica è

$$\ln 2 \approx 0.6931471806\,,$$

e si può valutare subito quanto sia più affidabile il risultato fornito nel secondo caso, rispetto al primo. □

Esercizio 11.3. *Trovare lo sviluppo in serie di Taylor, relativo a* $x_0 = 0$, *della funzione*

$$f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\,.$$

□

Esercizio 11.4. *Trovare lo sviluppo in serie di Taylor, relativo a* $x_0 = 0$, *della funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x-3}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\mathrm{e}^{2x-3} = \mathrm{e}^{-3}\cdot\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3x)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-3}\sum_{n=0}^{+\infty}3^n\,\frac{x^n}{n!}\,.$$

□

Esercizio 11.5. *Trovare lo sviluppo in serie di Taylor, relativo a* $x_0 = 0$, *della funzione*

$$f(x) = \sin x\cos x$$

Risoluzione. Si ha

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\,\sin(2x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \dots$$

□

Esercizio 11.6. *Se*

$$f(x) = x^5\left(\mathrm{e}^{x^3} - \sin(x^2)\right)\,,$$

quanto vale $f^{(11)}(0)$ *?*

Risoluzione. Lo sviluppo di Taylor di f, relativo al punto 0, sarà del tipo:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(11)}(0)}{11!}x^{11} + \dots\,,$$

per cui, se troviamo questo sviluppo, basterà moltiplicare il coefficiente di x^{11} per 11! per avere la derivata richiesta.

Si ha:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\,,$$

da cui

$$\mathrm{e}^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} + \dots$$

Analogamente

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

da cui

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

Allora

$$x^5\left(\mathrm{e}^{x^3} - \sin(x^2)\right) = x^5\left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} - x^2 + \frac{x^6}{3!} + \dots\right) = x^5 - x^7 + x^8 + \frac{2}{3}x^{11} + \dots,$$

dove abbiamo operato ricordando che queste serie sono assolutamente convergenti e quindi i riordini dei termini non portano problemi.

Se ne deduce che

$$f^{(11)}(0) = \frac{2}{3}\,11! = 26\,611\,200\,. \qquad \square$$

Per chi avesse dei dubbi sulla bontà del risultato ottenuto, riportiamo in dettaglio la derivata 11ª della funzione data, ottenuta con un paziente e delicato calcolo manuale[2], e invitando a ripetere il calcolo.

$$\begin{aligned}
&39600x\left(30240\mathrm{e}^{x^3}x^2 + 136080\mathrm{e}^{x^3}x^5 + 119070\mathrm{e}^{x^3}x^8 + 30618\mathrm{e}^{x^3}x^{11} + \right.\\
&\qquad\left. +2187\mathrm{e}^{x^3}x^{14} - 3360x^3\cos(x^2) + 128x^7\cos(x^2) - 1680x\sin(x^2) + 1344x^5\sin(x^2)\right) + \\
&+ 55440\left(360\mathrm{e}^{x^3} + 9720\mathrm{e}^{x^3}x^3 + 17820\mathrm{e}^{x^3}x^6 + 7290\mathrm{e}^{x^3}x^9 + 729\mathrm{e}^{x^3}x^{12} + \right.\\
&\qquad\left. +120\cos(x^2) - 480x^4\cos(x^2) - 720x^2\sin(x^2) + 64x^6\sin(x^2)\right) + \\
&+ 1100x^3\left(60480\mathrm{e}^{x^3} + 3265920\mathrm{e}^{x^3}x^3 + 11838960\mathrm{e}^{x^3}x^6 + 11022480\mathrm{e}^{x^3}x^9 + \right.\\
&\qquad +3674160\mathrm{e}^{x^3}x^{12} + 472392\mathrm{e}^{x^3}x^{15} + 19683\mathrm{e}^{x^3}x^{18} - 30240x\cos(x^2) + \\
&\qquad\left. +48384x^5\cos(x^2) - 512x^9\cos(x^2) + 80640x^3\sin(x^2) - 9216x^7\sin(x^2)\right) + \\
&+ 9900x^2\left(60480\mathrm{e}^{x^3}x + 771120\mathrm{e}^{x^3}x^4 + 1360800\mathrm{e}^{x^3}x^7 + 694008\mathrm{e}^{x^3}x^{10} + \right.\\
&\qquad +122472\mathrm{e}^{x^3}x^{13} + 6561\mathrm{e}^{x^3}x^{16} - 13440x^2\cos(x^2) + 3584x^6\cos(x^2) + \\
&\qquad\left. -1680\sin(x^2) + 13440x^4\sin(x^2) - 256x^8\sin(x^2)\right) + \\
&+ x^5\left(19958400\mathrm{e}^{x^3}x + 434095200\mathrm{e}^{x^3}x^4 + 1320248160\mathrm{e}^{x^3}x^7 + 1252888560\mathrm{e}^{x^3}x^{10} + \right.\\
&\qquad +484989120\mathrm{e}^{x^3}x^{13} + 84440070\mathrm{e}^{x^3}x^{16} + 6495390\mathrm{e}^{x^3}x^{19} + 177147\mathrm{e}^{x^3}x^{22} + \\
&\qquad +2217600x^3\cos(x^2) - 506880x^7\cos(x^2) + 2048x^{11}\cos(x^2) + \\
&\qquad\left. +665280x\sin(x^2) - 1774080x^5\sin(x^2) + 56320x^9\sin(x^2)\right) + \\
&+ 55x^4\left(9979200\mathrm{e}^{x^3}x^2 + 80831520\mathrm{e}^{x^3}x^5 + 134719200\mathrm{e}^{x^3}x^8 + 77157360\mathrm{e}^{x^3}x^{11} + \right.\\
&\qquad +18108360\mathrm{e}^{x^3}x^{14} + 1771470\mathrm{e}^{x^3}x^{17} + 59049\mathrm{e}^{x^3}x^{20} - 30240\cos(x^2) + \\
&\qquad +403200x^4\cos(x^2) - 23040x^8\cos(x^2) + 302400x^2\sin(x^2) + \\
&\qquad\left. -161280x^6\sin(x^2) + 1024x^{10}\sin(x^2)\right)\,.
\end{aligned}$$

[2] Naturalmente stiamo scherzando: il risultato è stato ottenuto con Mathematica e qui riportato quasi con un copia e incolla! È abbastanza interessante controllare, sempre con Mathematica, che una volta ottenuta la derivata 11ª, il valore fornito per $x = 0$ è esattamente quello calcolato sopra.

12 Numeri complessi

12.1 Definizioni. Forma algebrica

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali. Vogliamo introdurre su questo insieme una struttura molto simile a quella dell'insieme dei numeri reali, definendo un'operazione di somma e prodotto con le stesse proprietà presenti in $\mathbb{R}$. Otterremo un insieme di elementi che potranno ancora essere chiamati numeri e su cui si potrà operare con algoritmi quasi identici a quelli visti nei reali. Rimarrà, è bene precisarlo subito, una importante e radicale differenza: *non* introdurremo in questo insieme le proprietà dell'*ordine* e quindi tutte quelle da esse derivanti.

Definizione 12.1. *Diremo* insieme dei numeri complessi *l'insieme*

$$\mathbb{C} = \{\, (a, b) \mid a,\, b \in \mathbb{R} \,\}\,,$$

dove si siano introdotte le operazioni seguenti:

1. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$*;*
2. $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.

È molto facile verificare che le operazioni così definite in $\mathbb{C}$ soddisfano tutte le proprietà considerate negli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ dei reali (vedi la pagina 23). In particolare segnaliamo che

- l'elemento neutro della somma è $(0, 0)$;
- l'elemento neutro del prodotto è $(1, 0)$;
- l'opposto di (a, b) è $(-a, -b)$;
- il reciproco di un elemento non nullo (a, b) di $\mathbb{C}$ è dato da

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)\,.$$

Per ricavare esplicitamente l'espressione del reciproco di un elemento non nullo si può procedere come segue.

Dato $(a, b) \neq (0, 0)$ si deve trovare un (x, y) tale che $(a, b)(x, y) = (1, 0)$. Si ha, tenendo conto della definizione di prodotto sopra data,

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx)\,.$$

Da qui si deduce che deve essere

$$\begin{cases} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0 \end{cases}\,,$$

da cui si ottiene subito l'espressione sopra riportata.

Dunque possiamo affermare che anche l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un *corpo commutativo* o *campo*, esattamente come il corpo dei reali. Si ha

$$(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)\,,$$

e inoltre

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0)\,.$$

Quest'ultima scrittura è particolarmente significativa per le considerazioni che seguono. Il sottoinsieme A di $\mathbb{C}$ costituito dalle coppie del tipo $(a,0)$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto, cioè sommando o moltiplicando tra di loro elementi di A si ottengono ancora elementi di A. Questo sottoinsieme può essere considerato una "copia" dell'insieme dei $\mathbb{R}$ dei reali: in termini formali la corrispondenza tra A ed $\mathbb{R}$ che a ogni coppia $(a,0)$ faccia corrispondere il reale a è una corrispondenza biunivoca che conserva le operazioni, ovvero è un isomorfismo. Questo ci consente di "identificare" le coppie del tipo $(a,0)$ con i corrispondenti numeri reali, cosa che faremo sistematicamente, indicando addirittura l'insieme A con $\mathbb{R}$ e scrivendo la formula precedente nella seguente forma

$$(a,b) = a + (0,1)b\,.$$

Questa osservazione ci consente di pensare a $\mathbb{C}$ come a un *ampliamento* di $\mathbb{R}$, cioè di scrivere

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\,.$$

Con questo insieme di numeri si conclude, per quanto ci riguarda, la vicenda dell'ampliamento dell'insieme dei naturali: in quest'ultimo insieme di numeri sono in effetti possibili tutte le operazioni che interessano l'analisi.

La coppia $(0,1)$ gioca un ruolo speciale nell'insieme dei complessi e prende il nome di *unità immaginaria*. Il suo uso continuo consiglia l'introduzione di uno speciale simbolo per rappresentarla: si pone, per definizione,

$$\mathrm{i} \stackrel{\text{def}}{=} (0,1)\,,$$

e, in virtù dell'identificazione precedente tra A ed $\mathbb{R}$ si scrive

$$\mathrm{i}^2 = -1\,. \tag{12.1}$$

Con questa definizione ogni numero complesso si può scrivere nella forma, detta *forma algebrica*, seguente:

$$(a,b) = a + \mathrm{i}b\,, \quad \text{oppure} \quad (a,b) = a + b\mathrm{i}\,. \tag{12.2}$$

Questa scrittura è particolarmente significativa perchè consente di eseguire tutte le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ esattamente come in $\mathbb{R}$ e trattando i come "una lettera" con la sola aggiunta della proprietà espressa dall'equazione (12.1).

Esempio. Per calcolare il reciproco di un numero complesso, anziché usare la formula soprascritta si può procedere come segue.

$$\frac{1}{(2,3)} = \frac{1}{2+3\mathrm{i}} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{2-3i}{13} = \left(\frac{2}{13}\,, \frac{-3}{13}\right).$$

Come già annunciato non si introduce nell'insieme dei complessi una relazione d'ordine, e il motivo è da ricercarsi nel fatto che una relazione d'ordine in $\mathbb{C}$ *non* può godere delle proprietà di compatibilità con la somma e con il prodotto che abbiamo visto in occasione dell'introduzione dell'insieme dei reali (vedi la pagina 23 e le seguenti). Se infatti una tal relazione d'ordine esistesse, ne conseguirebbe che il quadrato di un qualunque numero deve essere positivo. Poichè però $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$, dovrebbero essere positivi sia 1 che il suo opposto, e la cosa è impossibile se devono valere le citate proprietà dell'ordine.

Definizione 12.2. *Dato il numero complesso*

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b\,,$$

il numero a si chiama parte reale *mentre il numero reale b si chiama* coefficiente della parte immaginaria *del numero complesso dato.*

Si usano i seguenti simboli:

$$a = \operatorname{Re} z\,, \quad b = \operatorname{Im} z\,.$$

Definizione 12.3 (Coniugato)**.** *Dato il numero complesso*

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b\,,$$

il numero complesso

$$\overline{z} = (a, -b) = a - \mathrm{i}b\,,$$

si chiama coniugato *o complesso coniugato di z.*

Definizione 12.4. *Dato il numero complesso*

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b\,,$$

il numero reale non negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

si chiama modulo *del numero complesso z e si indica usualmente con ϱ:*

$$\varrho = |z|\,.$$

Costituisce un semplice esercizio la verifica delle seguenti proprietà.

- $\overline{(\overline{z})} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- $|\operatorname{Re} z| \le |z|$.

– $|\mathrm{Im}\, z| \le |z|$.
– $|z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

Osservazione 12.5. Si presti particolare attenzione al fatto che

$$z^2 \ne |z|^2 .$$

Infatti, se $z = a + \mathrm{i}b$, si ha

$$z^2 = (a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 + 2\mathrm{i}ab + \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 - b^2 + \mathrm{i}(2ab)\,, \quad \text{mentre} \quad |z|^2 = a^2 + b^2 .$$

È però ancora vero, come nei reali, che

$$\left|z^2\right| = |z|^2 .$$

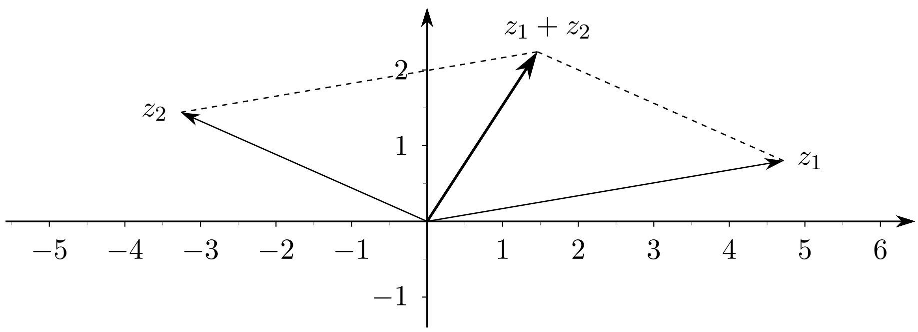
Infatti

$$\left|z^2\right| = \left|a^2 - b^2 + \mathrm{i}(2ab)\right| = \sqrt{(a^2-b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = a^2 + b^2 = |z|^2 .$$

12.2 Il piano di Argand-Gauss

Poichè i mattoni su cui è costruito il corpo dei numeri complessi sono le coppie di reali, è naturale rappresentarli nel piano in cui si sia stabilito un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Sull'asse delle ascisse riporteremo la parte reale, su quella delle ordinate il coefficiente della parte immaginaria dei numeri complessi. Per questo motivo gli assi sono chiamati anche *asse reale* e *asse immaginario*[1].

In questa rappresentazione la somma di due numeri complessi si può fare esattamente con la regola del parallelogramma, come somma di vettori che collegano l'origine con il punto che rappresenta ciascun numero complesso.



In questa rappresentazione inoltre il modulo di un complesso è semplicemente dato dalla distanza dello stesso dall'origine, il coniugato di un complesso dal simmetrico dello stesso rispetto all'asse reale.

Questa rappresentazione diventa però particolarmente significativa e utile quando si tratta del prodotto di numeri complessi, come vedremo tra poco.

[1] L'idea di una tale rappresentazione risale a Caspar Wessel (1745-1818) e a Jean Robert Argand (1768-1822). Fu definitivamente perfezionata da Carl Friedrich Gauss. Per questo il piano in cui si rappresentano i complessi si chiama di Gauss o di Argand-Gauss.

12.3 Forma trigonometrica

Considerato il numero complesso $z = a + ib$ e il punto P rappresentativo dello stesso nel piano di Gauss, possiamo osservare che il punto P è individuato dalla sua distanza dall'origine (cioè dal modulo di z) e, se tale distanza è maggior di zero, dall'angolo ϑ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP, nell'ordine, pur di limitarsi a considerare un intervallo opportuno di variabilità per tale angolo, per esempio $[0, 2\pi[$, come di solito faremo noi, o $]-\pi, \pi]$ come in altre convenzioni.

È evidente che l'angolo ϑ, con le limitazioni indicate, è individuato, se $\varrho > 0$ dall'essere

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin\vartheta = \frac{b}{\varrho}.$$

Il numero complesso z, con $\varrho > 0$, si potrà anche scrivere

$$z = a + \mathrm{i}b = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta).$$

Viceversa, dati due numeri reali $\varrho \geq 0$ e ϑ, essi individuano univocamente il numero complesso $z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, ed è evidente che due coppie diverse (ϱ_1, ϑ_1) e (ϱ_2, ϑ_2), con $\varrho_1 > 0$ e $\varrho_2 > 0$ individuano lo stesso numero complesso z se e solo se $\varrho_1 = \varrho_2$ e $\vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$.

Dunque si può pensare ai numeri complessi anche come alle coppie (ϱ, ϑ), con $\varrho \geq 0$. Questo tipo di rappresentazione dei complessi si chiama *forma trigonometrica* o *forma polare* e si usa una delle due notazioni seguenti per indicare una coppia di questo tipo associata a un complesso $z = a + \mathrm{i}b$:

$$[\varrho, \vartheta], \quad (\varrho; \vartheta).$$

La notazione con le parentesi quadre è molto diffusa, ma ha lo svantaggio di poter essere confusa con la notazione usata per gli intervalli. La notazione con le parentesi tonde e il punto e virgola al posto della virgola è molto meno diffusa, ma è utilizzata in molti software di calcolo simbolico o grafico. Noi utilizzeremo la seconda.

Il numero ϑ è detto *anomalia* o *argomento* del numero complesso z. Se $\varrho = 0$ l'argomento non risulta definito e si può assegnare a esso un qualunque valore. Il valore di ϑ compreso nell'intervallo di variabilità scelto si chiama anche argomento principale del numero complesso.

Naturalmente il passaggio dalla forma algebrica a quella polare è regolato dall'uguaglianza

$$z = (a, b) = a + \mathrm{i}b = (\varrho; \vartheta) = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta).$$

Il primo grande vantaggio della forma polare è dato dalla nuova forma che assume il prodotto di due complessi.

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\varrho_1; \vartheta_1) \cdot (\varrho_1; \vartheta_2) = \varrho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)\varrho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) = \\ &= \varrho_1\varrho_2\big((\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) + i(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)\big) = \\ &= \varrho_1\varrho_2\big(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\big), \end{aligned}$$

ovvero

$$(\varrho_1;\vartheta_1)\cdot(\varrho_2;\vartheta_2)=(\varrho_1\varrho_2\,;\,\vartheta_1+\vartheta_2)\,. \tag{12.3}$$

Analogamente si prova

$$\frac{(\varrho_1;\vartheta_1)}{(\varrho_2;\vartheta_2)}=\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,;\,\vartheta_1-\vartheta_2\right)\,. \tag{12.4}$$

Come conseguenza della formula del prodotto si ha, per induzione su n, che

$$z^n=(a+ib)^n=(\varrho;\vartheta)^n=(\varrho^n\,;\,n\vartheta)=\varrho^n(\cos n\vartheta+\mathrm{i}\sin n\vartheta)\,, \tag{12.5}$$

formula nota con il nome di *Formula di Moivre* o *Formula di de Moivre*.

L'espressione del prodotto di due complessi con la forma polare evidenzia una straordinaria e importante proprietà del prodotto tra due complessi e delle loro rappresentazioni vettoriali nel piano di Gauss: dati due numeri

$$z_1=(\varrho_1;\vartheta_1)\,,\quad \text{e}\quad z_2=(\varrho_2;\vartheta_2)\,,$$

moltiplicare z_1 per z_2 equivale a “dilatare” il vettore rappresentante di z_1 del fattore ϱ_2 e a ruotare lo stesso vettore di un angolo ϑ_2. In particolare moltiplicare un complesso $z=(\varrho;\vartheta)$ per un complesso di modulo 1, $u=(1;\varphi)$ equivale a ruotare il vettore rappresentante del complesso z di un angolo φ.

12.4 Radici nei complessi

Occupiamoci ora del problema che ha dato storicamente origine agli studi sui numeri complessi, ovvero il problema dell'estrazione di radice.

In $\mathbb{R}$, come sappiamo, dato un numero a e un naturale $n>1$, l'equazione

$$x^n=a$$

ha

- un'unica soluzione se n è dispari, per qualunque valore di a;
- solo la soluzione 0 per n pari, se $a=0$;
- due soluzioni opposte per n pari, se $a>0$;
- nessuna soluzione per n pari, se $a<0$.

Fissiamo ora un complesso z e, per ogni naturale $n>1$, consideriamo l'equazione, in w,

$$w^n=z\,. \tag{12.6}$$

Sia $z=(\varrho;\vartheta)$ ed esprimiamo anche l'incognita w della (12.6) in forma polare: $w=(\sigma;\varphi)$, con σ e φ da determinare (se esistono!). Poiché

$$w^n=(\sigma^n;n\varphi)\,,$$

dovrà aversi

$$\begin{cases}\sigma^n=\varrho\\ n\varphi=\vartheta+2k\pi\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sigma=\sqrt[n]{\varrho}\\ \varphi=\dfrac{\vartheta+2k\pi}{n}\end{cases}\,.$$

È chiaro che, degli infiniti valori di φ forniti da questa formula, solo n corrisponderanno a numeri complessi distinti, per esempio quelli corrispondenti ai valori di k compresi tra 0 e $n-1$. Possiamo dunque concludere con il seguente importantissimo risultato.

Ogni numero complesso ha esattamente n radici n-esime distinte.

Alcuni usano indicare con $\sqrt[n]{z}$ l'insieme di tutte queste radici, ma riteniamo la notazione abbastanza infelice. È infatti di solito opportuno indicare con un simbolo un solo numero[(2)]. Non useremo quindi questo tipo di notazione e, dato un complesso $z = (\varrho; \vartheta)$, considereremo l'insieme delle sue radici n-esime scrivendo

$$\{\, w_k \,\} = \left\{ \left(\sqrt[n]{\varrho}\,;\, \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \,\middle|\, k = 0,\, 1,\, \dots,\, n-1 \right\} .$$

Si noti che tutte queste radici n-esime hanno lo stesso modulo, cioè nel piano di Gauss stanno su una circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\varrho}$. Inoltre esse sono situate nei vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella stessa circonferenza e avente un vertice nel punto individuato dall'angolo ${}^{\vartheta}\!/_{n}$.

Nel caso particolare del numero 1, le n radici n-esime sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e avente un vertice nel punto $(1, 0)$.

Esempio. Dalla considerazione geometrica precedente si deduce subito che le 4 radici quarte di 1 sono:

$$1,\ \mathrm{i},\ -1,\ -i\,.$$

Analogamente le 8 radici ottave di 1 sono

$$1,\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{i},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\mathrm{i},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Il risultato fondamentale di tutta la costruzione dei numeri complessi è costituito dal seguente teorema dovuto a Gauss (sempre lui!).

Teorema 12.6 (Teorema fondamentale dell'algebra)**.** *Ogni polinomio di grado n nel campo complesso ammette almeno una radice.*

La dimostrazione di questo teorema esula dagli scopi di questo corso. Interessa comunque sottolineare che, come conseguenza dello stesso, se si conteggiano le radici con la loro molteplicità, si conclude che ogni polinomio ha esattamente tante radici, in $\mathbb{C}$, quant'è il suo grado. Il risultato è abbastanza sorprendente se si tiene conto che non è possibile (teorema di Ruffini-Abel) trovare una formula risolutiva generale (del tipo di quella valida per i polinomi di grado 2) per determinare le radici dei polinomi di grado superiore al quarto.

[2] Per esempio nell'insieme dei reali si conviene che

$$\sqrt{4} = +2\,,$$

mentre se si vuole considerare l'equazione $x^2 = 4$ si dice che l'insieme delle soluzioni è $\{\, -2,\, 2 \,\}$.

12.5 Successioni e serie nei complessi. Cenni

L'estensione del concetto di successione ai complessi non presenta alcuna difficoltà: basterà soltanto prendere $\mathbb{C}$ anziché $\mathbb{R}$ come codominio della successione. Ricordiamo poi la definizione di successione convergente in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > \overline{n} \text{ si abbia } |a_n - l| < \varepsilon\,.$$

Poiché anche in $\mathbb{C}$ abbiamo introdotto il modulo di un complesso, la definizione può essere estesa senza alcuna modifica anche alle successioni di complessi.

Scriveremo pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > \overline{n} \text{ si abbia } |z_n - l| < \varepsilon\,, \tag{12.7}$$

e chiameremo una successione con questa proprietà *convergente* a l. Se questo non succede diremo semplicemente che la successione *non converge*.

Si noti che non ha senso considerare, per le successioni complesse, una rappresentazione grafica come quella considerata per le successioni reali, in quanto i valori immagine di una successione sono rappresentabili come punti di un piano e non su una retta. Si noti altresì che la scrittura $|z_n - l| < \varepsilon$ implica che tutti i termini della successione successivi a $\overline{n}$ stanno all'interno di un disco del piano di Gauss di centro $l = \operatorname{Re} l + \mathrm{i} \operatorname{Im} l$ e raggio ε.

Esempio. Rappresentare, nel piano complesso, le immagini della successione

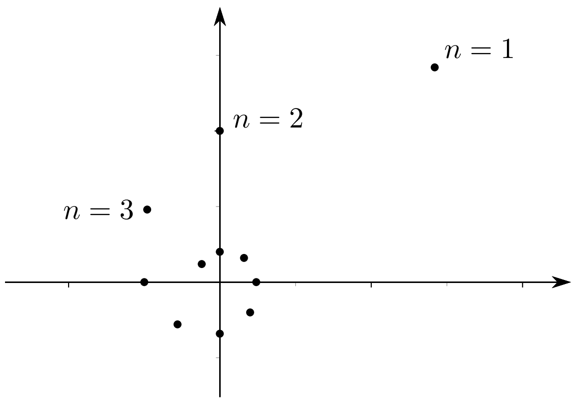
$$z_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

e "verificare" graficamente che la successione ha per limite 0.

Cominciamo con l'osservare che

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(1\,;\,\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(1\,;\,n\frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad z_n = \left(\frac{1}{n}\,;\,n\frac{\pi}{4}\right).$$

La rappresentazione grafica richiesta è ora immediata.



La figura mostra subito che il limite della successione è 0, cioè $(0,0) = 0 + \mathrm{i}\,0$.

È immediato che una successione $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ di complessi converge a un complesso l se e solo se x_n converge a $\operatorname{Re} l$ e y_n converge a $\operatorname{Im} l$. Dunque nello studiare le successioni di complessi ci si può limitare a separare la parte reale dal coefficiente della parte immaginaria e studiare le due successioni reali così ottenute. Tecnicamente il problema può essere complesso, perché non è detto che sia facile separare la parte reale da quella immaginaria, ma problemi di questo tipo esulano dal contesto di questo corso.

Una volta introdotto il concetto di successione nei complessi si può anche parlare di serie a termini complessi, anche qui senza alcuna modifica rispetto al caso delle serie a termini reali: come conseguenza di quanto osservato sulle successioni, basterà tenere conto che una serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + \mathrm{i}y_n)$$

potrà convergere a una somma s se e solo se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \operatorname{Re} s \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \operatorname{Im} s\,,$$

e questo ci consentirà di continuare a operare su serie a termini reali.

È molto importante il seguente teorema, che estende l'analogo per le serie a termini reali (vedi il teorema 10.18 nella pagina 167).

Teorema 12.7. *Se una serie a termini complessi converge assolutamente, allora converge.*

Dimostrazione. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + \mathrm{i}y_n)$$

converge assolutamente, significa che converge la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2}\,.$$

Ne segue che convergono anche le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n|\;,$$

che sono minoranti della precedente. Ma allora convergono anche le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

e quindi la serie data. □

Naturalmente si potranno introdurre anche le serie di funzioni nel campo complesso e in particolare le serie di potenze, a cui siamo soprattutto interessati.

L'unica modifica che si dovrà fare rispetto all'analogo concetto sulle serie di potenze nel campo reale è relativa all'insieme di convergenza che sarà un cerchio, anziché un intervallo: una serie di potenze centrata in z_0, converge sempre assolutamente all'interno di un cerchio di centro z_0 e di raggio r, detto raggio di convergenza; nulla si può dire in generale sui punti della circonferenza che è bordo di questo cerchio. La cosa non richiede alcuna nuova dimostrazione, in quanto nella dimostrazione del Lemma di Abel (teorema 11.2 nella pagina 174) abbiamo usato solo la serie dei moduli, e le proprietà del modulo in $\mathbb{C}$ sono le stesse che si hanno in $\mathbb{R}$.

Consideriamo un esempio un po' complesso, in cui sono coinvolti tutti i ragionamenti proposti.

Esempio. Si consideri la successione

$$z_n = \frac{\mathrm{i}^n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)+\mathrm{i}^{2n}\sqrt{n+1}}{n}\,.$$

Si studi prima la convergenza della successione e poi quella della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\,.$$

Cominciamo con l'osservare che solo i termini con n dispari hanno parte immaginaria, in quanto

$$\mathrm{i}^{2n} = (\mathrm{i}^2)^n = (-1)^n;$$

converrà pertanto separare i termini pari da quelli dispari.

$$z_{2n} = \frac{\mathrm{i}^{2n}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)+\mathrm{i}^{4n}\sqrt{2n+1}}{2n} = \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)+\sqrt{2n+1}}{2n}\,;$$

$$\begin{aligned} z_{2n-1} &= \frac{\mathrm{i}^{2n-1}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}\right)+\mathrm{i}^{4n-2}\sqrt{2n}}{2n-1} = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{i}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}\right)-\sqrt{2n}}{2n-1}\,, \end{aligned}$$

ove abbiamo tenuto conto dei seguenti fatti.

$$\mathrm{i}^{2n-1} = \frac{\mathrm{i}^{2n}}{\mathrm{i}} = (-1)^n(-\mathrm{i}) = (-1)^{n+1}\mathrm{i}\,,\quad \mathrm{i}^{4n-2} = \frac{\mathrm{i}^{4n}}{\mathrm{i}^2} = \frac{1}{-1} = -1\,.$$

I seguenti limiti sono abbastanza standard.

$$\lim_n \frac{(-1)^n\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)}{2n} = \lim_n \frac{(-1)^n}{2n\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}\right)} = 0$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n+1}}{2n} = 0$$

$$\lim_n \frac{(-1)^{n+1}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-2}\right)}{2n-1} = \cdots = 0$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} = 0$$

Questi limiti ci permettono di concludere facilmente che la successione tende a 0.

Occupiamoci ora della serie proposta. Si può osservare quanto segue.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)}{n} .$$

La prima serie è una serie a termini reali a cui si può applicare il criterio di Leibniz e converge, la seconda è una serie assolutamente convergente in quanto il valore assoluto del suo termine generale è

$$\frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)} ,$$

che è infinitesimo di ordine $3/2$. La serie dunque, in quanto somma di due serie convergenti, converge.

Anche se non è richiesto dal testo si può controllare che la serie non è assolutamente convergente, prendendo (con un po' di attenzione!) i moduli.

12.6 Le funzioni elementari nei complessi. Cenni

Riconsideriamo i seguenti sviluppi in serie di potenze delle funzioni esponenziale, seno e coseno.

- $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$

Poiché si tratta di serie di potenze convergenti su tutto $\mathbb{R}$, se le consideriamo nel campo complesso otterremo delle serie convergenti in tutto $\mathbb{C}$. Alle funzioni somma di queste serie si danno gli stessi nomi delle funzioni nel campo reale. Precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 12.8. *Si definiscono nel campo complesso le seguenti funzioni.*

- *Esponenziale:* $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}\,, \qquad z \in \mathbb{C}.$
- *Seno:* $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \qquad x \in \mathbb{C}.$
- *Coseno:* $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad x \in \mathbb{C}.$

Vale il seguente teorema, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

Teorema 12.9. *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$ *si ha*

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w . \tag{12.8}$$

Proviamo invece il seguente teorema.

Teorema 12.10 (Formule di Eulero). *Si ha*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z\,, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z\,,$$

e, di conseguenza,

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\,, \quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2i}\,.$$

Dimostrazione. Da

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = 1 + \frac{(\mathrm{i}z)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}z)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{i}z)^6}{6!} + \cdots$$

e

$$\mathrm{i}\sin z = \mathrm{i}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = (\mathrm{i}z) + \frac{(\mathrm{i}z)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}z)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{i}z)^7}{7!} + \cdots$$

si ottiene subito l'uguaglianza richiesta per somma delle due serie. La seconda formula si prova in modo analogo. Le ultime due si ricavano per somma e sottrazione. □

Come conseguenza importante di queste formule e del teorema precedente si ha che, se $z = x + iy$,

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,,$$

che non è altro che la forma trigonometrica del numero complesso e^z.

Poiché x e y sono numeri reali, questa formula riporta il problema dell'esponenziale complesso a una combinazione di esponenziali e funzioni trigonometriche reali.

Inoltre, se $z = z + \mathrm{i}y$ è un reale qualsiasi, e ne esaminiamo la forma trigonometrica

$$z = \varrho(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)\,,$$

possiamo concludere che il numero stesso si può scrivere nella forma

$$z = \varrho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\,,$$

detta *forma esponenziale* del numero complesso. Questa forma è particolarmente utile in molte applicazioni.

Proviamo anche il seguente teorema.

Teorema 12.11. *L'esponenziale complesso è una funzione periodica di periodo* $2\pi\mathrm{i}$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice conseguenza delle proprietà appena viste.

$$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z(\cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi) = \mathrm{e}^z\,.$$ □

Si potrebbe anche introdurre la funzione logaritmo naturale nei complessi, con procedimenti simili a quelli usati nei reali, ma la cosa è un po' delicata ed esula dagli scopi di questo corso. Analoghe difficoltà per la definizione di potenza con base ed esponente complesso, che si potrebbe definire a partire dalle funzioni logaritmo ed esponenziali.

Concludiamo questa sommaria introduzione alle funzioni elementari nel campo complesso con la formula seguente.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = 1\,,$$

di solito scritta nella forma

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0\,.$$

In un sola formula sono comprese tutte e sole le cinque costanti più importanti della matematica.

12.7 Esercizi

Esercizio 12.1. *Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso*

$$\frac{\mathrm{i}-1}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$-1+\mathrm{i}=(-1,1)=\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)\,,\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}=(1,-\sqrt{3})=\left(2\,;\,\frac{5\pi}{3}\right)\,.$$

Quindi

$$\frac{\mathrm{i}-1}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(2\,;\,\frac{5\pi}{3}\right)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{11\pi}{12}\right)\,.$$

□

Esercizio 12.2. *Scrivere in forma trigonometrica i numeri complessi*

1. $\dfrac{3-3\mathrm{i}}{2\sqrt{3}+2\mathrm{i}}\,.$

2. $\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,.$

3. $-\pi\mathrm{i}\,.$

Esercizio 12.3. *Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso*

$$z=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$z=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{7}\right)=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\left(3\,;\,-\frac{\pi}{7}\right)\,.$$

Si presti particolare attenzione al fatto che se

$$z=a+\mathrm{i}b=(\varrho\,;\,\vartheta)\,,$$

allora $z=\varrho(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)$, mentre nell'esercizio appena risolto compariva il segno meno tra $\cos\vartheta$ e $\mathrm{i}\sin\vartheta$. □

Esercizio 12.4. *Scrivere in forma algebrica il numero*

$$(1+\mathrm{i})^{387}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$1+\mathrm{i}=(1,1)=\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Allora

$$(1+\mathrm{i})^{387}=\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{4}\right)^{387}=\left((\sqrt{2})^{387}\,;\,\frac{387\pi}{4}\right)\,.$$

Poiché

$$\frac{387\pi}{4}=\frac{387}{8}2\pi=48\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{4}\,,$$

si ha

$$(1+\mathrm{i})^{387}=\left((\sqrt{2})^{387}\,;\,\frac{387\pi}{4}\right)=\left((\sqrt{2})^{387}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)=2^{193}\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$$
$$=2^{193}\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2^{193}(-1+\mathrm{i})\,.$$

□

Esercizio 12.5. *Scrivere in forma algebrica il numero*

$$\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{43}\,.$$

Esercizio 12.6.

1. *Scrivere in forma algebrica le radici terze di* i.
2. *Scrivere in forma algebrica le radici seste di* -1.
3. *Scrivere in forma algebrica le radici terze di* 8.
4. *Scrivere in forma algebrica le radici quarte di* $(1+\mathrm{i})^2$.

Esercizio 12.7. *Risolvere le seguenti equazioni scrivendo le soluzioni in forma algebrica e usando, se del caso, anche le formule di bisezione per trovare le funzioni trigonometriche richieste.*

1. $\mathrm{i}z^2-2\sqrt{3}\mathrm{i}z-9=0\,.$
2. $z^2+2z+6\mathrm{i}-7=0\,.$
3. $2z^2+\sqrt{2}(1-i)z+1=0\,.$

Esercizio 12.8. *Rappresentare nel piano di Gauss i numeri complessi che soddisfano la seguente relazione.*

$$|z+2\mathrm{i}|<3\,.$$

Risoluzione. Posto $z=x+\mathrm{i}y$, la disuguaglianza precedente si può scrivere come segue:

$$|z+2\mathrm{i}|<3 \quad\Leftrightarrow\quad |x+\mathrm{i}y+2\mathrm{i}|<3 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2+(y+2)^2}<3 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+(y+2)^2<9\,.$$

La soluzione è dunque costituita da tutti i punti del piano di Gauss interni al cerchio di centro $(0,-2)$ e raggio 3. □

Esercizio 12.9. *Rappresentare nel piano di Gauss i numeri complessi che soddisfano la seguente relazione.*

1. $\left|\dfrac{z-1}{z+\mathrm{i}}\right|<1\,.$
2. $\left|\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-2}\right|\leq 1\,.$

Esercizio 12.10. *Trovare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{1+4^n}\,.$$

Risoluzione. Si applica il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z-i|\ \frac{1+4^n}{1+4^{n+1}} \to \frac{|z-i|}{4}\,.$$

Dunque la serie converge se $|z-i|<4$. □

13 Esercizi riepilogativi - Temi d'esame

Esercizio 13.1. *Verificare che la funzione*

$$f(x)=\frac{\sqrt{3\cos^2 x+3x^2-x^4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\mathrm{e}^x-1)}$$

è infinitesima per $x\to 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione

$$g(x)=\sqrt[3]{\sin x}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3\cos^2 x+3x^2-x^4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\mathrm{e}^x-1)}\,\frac{\sqrt{3\cos^2 x+3x^2-x^4}+\sqrt{3}}{\sqrt{3\cos^2 x+3x^2-x^4}+\sqrt{3}}=\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x+3x^2-x^4-3}{(\mathrm{e}^x-1)}\,\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3\cos^2 x+3x^2-x^4}+\sqrt{3})}\,.\end{aligned}$$

Analizziamo solo la prima frazione, in quanto la seconda ha per limite $1/6$ e operiamo con la regola di l'Hôpital, anche se si potrebbe procedere con i limiti notevoli.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x+3x^2-x^4-3}{(\mathrm{e}^x-1)}\overset{H}{\Longleftarrow}\lim_{x\to 0}\frac{-6\cos x\sin x+6x-4x^3}{\mathrm{e}^x}=0\,.$$

La funzione è dunque infinitesima e possiamo cercare di calcolarne l'ordine rispetto al campione dato. Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x}}=1\,,$$

per cui sarà la stessa cosa calcolare l'ordine rispetto a $\sqrt[3]{x}$. Per eseguire il calcolo ripetiamo la razionalizzazione già fatta e operiamo solo sulla frazione

$$\frac{3\cos^2 x+3x^2-x^4-3}{(\mathrm{e}^x-1)}\,.$$

Spesso conviene, anche in esercizi simili, valutare l'ordine rispetto al "campione standard" x dei vari infinitesimi che compaiono, in quanto in molti casi questi ordini sono legati al calcolo di limiti notevoli. Cominciamo dal numeratore e calcoliamone l'ordine rispetto a x, applicando la regola di l'Hôpital.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x+3x^2-x^4-3}{x^\alpha}\overset{(H)}{\Leftarrow}\lim_{x\to 0}\frac{-6\cos x\sin x+6x-4x^3}{\alpha x^{\alpha-1}}\overset{(H)}{\Leftarrow}\\ &\lim_{x\to 0}\frac{6\sin^2 x-6\cos^2 x+6-12x^2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{12(\sin^2 x-x^2)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{12(\sin x-x)(\sin x+x)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}\,.\end{aligned}$$

Il numeratore di quest'ultima frazione è un infinitesimo di ordine 4, per cui tale deve essere anche il denominatore: se ne deduce che $\alpha = 6$. Poiché il denominatore è palesemente un infinitesimo di ordine 1, sempre rispetto a x, la funzione è di ordine 5.

A questo punto la conclusione è immediata.

$$\frac{f(x)}{|\sqrt[3]{x}|^{\alpha}} = \frac{f(x)}{x^5}\,\frac{x^5}{|\sqrt[3]{x}|^{\alpha}}\,.$$

Poiché il primo fattore ha limite finito e non nullo, occorre che lo stesso succeda per il secondo limite, ma questo è possibile solo se $\alpha = 15$. □

Esercizio 13.2. *Data la funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{x-\left|x^2-x-2\right|}\,,$$

determinare i punti di massimo e minimo locale della funzione g data da

$$\begin{cases} f(x), & \text{se } x \le 2 \\ -f(x), & \text{se } x > 2 \end{cases}\,.$$

Risoluzione. Cominciamo a valutare il termine $\left|x^2 - x - 2\right|$. Si ha

$$\left|x^2 - x - 2\right| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & \text{se } x < -1 \lor x > 2 \\ -x^2 + x + 2, & \text{se } -1 \le x \le 2 \end{cases}\,,$$

da cui

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2+2x+2}, & \text{se } x < -1 \lor x > 2 \\ \mathrm{e}^{x^2-2}, & \text{se } -1 \le x \le 2 \end{cases}\,.$$

La determinazione degli estremi locali di f ci permetterà di decidere subito sugli estremi locali di g. Lavoriamo dunque sulla funzione f e cominciamo a calcolare la derivata nei punti diversi da -1, 2.

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^2+2x+2}(-2x+2), & \text{se } x < -1 \lor x > 2 \\ \mathrm{e}^{x^2-2}(2x), & \text{se } -1 < x < 2 \end{cases}\,.$$

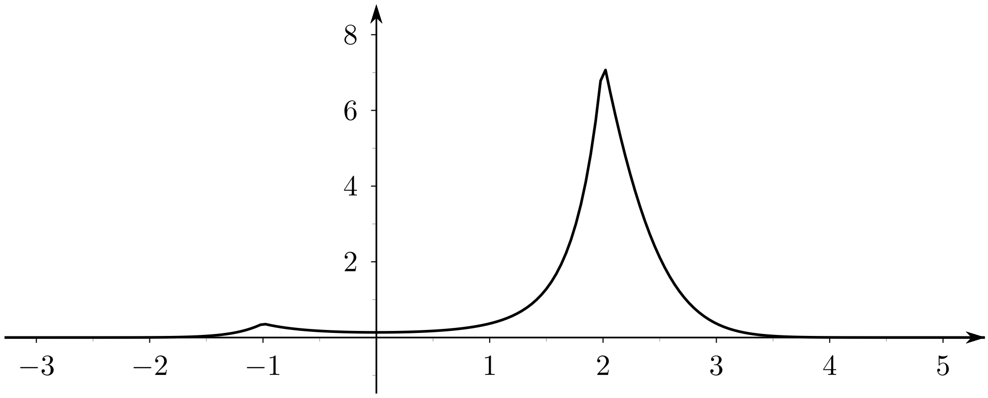
La funzione ha dunque derivata positiva per $x < -1 \lor 0 < x < 2$, derivata negativa per $-1 < x < 0 \lor x > 2$. Tenendo conto della continuità, avrà un massimo locale in -1 e in 2, un minimo locale in 0.

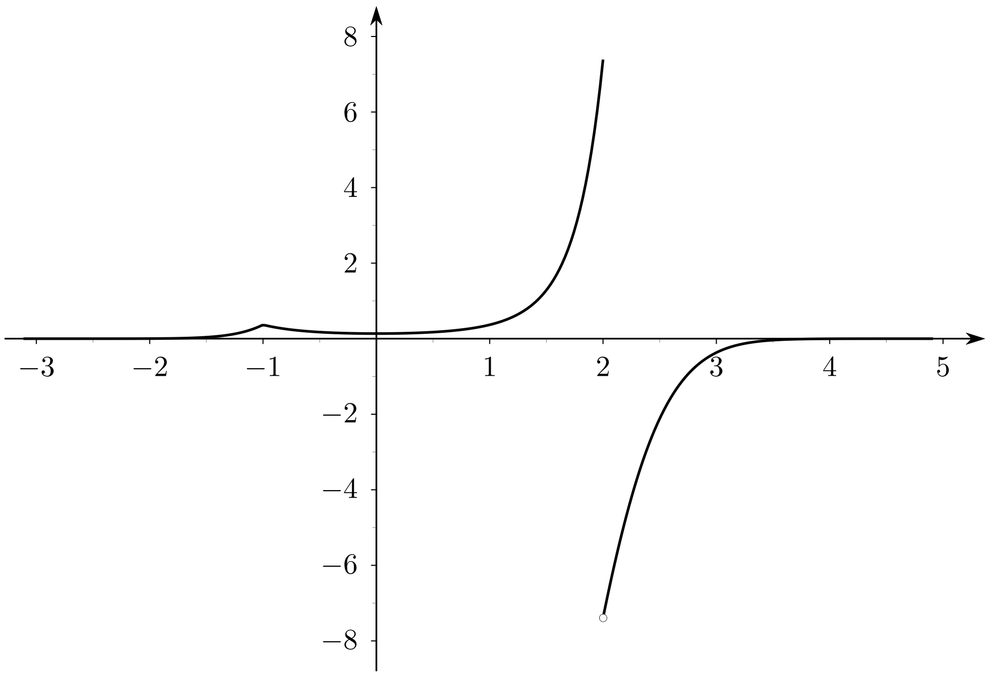
Passando alla funzione g possiamo subito concludere che nulla cambia per quanto riguarda i punti di estremo. Notiamo che la funzione h data da

$$\begin{cases} f(x), & \text{se } x < 2 \\ -f(x), & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$$

avrebbe invece un minimo locale in 2 (che sarebbe anche minimo assoluto).

Per completezza proponiamo anche i grafici delle funzioni f e g, da cui risultano evidenti le conclusioni che abbiamo indicato.





□

Esercizio 13.3. *Trovare quante e quali soluzioni reali ha l'equazione*

$$x^2+1=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\,.$$

Risoluzione. I due membri dell'equazione sono entrambi definiti solo se $x>0$: è qui che dobbiamo cercare le soluzioni. Conviene tracciare un grafico, sia pur sommario, delle due funzioni a primo e secondo membro. Al primo membro non ci sono problemi, in quanto la funzione ha come grafico una parabola. Per il secondo membro osserviamo intanto che si ha

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty\qquad\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty\,.$$

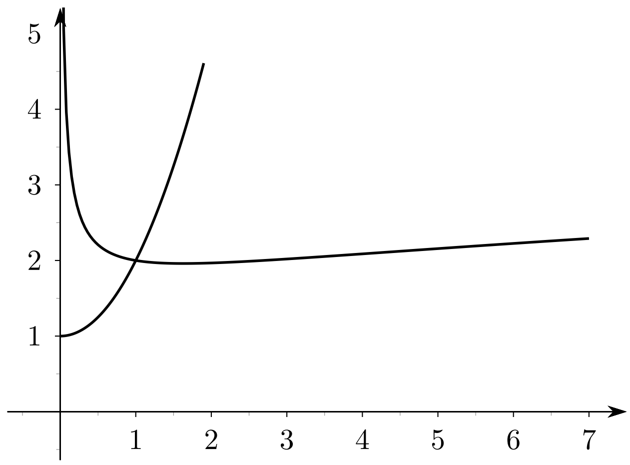
Si ha poi

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)=\frac{2\sqrt{x^3}-3\sqrt[3]{x^2}}{6\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Questa derivata è positiva se

$$2\sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} > 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^3} > 3\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow 2^6x^9 > 3^6x^4 \Rightarrow x^5 > \left(\frac{3}{2}\right)^6 \Rightarrow x > \frac{3}{2}\sqrt[5]{\frac{3}{2}}.$$

Da qui si può dedurre il grafico sommario che segue.



Tenendo anche conto del fatto che x^2+1 è infinito di ordine superiore a $\sqrt[3]{x}$, per $x \to +\infty$, si conclude che l'unica intersezione tra i due grafici (e quindi l'unica soluzione dell'equazione proposta) è quella visibile nella figura e corrispondente al valore $x = 1$. □

Esercizio 13.4. *Della funzione*

$$f(x) = \sin x + a\cos x + bx^3$$

si costruisca il polinomio di Taylor $T_{0,3}(x)$ del terzo ordine nell'intorno di 0. Esistono valori di a e b tali che questo polinomio abbia $x = 1$ come radice (o zero) doppia?

Risoluzione. Si ha intanto $f(0) = a$. La funzione è poi infinitamente derivabile. Calcoliamone le prime 3 derivate.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - a\sin x + 3bx^2 &&\Rightarrow \quad f'(0) = 1\,; \\ f''(x) &= -\sin x - a\cos x + 6bx &&\Rightarrow \quad f''(0) = -a\,; \\ f'''(x) &= -\cos x + a\sin x + 6b &&\Rightarrow \quad f'''(0) = -1 + 6b\,. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor richiesto è quindi

$$T_{0,3}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 = a + x - \frac{a}{2}x^2 + \frac{6b-1}{6}x^3\,.$$

Affinché il polinomio abbia $x = 1$ come radice doppia deve essere

$$T_{0,3}(1) = 0, \quad T'_{0,3}(1) = 0, \quad T''_{0,3}(1) \neq 0\,.$$

Si ha

$$T_{0,3}(1) = a + 1 - \frac{a}{2} + \frac{6b-1}{6} = \frac{a}{2} + b + \frac{5}{6}\,,$$

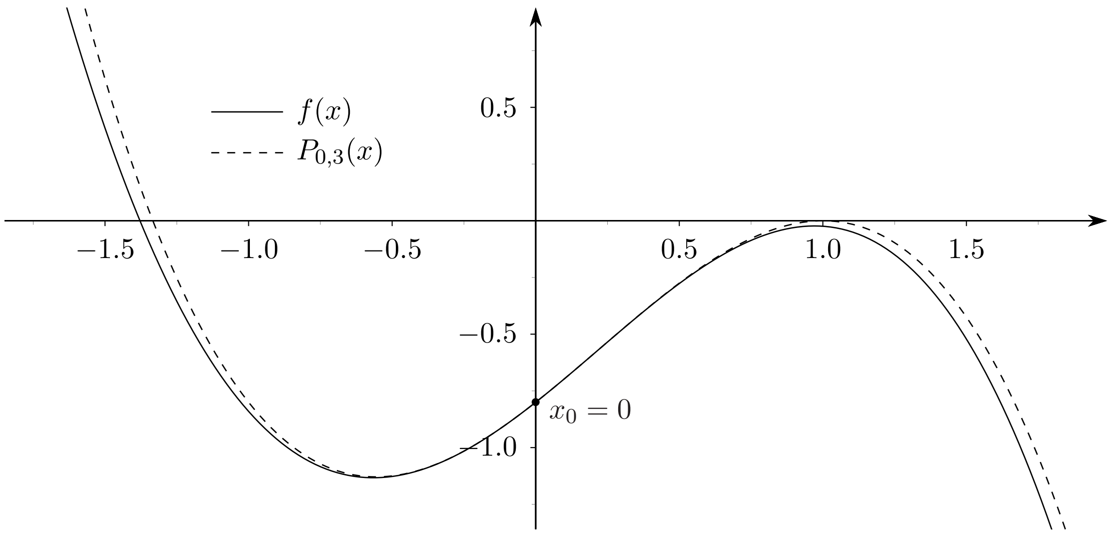
$$T'_{0,3}(x) = 1 - ax + \frac{6b-1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad T'_{0,3}(1) = -a + 3b + \frac{1}{2}\,,$$
$$T''_{0,3}(x) = -a + (6b-1)x \quad \Rightarrow \quad T''_{0,3}(1) = -a + 6b - 1\,.$$

Uguagliando a zero il valore del polinomio e della sua derivata prima si ottiene un sistema lineare di due equazioni in due incognite, che ha la seguente soluzione

$$a = -\frac{4}{5}\,, \quad b = -\frac{13}{30}\,.$$

Si verifica poi subito che per questi valori non si annulla la derivata seconda del polinomio: i valori trovati soddisfano dunque le condizioni del problema.

Per completezza proponiamo anche il grafico della funzione data e del polinomio di Taylor in corrispondenza dei valori trovati di a e b.



Il grafico rende evidente la bontà dell'approssimazione polinomiale, nei pressi dell'origine. □

Esercizio 13.5. *Determinare per quale valore di* $\lambda \in \mathbb{R}$ *è infinitesima in* 0 *la funzione*

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + x + \lambda - 1)\,.$$

Per il valore trovato di λ *calcolare il*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x - (2/3)\,x^3}{x^4 \operatorname{tg} x + 2x^5}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \operatorname{arctg}(\lambda - 1)\,;$$

ne segue che deve essere $\lambda = 1$ e quindi $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + x)$.

Esaminiamo ora il problema del calcolo del limite. Esso potrebbe essere calcolato in maniera abbastanza agevole usando la formula di Taylor-Peano, tuttavia preferiamo lavorare utilizzando tecniche più elementari. Il denominatore della frazione proposta si può scrivere come

$$x^5\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2\right)\,,$$

e ricordando che ${}^{\operatorname{tg} x}/_{x}$ ha limite 1 per $x \to 0$, si conclude che il limite richiesto può essere scritto più convenientemente nella forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x - (2/3)\,x^3}{x^5}\,\frac{1}{\operatorname{tg} x/x + 2}\,.$$

A questo punto si può calcolare separatamente il limite del primo fattore, in quanto il secondo tende a $1/3$. Per il primo si può applicare la regola di l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x - (2/3)\,x^3}{x^5} \overset{H}{\Longleftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3x^2+1}{1+(x^3+x)^2} - 1 - 2x^2}{5x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+1-1-x^6-2x^4-x^2-2x^2-2x^8-4x^6-2x^4}{\big(1+(x^3+x)^2\big)5x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4x^4-5x^6-2x^8}{\big(1+(x^3+x)^2\big)5x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-4-5x^2-2x^4}{\big(1+(x^3+x)^2\big)5} = -\frac{4}{5}\,.$$

Il limite richiesto vale allora

$$-\frac{4}{15}\,.$$

□

Esercizio 13.6. *Studiare la monotonia della funzione*

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x-1}\,.$$

Risoluzione. La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ e, tenendo anche conto della definizione di valore assoluto, può essere convenientemente riscritta come

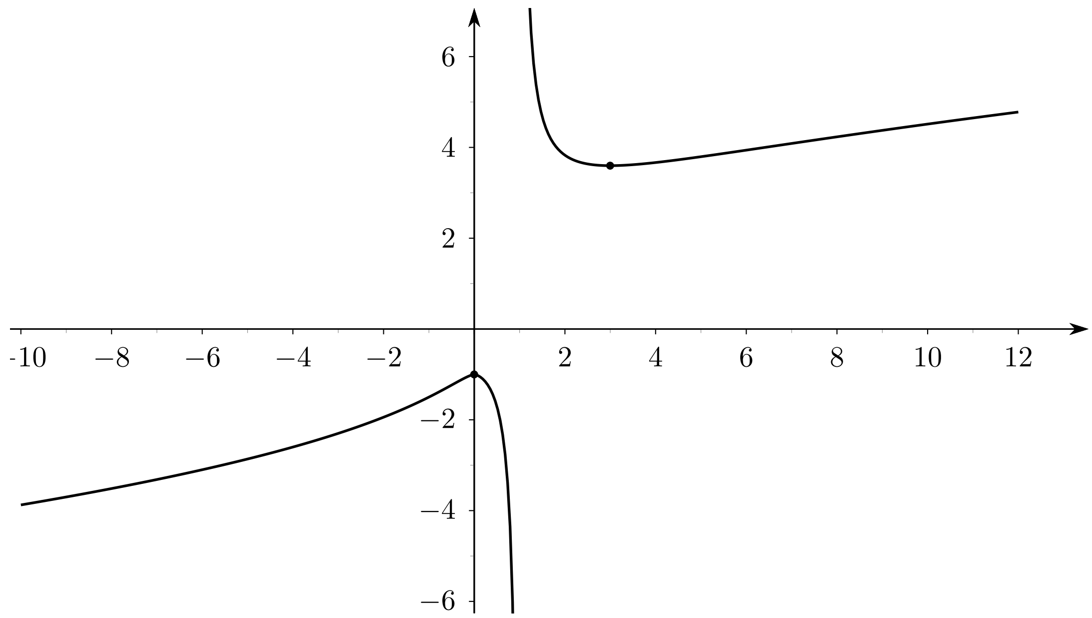
$$f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{(-x)\sqrt{(-x)}}{x-1}, & \text{se } x < 0 \\ -1 + \dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 + \dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}\,.$$

La funzione è continua nel suo dominio e sicuramente derivabile per $x \neq 0$. Calcoliamone la derivata, naturalmente per $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(-x+3)}{2(x-1)^2\sqrt{(-x)^3}}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2(x-3)}{2(x-1)^2\sqrt{(-x)^3}}, & \text{se } 0 < x < 1 \lor x > 1 \end{cases}\,.$$

Si deduce facilmente che la funzione cresce per $x < 0$ e per $x > 3$, decresce per $0 < x < 1$ e per $1 < x < 3$. Per la continuità di f nel suo dominio si può anche concludere che ha un massimo relativo in 0 e un minimo relativo in 3. Non ha né massimo né minimo assoluto perché il limite per $x \to 1$ è $-\infty$ da sinistra e $+\infty$ da destra.

Per completezza proponiamo un grafico sommario della funzione, dove si può confrontare la correttezza dei risultati indicati.



□

Esercizio 13.7. *Utilizzando gli sviluppi di Taylor-Peano elementari, e senza calcolare le derivate successive, calcolare il polinomio di Taylor, di punto iniziale* 0 *e di grado minore o uguale a* 3*, della funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

Risoluzione. Lo sviluppo di Taylor-Peano di e^x, di punto iniziale 0, è

$$(*) \qquad \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\,\omega_1(x)\,,$$

mentre quello di $\sin x$ è

$$(*_1) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\omega_2(x)\,.$$

Naturalmente dobbiamo tenere conto del fatto che le due funzioni infinitesime che compaiono nei due sviluppi sono diverse. Ci siamo limitati per ora a scrivere gli sviluppi di ordine 3, riservandoci comunque di proseguire, se del caso.

Per calcolare lo sviluppo di $\mathrm{e}^{\sin x}$ potremo sostituire l'espressione $(*_1)$ di $\sin x$ nella formula $(*)$. Nel fare i conti potremo trascurare tutte le quantità di grado superiore al terzo: siamo infatti sicuri che il polinomio di Taylor richiesto esiste, perché tutte le condizioni di regolarità sono soddisfatte, e lo sviluppo richiesto avrà la forma che segue.

$$\mathrm{e}^{\sin x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\,\omega(x)\,.$$

Potremo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\sin x} &= \mathrm{e}^{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_2(x)} = \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\omega_2(x)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\omega_2(x)\right)^2 +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_2(x)\right)^3+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{6}\omega_1(x)\right)^3\omega_1(x)= \\
&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+\dots\right)+\frac{1}{6}\left(x^3\dots\right)+\dots= \\
&=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\omega(x)\,.
\end{aligned}
$$

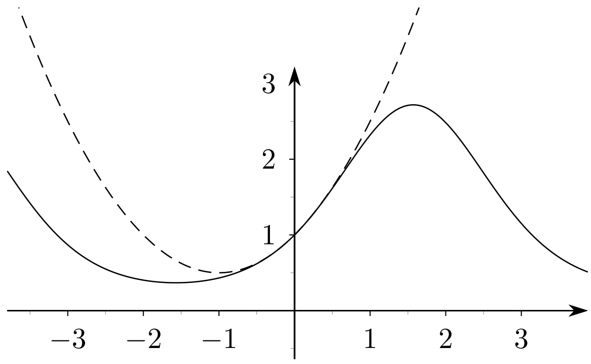
I calcoli eseguiti rendono palese che non occorre prendere, come punti di partenza, sviluppi di ordine più elevato, in quanto i termini che si otterrebbero sarebbero tutti di grado superiore al terzo. Il polinomio richiesto sarà dunque

$$T_{3,0}(x)=1+x+\frac{x^2}{2}\,.$$

Si può controllare la correttezza del risultato facendo direttamente le derivate della funzione data.

Con un po' di esercizio si potrebbe riuscire a scrivere sviluppi di Taylor anche abbastanza complessi, ma occorre prestare la massima attenzione a "manipolare" correttamente le funzioni $\omega(x)$ che compaiono nei diversi sviluppi.

La figura che segue mostra i grafici della funzione data (tratto continuo) e del polinomio trovato(in tratteggio).



□

Esercizio 13.8. *Utilizzando gli sviluppi di Taylor elementari, e senza calcolare le derivate successive, calcolare il polinomio di Taylor, di punto iniziale* 0 *e di grado minore o uguale a* 2*, della funzione*

$$f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}\,.$$

Risoluzione. Si può seguire sostanzialmente quanto fatto nella risoluzione dell'esercizio 13.7, ma bisogna prestare particolare attenzione ai termini che possono essere trascurati nel calcolare lo sviluppo "composto" tra quello dell'esponenziale e quello del coseno.

Lo sviluppo di Taylor di e^x, di punto iniziale 0, è

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\,\omega_1(x)\,, \tag{$*$}$$

mentre quello di $\cos x$ è

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\,. \tag{$*_1$}$$

Naturalmente dobbiamo tenere conto del fatto che le due funzioni infinitesime che compaiono nei due sviluppi sono diverse. Ci siamo, per ora, limitati a scrivere sviluppi di ordine 2, riservandoci comunque di procedere con ordini successivi, se del caso.

Procedendo come nell'esercizio 13.7, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)} = \\
&= 1+\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2+ \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2\omega_1(x) = \\
&= 1+\left(1-\frac{x^2}{2}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(1-x^2+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\dots\right)\omega_1(x)\,.
\end{aligned}$$

Il calcolo rende evidente che il primo addendo dello sviluppo di $\cos x$, che vale 1, non potrà mai essere trascurato, nemmeno se procediamo oltre con l'ordine dello sviluppo. Seguiamo allora una strategia leggermente diversa.

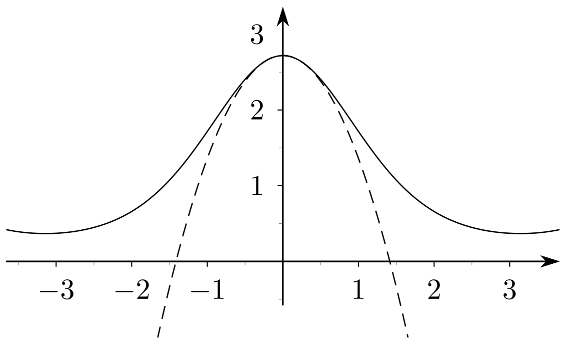
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x} &= \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)} \\
&= \mathrm{e}\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2+\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\omega_2(x)\right)^2\omega_1(x)\right] = \\
&= \mathrm{e}\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\dots\right)\omega_1(x)\right]\,.
\end{aligned}$$

Da qui si può concludere che il polinomio richiesto è il seguente

$$T_{2,0}(x) = e - \frac{e}{2}x^2\,.$$

Naturalmente si può fare un controllo calcolando le derivate successive della funzione data.

La figura che segue mostra i grafici della funzione data (tratto continuo) e del polinomio trovato(in tratteggio).



□

Esercizio 13.9. *Calcolare il*

$$\lim a_n$$

essendo a_n *la successione definita per ricorrenza da*

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}, \quad \text{se } n \geq 2 \end{cases} .$$

Risoluzione. Se la successione ha limite, esso deve essere $+\infty$ (perché è fatta tutta da termini positivi) oppure deve soddisfare all'equazione

$$(*) \qquad l = \sqrt{5 + l},$$

che si ottiene passando al limite nella definizione della successione e tenendo conto della continuità della funzione radice. Poichè si verifica subito che $a_2 > a_1$, controlliamo se la successione è sempre crescente (questo ci assicurerà dell'esistenza del limite). Occorrerà verificare se $a_n > a_{n-1}$.

$$a_n \geq a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5 + a_{n-1}} \geq a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 5 + a_{n-1} \geq (a_{n-1})^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \leq a_{n-1} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} .$$

La prima delle ultime due disuguaglianze è vera perché la successione è a termini positivi. proviamo la seconda, per induzione. Intanto si ha

$$a_1 = \sqrt{5} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} .$$

Supponiamo allora che

$$a_n \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{e proviamo che} \quad a_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} .$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5 + a_n} \leq \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 5 + a_n \leq \frac{1 + 21 + 2\sqrt{21}}{4} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 10 + a_n \leq 11 + \sqrt{21} \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq 1 + \sqrt{21} ,$$

e quest'ultima disuguaglianza è vera per l'ipotesi induttiva. Questo prova non solo che la successione è crescente, ma anche che è superiormente limitata, dunque ha un limite finito.

Possiamo dunque usare l'equazione $(*)$, da cui concludiamo

$$l = \sqrt{5 + l} \quad \Rightarrow \quad l^2 - l - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} ,$$

a causa della positività di l.

Il metodo seguito in questo esercizio è standard nelle successioni definite per ricorrenza. Si noti come in questo esempio (e la stessa cosa succede in altri analoghi) la difficoltà non consista tanto nel calcolare il limite, quanto nel provarne l'esistenza. □

Esercizio 13.10. *Determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ è infinitesima, per $x \to 0^+$ la funzione*

$$f(x) = \ln(x^4 - 2x^2 + \lambda + 5)$$

e, in questo caso, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) + x^4 + 2x^2$ (rispetto al campione "standard" x).

Risoluzione. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln(\lambda + 5)\,,$$

la funzione sarà infinitesima solo se $\lambda = -4$. Per calcolare l'ordine richiesto dovremo allora trovare, se esiste, un $\alpha > 0$ tale che il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4 + 2x^2}{x^\alpha}$$

esista, *finito* e *diverso da* 0.

Si osservi che il numeratore è la somma di tre infinitesimi, due di ordine 2 (rispetto al solito campione) e un odi ordine 4: questo ci impedisce di usare il principio di sostituzione degli infinitesimi. Potremmo infatti raggruppare i tre infinitesimi in due gruppi, in uno dei seguenti modi:

1. primo: $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4$, secondo: $2x^2$;
2. primo: $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + 2x^2$, secondo: x^4;
3. primo: $\ln(x^4 - 2x^2 + 1)$, secondo: $2x^2 + x^4$.

Osserviamo che $\ln(x^4 - 2x^2 + 1)$ è di ordine 2 (la prova è immediata, applicando per esempio l'Hôpital); $2x^2$ e x^4 sono ovviamente di ordine 2 e 4 rispettivamente. Dunque $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4$ è di ordine 2, e quindi nel primo casi non si può trascurare nulla; $\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + 2x^2$ è di ordine superiore a 2 (in quanto somma di infinitesimi dello stesso ordine) e dunque nel secondo caso non si può trascurare nulla; $2x^2 + x^4$ è di ordine 2, e dunque nemmeno nel terzo caso si può trascurare nulla.

Di solito la regola di l'Hôpital va lasciata come "ultima spiaggia" nel calcolo di un limite; tuttavia quando compare la funzione logaritmo spesso l'uso della regola semplifica il problema, perché la derivata del logaritmo è particolarmente semplice. Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^4 - 2x^2 + 1) + x^4 + 2x^2}{x^\alpha} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4x^3 - 4x}{x^4 - 2x^2 + 1} + 4x^3 + 4x}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4x^3 - 4x + 4x^7 + 4x^5 - 8x^5 - 8x^3 + 4x^3 + 4x}{x^4 - 2x^2 + 1}}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\alpha(x^4 - 2x^2 + 1)}\,\frac{-x^5 + x^7}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{\alpha(x^4 - 2x^2 + 1)}\,\frac{-x^5}{x^{\alpha-1}}\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il principio di sostituzione degli infinitesimi, trascurando l'infinitesimo di ordine 7 rispetto a quell odi ordine 5. Si noti altresì che abbiamo isolato, nel limite, il primo fattore che ha per limite $4/\alpha$, e dunque non ha alcuna influenza in relazione al problema in discussione (non tende né a 0 né a ∞). A questo punto è ovvio che $\alpha - 1$ deve essere 5 se vogliamo che il limite sia finito, dunque $\alpha = 6$.

Il problema si poteva anche risolvere usando opportunamente la formula di Taylor per la funzione $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6}\,\omega(x)\,.$$

Da qui si ottiene, con procedimenti simili a quelli visti nell'esercizio 13.7, e tralasciando tutti i termini che hanno ordine maggiore di 6,

$$\begin{aligned}\ln(1+x^4-2x^2) &= x^4-2x^2-\frac{(x^4-2x^2)^2}{2}+\frac{(x^4-2x^2)^3}{3}+\frac{(x^4-2x^2)^3}{3}\,\omega(x) = \\ &= x^4-2x^2-\frac{1}{2}\left(4x^4-4x^6+\dots\right)+\frac{1}{3}\left(-8x^6+\dots\right)+\dots = \\ &= -2x^2-x^4-\frac{2}{3}\,x^6+\dots\end{aligned}$$

Da qui si vede subito che il numeratore è un infinitesimo di ordine 6.

La tecnica di costruire "sviluppi di Taylor composti" è molto efficiente, ma richiede un uso attento per evitare errori madornali. □

Esercizio 13.11. *Studiare la monotonia della funzione*

$$f(x) = \frac{\left|x\sqrt{|x|}\right|}{x-1}\,.$$

Risoluzione. La funzione è chiaramente definita e continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e può essere scritta nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x\sqrt{-x}}{x-1}, & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x\sqrt{x}}{x-1}, & \text{se } 0\le x<1 \lor x>1 \end{cases}\,.$$

Calcoliamone la derivata. Per $x\neq 0$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-x}(3-x)}{2(x-1)^2}, & \text{se } x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x}(x-3)}{2(x-1)^2}, & \text{se } 0<x<1 \lor x>1 \end{cases}\,.$$

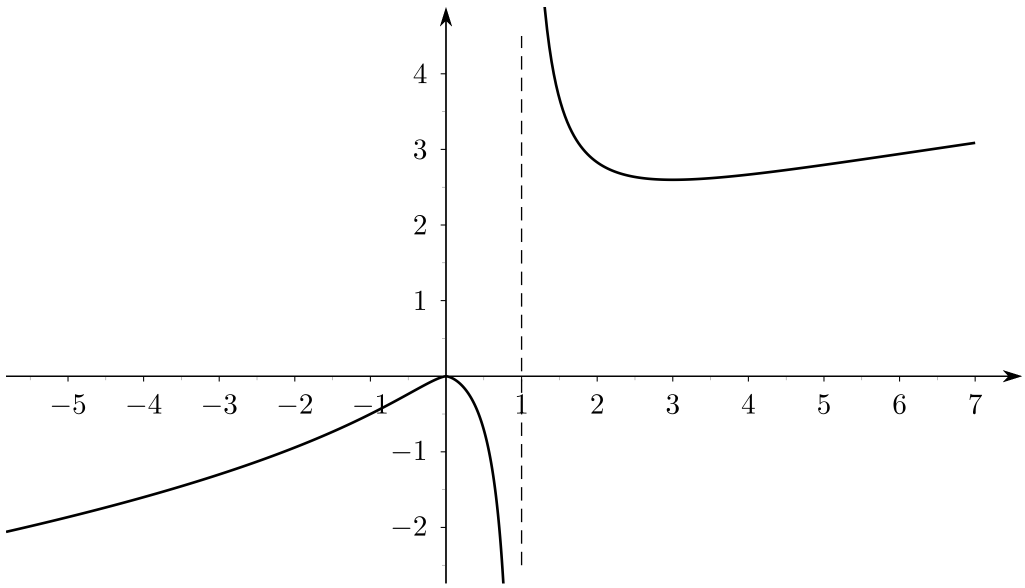
Anche se non ha importanza per quanto riguarda la monotonia, osserviamo che la funzione é derivabile con derivata nulla in 0, in quanto, essendo continua, si può applicare il teorema sul limite della derivata e questo limite vale 0.

La derivata trovata ci permette subito di concludere che la funzione

- cresce nell'intervallo $]-\infty,0]$;
- decresce nell'intervallo $[0,1[$;
- decresce nell'intervallo $]1,3]$;
- cresce nell'intervallo $[3,+\infty[$.

Possiamo ulteriormente osservare, anche se non richiesto dal testo, che la funzione ha come unico asintoto, verticale, la retta $x=1$, che ha limite $-\infty$ a $-\infty$ e $+\infty$ a $+\infty$. La funzione non ha massimo né minimo assoluto, mentre ha un massimo relativo in 0 (di valore 0) e un minimo relativo in 3, di valore $3\sqrt{3}/2$.

La figura seguente mostra il grafico della funzione in esame.



□

Esercizio 13.12. *Verificare che la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

è decrescente nell'intervallo $[1, +\infty[$ *e determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n\, 2^{\sin\frac{1}{n}}}{n^2+1}\,.$$

La serie è assolutamente convergente?

Risoluzione. Poiché la derivata della funzione $f(x)$ vale

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

si deduce subito che la funzione stessa è decrescente in $[1, +\infty[$. Anche la funzione

$$2^{\sin\frac{1}{x}}$$

è decrescente nell'intervallo $[1, +\infty[$, perché tale è la funzione $\sin 1/x$. Dunque il modulo del termine generale della serie data si può vedere come la restrizione a $\mathbb{N}^+$ della funzione

$$(*) \qquad \frac{x}{x^2+1}\, 2^{\sin\frac{1}{x}}$$

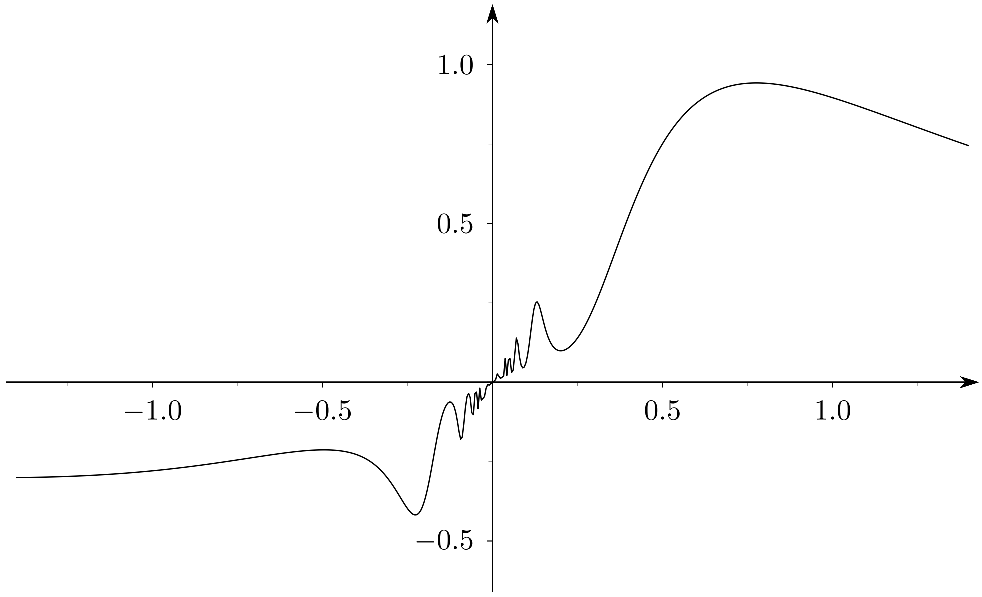
che risulta essere decrescente in $[1, +\infty[$ in quanto prodotto di due funzioni decrescenti e positive. Il termine generale è chiaramente infinitesimo, dunque la serie è a segno alterno, monotona in valore assoluto e infinitesima e quindi converge per il criterio di Leibniz. La serie dei valori assoluti non può convergere perché ha il termine generale che è infinitesimo di ordine 1 rispetto a $1/n$, in quanto prodotto di

$$\frac{n}{n^2+1} \quad \text{e} \quad 2^{\sin\frac{1}{n}}$$

di cui la prima è infinitesima di ordine 1, mentre la seconda ha limite 1.

È interessante osservare che la funzione $(*)$, se prolungata per continuità ponendo $f(0) = 0$, fornisce un esempio di funzione derivabile in tutto il suo dominio, con derivata positiva (precisamente 1) nell'origine e quindi crescente localmente nell'origine, ma non crescente in nessun intorno dell'origine. Inoltre la derivata prima non è limitata in un intorno dell'origine.

La figura seguente ne illustra un grafico sommario.



□

Esercizio 13.13. *Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2 \ln x + 2}{\ln^2 x - 1} \right)^n ?$$

Risoluzione. Si tratta di una serie geometrica, che risulterà convergente se la ragione è, in modulo, minore di 1. Dovremo quindi risolvere la disequazione

$$\left| \frac{2 \ln x + 2}{\ln^2 x - 1} \right| < 1 .$$

Osserviamo intanto che dovrà essere $x \in]0, \mathrm{e}[\cup]\mathrm{e}, +\infty[$. Dopodiché abbiamo

$$\left| \frac{2 \ln x + 2}{\ln^2 x - 1} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{2}{\ln x - 1} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{2}{\ln x - 1} < 1 .$$

La risoluzione delle due disequazioni è immediata è porge

$$x \in \left] 0, \mathrm{e}^{-1} \right[\cup \left] \mathrm{e}^3, +\infty \right[.$$

□

Esercizio 13.14.

1. *Trovare lo sviluppo di Taylor-Peano in* 0*, fino al quarto ordine, di*
$$\sqrt{1-x}$$
e dedurne quello di
$$\sqrt{1-x^3}$$
almeno fino al sesto ordine.
2. *Trovare lo sviluppo di Taylor-Peano in* 0*, fino al quarto ordine, di*
$$(1+x)^x\,,$$
utilizzando gli sviluppi delle funzioni elementari.
3. *Servendosi dei risultati ottenuti nei due punti precedenti calcolare il seguente limite:*
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-\sqrt{1-x^3}-x^2}{\sin^2(x^2)}\,.$$

Risoluzione. Calcoliamo le derivate fino al quarto ordine di $f(x)=\sqrt{1-x}$, valutandole nel punto 0.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{1-x} & f(0)&=1\\
f'(x)&=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} & f'(0)&=-\frac{1}{2}\\
f''(x)&=-\frac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}} & f''(0)&=-\frac{1}{4}\\
f'''(x)&=-\frac{3}{8\sqrt{(1-x)^5}} & f'''(0)&=-\frac{3}{8}\\
f^{iv}(x)&=-\frac{15}{16\sqrt{(1-x)^7}} & f^{iv}(0)&=-\frac{15}{16}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x}&=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}\frac{x^3}{6}-\frac{15}{16}\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{24}\omega_1(x)=\\
&=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{124}+\frac{x^4}{24}\omega_1(x)
\end{aligned}$$

Ne segue
$$\sqrt{1-x^3}=1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^6}{8}+\frac{x^6}{6!}\omega_2(x)\,.$$

Si noti che abbiamo scritto lo sviluppo di Taylor-Peano di una funzione, relativo al punto 0, nella forma

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+\frac{\omega(x-x_0)}{n!}x^n\,,$$

ma avremmo potuto tranquillamente scrivere anche

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+\omega_1(x-x_0)\,x^n\,,$$

in quanto l'unica cosa che ci interessa è il fatto che ω sia infinitesima e le due scritture del resto differiscono solo per un fattore costante che non influisce sul fatto che ω sia infinitesima. Lo sviluppo precedente avrebbe anche potuto essere scritto come segue

$$\sqrt{1-x^3} = 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + x^6\omega_2(x)\,,$$

senza cambiamenti di sostanza.

Per quanto riguarda il secondo quesito, osserviamo che

$$(1+x)^x = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\,.$$

Allora, tenendo anche conto di quanto appena osservato,

$$x\ln(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\,\omega_3(x)\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + x^4\,\omega_3(x)\,.$$

Ragionando come già fatto altre volte (vedi ad esempio l'esercizio 13.7), troviamo poi facilmente che

$$\mathrm{e}^{x\ln(1+x)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + x^4\omega_4(x)\,.$$

Passiamo al calcolo del limite, osservando preventivamente che si può scrivere quanto segue.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x - \sqrt{1-x^3} - x^2}{\sin^2(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x - \sqrt{1-x^3} - x^2}{x^4}\,\frac{x^4}{\sin^2(x^2)}\,.$$

Poiché il secondo fattore tende a 1, calcoliamo solo il limite del primo, utilizzando gli sviluppi appena ottenuti e "tralasciando" gli infinitesimi di ordine superiore.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x - \sqrt{1-x^3} - x^2}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5x^4}{6} + \dots\right) - \left(1 - \dfrac{x^3}{2} + \dots\right) - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{5x^4}{6}}{x^4} = \frac{5}{6}$$

Concludiamo questo esercizio con qualche ulteriore osservazione.

Lo sviluppo di Taylor della funzione $\sqrt{1-x}$ che abbiamo ricavato sopra, fa parte in realtà di un tipo di sviluppo più generale, precisamente quello di

$$(1+x)^\alpha$$

che non abbiamo trattato nella parte teorica, e che comunque si può trovare in qualunque testo di analisi.

Segnaliamo anche che l'applicazione della regola di l'Hôpital per il calcolo di questo limite porta a lunghi e noiosi calcoli, e quindi è da evitare.

È anche interessante osservare che un qualunque software di calcolo simbolico (per esempio Mathematica) è in grado di calcolare questo limite in una frazione di secondo: lo scopo di un esercizio come questo è quindi soprattutto quello di impratichirsi con il significato e l'uso degli sviluppi di Taylor e del principio di sostituzione degli infinitesimi. □

Esercizio 13.15. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2|x|-3}{x-1}}.$$

Risoluzione. Si tratta di una serie armonica generalizzata, che converge se e solo se l'esponente di $1/n$ è maggiore di 1.

$$\frac{2|x|-3}{x-1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2|x|-x-2}{x-1} > 0\,.$$

Risolviamo l'ultima disequazione distinguendo le due possibilità per il valore assoluto di x.

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x-1}, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{-3x-2}{x-1}, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

La prima disequazione risulta verificata per

$$0 \leq x < 1 \vee x > 2\,;$$

la seconda per

$$-\frac{2}{3} < x < 0\,.$$

Dunque le soluzioni del problema sono date dall'insieme seguente

$$\left]-\frac{2}{3}\,,\,1\right[\cup \left]2,+\infty\right[\,.$$

□

Esercizio 13.16. *Si determinino il dominio (naturale) e gli asintoti obliqui eventuali della funzione*

$$f(x) = |x| + \arccos\frac{1-2x^4}{1+4x^4} - 2\,.$$

Risoluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$: l'argomento dell'arccoseno è banalmente compreso tra -1 e 1. Poiché inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arccos\frac{1-2x^4}{1+4x^4} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\,,$$

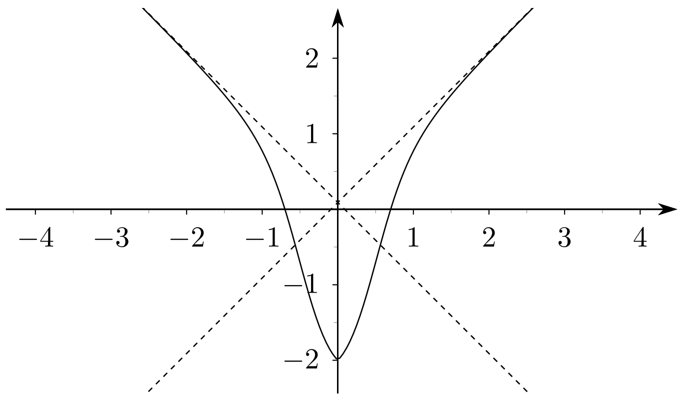
se ne deduce che la funzione data è asintotica a

$$|x| + \frac{2\pi}{3} - 2\,,$$

ovvero che ha come asintoti le due rette

$$y = \pm x + \frac{2\pi}{3} - 2\,.$$

La figura seguente illustra il grafico della funzione proposta e dei suoi due asintoti.



□

Esercizio 13.17. *Calcolare, usando solo la definizione di serie, la somma della serie seguente:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{2}{(n+1)!}\right).$$

Ritrovare lo stesso risultato usando poi opportunamente la serie esponenziale e le proprietà algebriche delle serie.

Risoluzione. Si ha, successivamente,

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{2}{1!}-\frac{2}{2!}\,;\\
s_2 &= \frac{2}{1!}-\frac{2}{2!}+\frac{2}{2!}-\frac{2}{3!}=\frac{2}{1!}-\frac{2}{3!}\,;\\
&\dots\\
s_n &= \frac{2}{2!}-\frac{2}{2!}+\dots+\frac{2}{n!}-\frac{2}{(n+1)!}=\frac{2}{1!}-\frac{2}{(n+1)!}\,.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{2}{(n+1)!}\right)=2\,.$$

Consideriamo ora la serie esponenziale, calcolata in corrispondenza di $x = 1$.

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,,$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}-1\,,$$

mentre

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}-2\,.$$

Ne deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{n!}-\frac{2}{(n+1)!}\right)=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\right)=2\,[(\mathrm{e}-1)-(\mathrm{e}-2)]=2$$

ovvero lo stesso risultato precedentemente ottenuto. □

Esercizio 13.18. *Della funzione*

$$f(x)=\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{-x+1}{2}}+2$$

calcolare $\sup f$, $\inf f$, *e precisare se si tratta oppure no di massimo e minimo.*

Risoluzione. Il dominio della funzione è $[0,+\infty[$. Si ha poi

$$f(0)=2\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=2\ :$$

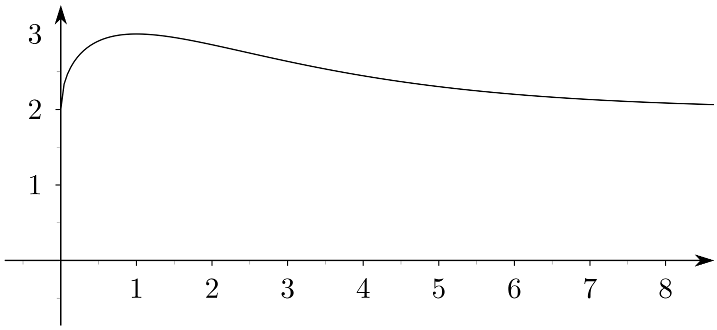
si tenga presente che si può scrivere la funzione, a parte il termine additivo 2, come rapporto di 2 infiniti, e che l'esponenziale è di ordine superiore alle potenze. Tenendo conto che la funzione non può essere minore di 2, si deduce subito che 2 è il minimo assoluto.

Calcoliamo la derivata prima. Si ha, per $x>0$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\frac{-x+1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\frac{-x+1}{2}}(1-x)\,.$$

La derivata è dunque positiva prima di 1 e negativa oltre 1 e, in corrispondenza di 1 la funzione assume il suo massimo assoluto, che vale 3.

La figura qui di seguito illustra il grafico di questa funzione.



□

Esercizio 13.19. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+n^2}{n!}\,.$$

Risoluzione. È la tipica serie a cui conviene, almeno in prima battuta, applicare il criterio del rapporto.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)+(n+1)^2}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n+n^2}=\cdots=0\,.$$

Quindi la serie converge. □

Esercizio 13.20. *Si dica quante soluzioni ha l'equazione*

$$-x^2 = \ln\left|\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\right| ,$$

nell'intervallo

$$\left]-\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Risoluzione. Riducendo allo stesso denominatore all'interno del logaritmo e cambiando di segno, l'equazione si può riscrivere nella forma

$$x^2 = \ln\left|\frac{(1-x)(1+2x)}{3x}\right| .$$

Conviene tracciare un grafico sommario delle funzioni a primo e a secondo membro. A primo membro si ha una parabola, mentre a secondo membro, denotando con f la funzione, possiamo procedere ai calcoli essenziali.

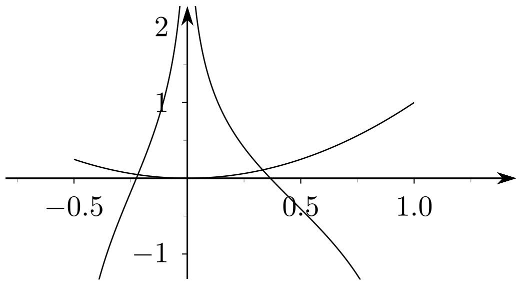
$$\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty .$$

Procediamo ora al calcolo della derivata. Si ha, dopo facili calcoli,

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 1}{(1-x)(1+2x)x} .$$

Se ne deduce che la funzione è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$. Tenendo conto delle proprietà della funzione a primo membro, si può concludere che l'equazione proposta ha due soluzioni, una negativa e una positiva.

La figura seguente illustra il grafico delle funzioni presenti nei due membri.



□

Esercizio 13.21. *Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la successione*

$$a_n = \frac{(n^2 + \ln n)^\lambda}{n^4 + 5\sqrt{n}}$$

è infinitesima.

Risoluzione. Il denominatore della frazione è un infinito, se $\lambda < 0$ il numeratore è infinitesimo, se $\lambda = 0$ il numeratore vale costantemente 1. Dunque se $\lambda \leq 0$ la successione è sicuramente infinitesima. Esaminiamo il caso $\lambda > 0$. Ci troviamo allora con il rapporto di due infiniti. Se ne calcoliamo l'ordine rispetto all'infinitesimo campione n, otteniamo 2λ al numeratore e 4 al denominatore. La successione sarà dunque infinitesima solo se $2\lambda < 4$ ovvero $\lambda < 2$. □

Esercizio 13.22. *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n + 5\ln n + 7}{2^n - n^3 + \sqrt{n}}\,.$$

Risoluzione.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n + 5\ln n + 7}{2^n - n^3 + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{2^n} = \cdots = +\infty\,. \qquad \square$$

Esercizio 13.23. *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\operatorname{arctg}(\sin x) - \operatorname{arctg}(x^3)}{x \operatorname{arctg}(1+\sin x)}\,.$$

Risoluzione. Occupiamoci dell'argomento della funzione logaritmo. Il fattore $\operatorname{arctg}(1+\sin x)$ tende a $\pi/4$ quindi non crea alcun problema nel calcolo. Il numeratore è la somma di due infinitesimi, di ordine rispettivamente 1 e 3 rispetto a x. Potremo trascurare quello di ordine 3 e otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x}\,\frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} \ln \frac{\operatorname{arctg}(\sin x) - \operatorname{arctg}(x^3)}{x \operatorname{arctg}(1+\sin x)} = \ln\frac{4}{\pi}\,.$$

$\square$

Esercizio 13.24. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{|x|+1}}\,.$$

Si determinino $\inf(f)$, $\sup(f)$, *gli eventuali punti di non derivabilità e gli eventuali punti di flesso.*

Risoluzione. La funzione è pari. Basta considerarla per gli $x \geq 0$. Si ha quanto segue.

- $f(0) = e\,.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$
- $\displaystyle f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x+1}}}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}\,.$
- $\displaystyle f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x+1}}}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}}\left(\sqrt[3]{x+1} - 2\right).$

Se ne deduce subito che la funzione

- ha un minimo nell'origine, di valore e;
- ha estremo superiore $+\infty$;
- non è derivabile nell'origine, dove le due derivate destra e sinistra valgono $\pm e/3$;
- ha flessi nei punti di ascissa ± 7.

$\square$

Esercizio 13.25. *Per i vari valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ calcolare l'ordine dell'infinitesimo per $x \to 0$*

$$3\sin^2 x - 3x^2 + \lambda x^4$$

rispetto all'infinitesimo campione x.

Risoluzione. Gli infinitesimi $3\sin^2 x$ e $3x^2$ sono dello stesso ordine (2), quindi la loro somma ha ordine maggiore o uguale a 2. Calcoliamo quest'ordine. Si può osservare che

$$3\sin^2 x - 3x^2 = 3(\sin x + x)(\sin x - x) \ :$$

si è così ottenuto il prodotto di due infinitesimi di ordine 1 e 3 rispettivamente, per cui l'infinitesimo ha ordine 4 e non sarà possibile trascurare alcunché con il principio di sostituzione degli infinitesimi. Ovviamente se $\lambda = 0$ l'infinitesimo proposto è di ordine 4, se $\lambda \neq 0$ è di ordine maggiore o uguale a 4 e possiamo procedere in vari modi. Applichiamo la formula di Taylor-Peano alla funzione seno e otteniamo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\omega(x)\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned}3(\sin x - x)(\sin x + x) &= 3\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\omega(x)\right)\left(2x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\omega(x)\right) = \\ &= 3\left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36} + \frac{x^6}{60} + x^6\omega_1(x)\right) = -x^4 + \frac{2}{15}x^6 + x^6\omega_2(x)\,.\end{aligned}$$

Questo ci permette di concludere subito che se $\lambda = 1$ l'infinitesimo è di ordine 6, altrimenti è di ordine 4.

Tenendo conto di queste conclusioni possiamo osservare che l'uso "indiscriminato" della regola di l'Hôpital avrebbe richiesto ben 6 derivazioni. $\square$

Esercizio 13.26. *Qual è l'equazione della retta tangente al grafico della funzione*

$$f(x) = x^2 + \operatorname{tg} x + 1$$

nel suo punto $P(0,1)$?

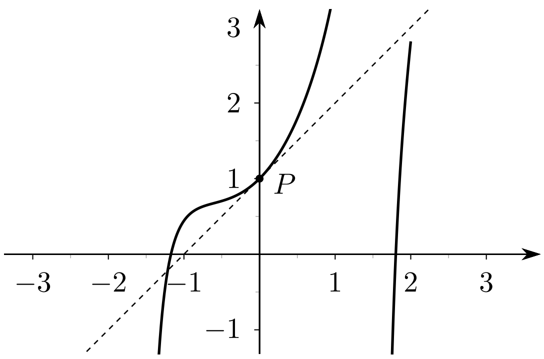
Il grafico di f si trova sopra o sotto tale retta nell'intorno del punto P?

Risoluzione.

$$f'(x) = 2x + 1\operatorname{tg}^2 x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1 \text{ (retta tangente)}\,.$$

$$f''(x) = 2 + 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad f \text{ è localmente convessa}\,.$$

Grafico sommario nei pressi dell'origine.



□

Esercizio 13.27. *Trovare il dominio della funzione*

$$f(x) = \ln\left(x^2 - \sqrt{x^2+1}\right) .$$

Esiste qualche $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty?$$

Ci sono asintoti al grafico di f*? La* f *è ovunque crescente nel dominio?*

Esercizio 13.28. *Distinguendo i casi* $a \leq 0$ *e* $a > 0$ *si calcoli il*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(2\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-x}\right) - x .$$

Esercizio 13.29. *Determinare per quali valori di* a*,* $b \in \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{ax+b}$$

ha un estremo relativo nel punto $A\,(3/2\,,\,27/4)$*; successivamente tracciarne un grafico sommario.*

Esercizio 13.30. *Trovare il dominio naturale della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} .$$

Trovare poi l'ordine dell'infinitesimo $f(x)$*, per* $x \to 0$*, rispetto a* x*.*

Esercizio 13.31. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3+1}+n} .$$

Risoluzione. Si tratta di un esercizio standard che proponiamo per mostrare il tipo di ragionamenti che si possono usare in situazioni come questa.

Una delle strategie più comuni per decidere se una serie (a termini positivi) è convergente o divergente è quella di valutare l'ordine di infinitesimo del suo termine generale rispetto al campione $1/n$, strategia che si basa sostanzialmente sulle proprietà della serie armonica generalizzata. Precisamente sappiamo che una serie (a termini positivi) converge se il suo termine generale è un infinitesimo di ordine $\alpha \geq 1$ o di ordine maggiore o uguale a

$\beta > 1$, non converge se è un infinitesimo di ordine minore o uguale a 1. Attenzione: per la convergenza *non* è sufficiente che l'infinitesimo sia di ordine maggiore di 1; per esempio la serie di termine generale $1/n \ln n$ è infinitesima di ordine maggiore di 1, ma non converge.

Per applicare con profitto questo criterio occorre saper valutare con una certa sicurezza l'ordine di infinitesimo (rispetto al campione standard $1/n$) almeno in situazioni semplici. Per questo ricordiamo, con un linguaggio volutamente semplificato al massimo, alcune proprietà legate agli ordini di infinito o infinitesimo. Il lettore farà bene a dimostrarle per esercizio. Nell'elenco delle proprietà intendiamo che i campioni per infiniti e infinitesimi siano uno il reciproco dell'altro[1].

- Il reciproco di un infinito di ordine α è un infinitesimo di ordine α e, viceversa, il reciproco di un infinitesimo di ordine α è un infinito di ordine α.
- La somma di
  - *due* infiniti di ordine diverso ha l'ordine del maggiore;
  - *due* infinitesimi di ordine diverso ha l'ordine del minore.
- La somma di due infiniti o infinitesimi dello stesso ordine va trattata con estrema cautela. Precisamente:
  - la somma di due infiniti dello stesso ordine può anche non essere infinita e, nel caso sia infinita, ha ordine minore o uguale all'ordine comune;
  - la somma di due infinitesimi dello stesso ordine ha ordine maggiore o uguale all'ordine comune.
- Il prodotto di due infiniti o infinitesimi ha ordine uguale alla somma degli ordini.
- Il quoziente di due infiniti o infinitesimi dello stesso ordine non è infinito né infinitesimo.
- Il quoziente di due infiniti di ordine α e β diversi
  - è un infinito di ordine $\alpha - \beta$ se $\alpha > \beta$;
  - è un infinitesimo di ordine $\beta - \alpha$ se $\alpha < \beta$.
- Il quoziente di due infinitesimi di ordine α e β diversi
  - è un infinitesimo di ordine $\alpha - \beta$ se $\alpha > \beta$;
  - è un infinito di ordine $\beta - \alpha$ se $\alpha < \beta$.
- Il prodotto tra un infinito di ordine α e un infinitesimo di ordine β
  - è un infinito di ordine $\alpha - \beta$ se $\alpha > \beta$;
  - è un infinitesimo di ordine $\beta - \alpha$ se $\alpha < \beta$;
  - nè infinito né infinitesimo se $\alpha = \beta$.

Alcune situazioni frequenti (i campioni sono quelli standard già citati).

- e^n è un infinito di ordine maggiore di α, per ogni α, e quindi e^{-n} è un infinitesimo di ordine maggiore di α, per ogni α.
- $\ln n$ è un infinito di ordine minore di α, per ogni α, e quindi $1/\ln n$ è un infinitesimo di minore di α, per ogni α.
- $\sin(1/n)$, $\mathrm{tg}(1/n)$, $\mathrm{arctg}(1/n)$ sono infinitesimi di ordine 1.
- Con la sostituzione si $1/n$ al posto di x, l'uso della formula di Taylor-Peano, di punto iniziale 0, aiuta a valutare l'ordine di infinitesimo in alcuni casi comuni. Per esempio, essendo

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + x^3 \omega x \,,$$

[1] Nel caso delle serie, a cui siamo qui interessati, n per gli infiniti e $1/n$ per gli infinitesimi.

si deduce che $\sin x - x$ è infinitesima di ordine 3 (per $x \to 0$ e rispetto al campione standard x). Ne segue che

$$\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$

è infinitesima di ordine 3 e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

è una serie, a termini tutti negativi, convergente.

Ritornando all'esercizio proposto, si può ora concludere facilmente che il termine generale della serie è un rapporto di due infiniti, di ordine $1/2$ e $3/2$, quindi è un infinitesimo di ordine 1, per cui non converge. □

Esercizio 13.32. *Sapendo che*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}\,.$$

Risoluzione. Si può decomporre il termine generale della serie in fratti semplici:

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2}\,.$$

Si ha poi

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{(n+1)^2} = \frac{An^2 + 2An + A + Bn^2 + Bn + Cn}{n(n+1)^2}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}.$$

Quindi

$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

Calcoliamo le somme parziali:

$$\begin{aligned}
&s_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\\
&s_2 = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)\\
&s_3 = \cdots = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right)\\
&\quad \dots\\
&s_n = \cdots = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\lim_n s_n = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}\,.$$

□

Esercizio 13.33. *Data la funzione*

$$f_a(x) = \sqrt{x^2 + ax + 1} + x\,,$$

si determini $a \in \mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione abbia un asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, passante per il punto $P(1,1)$. Si dica poi per quali a la funzione risulta convessa. Per i valori di a per cui la funzione non risulta convessa, che cosa si può dire riguardo alla convessità?

Risoluzione. La funzione ha, banalmente, limite $+\infty$ a $+\infty$. Dopichè:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2\,,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{2}\,.$$

La funzione ha dunque, per ogni a, per asintoto la retta

$$y = 2x + \frac{a}{2}\,,$$

e l'asintoto passerà per il punto $(1,1)$ se $a = -2$.

Per rispondere alla seconda parte cominciamo a calcolare la derivata seconda della funzione, nei punti in cui ciò e possibile (cioè dove il radicando della radice quadrata non si annulla).

$$f'_a(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax + 1}} + 1\,, \quad f''_a(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2 + ax + 1})^2} \frac{4 - a^2}{2\sqrt{x^2 + ax + 1}}\,.$$

Se ne deduce che la derivata seconda è strettamente positiva se $-2 < a < 2$ e, per questi valori di a la funzione ha come dominio $\mathbb{R}$, che è un intervallo, ed è sempre derivabile. Se $a = \pm 2$ la funzione si semplifica, rispettivamente, in

$$f_2(x) = |x + 1| + x = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq -1 \\ -1, & \text{se } x < -1 \end{cases}\,,$$

$$f_{-2}(x) = |x - 1| + x = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}\,.$$

Si tratta in entrambi i casi di funzioni convesse, prive di derivate in corrispondenza di -1 e 1 rispettivamente: il grafico è sempre costituito da due semirette con origine nel punto di ascissa -1 e 1 rispettivamente.

Per i valori di a esterni all'intervallo $[-2, 2]$ la derivata seconda (dove esiste) risulta negativa e inoltre, dette $x_1 < x_2$ le radici (che risultano distinte) del polinomio $x^2 + ax + 1$, la funzione ha come dominio

$$]-\infty\,, x_1[\cup]x_2\,, +\infty[\,,$$

e quindi risulta concava in ciascuno dei due sottointervalli del dominio. □

Esercizio 13.34. *Data la funzione*

$$f_{a,b}(x) = 2 \operatorname{arctg} x - ax^2 + bx + 1\,,$$

si determini il polinomio di Taylor del 3° *ordine relativo a* $f_{a,b}$*, di punto iniziale* 0*. Detto* $P_{a,b}$ *tale polinomio si determini, se possibile, la coppia* (a,b) *in modo che* $P_{a,b}$ *abbia* 1 *come zero doppio.*

Risoluzione. Si potrebbe procedere con le derivate successive di della funzione f; possiamo però anche usare il polinomio già noto relativo alla funzione $\operatorname{arctg}(x)$.

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + x^3\omega(x)\,, \quad \Rightarrow 2\operatorname{arctg}(x) = 2x - \frac{2x^3}{3} + x^3\omega_1(x)\,.$$

Da qui si deduce che il polinomio richiesto per la funzione $f_{a,b}$ è il seguente:

$$P_{a,b}(x) = 1 + (2+b)x - ax^2 - \frac{2x^3}{3}\,.$$

Affinchè questo polinomio abbia 1 come radice doppia deve essere $P_{a,b}(1) = P'_{a,b}(1) = 0$. Si ha

$$P'_{a,b}(x) = 2 + b - 2ax - 2x^2\,.$$

Dunque

$$P_{a,b}(1) = 1 + (2+b) - a - \frac{2}{3} \quad P'_{a,b}(1) = 2 + b - 2a - 2\,,$$

da cui

$$\begin{cases} 1 + (2+b) - a - \dfrac{2}{3} = 0 \\ 2 + b - 2a - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a,b) = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)\,.$$

□

Esercizio 13.35. *Dimostrare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)!}$$

è convergente e successivamente calcolarne la somma confrontandola opportunamente con la serie esponenziale.

Risoluzione. La convergenza segue subito dal criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mathrm{e}^n}{n!}\,\frac{(n-1)!}{\mathrm{e}^{n-1}} = \frac{\mathrm{e}}{n} \to 0\,.$$

La serie esponenziale è:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

La serie proposta nel problema è:

$$1 + \frac{e}{1!} + \frac{e^2}{2!} + \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} + \dots$$

Ne segue facilmente che si ha
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}\,.$$
□

Esercizio 13.36. *Calcolare il*
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\cos x}{1+x}\right)^{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}\,.$$

Risoluzione. Si ha
$$\left(\frac{2-\cos x}{1+x}\right)^{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \exp\left(\frac{\ln\dfrac{2-\cos x}{1+x}}{\operatorname{tg} x}\right) = \exp\left(\frac{\ln(2-\cos x)}{\operatorname{tg} x} - \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}\right)\,.$$

Calcoliamo il limite dei due addendi dell'esponente (argomento di exp).
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x}\,\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 0\,,$$
perché
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2-\cos x} = 0\,.$$
Si poteva anche fare quest'ultimo limite solo con i limiti notevoli:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(1-\cos x))}{1-\cos x}\,\frac{1-\cos x}{x^2}\,x = 1\times\frac{1}{2}\times 0 = 0\,.$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\,\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1\times 1 = 1\,.$$
Si conclude che il limite proposto vale
$$\frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$
□

Esercizio 13.37. *Studiare, al variare di $k\in\mathbb{R}$, il carattere della serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[3]{n}+n^k\right)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\,.$$

Risoluzione. Cominciamo con l'osservare che la serie è a termini positivi e che
$$1-\cos\frac{1}{n}$$
è un infinitesimo di ordine 2[2], mentre $\sqrt[3]{n}$ è un infinito di ordine $1/3$. Il termine n^k è:

[2] Come più volte ricordato, se non si precisa il campione di infinitesimi, si intende che esso sia quello "naturale", in questo caso $1/n$.

– un infinitesimo, se $k < 0$;
– vale 1 se $k = 0$;
– un infinito di ordine k, se $k > 0$.

Si può concludere come segue.

– Se $k \leq 1/3$, il fattore $\sqrt[3]{n} + n^k$ è un infinito di ordine $1/3$ e dunque il termine generale è un infinitesimo di ordine $2 - 1/3 = 5/3$ e la serie converge.
– Se $1/3 < k < 2$, il fattore $\sqrt[3]{n} + n^k$ è un infinito di ordine k e dunque il termine generale è un infinitesimo di ordine $2 - k$. Pertanto la serie converge se $2 - k > 1$, ovvero $k < 1$, diverge se $2 - k \leq 1$, ovvero $k \geq 1$.
– Se $k \geq 2$ il termine generale non è infinitesimo, quindi la serie diverge.

□

Esercizio 13.38. *Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \right) .$$

Esercizio 13.39. *Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^k + \sqrt{n} \right) \left(\exp\left(\frac{1}{n^2} \right) - 1 \right) .$$

Esercizio 13.40. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases} ,$$

dimostrare che f è derivabile in 0 *e calcolare* $f'(0)$.

Risoluzione. Intanto la funzione è continua (il limite coinvolto è un limite notevole). Poi si può aplicare la definizione di derivata:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1 - \cos x}{x^2} - \dfrac{1}{2}}{x} = \cdots = 0 \,,$$

risultato che si può ottenere, per esempio, con la regola di l'Hôpital, o con gli sviluppi di Taylor.

Vista la continuità della funzione si sarebbe anche potuto procedere con il teorema sul limite della derivata, prestando però attenzione al fatto che quel teorema fornisce solo una condizione sufficiente: se il limite della derivata esiste finito, allora la funzione è derivabile e la derivata coincide con il limite della derivata, altrimenti il teorema non funziona. □

Esercizio 13.41. *Usando opportunamente la serie geometrica e la sua derivata, calcolare, per $|x| < 1$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n .$$

Risoluzione. La serie geometrica, convergente per $|x| < 1$, è:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

La sua serie derivata è quindi (con lo stesso raggio di convergenza):

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Per la serie proposta dal problema si ha dunque quanto segue:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

□

Esercizio 13.42. *Detta $f(x)$ la somma della serie geometrica ($|x| < 1$)*

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

si trovi lo sviluppo in serie di $f'(x) + xf''(x)$ e si usi questo sviluppo per trovare la somma della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

Risoluzione. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1};$$

e

$$xf''(x) = x\,\frac{2}{(1-x)^3} = x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = f'(x) + xf''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1} = \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n^2x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}.\end{aligned}$$

A questo punto il calcolo della somma della serie numerica proposta dal testo è immediata, in quanto corrisponde allo sviluppo che abbiamo appena calcolato, valutato per $x = 1/2$ (valore che è interno all'intervallo di convergenza). Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2\,\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 12.$$

□

Esercizio 13.43. *Se $z = x + \mathrm{i}y$ è un numero complesso, risolvere l'equazione*

$$z^2 + (1 + 2\mathrm{i})z + \mathrm{i} + y = 0\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$x^2 + 2x\mathrm{i}y - y^2 + x + \mathrm{i}y + 2\mathrm{i}x - 2y + i - y = 0\,,$$

da cui

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x - y = 0 \\ 2xy + y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y + 1) = 0 \\ 2xy + y + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 - \mathrm{i} \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \\ z_3 = -\mathrm{i} \end{cases}$$

□

Esercizio 13.44. *Verificare che la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} + |\sin n|}{n^4 + n}$$

è convergente.

Esercizio 13.45. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,.$$

Esercizio 13.46. *Sviluppare con la formula di Taylor, con centro in 0 e fino al terzo ordine, la funzione*

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\,.$$

Utilizzare lo sviluppo ottenuto per calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x} - \mathrm{e}}{x \sin x}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^3\omega(t)\,,$$

da cui

$$\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \ln\left[1 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right] =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^3 + \ldots\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \ldots\right) + \cdots = x - \frac{x^3}{6} + x^3\omega_1(x)\,.$$

Si ha poi

$$
\begin{aligned}
\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^{1/x} - \mathrm{e} &= \exp\left(\frac{\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x}\right) - \mathrm{e} = \\
&= \mathrm{e}\left(\exp\left(\frac{\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x} - 1\right) - 1\right) = \\
&= \mathrm{e}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{6} + x^2\omega_1(x)\right) - 1\right).
\end{aligned}
$$

Ne segue che il limite richiesto si può calcolare come segue.

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x} - \mathrm{e}}{x\sin x} =
$$

$$
\lim_{x\to 0} \mathrm{e}\,\frac{\left(\exp\left(-\dfrac{x^2}{6}+x^2\omega_1(x)\right)-1\right)}{-\dfrac{x^2}{6}+x^2\omega_1(x)}\;\frac{-\dfrac{x^2}{6}+x^2\omega_1(x)}{x^2}\;\frac{x}{\sin x} = \mathrm{e}\times 1\times\left(-\frac{1}{6}\right)\times 1 = -\frac{\mathrm{e}}{6}
$$

□

Esercizio 13.47. *Calcolare l'estremo superiore della funzione*

$$
f(x) = \frac{x+2}{x+4}\cos^4 x\,,
$$

nell'intervallo $[0,+\infty[$.

Risoluzione. Si può osservare che nell'intervallo $[0,+\infty[$ la funzione

$$
g(x) = \frac{x+2}{x+4}
$$

è sempre positiva e tende, crescendo, a 1. La funzione $h(x) = \cos^4 x$ è ovviamente compresa tra 0 e 1 e dunque anche la funzione f è compresa tra 0 e 1. Inoltre la restrizione di f ai punti dove h vale 1 (cioè dove il coseno vale 1 o -1) coincide con la funzione g ristretta allo stesso insieme. Questo basta per concludere che l'estremo superiore della funzione richiesta è 1 (che non è massimo assoluto). □

Esercizio 13.48. *Calcolare la somma della serie*

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{2n+4} - 2\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n}\right).
$$

Risoluzione. Scriviamo per esteso la somma s_n (ridotta n-esima), incolonnando i termini.

$$
\begin{array}{lccc}
s_n = & \sqrt{6} & \boxed{-2\sqrt{4}} & +\boxed{\sqrt{2}} \\
 & +\sqrt{8} & -2\sqrt{6} & +\boxed{\sqrt{4}} \\
 & +\sqrt{10} & -2\sqrt{8} & +\sqrt{6} \\
 & +\sqrt{12} & -2\sqrt{10} & +\sqrt{8} \\
 & \dots & & \\
 & +\sqrt{2n-2} & -2\sqrt{2n-4} & +\sqrt{2n-6} \\
 & +\sqrt{2n} & -2\sqrt{2n-2} & +\sqrt{2n-4} \\
 & \boxed{+\sqrt{2n+2}} & -2\sqrt{2n} & +\sqrt{2n-2} \\
 & \boxed{+\sqrt{2n+4}} & \boxed{-2\sqrt{2n+2}} & +\sqrt{2n}
\end{array}
$$

Si può constatare facilmente che "sopravvivono" solo i termini riquadrati, da cui si ottiene

$$s_n = \sqrt{2} - \sqrt{4} + \sqrt{2n+4} - \sqrt{2n+2} \to \sqrt{2} - 2\,,$$

che è la somma richiesta. □

Esercizio 13.49. *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right) .$$

Esercizio 13.50. *Applicare le formule dei radicali doppi per determinare in quale intervallo di* $\mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x) = \sqrt{3x + \sqrt{6x-1}} + \sqrt{3x - \sqrt{6x-1}}$$

è costante.

Esercizio 13.51. *Calcolare*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-n} .$$

Risoluzione. Si tratta di una serie geometrica di ragione $-1/\mathrm{e}$. □

Esercizio 13.52. *Determinare il raggio R di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Discutere la convergenza della serie per $x = \pm R$. Detta f la somma della serie di potenze, calcolare, in $]-R, R[$, $f'(x)$ e dedurne successivamente il valore di f sempre in $]-R, R[$.

Risoluzione. Si può applicare il criterio del rapporto.

$$\lim_n = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\,\frac{2n+1}{x^{2n+1}} = \cdots = x^2\,.$$

La serie converge allora se $x^2 < 1$, ovvero $-1 < x < 1$. Il raggio di convergenza è 1. La serie converge poi anche in ± 1 per il criterio di Leibniz sulle serie a segno alterno.

Calcoliamo ora la derivata, utilizzando il teorema di derivazione per serie, in $]-1,1[$ (attenzione il teorema è applicabile solo all'interno dell'intervallo di convergenza e per questo la richiesta si limita all'intervallo aperto). Si ha

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Se ne deduce, per il teorema di integrazione per serie, che

$$f(x) = \operatorname{arctg} x\,.$$

□

Esercizio 13.53. *Utilizzando opportunamente gli sviluppi di Taylor di punto iniziale* 0 *trovare l'ordine del seguente infinitesimo, per* $x \to 0$

$$\mathrm{e}^x + a\sin x - 1\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando anche che lo stesso infinitesimo ha segno costante in un opportuno intorno di 0. *Utilizzare il risultato ottenuto per determinare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{1/n} + a\sin\frac{1}{n} - 1\right)\,, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + a\sin x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + x^2\omega(x) + ax - \frac{ax^3}{6} + ax^3\omega_1(x) = \\ &= (1+a)x + \frac{x^2}{2} + x^2\omega_2(x)\,. \end{aligned}$$

Da qui si deduce che se $a \neq -1$ l'infinitesimo è di ordine 1 ed è positivo o negativo in un opportuno intorno di 0 (il termine $(1+a)x$ "predomina" sugli altri), se invece $a = -1$ l'infinitesimo è di ordine 2.

Per quanto riguarda la serie si può concludere che essa diverge se $a \neq -1$, converge se $a = -1$. □

Esercizio 13.54. *Calcolare le radici cubiche del numero complesso*

$$z = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^{-3}$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Risoluzione. Si ha

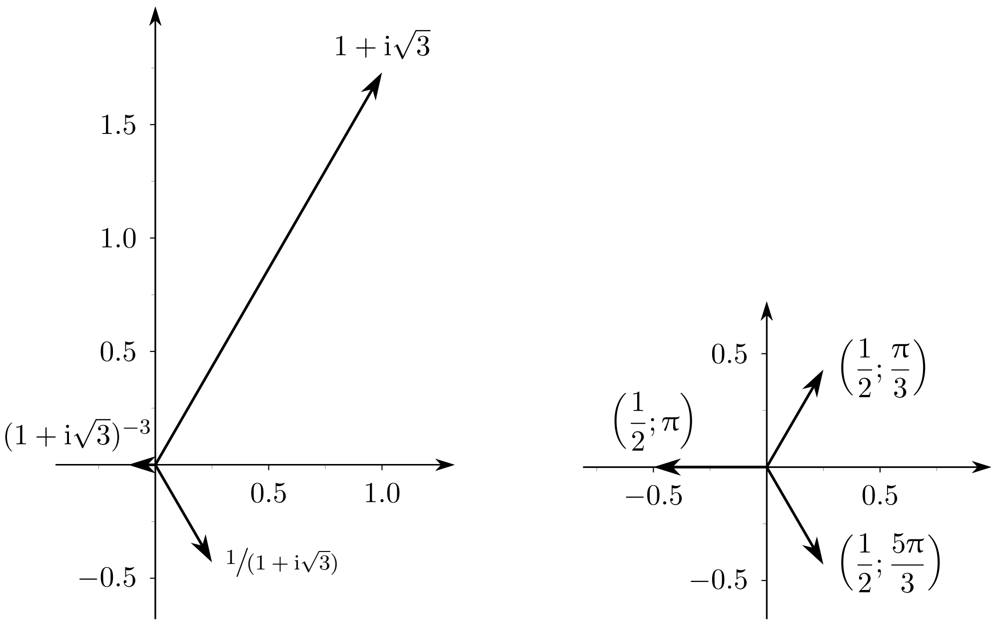
$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \left(2;\frac{\pi}{3}\right)\,,$$

da cui

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{-3} = \left(\frac{1}{8};-\pi\right) = \left(\frac{1}{8};\pi\right)\,.$$

Le radici terze richieste sono allora le seguenti.

$$\left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}};\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \,\middle|\, k=0,\,1,\,2 \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{1}{2};\pi\right),\left(\frac{1}{2};\frac{5\pi}{3}\right) \right\}\,.$$



Si presti attenzione al fatto che mentre nei reali

$$\sqrt[3]{x^{-3}} = x^{-1}\,,$$

la cosa non è vera nei complessi, in quanto le radici cubiche di un complesso sono sempre 3, tra di loro distinte, qualunque sia il complesso. È naturalmente vero, come mostra anche la soluzione dell'esercizio proposto, che *una* delle radici cubiche di z^{-3} è z^{-1}. Sfruttando poi le note proprietà delle radici di un complesso si sarebbero potute trovare immediatamente le altre due radici semplicemente ruotando z^{-1} di $2\pi/3$ e poi ancora di $2\pi/3$, come risulta del resto evidente dalla soluzione trovata per via diretta. È, tra l'altro, anche per questo che, nei complessi, non è conveniente usare per le radici lo stesso simbolo usato nei reali, in quanto questo può portare a confusione[3]. □

Esercizio 13.55. *Utilizzare gli sviluppi di Taylor per valutare l'ordine dell'infinitesimo*

$$f(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$$

[3]Naturalmente non tutti sono d'accordo su questo: prestare la massima attenzione nella lettura dei testi.

per $x \to 0$ e per determinarne segno in un opportuno intorno di zero. Utilizzare il risultato ottenuto per discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{n^a} - \operatorname{tg} \frac{1}{n^a} \right), \qquad a \in \mathbb{R},\, a > 0.$$

Esercizio 13.56. *Tenendo presente la serie esponenziale, calcolare*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}.$$

Risoluzione. Basta osservare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}.$$

□

Esercizio 13.57. *Data la funzione*

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^7 + 4x^3 + x + 6,$$

dimostrare che è invertibile e, detta g l'inversa, calcolare $g'(0)$. Calcolare poi

$$\lim_{y \to +\infty} g\big(\mathrm{e}^{-y}\big).$$

Risoluzione. Per la prima parte osservare che $f(-1) = \dots$. Per la seconda parte osservare che le ipotesi di regolarità consentono di scrivere

$$\lim_{y \to +\infty} g\big(\mathrm{e}^{-y}\big) = g(0) = \dots$$

□

Esercizio 13.58. *Dire per quali valori dei parametri reali a, b la funzione f definita da*

$$f(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^x, & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{bx-1}}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 13.59. *Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme dei complessi z tali che*

$$1 \le |z + \mathrm{i} + 1| \le \sqrt{2}.$$

Risoluzione. Si può osservare che $|z + \mathrm{i} + 1|$ rappresenta la distanza tra i numeri z e $-1 - \mathrm{i}$. L'insieme in questione è dunque costituito da tutti i punti del piano di Gauss che hanno distanza da $(-1, -1)$ compresa tra 1 e $\sqrt{2}$, ovvero dalla corona circolare di centro $(-1, -1)$ e raggi interno 1 ed esterno $\sqrt{2}$.

Volendo eseguire tutti i calcoli con la formula algebrica si può porre $z = x + iy$ e osservare che

$$|z + \mathrm{i} + 1| = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2},$$

ottenendo naturalmente lo stesso risultato di prima. □

Esercizio 13.60. *Calcolare le radici quarte di*

$$z = (\mathrm{i} - 1)^{12}.$$

Risoluzione. Si può calcolare prima la potenza dodicesima di $\mathrm{i} - 1$ e poi le quattro radici quarte, oppure calcolare

$$z_1 = (\mathrm{i} - 1)^3,$$

che è *una* delle radici quarte cercate, e poi tenere conto che le quattro radici quarte sono i vertici del quadrato inscritto nella circonferenza di centro l'origine e passante per z_1, quadrato che ha un vertice in z_1, ovvero che le altre tre radici quarte si ottengono ruotando z_1 di $\pi/2$, π, $3\pi/2$. □

Esercizio 13.61. *Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x) = x^{1-x}x^{1+x}.$$

Risoluzione. Dopo averne trovato il dominio ($x \geq 0$), si può scrivere la funzione come... □

Esercizio 13.62. *Trovare, se esistono, i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che le due funzioni*

$$f(x) = \lambda \ln x \quad e \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$$

siano tangenti in un punto.

Risoluzione. Affinche le due funzioni siano tangenti in un punto, di cui indichiamo con c l'ascissa, occorre che

$$\begin{cases} f(c) = g(c) \\ f'(c) = g'(c) \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{cases} \lambda \ln c = \sqrt[5]{c} \\ \dfrac{\lambda}{c} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{c^4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{c}{5\sqrt[5]{c^4}} = \dfrac{\sqrt[5]{c}}{5} \\ \dfrac{\sqrt[5]{c}}{5} \ln c = \sqrt[5]{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\mathrm{e}}{5} \\ c = \mathrm{e}^5 \end{cases}.$$

□

Esercizio 13.63. *Risolvere, in $\mathbb{C}$, l'equazione*

$$|z|^2 - z^2 - 2\mathrm{i}z = 0,$$

usando la forma algebrica dei complessi.

Risoluzione. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, si trova

$$x^2 + y^2 - (x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 2\mathrm{i}x + 2y) = 0.$$

Riordinando ed uguagliando a zero la parte reale e quella immaginaria si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite, con le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ (cioè } x \text{ qualunque} \\ y = -1 \end{cases}.$$

□

Esercizio 13.64. *Verificare che per ogni numero complesso z si ha $|z|^4 = z^2\bar{z}^2$. Utilizzare questo risultato per risolvere l'equazione*

$$(1-\mathrm{i})z^5\,|z|^4 - \mathrm{i}\bar{z}^2 = 0\,,$$

dove è richiesta la forma trigonometrica delle soluzioni.

Risoluzione. Si ha intanto, raccogliendo, $\bar{z}^2 = 0$, da cui $z = 0$ e successivamente

$$(1-\mathrm{i})z^7 - \mathrm{i} = 0\,.$$

Basterà dunque trovare le 7 radici settime di... □

Esercizio 13.65. *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) = x(1 + \ln^2|x|)\,,$$

determinando in particolare gli intervalli ove f è concava e quelli ove è convessa. Dire se la funzione può essere prolungata per continuità in 0 *e se la funzione così ottenuta è derivabile in* 0.

Risoluzione. Si tratta di una funzione dispari. Le derivate prima e seconda in $\mathbb{R}^+$ sono

$$f'(x) = \ln^2(x) + 2\ln(x) + 1\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{x}\,(\ln x + 1)\,.$$

La funzione è prolungabile per continuità in 0, ma la funzione prolungata non è derivabile in 0. □

Esercizio 13.66. *Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\mathrm{e}^x - \lambda x)}{\ln(\cos x)}\,.$$

Risoluzione. Poiché la derivata della funzione logaritmo è particolarmente semplice, conviene applicare, almeno una volta la regola di l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \lambda}{\mathrm{e}^x - \lambda x}\,\frac{-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \lambda}{\mathrm{e}^x - \lambda x}\,\frac{1}{x}\,\frac{x}{\sin x}\,(-\cos x) = \dots$$

Il limite vale -1 se $\lambda = 1$, altrimenti... □

Esercizio 13.67. *Calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2\mathrm{e}^{x^2} - \lambda x^2) - \ln 2}{x \operatorname{tg} x}\,.$$

Risoluzione. Trasformare preventivamente in

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2\mathrm{e}^{x^2} - \lambda x^2) - \ln 2}{x^2}\,\frac{x}{\operatorname{tg} x}$$

e poi applicare l'Hôpital al primo fattore. □

Esercizio 13.68. *Determinare il carattere della serie*

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log_3(1-\sqrt{x})} \right)^n .$$

Risoluzione. Si tratta di una serie... □

Esercizio 13.69. *Provare che la funzione*

$$g(x) = \frac{\ln x}{2x}$$

è decrescente in $[\mathrm{e}, +\infty]$. *Utilizzare questo risultato per provare che anche la funzione*

$$f(x) = x^{1/(2x)} \sin \frac{1}{x^2}$$

è decrescente nello stesso intervallo.

Risoluzione. La decrescenza di g si prova facilmente calcolando la derivata prima. Successivamente si può vedere la funzione f come il prodotto tra le funzioni

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{\ln x/(2x)} \quad \mathrm{e} \quad f_2(x) = \sin \frac{1}{x^2} ,$$

entrambe decrescenti in $[\mathrm{e}, +\infty]$ perché composte di funzioni una crescente e una decrescente. Sia f_1 che f_2 sono inoltre positive, naturalmente in $[\mathrm{e}, +\infty]$, dal che si deduce subito che anche f è decrescente. □

Esercizio 13.70. *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\ln(1-\sqrt{x})-1} .$$

Se ne determini il dominio e successivamente, pensandola opportunamente come funzione composta, si trovino gli estremi superiore e inferiore, precisando anche se si tratta di massimo o minimo.

Risoluzione. Il dominio è chiaramente $[0, 1[$. Dopodiché la funzione può essere vista come la composta di

$$h(t) = \frac{t}{t-1} , \quad \mathrm{e} \quad g(x) = \ln(1-\sqrt{x}) .$$

La prima è chiaramente decrescente in $[0, 1[$ (si può, per esempio, farne la derivata), la seconda anche, perché composta tra una funzione crescente e una decrescente. Se ne deduce che f, come composta tra due funzioni decrescenti, è crescente. Si ha ora facilmente

$$\inf(f) = \min(f) = 0 , \qquad \sup(f) = 1 .$$

□

Esercizio 13.71. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(1-\cos x) - \sin^2 x}{\mathrm{e}^{x^4} - 1} .$$

Risoluzione. Conviene eseguire la trasformazione

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{e^{x^4}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-\sin^2 x}{x^4}\,\frac{x^4}{e^{x^4}-1}\,,$$

dopodiché si può calcolare il limite del primo fattore con la regola di l'Hôpital[(4)]. Il limite vale $1/4$. □

Esercizio 13.72. *Utilizzando opportunamente la serie geometrica e la sua serie derivata, calcolare lo sviluppo in serie di*

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Successivamente dire per quali x reali converge assolutamente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^n$$

e, per i valori trovati di x, calcolarne la somma.

Risoluzione. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\,,$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per x si ottiene

$$x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

Per la convergenza assoluta della serie proposta basta applicare il criterio del rapporto per concludere che la serie converge assolutamente per $x>1/2$ (si può anche provare che questo è anche l'insieme di convergenza non assoluta). Per questi x la somma si calcola subito sostituendo $(x-2)/(x+1)$ al posto di x nella somma trovata precedentemente. Si ottiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^n=\frac{(x-2)(x+1)}{9}\,.$$

□

Esercizio 13.73. *Risolvere nei complessi l'equazione*

$$z-\frac{4}{\mathrm{i}z}-2=2\mathrm{i}\,.$$

[4] Naturalmente si potevano anche usare gli sviluppi di Taylor, ma in un caso come questo la regola di l'Hôpital non complica troppo la vita.

Esercizio 13.74. *Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$ il*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+a}{x+4}\right)^{\dfrac{x^2-1}{x}} .$$

Risoluzione. Il limite è banalmente 1 se $a = 4$ (non si ha una forma di indecisione). Se $a \neq 4$ tra i vari modi di procedere conviene il seguente:

$$\frac{x+a}{x+4} = \frac{x+4-4+a}{x+4} = 1 + \frac{a-4}{x+4} .$$

Si può poi scrivere

$$\left(\frac{x+a}{x+4}\right)^{\dfrac{x^2-1}{x}} = \left(\left(1+\frac{a-4}{x+4}\right)^{\dfrac{x+4}{a-4}}\right)^{\left(\dfrac{a-4}{x+4}\,\dfrac{x^2-1}{x}\right)} .$$

Il limite proposto vale e^{a-4}. □

Esercizio 13.75. *Fissato $\lambda > 0$, si consideri la funzione*

$$f_\lambda(x) = \lambda \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,.$$

Si dimostri che, per ogni $\lambda > 0$, la funzione è invertibile in un opportuno intorno dell'origine e si indichi con g l'inversa di f_λ ristretta a questo intorno. Constatato poi che $f_\lambda(0) = 1$, si calcoli $g'(1)$.

Risoluzione. la funzione è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ e si ha, nei punti interni dell'intervallo,

$$f_\lambda'(x) = \frac{\lambda - x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Questa derivata è positiva per $x < \lambda$, negativa per $x > \lambda$. Considerato che $\lambda > 0$ e che la funzione è definita in $[-1, 1]$, se ne deduce che la funzione ha derivata positiva in

- $[-1, \lambda[$ se $\lambda < 1$,
- $[-1, 1]$ se $\lambda \geq 1$.

Dunque la funzione è invertibile in un intorno di 0. La regola di derivazione delle funzioni inverse fornisce subito la derivata richiesta:

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\lambda}\,.$$

□

Notazioni utilizzate

Le notazioni utilizzate in questo testo sono quelle di default nel sistema tipografico $\LaTeX\,2_\varepsilon$, notazioni che, nella maggior parte dei casi, concordano con quelle previste dalla normativa ISO $31 - 11$.

La scrittura di un testo contenente molta matematica è sempre un'impresa ardua e che richiede molto tempo e fatica. Anche per questo motivo si è scelto di utilizzare le convenzioni standard previste dal sistema di composizione usato: la creazione e l'utilizzo di simboli speciali richiederebbe molto più tempo per l'inserimento e moltiplicherebbe sicuramente gli errori tipografici inevitabilmente presenti. La natura di questo testo, pensato come un diario delle lezioni, e quindi scritto e diffuso quasi giornalmente, obbliga a fare molte scelte semplificative, tra cui quella sulle notazioni non è l'unica. Il testo per il parallelo corso di Matematica I - 2° modulo, scritto e modificato in molti anni di lavoro, può invece utilizzare al meglio tutte le raffinatezze consentite dal sistema $\LaTeX\,2_\varepsilon$. Le differenze comunque non sono molte ed è in ogni caso agevole il passaggio dall'una all'altra notazione.

Per questioni di completezza segnaleremo quando occorre sia le differenze con il citato testo relativo al secondo modulo, sia le convenzioni eventualmente usate da altri autori.

Segnaliamo inoltre che, nella numerazione dei teoremi, definizioni, osservazioni, ecc., abbiamo scelto di usare una numerazione progressiva per capitolo. Altri testi usano invece numerazioni progressive separatamente per i teoremi, le definizioni, ecc. Si tratta naturalmente solo di una questione di gusto personale.

Elenco delle notazioni

$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{\, 0,\, 1,\, 2,\, \dots,\, n,\, \dots \,\}$.
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\, \dots,\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \dots \,\}$.
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 \,\}$.
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi.
$\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$	Numeri naturali, interi, razionali, reali, maggiori di 0.
A, B, $\dots$	Notazione per gli insiemi.
$A \subseteq B$	A è un sottoinsieme di B.
$A \subset B$	A è un sottoinsieme proprio di B.
$B \supseteq A$	B è un soprainsieme di A.

Continua nella pagina seguente

Notazioni - Segue dalla pagina precedente

$B \supset A$	B è un soprainsieme proprio di A.
$A \setminus B$	Differenza tra gli insiemi A e B.
$[a,b]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \,\}$.
$]a,b[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$.
$]a,b]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \,\}$.
$[a,b[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \,\}$.
$[a,+\infty[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge a \,\}$.
$]a,+\infty[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a \,\}$.
$]-\infty,a]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le a \,\}$.
$]-\infty,a[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < a \,\}$.
$f\colon D \to C\,,\ x \mapsto f(x)$	Notazione per le funzioni.
$\exp(x) = \mathrm{e}^x$	Notazione per la funzione esponenziale di base e.
$\ln(x)$	Logaritmo in base e di x.
$\log(x)$	Logaritmo in base 10 di x.

Osservazioni

- Per alcuni autori $\mathbb{N} = \{\, 1,\, 2,\, \dots,\, n,\, \dots \,\}$, cioè l'insieme dei naturali non comprende lo zero.
- L'insieme dei numeri razionali è in realtà l'insieme delle frazioni, come più sopra definito, ma con una opportuna relazione che renda identiche due frazioni equivalenti. Inoltre nulla cambierebbe se si prendessero frazioni in cui anche il denominatore possa essere intero (naturalmente diverso da 0).
- La notazione utilizzata in questi appunti per gli insiemi non è l'unica possibile. Altri usano per esempio lettere maiuscole in grassetto: **A**, **B**, ... e questa scelta ha qualche indubbio vantaggio, in quanto anche i punti dello spazio sono abitualmente indicati con le lettere maiuscole corsive, con possibilità di confusione. In ogni caso tutto dovrebbe essere chiaro dal contesto.
- Molti usano $\subset$ per indicare i sottoinsiemi (propri o no) e $\subsetneq$, o $\subsetneqq$ per indicare i sottoinsiemi propri. Analoga osservazione per i soprainsiemi.
- Per indicare la differenza di due insiemi si può anche usare il simbolo $A - B$.
- Per quanto riguarda la notazione per le funzioni si vedano le osservazioni contenute nella pagina 10.
- Per quanto riguarda le notazioni relative ai logaritmi si vedano le osservazioni nella pagina 86.

Alfabeto greco

Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	α	A	nu (ni)	ν	N
beta	β	B	csi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	ro	ϱ	R
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	ϑ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	I	fi	φ	Φ
cappa	κ	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu (mi)	μ	M	omega	ω	Ω

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph $\aleph$

Indice analitico

approssimante lineare, 141
argomento di un complesso, 189
asintoto obliquo, 120
asintoto orizzontale, 120
asintoto verticale, 119

cambiamento di variabile, 86
cardinalità, 27
centro di un intervallo, 30
classi separate e contigue, 46
codominio, 10
coefficiente della parte immaginaria, 187
complesso coniugato, 187
connettivi logici, 1
continuità uniforme, 90
controimmagine, 12
coppia ordinata, 5
corpo commutativo, 24

definizione di limite, 62
definizioni ricorsive, 20
densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, 26
derivata, 100
derivata infinita, 100
derivate successive, 141
differenza di insiemi, 5
differenza simmetrica di due insiemi, 15
divisione con resto, 20
dominio, 10
dominio naturale, 39

elemento separatore, 24
estremo inferiore, 10
estremo superiore, 10

famiglie di insiemi, 4
forma algebrica, 186
forma esponenziale di un complesso, 196
forma trigonometrica, 189
forme di indecisione, 70
formula di Moivre, 190
formula di Taylor-Lagrange, 148
formula di Taylor-Peano, 145
funzione, 10
funzione analitica, 178
funzione arccoseno, 44
funzione arcseno, 44
funzione arctangente, 44
funzione biiettiva, 12
funzione composta, 13
funzione concava, 149
funzione continua, 73
funzione convessa, 149
funzione coseno, 43
funzione crescente in un punto, 117
funzione decrescente in un punto, 117
funzione derivabile, 100
funzione derivata, 102
funzione di classe C^n, 141
funzione dispari, 41
funzione esponenziale, 85
funzione identità, 14
funzione iniettiva, 12
funzione inversa, 13
funzione localmente convessa, 151
funzione monotona, 42
funzione pari, 41
funzione periodica, 41
funzione seno, 43
funzione signum, 39
funzione suriettiva, 12
funzione tangente, 43
funzioni asintotiche all'infinito, 120
funzioni definite a tratti, 77
funzioni esponenziali, 51
funzioni iperboliche, 109
funzioni logaritmo, 51

funzioni potenza, 50
funzioni reali di variabile reale, 39

grafico, 14
gruppo commutativo, 23

immagine, 10
immagine di una funzione, 11
immagine inversa, 12
infinitesimi simultanei, 129
infinitesimo, 129
infinitesimo campione, 131
infinitesimo infrareale, 138
infinitesimo soprareale, 137
infiniti simultanei, 133
infinito, 133
infinito campione, 135
infinito soprareale, 137
infinito sottoreale, 137
insieme aperto, 32
insieme chiuso, 32
insieme complementare, 5
insieme convesso, 149
insieme delle parti, 3
insieme finito, 28
insieme inferiormente limitato, 9
insieme infinito, 28
insieme limitato, 9
insieme numerabile, 28
insieme quoziente, 8
insieme superiormente limitato, 9
insieme universo, 5
insieme vuoto, 2
insiemi disgiunti, 4
intersezione di insiemi, 4
intervalli, 29
intervallo di convergenza, 175
intorno destro, 31
intorno di $+\infty$, 31
intorno di $-\infty$, 31
intorno di ∞, 61
intorno di un numero, 31
intorno sinistro, 31

limite destro e sinistro, 65
logaritmo naturale, 86

maggiorante, 9
massimo di un insieme, 9
metodo di bisezione, 89
minimo di un insieme, 9
minorante, 9
misura in radianti, 43
modulo nei complessi, 187

numeri irrazionali, 25
numero complesso, 185
numero di Nepero, 85

ordine totale, 9

parte reale, 187
partizione di un insieme, 6
potenza nei natutali, 19
principio di induzione, 20
prodotto cartesiano, 5
prolungamento di una funzione, 13
proprietà dei naturali, 19
proprietà locali, 117
proprietà verificata definitivamente, 157
punti interni a un intervallo, 30
punto di accumulazione, 33
punto di flesso, 151
punto di frontiera, 32
punto di massimo relativo, 117
punto di minimo relativo, 117
punto esterno, 31
punto interno, 31
punto isolato, 33

quantificatori logici, 1

radice n-esima aritmetica, 27
raggio di convergenza, 175
raggio di un intervallo, 30
ragione, 163
rapporto incrementale, 99
relazione binaria, 6
relazione d'ordine, 8
relazione di equivalenza, 7
restrizione di ua funzione, 12

serie, 161
serie a segno alterno, 167
serie armonica, 165
serie armonica generalizzata, 166

serie di funzioni, 173
serie di potenze, 174
serie geometrica, 163
serie resto, 164
sezioni di Dedekind, 25
somma di una serie, 161
sopragrafico, 149
soprainsieme, 3
sottoinsieme, 3
successione, 11
successione convergente, 158
successione delle ridotte, 161
successione divergente, 158
successione in $\mathbb{R}$, 155
successione indeterminata, 158

termine di una serie, 161
termine generale, 155

unione di insiemi, 4
unità immaginaria, 186

valore assoluto, 36