Rette e curve, piani e superfici

Luciano Battaia(*)

1 dicembre 2010

Scopo di questo articolo è solo quello di proporre uno schema riepilogativo che metta in luce le caratteristiche essenziali delle equazioni di rette e curve del piano o dello spazio, e di piani e superfici dello spazio, mostrando come le equazioni di curve e superfici possano essere pensate come opportune generalizzazioni, rispettivamente, di quelle delle rette e dei piani. La presentazione dei relativi risultati in colonne parallele dovrebbe favorire la comprensione delle analogie.

Indice

Introduzione

Prima di affrontare l'analisi schematica di come le equazioni di curve e superfici possano essere pensate come generalizzazioni di quelle di rette e piani, è opportuna una precisazione sul significato di equazione cartesiana e parametrica di un luogo. La faremo con riferimento al caso delle rette del piano, per semplicità.

Se r è una retta in un piano cartesiano Oxy, è ben noto che un punto $P(x, y)$ appartiene alla retta se e solo se le sue coordinate soddisfano un'equazione del tipo

$$ax + by + c = 0\,, \tag{1}$$

con a e b non contemporaneamente nulli. Si può esprimere questo fatto dicendo che l'equazione (1) è l'equazione del *luogo dei punti* appartenenti alla retta r, equazione che è anche detta *equazione cartesiana* della retta.

La stessa retta r può essere rappresentata analiticamente in altri modi. Qui ci interessa la cosiddetta *rappresentazione parametrica*, che consiste nel considerare la retta come immagine (o sostegno) di una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$. La scelta più naturale è quella di considerare la retta stessa come immagine di una funzione del tipo

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t)) = (x_0 + lt, y_0 + mt), \tag{2}$$

*http://www.batmath.it

funzione di solito scritta nella forma

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} ,$$

ove (x_0, y_0) sono le coordinate di un punto qualunque della retta stessa, detto anche talvolta *punto in evidenza*, e (l, m) sono le componenti di un vettore (non nullo) detto *vettore direttore* della retta. Le (3) si chiamano, usualmente, *equazioni parametriche* della retta.

È ovvio che una equazione del tipo $\varrho ax + \varrho by + \varrho c = 0$ rappresenta, per ogni valore non nullo di ϱ, la stessa retta r rappresentata dall'equazione (1), ovvero che una retta individua la sua equazione cartesiana a meno di una costante moltiplicativa non nulla

Per quanto riguarda le equazioni parametriche, la situazione è ancora più complessa: scegliendo un diverso punto in evidenza e un diverso vettore direttore si ottengono ovviamente diverse equazioni parametriche della stessa retta. Per esempio le equazioni

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases} , \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 4t \end{cases} , \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases} ,$$

sono tutte rappresentazioni parametriche della stessa retta avente equazione cartesiana $2x+y-1 = 0$, ovvero le tre funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$

$$f(t) = (t, 1 - 2t), \quad g(t) = (1 + 2t, -1 - 4t), \quad h(t) = (2 - t, -3 + 2t),$$

hanno lo stesso insieme immagine. Si noti che le tre diverse equazioni parametriche che abbiamo considerato hanno i seguenti due pregi:

— le funzioni componenti sono tutte polinomi di primo grado in t (e, come conseguenza, sono funzioni di classe C^∞);

— esse stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra il dominio $\mathbb{R}$ e l'insieme immagine, cioè la retta in esame.

Purtroppo esistono infinite altre possibilità di considerare la stessa retta come immagine di una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, anche di classe C^∞ e mantenendo la corrispondenza biunivoca tra il dominio e la retta. Un esempio è fornito dalle equazioni

$$\text{(5)}\qquad \begin{cases} x = t^3 \\ y = 1 - 2t^3 \end{cases} .$$

Se si rinuncia alla richiesta di biunivocità si possono considerare esempi ancora più complessi, come il seguente:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} x = t\sin(t) \\ y = 1 - 2t\sin(t) \end{cases} .$$

Sostanzialmente possiamo ritenere che, dal punto di vista "geometrico", almeno i casi in cui c'è corrispondenza biunivoca siano equivalenti ai fini della identificazione dei punti della retta. Se immaginiamo però le equazioni parametriche come equazioni orarie del moto di un punto nel piano, ci rendiamo subito conto che equazioni diverse rappresentano moti completamente diversi, moti che hanno in comune solo il fatto che la traiettoria appartiene alla stessa retta (cioè all'immagine della funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$). Nell'esempio appena trattato, le tre coppie di equazioni lineari (4) rappresentano moti che hanno diverso punto di partenza e, soprattutto, diverse velocità (anche se in tutti i tre casi le velocità risultano costanti, cioè le accelerazioni sono nulle); le due coppie di equazioni (5) rappresentano invece un moto con velocità variabile nel tempo (e addirittura con accelerazione variabile nel tempo). Se poi consideriamo la coppia di equazioni (6) esse rappresentano un moto oscillante, sulla retta, con oscillazioni centrate sul punto $(0, 1)$ e aventi ampiezza crescente nel tempo: questo rende anche conto del motivo per cui manca la biunivocità.

Lo stesso tipo di considerazioni si possono ripetere per tutti gli altri luoghi del piano e, con anzi ancora maggiori problemi, per i luoghi dello spazio: la ricerca delle equazioni parametriche di un luogo del piano o dello spazio non produce in genere un risultato univoco, ovvero esistono infiniti modi di *parametrizzare* un luogo. Tuttavia, in molti casi di interesse applicativo esistono delle parametrizzazioni che si possono ritenere, in un certo senso, *naturali*, e che vengono assunte come parametrizzazioni "di default". È per esempio il caso delle rette nel piano e nello spazio e dei piani nello spazio, dove ci si limita sempre a considerare parametrizzazioni espresse con funzioni polinomiali di grado non superiore al primo. In ogni caso non bisogna mai dimenticare che, anche con questo tipo di limitazioni, parametrizzazioni diverse possono avere significati completamente diversi. È per questo che, nel definire una curva o una superficie, non ci limita a considerare solo l'insieme da parametrizzare (il *sostegno*), ma si devono anche considerare le funzioni che realizzano la parametrizzazione.

1 Il caso piano

1.1 Equazioni parametriche

Rette nel piano

Le equazioni parametriche di una retta del piano cartesiano Oxy si possono scrivere nella forma

$$(7)\qquad \begin{cases} x = f_1(t) = x_0 + lt \\ y = f_2(t) = y_0 + mt \end{cases},$$

cioè con funzioni f_1 e f_2 polinomiali di grado non superiore a 1 (ma con almeno una delle due effettivamente di primo grado).

Le funzioni f_1 ed f_2 sono di classe C^1, anzi C^∞, e la condizione che almeno una della due funzioni f_1 e f_2 sia effettivamente di primo grado si traduce nella condizione che il vettore $\vec{v}_r = (l, m)$, le cui componenti si ottengono anche derivando le funzioni f_1 ed f_2, non sia il vettore nullo.

$$(9)\qquad (l, m) = (f_1'(t), f_2'(t)) \neq (0, 0).$$

Curve nel piano

Le equazioni parametriche di una curva del piano cartesiano Oxy si possono scrivere nella forma

$$(8)\qquad \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases},$$

ora con funzioni f_1 e f_2 arbitrarie (purché opportunamente regolari come sarà precisato più avanti), definite in un intervallo di $\mathbb{R}$, di qualunque tipo, anziché su tutto $\mathbb{R}$.

Ora richiediamo come condizione che le funzioni f_1 ed f_2 siano di classe C^1 e che le loro derivate non siano mai contemporaneamente nulle. Esprimeremo questo fatto dicendo che la curva è *regolare*.

$$(10)\qquad (f_1'(t), f_2'(t)) \neq (0, 0).$$

Il vettore[1] $\vec{v}_r = (l, m)$ è un vettore direttore della retta, e naturalmente non dipende da t, cioè dal punto sulla retta; in maniera perfettamente simmetrica il vettore di componenti $(f_1'(t), f_2'(t))$ è un *vettore tangente* alla curva, nel punto $(f_1(t), f_2(t))$: ora ovviamente il vettore tangente potrà

[1] I vettori e i punti di $\mathbb{R}^n$ andrebbero scritti come matrici a una sola colonna, per coerenza di scrittura in particolare con il prodotto righe per colonne tra matrici. Tuttavia, se non ci sarà possibilità di equivoco e se risulterà più comodo, useremo, come è tradizione, la scrittura come matrici a una sola riga, di solito separando le componenti con una virgola.

cambiare da punto a punto. Conoscendo il vettore tangente e il punto sulla curva, è immediato scrivere l'equazione della retta tangente alla curva in quel punto.

Trattando le curve anziché le rette (cioè funzioni di tipo generale, anziché polinomi di grado non superiore a 1) potremo avere bisogno anche di altre precisazioni, inutili nel caso delle rette. Tra queste segnaliamo le due seguenti.

1. Una curva si dice *chiusa* se il dominio delle funzioni è $I = [a, b]$ (cioè un intervallo chiuso e limitato), e le immagini di a e b coincidono.
2. Una curva si dice *semplice* se, a parte l'eventuale coincidenza delle immagini degli estremi dell'intervallo di definizione, la corrispondenza tra i punti di I e i punti della curva è biunivoca.

Naturalmente le funzioni f_1 ed f_2 possono essere di classe C^k, con $k > 1$, nel qual caso diremo che la curva è di classe C^k.

1.2 Equazioni cartesiane

Rette nel piano

L'equazione cartesiana di una retta del piano Oxy si può scrivere nella forma

$$g(x, y) = ax + by + c = 0\,, \tag{11}$$

cioè con un'equazione di primo grado in due incognite.

La funzione di due variabili g è di classe C^1, anzi C^∞, e la condizione che essa sia effettivamente di primo grado si traduce nella condizione che il vettore $\vec{n}_r = (a, b)$, le cui componenti si ottengono anche derivando la funzione g, prima rispetto a x e poi rispetto a y, non sia il vettore nullo.

$$(a, b) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) \neq (0, 0)\,. \tag{13}$$

Curve nel piano

L'equazione cartesiana di una curva del piano Oxy si può scrivere nella forma

$$g(x, y) = 0\,, \tag{12}$$

cioè con un'equazione di tipo qualsiasi in due incognite (la funzione g dovrà però essere opportunamente regolare come precisato più avanti).

Ora richiediamo come condizione che la funzione g sia di classe C^1 e che le sue derivate parziali non siano mai contemporaneamente nulle. Il vettore ottenuto in questo modo si chiama *gradiente* della funzione g e si indica con $\nabla g(x, y)$.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) \neq (0, 0)\,. \tag{14}$$

Il vettore $\vec{n}_r = (a, b)$ è un vettore perpendicolare alla retta, e naturalmente non dipende da (x, y), cioè dal punto sulla retta; in maniera perfettamente simmetrica il vettore $\nabla g(x, y)$ è un *vettore perpendicolare* alla curva, nel punto (x, y): ora ovviamente il vettore perpendicolare potrà cambiare da punto a punto. Conoscendo il vettore perpendicolare e il punto sulla curva, è immediato scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla curva in quel punto.

Segnaliamo, per completezza, che l'insieme $g(x, y) = 0$ può essere visto come la curva di livello 0 della funzione g di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Discorsi analoghi per le equazioni cartesiane dei due casi che seguiranno. Questo significa che la trattazione proposta in queste pagine riguarda anche la parametrizzazione delle curve (e più avanti delle superfici) di livello.

1.3 Un esempio

Il luogo di equazione cartesiana

$$g(x, y) = x^3 + x^2 - y^2 = 0 \tag{15}$$

può essere rappresentato parametricamente dalle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(t) = t^2 - 1 \\ y = f_2(t) = t^3 - t \end{array} \right. , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

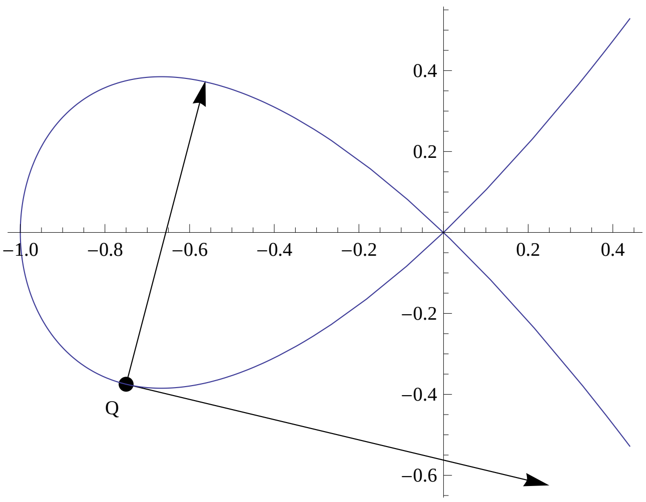
Il punto corrispondente a $t = 1/2$ è $Q = (-3/4\,, -3/8)$. Si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(-\frac{3}{4}\,, -\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{16}\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y}\left(-\frac{3}{4}\,, -\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \nabla g\left(-\frac{3}{4}\,, -\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{16}\,, \frac{3}{4}\right)\,, \tag{17}$$

e

$$\left(f_1'\left(\frac{1}{2}\right)\,, f_2'\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(1, -\frac{1}{4}\right)\,. \tag{18}$$

È immediato verificare che i due vettori dati dalle (17) e (18) sono perpendicolari tra di loro: il primo è perpendicolare alla curva nel punto Q, il secondo è tangente nello stesso punto. La figura che segue illustra la situazione.



2 Piani e superfici dello spazio

2.1 Equazioni parametriche

Piani nello spazio

Le equazioni parametriche di un piano nello spazio cartesiano $Oxyz$ si possono scrivere nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(u,v) = x_0 + l_1 u + l_2 v \\ y = f_2(u,v) = y_0 + m_1 u + m_2 v \\ z = f_3(u,v) = z_0 + n_1 u + n_2 v \end{array} \right. , \tag{19}$$

cioè con funzioni f_1, f_2 ed f_3 polinomiali di grado non superiore a 1 nelle variabili u e v (ma con la condizione che almeno una sia effettiva-

Superfici nello spazio

Le equazioni parametriche di una superficie nello spazio cartesiano $Oxyz$ si possono scrivere nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(u,v) \\ y = f_2(u,v) \\ z = f_3(u,v) \end{array} \right. , \tag{20}$$

ora con funzioni f_1, f_2 ed f_3 arbitrarie (purché opportunamente regolari come sarà precisato più avanti), definite questa volta, di solito, solo mente di primo grado in u e almeno una sia effettivamente di primo grado in v), definite su tutto $\mathbb{R}^2$.

Le funzioni f_1, f_2 ed f_3 sono di classe C^1, anzi C^∞, e la citata condizione sul grado di almeno una funzione rispetto sia ad u che a v si traduce nella condizione che i vettori $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ e $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, le cui componenti si ottengono anche facendo le derivate parziali delle tre funzioni rispetto alle due variabili, non siano il vettore nullo. Questa volta occorre anche la condizione aggiuntiva che i due vettori non siano paralleli: se infatti essi fossero paralleli le equazioni parametriche (19) rappresenterebbero una retta e non un piano. Per tradurre tutto questo in una formula riepilogativa osserviamo innanzitutto che

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Le condizione enunciate si possono ora tradurre analiticamente nella condizione espressa dalla (21).

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = 2. \tag{21}$$

in un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^2$, che sarà sempre la chiusura di un aperto connesso.

Ora richiediamo come condizione che le funzioni f_1, f_2 ed f_3 siano di classe C^1 e che le loro derivate soddisfino alla condizione espressa dalla (22). Esprimeremo questo fatto dicendo che la superficie è *regolare*.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2. \tag{22}$$

I vettori $\vec{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ e $\vec{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ sono due vettori di giacitura del piano (non paralleli), e naturalmente non dipendono né da u né da v, cioè dal punto sul piano; in maniera perfettamente simmetrica i due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, di componenti rispettivamente

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_3}{\partial u} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}, \frac{\partial f_2}{\partial v}, \frac{\partial f_3}{\partial v} \right), \tag{23}$$

sono due *vettori di giacitura* (ancora non paralleli) del piano tangente alla superficie, nel punto $(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$: ora ovviamente i due vettori di giacitura potranno cambiare da punto a punto. Conoscendo i due vettori di giacitura e il punto sulla superficie, è immediato scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in quel punto.

Trattando le superfici anziché i piani (cioè funzioni di tipo generale, anziché polinomi di grado non superiore a 1) potremo avere bisogno anche di altre precisazioni, inutili nel caso dei piani. Tra queste segnaliamo la seguente.

— Una superficie si dice *semplice* se la corrispondenza tra i punti di K e i punti della curva è biunivoca, con eventuali eccezioni solo per coppie di punti appartenenti alla frontiera di K.

Naturalmente le funzioni f_1, f_2 ed f_3 possono essere di classe C^k, con $k > 1$, nel qual caso diremo che la superficie è di classe C^k.

Il vettore $\vec{n}$ prodotto vettoriale dei due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$,

$$\vec{n} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2}, \tag{24}$$

vettore non nullo perché i due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ sono per ipotesi non nulli e non paralleli, risulta essere perpendicolare al piano di equazioni (19), o, rispettivamente, al piano tangente alla superficie di equazioni (20).

2.2 Equazioni cartesiane

Piani nello spazio

L'equazione cartesiana di un piano dello spazio $Oxyz$ si può scrivere nella forma

$$g(x,y,z) = ax + by + cz + d = 0\,, \tag{25}$$

cioè con un'equazione di primo grado in tre incognite.

La funzione di tre variabili g è di classe C^1, anzi C^∞, e la condizione che essa sia effettivamente di primo grado si traduce nella condizione che il vettore $\vec{n}_\alpha = (a,b,c)$, le cui componenti si ottengono anche derivando la funzione g, prima rispetto a x, poi rispetto a y e infine rispetto a z, non sia il vettore nullo.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Superfici nello spazio

L'equazione cartesiana di una superficie dello spazio $Oxyz$ si può scrivere nella forma

$$g(x,y,z) = 0\,, \tag{26}$$

cioè con un'equazione di tipo qualsiasi in tre incognite (la funzione g dovrà però essere opportunamente regolare come precisato più avanti).

Ora richiediamo come condizione che la funzione g sia di classe C^1 e che le sue derivate parziali non siano mai contemporaneamente nulle. Il vettore ottenuto in questo modo si chiama *gradiente* della funzione g e si indica con $\nabla g(x,y,z)$.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Il vettore $\vec{n}_\alpha = (a,b,c)$ è un vettore perpendicolare al piano, e naturalmente non dipende da (x,y,z), cioè dal punto sul piano; in maniera perfettamente simmetrica il vettore $\nabla g(x,y,z)$ è un *vettore perpendicolare* alla superficie, cioè al suo piano tangente, nel punto (x,y): ora ovviamente il vettore perpendicolare potrà cambiare da punto a punto. Conoscendo il vettore perpendicolare e il punto sulla superficie, è immediato scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla superficie in quel punto.

2.3 Un esempio

Il luogo di equazione cartesiana

$$g(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0 \tag{29}$$

può essere rappresentato parametricamente dalle equazioni

$$(30) \qquad \begin{cases} x = f_1(u,v) = \sin u \cos v \\ y = f_2(u,v) = \sin u \sin v \\ 3 = f_3(u,v) = \cos u \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il punto corrispondente a $u = v = \pi/4$ è $Q = (1/2\,, 1/2\,, \sqrt{2})$. Si ha

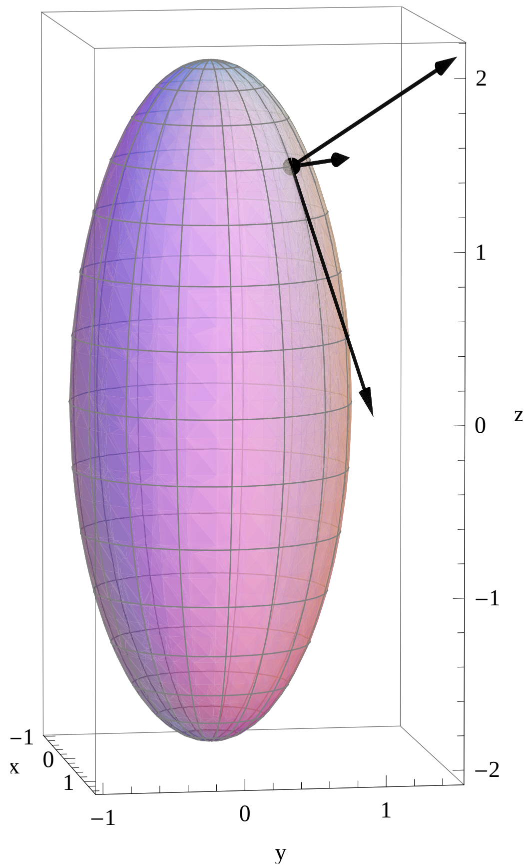
$$(31) \qquad \nabla g\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,\sqrt{2}\right) = \left(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

e

$$(32a) \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right), \frac{\partial f_2}{\partial u}\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right), \frac{\partial f_3}{\partial u}\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,-\sqrt{2}\right)$$

$$(32b) \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right), \frac{\partial f_2}{\partial v}\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right), \frac{\partial f_3}{\partial v}\left(\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right).$$

È immediato verificare che i due vettori dati dalle (32) non sono paralleli tra di loro e che il loro prodotto vettoriale è invece parallelo al vettore dato dalla (31): i due vettori delle (32) sono due vettori di giacitura, il vettore della (31) e un vettore normale. La figura che segue illustra la situazione.



3 Rette e curve dello spazio

3.1 Equazioni parametriche

Rette nello spazio

Le equazioni parametriche di una retta dello spazio cartesiano $Oxyz$ si possono scrivere nella forma

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} x = f_1(t) = x_0 + lt \\ y = f_2(t) = y_0 + mt \\ z = f_3(t) = y_0 + nt \end{cases},$$

cioè con funzioni f_1, f_2 ed f_3 polinomiali di grado non superiore a 1 (ma con almeno una delle tre effettivamente di primo grado).

Le funzioni f_1 f_2 ed f_3 sono di classe C^1, anzi C^∞, e la condizione che almeno una della tre funzioni f_1, f_2 ed f_3 sia effettivamente di primo grado si traduce nella condizione che il vettore $\vec{v}_r = (l, m, n)$, le cui componenti si ottengono anche derivando le funzioni f_1, f_2 ed f_3, non sia il vettore nullo.

$$\text{(35)} \quad (l, m, n) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \neq (0, 0, 0).$$

Curve nello spazio

Le equazioni parametriche di una curva dello spazio cartesiano Oxy si possono scrivere nella forma

$$\text{(34)} \qquad \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases},$$

ora con funzioni f_1, f_2 ed f_3 arbitrarie (purché opportunamente regolari come sarà precisato più avanti), definite in un intervallo di $\mathbb{R}$, di qualunque tipo, anziché su tutto $\mathbb{R}$.

Ora richiediamo come condizione che le funzioni f_1, f_2 ed f_3 siano di classe C^1 e che le loro derivate non siano mai contemporaneamente nulle. Esprimeremo questo fatto dicendo che la curva è *regolare*.

$$\text{(36)} \qquad (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \neq (0, 0, 0)\,.$$

Il vettore $\vec{v}_r = (l, m, n)$ è un vettore direttore della retta, e naturalmente non dipende da t, cioè dal punto sulla retta; in maniera perfettamente simmetrica il vettore di componenti $(f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$ è un *vettore tangente* alla curva, nel punto $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$: ora ovviamente il vettore tangente potrà cambiare da punto a punto. Conoscendo il vettore tangente e il punto sulla curva, è immediato scrivere l'equazione della retta tangente alla curva in quel punto.

Trattando le curve anziché le rette (cioè funzioni di tipo generale, anziché polinomi di grado non superiore a 1) potremo avere bisogno anche di altre precisazioni, inutili nel caso delle rette. Tra queste segnaliamo le due seguenti.

1. Una curva si dice *chiusa* se il dominio delle funzioni è $I = [a, b]$ (cioè un intervallo chiuso e limitato), e le immagini di a e b coincidono.
2. Una curva si dice *semplice* se, a parte l'eventuale coincidenza delle immagini degli estremi dell'intervallo di definizione, la corrispondenza tra i punti di I e i punti della curva è biunivoca.

Naturalmente le funzioni f_1, f_2 ed f_3 possono essere di classe C^k, con $k > 1$, nel qual caso diremo che la curva è di classe C^k.

3.2 Equazioni cartesiane

Rette nello spazio

Le equazioni cartesiane di una retta dello

Curve nello spazio

Le equazioni cartesiane di una curva dello spazio $Oxyz$ si possono scrivere nella forma

$$(37)\quad \begin{cases} g_1(x,y,z)=a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ g_2(x,y,z)=a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases},$$

cioè con un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite.

Le due funzioni di tre variabili g_1 e g_2 sono di classe C^1, anzi C^∞, e la condizione che esse siano effettivamente di primo grado si traduce nella condizione che i vettori $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, le cui componenti si ottengono anche derivando le funzioni g_1 e g_2, prima rispetto a x, poi rispetto a y e infine rispetto a z, non siano il vettore nullo. Questa volta occorre anche la condizione aggiuntiva che i due vettori $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ non siano tra di loro paralleli: questo è dovuto al fatto che la retta è vista come intersezione di due piani che, ovviamente, non dovranno essere paralleli. Per tradurre tutto questo in una formula riepilogativa osserviamo innanzitutto che

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Le condizioni enunciate si possono ora tradurre nella condizione analitica espressa dalla (39).

$$(39)\quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} = 2\,.$$

spazio $Oxyz$ si possono scrivere nella forma

$$(38)\quad \begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases},$$

cioè con un sistema di due equazioni di tipo qualsiasi in tre incognite (le funzioni g_1 e g_2 dovranno però essere opportunamente regolari come precisato più avanti).

Ora richiediamo come condizione che le due funzioni g_1 e g_2 siano di classe C^1 e che le loro derivate parziali non siano mai contemporaneamente nulle. Per ciascuna delle due funzioni g_1 e g_2 otterremo due vettori *gradiente*, che si indicheranno con $\nabla g_1(x,y,z)$ e $\nabla g_2(x,y,z)$ e richiederemo ancora che i due vettori gradiente non siano tra di loro paralleli, condizione espressa dall'equazione (40), che tiene anche conto del fatto che nessuno dei due vettori può essere il vettore nullo.

$$(40)\quad \operatorname{rg} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} = 2\,.$$

I vettori $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ sono due *vettori perpendicolari* alla retta (e non tra di loro paralleli), e naturalmente non dipendono da (x, y, z), cioè dal punto sulla retta; in maniera perfettamente simmetrica i due vettori $\nabla g_1(x,y,z)$ e $\nabla g_2(x,y,z)$ sono due *vettori perpendicolari* alla curva, nel punto (x, y, z): ora ovviamente i vettori perpendicolari potranno cambiare da punto a punto, ma sempre rimanendo tra di loro non paralleli. Il prodotto vettoriale di questi vettori perpendicolari consente di ottenere un vettore parallelo alla retta o tangente alla curva. Conoscendo il vettore tangente e il punto sulla curva, è immediato scrivere l'equazione della retta tangente alla curva in quel punto.

3.3 Un esempio

Il luogo di equazioni cartesiane

$$\left\{\begin{array}{l} g_1(x,y,z) = x^2 - y = 0 \\ g_2(x,y,z) = x^3 - z = 0 \end{array}\right. \tag{41}$$

può essere rappresentato parametricamente dalle equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} x = f_1(t) = t \\ y = f_2(t) = t^2 \\ z = f_3(t) = t^3 \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{42}$$

Il punto corrispondente a $t = 1/2$ è $Q = (1/2\,,\,1/4\,,\,1/8)$. Si ha

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = 1\,, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = -1\,, \quad \frac{\partial g_1}{\partial z}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = 0\,, \tag{43}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}\,, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = 0\,, \quad \frac{\partial g_2}{\partial z}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right) = -1\,, \tag{44}$$

e

$$\left(f_1'\left(\frac{1}{2}\right)\,,\,f_2'\left(\frac{1}{2}\right)\,,\,f_3'\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(1, 1, \frac{3}{4}\right)\,. \tag{45}$$

I due vettori dati dalle (43) e (44) non sono paralleli tra di loro e sono perpendicolari alla curva; inoltre il loro prodotto vettoriale fornisce un vettore parallelo a quello dato dalle (45), che è un vettore tangente alla curva. Le figure che seguono illustrano la situazione.