Luciano Battaia

Precorso di Matematica

Richiami teorici ed esercizi

Università Ca' Foscari di Venezia - Dipartimento di Economia

Precorso di Matematica
Richiami teorici ed esercizi

Luciano Battaia

Università Ca' Foscari di Venezia - Dipartimento di Economia

Versione 1.1 del 10 novembre 2018

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.
Dobbiamo prendere gli allievi così come sono, richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura.
Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sè e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento.
Giuseppe Peano (1858 — 1932)

Indice

Premessa

Questi appunti contengono lo schema di un corso propedeutico di Matematica per il corso di laurea in Economia.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo di posta elettronica batmath@gmail.com.

1 Richiami di concetti di base

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti di “matematica di base”, già noti dalle scuole medie superiori.

1.1 Qualche prodotto e scomposizione notevole

In molti casi la risoluzione degli esercizi richiede l’esecuzione di prodotti di espressioni letterali al fine di semplificare le scritture o di ottenere i risultati voluti. Molti di questi prodotti sono *notevoli*, in quanto si presentano frequentemente e possono essere eseguiti rapidamente con l’uso di opportuni accorgimenti. Gli stessi accorgimenti, usati “in senso inverso”, consentono di trasformare in prodotti certe espressioni algebriche scritte sotto forma di somma, e anche questa è una tecnica necessaria per risolvere gli esercizi. Qui di seguito raccogliamo alcune delle formule più comuni, fornendo anche qualche esempio di applicazione.

1.1.1 Raccoglimento a fattor comune

Conviene considerare subito degli esempi.

Esempio 1.1. $6x + 2x^2y + 4xy^2 = 2x(3 + xy + 2y^2)$.

Esempio 1.2. $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$.

Esempio 1.3. $(a + b)^2 - 2b(a + b) + 2a(a + b) = (a + b)(a + b - 2b + 2a) = (a + b)(3a - b)$. In questo caso il fattore da raccogliere non è costituito da un semplice monomio, come nei due casi precedenti, ma dal polinomio $(a + b)$.

Esempio 1.4. $3b^2(x^2 + y) - 6b^3(x^2 + y) + 12b^4(x^2 + y) = 3b^2(x^2 + y)(1 - 2b + 4b^2)$. In questo caso i fattori comuni da raccogliere sono il monomio $3b^2$ e il polinomio $(x^2 + y)$.

A volte il raccoglimento può richiedere “due tempi”: si tratta del cosiddetto raccoglimento a fattor comune parziale.

Esempio 1.5. $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.

Esempio 1.6. $ax - bx + by - ay - b + a = x(a - b) - y(a - b) + (a - b) = (a - b)(x - y + 1)$.

Come si vede questo tipo di processo richiede un po’ più di fantasia!

1.1.2 Prodotto di una somma per una differenza

Il prodotto di una somma di due quantità per la loro differenza si può eseguire secondo la seguente regola

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \tag{1.1}$$

dove a e b possono essere due monomi o due polinomi qualunque. Questa formula consente di eseguire velocemente il prodotto indicato e, letta in senso inverso, di trasformare la differenza di due quadrati in un prodotto. Si noti che non è possibile invece scomporre in prodotto la somma di due quadrati: a^2+b^2.

Esempio 1.7. $(x-1)(x+1)=x^2-1$.

Esempio 1.8. $(-x-2)(-x+2)=(-x)^2-4=x^2-4$.

Esempio 1.9. $x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

Esempio 1.10. $(xy+2x+3y)(xy+2x-3y)=[(xy+2x)+3y][(xy+2x)-3y]=(xy+2x)^2-(3y)^2=x^2y^2+4x^2y+4x^2-9y^2$.

1.1.3 Quadrato di un binomio

La formula seguente consente di eseguire velocemente il quadrato di una somma o differenza di due addendi e, letta in senso inverso, di scomporre un particolare trinomio.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\,, \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2\,. \tag{1.2}$$

Esempio 1.11. $(x+2y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=x^2+4xy+4y^2$.

Esempio 1.12. $(4x-3y)^2=(4x)^2-2(4x)(3y)+(3y)^2=16x^2-24xy+9y^2$.

Esempio 1.13. $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

Le tecniche precedenti, e quelle che presenteremo successivamente, possono anche essere combinate tra loro.

Esempio 1.14. $x^3+6x^2+9x=x(x^2+6x+9)=x(x+3)^2$.

Esempio 1.15. $(x+y-z)(x+y+z)=[(x+y)-z][(x+y)+z]=(x+y)^2-z^2=x^2+2xy+y^2-z^2$.

Esempio 1.16. $(x+y+z)^2=[(x+y)+z]^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$. Ragionando come in questo esempio si può giungere a una regola per sviluppare il quadrato di una somma di un qualunque numero di addendi:

$$(a+b+c+d+\dots)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+\dots$$

1.1.4 Cubo di un binomio

La formula seguente consente di eseguire velocemente il cubo di una somma o differenza di due addendi e, letta in senso inverso, di scomporre un particolare quadrinomio.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,, \quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\,. \tag{1.3}$$

Esempio 1.17. $(2x+y)^3=(2x)^3+3(2x)^2y+3\cdot 2x(y)^2+y^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$.

Esempio 1.18. $(x^2-3y)^3=(x^2)^3-3(x^2)^23y+3x^2(3y)^2-(3y)^3=x^6-9x^4y+x^2y^2-27y^3$.

Esempio 1.19. $a^3b^3-3a^2b^2+3ab-1=(ab-1)^3$.

1.1.5 Somma o differenza di due cubi

Sia la somma che la differenza di due cubi possono essere scomposte in fattori con le seguenti regole:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2). \tag{1.4}$$

Esempio 1.20. $(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$.

Esempio 1.21. $(8x^3+27y^3)=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$.

Si noti che, a differenza del caso dei quadrati, si può scomporre sia la *somma* che la *differenza* di due cubi. Si noti anche che i due trinomi tra parentesi dopo la scomposizione *non* sono dei quadrati, perché *non c'è* il doppio prodotto.

1.2 Richiami sui radicali

In molte situazioni è utile saper semplificare espressioni contenenti radicali, senza approssimarli fin da subito con espressioni decimali. Un semplice esempio chiarirà il perché di questo fatto.

Supponiamo di dover calcolare $(\sqrt{2})^8$. Se teniamo conto delle proprietà delle potenze e dei radicali otteniamo $(\sqrt{2})^8=\left((\sqrt{2})^2\right)^4=2^4=16$, senza alcuna approssimazione. Se invece approssimiamo $\sqrt{2}$ con 1.4, commettiamo un errore di poco più di un centesimo, trascurabile in molte situazioni. Calcolando però l'ottava potenza otteniamo (circa) 14.76, al posto del risultato corretto 16: un errore decisamente troppo grande! Naturalmente usando un maggior numero di cifre dopo la virgola per approssimare la radice quadrata di 2 le cose si sarebbero rimesse a posto, ma non sempre succede così, e il problema della correttezza delle approssimazioni numeriche è molto complesso.

Richiamiamo qui, fornendo anche qualche esempio, solo alcune delle tecniche di base utili per operare con i radicali, segnalando che i *radicandi* saranno sempre considerati *positivi* e che saremo principalmente interessati al caso di radici quadrate o al massimo cubiche.

$$\sqrt[n]{a^n}=a,\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad \text{(definizioni)}. \tag{1.5}$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad \text{(radice di un prodotto)}. \tag{1.6}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{(radice di un quoziente)} \tag{1.7}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \quad \text{(potenza di un radicale)}. \tag{1.8}$$

$$\sqrt[n]{a^n b^p}=a\sqrt[n]{b^p} \quad \text{(“portare fuori o dentro” dal segno di radice)}. \tag{1.9}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m} \quad \text{(semplificazione di un radicale)}. \tag{1.10}$$

Ricordiamo poi che *non* è valida alcuna proprietà relativamente alla radice di una somma: $\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$. Per quanto riguarda poi le operazioni di somma e prodotto coinvolgenti radicali si possono sommare solo radicali simili, mentre per moltiplicare due radicali bisogna “ridurli allo stesso indice”.

Esempio 1.22. $5\sqrt{8}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2^2 2}+3\sqrt{2}=5\cdot2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=13\sqrt{2}$.

Esempio 1.23. $3\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{2}=3\sqrt{3^2 3}-\sqrt{2^2 3}+\sqrt{2}=3\cdot3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}=7\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Esempio 1.24. $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{8\cdot4}=\sqrt[6]{32}$.

1.3 Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è il *quoziente di due polinomi*. Per esempio

$$\frac{x^3+xy+y^2+2}{x^2-y}$$

è una frazione algebrica.

Le operazioni sulle frazioni algebriche si eseguono esattamente come le operazioni sulle frazioni numeriche. Saremo interessati a qualche semplificazione, somma o prodotto di frazioni algebriche (in casi molto semplici!).

Esempio 1.25. $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}+\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x+x+2}{x-1}=\dfrac{2x+2}{x-1}$.

Esempio 1.26. $\dfrac{3x(x+2)}{x+1}\cdot\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3x\cancel{(x+2)}}{x+1}\cdot\dfrac{x-1}{\cancel{x+2}}=\dfrac{3x(x-1)}{x+1}=\dfrac{3x^2-3x}{x+1}$.

Esempio 1.27. $\dfrac{x^2-1}{x^3+1}=\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

2 Logica, insiemi, numeri, funzioni

Scopo di questo capitolo è principalmente quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso per gli sviluppi futuri dei corsi di matematica, anche richiamando brevemente concetti che in buona parte dovrebbero essere noti dagli studi precedenti.

In questo capitolo utilizzeremo fin da subito, specie negli esempi, gli insiemi dei numeri naturali ($\mathbb{N}$), interi ($\mathbb{Z}$), razionali ($\mathbb{Q}$) e reali ($\mathbb{R}$), le cui proprietà essenziali dovrebbero essere note dalla scuola media superiore, e sui quali torneremo, seppur brevemente, in seguito.

2.1 Logica proposizionale

La frase "*La neve è bianca*" esprime un fatto ritenuto da tutti *vero*, anzi universalmente vero. La frase "*La terra è una stella*" esprime invece un fatto ritenuto da tutti *falso*, anzi universalmente falso. La frase "*Treviso è una bella città*" esprime un fatto che può essere ritenuto vero da certi individui e falso da altri. Alle frasi "*Non disturbare mentre faccio lezione*", "*Vai a comperare il pane*", "*Se lancio un dado esce il sei*", "*Domani pioverà*", non può essere attribuito un valore di verità o falsità.

Questi esempi mostrano che alcune frasi, o proposizioni, della lingua italiana (ma lo stesso succede in tutte le lingue) assumono uno ed uno solo tra i valori *vero* e *falso*, in altri casi o non c'è accordo sull'attribuzione di un valore di verità o falsità, oppure non ha proprio senso tale attribuzione.

Esistono anche esempi più complessi, come l'affermazione "*Tutti i numeri naturali pari maggiori di* 2 *sono somma di due numeri primi*". Ebbene, a tutt'oggi (2015), non è possibile sapere se tale affermazione sia *vera* o *falsa*[(1)], benché non si sia trovato nessun caso in cui tale affermazione non è verificata.

Tenendo conto di queste osservazioni, daremo ora una definizione di *enunciato*, o *proposizione*, segnalando comunque che il concetto di *verità* è estremamente delicato e un'analisi del problema esula dagli scopi di questo corso.

Definizione 2.1. *Si chiama* proposizione *o* enunciato *ogni affermazione che assume uno e un solo valore di verità:* vero *o* falso.

Si noti che è implicito nella definizione data il fatto che ammettiamo che la logica di cui ci occupiamo sia *bivalente*, cioè preveda che le espressioni di cui ci occupiamo possano avere uno solo dei due valori di verità "vero" o "falso".

[1] Si tratta della famosa *Congettura di Goldbach*, proposta sostanzialmente da Christian Goldbach nel 1742. Per esempio si ha

1. $4 = 2 + 2$
2. $6 = 3 + 3$
3. $8 = 3 + 5$
4. $10 = 3 + 7 = 5 + 5$
5. $\ldots$

Gli enunciati possono essere costituiti da una sola affermazione, come negli esempi che abbiamo proposto sopra, e li chiameremo *enunciati atomici*, oppure possono essere costituiti da più affermazioni, collegate tra di loro. Un esempio è costituito dall'enunciato "*Il sole è una stella* e *la terra è un pianeta*", che si può considerare composto da due enunciati atomici (entrambi veri) connessi dalla parola "e". Un altro modo per costruire nuovi enunciati è quello di usare la negazione "non". Per esempio "*La terra* non *è una stella*" è ottenuto dalla *negazione* dell'enunciato (falso) "*La terra è una stella*".

Si chiamano *connettivi* le parole (come la "e" dell'esempio) che collegano tra di loro due enunciati, oppure che operano su un enunciato (come il "non" dell'esempio) per ottenere un nuovo enunciato. A volte il "non" è chiamato un *operatore* invece che un connettivo, in quanto in realtà non connette due enunciati, ma agisce, "opera", su un singolo enunciato.

Si deve notare che i connettivi collegano tra di loro due enunciati senza alcun riguardo al significato che questi possono assumere; per esempio è perfettamente legittimo l'enunciato "*Parigi è la capitale del Brasile* o $2+2$ *vale* 4", che è la connessione, tramite la parola "o", di due enunciati (uno falso e uno vero). L'unica cosa che conta è il valore di verità complessivo dell'enunciato risultante.

Poiché nel linguaggio comune le parole non hanno sempre un senso univoco, in logica al posto delle parole si utilizzano dei simboli speciali per formalizzare in maniera rigorosa i connettivi e si costruiscono delle *tavole di verità* che stabiliscono le regole che permettono di dedurre la verità o meno di un enunciato composto, una volta che sia noto il valore di verità degli enunciati componenti: queste tavole di verità possono essere pensate come delle vere e proprie *definizioni* dei connettivi stessi.

2.1.1 Connettivi logici

Nel seguito indicheremo le proposizioni con simboli come $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$, ... I connettivi che ci interesseranno sono i seguenti:

- non, oppure $\neg$, *negazione*: $non\mathscr{P}$ (oppure $\neg\mathscr{P}$) è vera, se $\mathscr{P}$ è falsa, e viceversa;
- $\wedge$, "et", oppure "e", *congiunzione*: $\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$ è vera se tutte due le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa;
- $\vee$, "vel", oppure "o", *disgiunzione*: $\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$ è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, altrimenti è falsa;
- $\Rightarrow$, "implica", *implicazione*: $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ è falsa solo quando $\mathscr{P}$ è vera e $\mathscr{Q}$ è falsa, in particolare da una proposizione falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- $\Leftrightarrow$, "se e solo se", "condizione necessaria e sufficiente", *equivalenza*: $\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$ è vera se $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false.

La tabella che segue (dove "V" indica *vero* e "F" indica *falso*) riassume in maniera formale le definizioni dei connettivi.

Si noti che la tabella è costruita tenendo conto che ciascuno dei due enunciati atomici ha due possibili valori di verità, e che quindi per esaminare il valore di verità di un enunciato che li coinvolga entrambi devo esaminare tutte le situazioni che si possono presentare. Per il solo connettivo "non" basterebbero evidentemente due sole righe nella tabella, in quanto in questo caso è coinvolto un solo enunciato atomico. Tabelle di questo tipo si chiamano *Tavole di verità*.

$\mathscr{P}$	$\mathscr{Q}$	$\neg\mathscr{P}$	$\mathscr{P} \wedge \mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \vee \mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$	$\mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Tabella 2.1 *Connettivi logici e tavola di verità*

Il connettivo $\Rightarrow$ ha molta importanza in matematica. Dimostrare un teorema significa infatti dimostrare la verità di $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$, sapendo che $\mathscr{P}$ è vera: $\mathscr{P}$ è detta *ipotesi* e $\mathscr{Q}$ è detta *tesi*.

2.2 Logica dei predicati

Come abbiamo detto, il senso di una proposizione sta nel poter stabilire se è vera o se è falsa. Un'affermazione del tipo $x < -2$ non è una proposizione, perché il suo valore di verità dipende da x. Facendo variare x in un opportuno insieme (che deve essere precisato) si possono ottenere proposizioni vere o proposizioni false. Possiamo dire che si tratta di un proposizione dipendente da x, e indicarla con $\mathscr{P}(x)$: x sia chiama una *variabile* e $\mathscr{P}(x)$ un *predicato*. Naturalmente si possono avere predicati che dipendono da più variabili, per esempio $x + y > 0$, e in questo caso i predicati sono anche chiamati *relazioni*.

Come abbiamo già osservato è indispensabile precisare in quale ambiente si deve scegliere la variabile (o le variabili) di un predicato. Per esempio l'affermazione "*x è pari*" ha senso se x è un numero naturale, non ha alcun senso se x è una frazione.

Fissato uno dei possibili valori di x, diciamolo x_0, il predicato diventa una proposizione (che sarà vera o falsa a seconda di x_0), proposizione che si indica con $\mathscr{P}(x_0)$.

2.2.1 Quantificatori

Nella costruzione dei predicati si usano comunemente costruzioni del tipo

- *Esiste (almeno) un x tale che valga* $\mathscr{P}(x)$.
- *Per ogni x è verificato* $\mathscr{P}(x)$.

Per formalizzare queste frasi si usano due simboli logici, detti *quantificatori*

- $\forall$, "per ogni", *quantificatore universale*;
- $\exists$, "esiste (almeno) un", *quantificatore esistenziale*.

Si usa anche spesso il simbolo $\exists!$, oppure $\exists_1$ per indicare che *esiste uno e uno solo*.

Nel caso di uso contemporaneo di più quantificatori si deve prestare particolare attenzione all'ordine con cui sono scritti. Un esempio chiarirà il senso di questa affermazione.

Consideriamo il predicato $\mathscr{P}(x,y) =$ "x è uno studente in grado di risolvere il problema y". Allora

$$\forall y \ \exists x \text{ tale che } \mathscr{P}(x,y)$$

significa: "qualunque sia il problema y c'è uno studente in grado di risolverlo". Invece

$$\exists x\ \forall y \text{ tale che } \mathscr{P}(x,y)$$

significa: "c'è uno studente in grado di risolvere qualsiasi problema". Evidentemente si tratta di due situazioni radicalmente diverse.

Osservazione 2.2. È opportuno rendersi conto, su un esempio classico, di come la simbologia comunemente usata in matematica possa facilmente dar luogo a equivoci, senza un'effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi logici.

Consideriamo dunque l'equazione

$$x^2 = 1\,,$$

le cui soluzioni si trovano scritte usualmente nella forma

$$x = \pm 1\,,$$

ove si intende che sia il numero 1 che il numero -1 soddisfano l'equazione (in termini logici: rendono vero, nell'insieme dei numeri reali, il predicato "$x^2 = 1$"). Questo risultato andrebbe, più correttamente, espresso nella forma

$$x = 1 \vee x = -1\,.$$

Consideriamo ora la scrittura

$$x^2 \neq 1$$

la cui "soluzione" è usualmente scritta nella forma

$$x \neq \pm 1.$$

Ebbene, questa scrittura *non* deve essere tradotta in $x \neq 1 \vee x \neq -1$, che porterebbe alla conclusione che $x^2 \neq 1$ è verificata da ogni numero reale; la traduzione logica corretta è, invece,

$$x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

in quanto quello che si intende scrivendo $x \neq \pm 1$ è proprio il *contemporaneo* verificarsi delle due condizioni su x.

Si può notare che $x^2 \neq 1$ equivale a $\neg(x^2 = 1)$ che porta a $\neg(x = 1 \vee x = -1)$ ovvero a $\neg(x = 1) \wedge \neg(x = -1)$, che viene abitualmente scritta $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.

2.3 Il simbolo di sommatoria

Tra i molti simboli che si usano nella pratica matematica ne richiamiamo qui uno, per la sua importanza in questo corso.

Se dobbiamo scrivere la somma dei numeri 1, 2, 3, possiamo tranquillamente scrivere $1+2+3$, ma se dobbiamo scrivere la somma dei numeri da 1 a 100[2], la scrittura esplicita diventa oltremodo pesante. Si

[2]Un aneddoto, abbastanza verosimile, relativo al grande matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), racconta che all'età di otto-nove anni il maestro, per metterlo a tacere per un bel po', gli ordinò di sommare i numeri da 1 a 100: in brevissimo tempo Gauss fornì la risposta $50 \times 101 = 5050$, sorprendendo anche il maestro che aveva sottovalutato l'intelligenza del suo allievo...

potrebbe pensare di ovviare con l'uso dei puntini di sospensione:

$$1+2+\cdots+99+100\,.$$

La cosa però non è esente da critiche e, soprattutto, non è sempre praticabile. Per questo si introduce il cosiddetto *simbolo di sommatoria*, col quale la somma precedente si scrive

$$\sum_{i=1}^{100} i\,,$$

che traduce in forma compatta esattamente quello che si deve fare: sommare i numeri naturali, rappresentati genericamente dalla "variabile" i, partendo dal numero 1 e arrivando fino al numero 100.

In generale gli addendi di una somma possono essere più complessi, per esempio:

- i reciproci dei numeri naturali: $1/i$,
- i quadrati dei numeri naturali: i^2,
- un'espressione qualunque coinvolgente i numeri naturali, come il rapporto tra un naturale e il suo successivo: $i/(i+1)$,
- ecc.

Se indichiamo con $a(i)$, o a_i, l'espressione coinvolgente il numero naturale i, la scrittura

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \tag{2.1}$$

indicherà la somma di tante "copie" di quell'espressione, dove al posto di i si devono mettere, successivamente, tutti i numeri naturali dal valore iniziale m al valore finale n. Proponiamo alcuni esempi per chiarire ancora meglio il senso di quanto detto[3].

- $\displaystyle\sum_{i=5}^{10}\frac{1}{i^2}=\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}\,;$
- $\displaystyle\sum_{i=2}^{100}\frac{i}{i-1}=\frac{2}{2-1}+\frac{3}{3-1}+\cdots+\frac{99}{99-1}+\frac{100}{100-1}\,;$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{5}(-1)^i=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5=1-1+1-1+1-1\;(=0)$

È opportuno osservare che al posto di i (che si chiama *indice della sommatoria*) si può usare una qualunque altra lettera: le scritture

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad , \quad \sum_{j=m}^{n} a_j \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k$$

[3] Alcuni scrivono lo stesso simbolo disponendo soprattutto gli estremi in maniera leggermente diversa:

$$\sum\nolimits_{i\,n}^{m} a_i\,;$$

si tratta praticamente solo di una questione di gusto, e nulla cambia ovviamente per quanto riguarda il significato.

sono del tutto equivalenti (naturalmente purché i valori iniziale e finale restino gli stessi e le espressioni che coinvolgono numeri naturali siano identiche): per questo motivo l'indice i è spesso detto una *variabile muta*.

Giova anche ricordare che, trattandosi di somme, si possono applicare le usuali proprietà, in particolare ci interessa segnalare quella associativa. Si vedano gli esempi che seguono.

Esempi.

- $\displaystyle\sum_{i=2}^{100}\frac{2i+4}{i-1}=2\sum_{i=2}^{100}\frac{i+2}{i-1}$;
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{20}\frac{(-1)^i}{i}=(-1)\sum_{i=0}^{20}\frac{(-1)^{i-1}}{i}$.

2.4 Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo "un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*", ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire "un insieme è un insieme". Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: A, B, ...

La scrittura

$$x \in A \tag{2.2}$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge "x appartiene ad A". La (2.2) si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della (2.2) si scrive

$$x \notin A\,, \tag{2.3}$$

che si legge, naturalmente, "x non appartiene ad A". La (2.3) si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo $\forall$ ("*per ogni*"),

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x\ x\in A \Leftrightarrow x\in B) \tag{2.4}$$

dove la doppia freccia "$\Leftrightarrow$" si legge "*se e solo se*".

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con $\emptyset$, privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare dettagliatamente tutti gli elementi dell'insieme, per esempio $A=\left\{\,0,\pi,\sqrt{2},\text{Pordenone}\,\right\}$.
2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A=\{\,x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\,\}$.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{ 3, 6, 9, 12, \dots \}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{ 2, 3, \dots \}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P, dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15\,485\,863 \in P$, e per verificare che $2^{43\,112\,609} - 1 \in P$ (uno dei più grandi[4] primi conosciuti alla fine del 2009, con ben 12 978 189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un *sottoinsieme* di B, o che è *contenuto* in B, o anche che B è un *soprainsieme* di A, o che *contiene* A, e scriveremo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A \,. \tag{2.5}$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$A \subset B, \text{ oppure } B \supset A \tag{2.6}$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A$, $\forall A$. Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{ a \} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli $\in$ e $\subset$ (o $\subseteq$): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con $\mathscr{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{ a, b \}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{ \emptyset, \{ a \}, \{ b \}, A \} \,.$$

2.5 Operazioni tra insiemi

Definizione 2.3 (Unione di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* unione*, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi*[5]*.*

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \vee x \in B \} \,. \tag{2.7}$$

[4] A coloro che si chiedono quale possa essere l'interesse concreto a scoprire numeri primi sempre più grandi, segnaliamo che tutti gli algoritmi crittografici oggi usati, in particolare nel web, sono basati sull'uso di numeri primi con parecchie centinaia di cifre.

[5] I simboli $\vee$, *vel*, ed $\wedge$, *et*, sono normalmente usati in logica e nella teoria degli insiemi. Significano, rispettivamente, "*o, oppure*" ed "*e contemporaneamente*".

Esempio 2.1. Se $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ e $B = \{ 2, 3, 4 \}$, allora $A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$.

Definizione 2.4 (Intersezione di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* intersezione*, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \} . \tag{2.8}$$

Esempio 2.2. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{ 2, 3 \}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione e si possono verificare per utile esercizio.

$$\begin{aligned} A \cup A = A; &\quad A \cap A = A; \\ A \cup B = B \cup A; &\quad A \cap B = B \cap A; \\ A \cup \emptyset = A; &\quad A \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cup B \supseteq A; &\quad A \cap B \subseteq A; \\ A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B; &\quad A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2.9}$$

Si noti che le proprietà distributive sono due: dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione. Nel caso della somma e prodotto tra numeri vale solo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $a(b + c) = ab + ac$.

Definizione 2.5 (Differenza di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* differenza*, e si indica con $A \setminus B$, o anche con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.*

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} . \tag{2.10}$$

Esempio 2.3. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A \setminus B = \{ 0, 1 \}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si chiama anche *complementare di B rispetto ad A* e si indica con $\complement_A B$, o semplicemente con $\complement B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Segnaliamo che la teoria degli insiemi che qui stiamo presentando è la cosiddetta *teoria ingenua*, più che sufficiente per tutti i nostri scopi ma non esente da problemi: tra gli altri ricordiamo il fatto che essa può creare dei paradossi come quello famoso[6] del barbiere.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con (x,y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y:

$$(x,y)=(x_1,y_1)\Leftrightarrow x=x_1\wedge y=y_1 .$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{a,b\}=\{b,a\} \quad \text{mentre} \quad (a,b)\neq(b,a).$$

Definizione 2.6 (Prodotto cartesiano)**.** *Dati due insiemi A e B si chiama loro* prodotto cartesiano, *o semplicemente* prodotto, *l'insieme, indicato con $A\times B$, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B:*

$$A\times B\stackrel{\text{def}}{=}\{(a,b)\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\} .$$

È una conseguenza immediata della definizione che $A\times B\neq B\times A$. Nel caso particolare che $A=B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A\times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte, si scriverà A^n in luogo di $A\times A\times\cdots\times A$.

2.6 Numeri

Gli "oggetti base" su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono i seguenti:

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R} .$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il "presentare" questi insiemi.

- $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri *naturali* che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo". Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

  $$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots,n,\dots\} .$$

  L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.
- $\mathbb{Z}$ (il simbolo usato è legato alla parola tedesca *zahl*, cioè *numero*, *cifra*) è l'insieme dei numeri *interi*, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei "numeri naturali con segno" (attenzione però al fatto che $+0=-0=0$, ovvero al fatto che 0 non ha segno!):

  $$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} .$$

[6] Questo paradosso, formulato da Bertrand Russell agli inizi del 1900, è uno dei più importanti della storia della logica. Si può sintetizzare come segue: *In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. La domanda che ci poniamo è: il barbiere rade se stesso?*

Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un *successivo*.

- $\mathbb{Q}$ (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, *ratio* in latino) è l'insieme dei numeri *razionali*, ovvero delle *frazioni* con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, occorre tenere conto che due frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali, rappresentano lo stesso numero. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):
$$\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 \,\}\,.$$
I numeri razionali si possono anche scrivere come *numeri decimali*, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di *successivo* di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):
$$\text{se } a = \frac{m}{n} \text{ e } b = \frac{p}{q}\text{, allora il numero } c = \frac{a+b}{2} \text{ è razionale ed è compreso tra } a \text{ e } b.$$
- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri *reali*. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come π, ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare "all'estrema destra", e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall'insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell'ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in $\mathbb{N}$ non si può sempre fare la sottrazione, mentre in $\mathbb{Z}$ e successivi si, in $\mathbb{Z}$ non si può sempre fare la divisione, mentre in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si (tranne per zero, ovviamente!).

Occasionalmente avremo la necessità di utilizzare anche l'insieme dei numeri complessi, che si indica con $\mathbb{C}$ e che è un soprainsieme dell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il vantaggio principale di questo insieme numerico è che in esso si può sempre estrarre la radice quadrata, anche dei numeri negativi.

2.7 Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nell'analisi. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

Definizione 2.7. *Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano* intervalli*, con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

$]a,a[=(a,a)$	$\emptyset$	*intervallo vuoto*
$]a,b[=(a,b)$	$\{\, x \mid a < x < b \,\}$	*intervallo limitato* aperto
$[a,b]$	$\{\, x \mid a \le x \le b \,\}$	*intervallo limitato* chiuso
$[a,b[=[a,b)$	$\{\, x \mid a \le x < b \,\}$	*intervallo limitato* chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a,b]=(a,b]$	$\{\, x \mid a < x \le b \,\}$	*intervallo limitato* aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a,+\infty[=(a,+\infty)$	$\{\, x \mid x > a \,\}$	*intervallo superiormente illimitato* aperto
$[a,+\infty[=[a,+\infty)$	$\{\, x \mid x \ge a \,\}$	*intervallo superiormente illimitato* chiuso
$]-\infty,a[=(-\infty,a)$	$\{\, x \mid x < a \,\}$	*intervallo inferiormente illimitato* aperto
$]-\infty,a]=(-\infty,a]$	$\{\, x \mid x \le a \,\}$	*intervallo inferiormente illimitato* chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo.
Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti, *quelli illimitati anche* semirette.

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme $\mathbb{R}$ si usa la scrittura $]-\infty,+\infty[$, oppure $(-\infty,+\infty)$ e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Si noti che abbiamo usato due notazioni diverse per questi intervalli: in una si usano solo parentesi quadre (opportunamente orientate), nell'altra parentesi quadre per indicare che l'estremo in questione è compreso, parentesi tonde per indicare che l'estremo in questione è escluso. Entrambe le notazioni sono consentite dalla normativa e dalla prassi. Nei testi italiani la seconda è la più diffusa. Nel seguito di questi appunti sarà invece utilizzata esclusivamente la prima, che rispetta meglio la "regola delle parentesi".

Nel caso che $a = b$ l'intervallo chiuso $[a,a]$ si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo*.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza*. L'intervallo (aperto) di centro x_0 e raggio δ è allora

$$]x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta[\,.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

2.8 Funzioni

Dati due insiemi A e B hanno grande interesse nelle applicazioni le relazioni che possono intercorrere tra di loro. Tra tutte le relazioni hanno un interesse cruciale le *funzioni*, in particolare le funzioni che collegano tra di loro insiemi di numeri reali. Vista l'importanza del concetto diamo una definizione esplicita di funzione, che riassuma quelle che sono le proprietà che ci interesseranno.

Definizione 2.8. *Dati due insiemi A e B (che nella maggior parte dei casi saranno due insiemi di numeri reali), si dice* funzione *di A in B una qualunque legge che faccia corrispondere* a ogni *elemento di A* uno ed un solo elemento *di B.*

L'insieme A è detto dominio *della funzione, l'insieme B è detto* codominio*. Se x è un elemento dell'insieme A e y è l'*unico *elemento di B che corrisponde ad A, si dice che y è* funzione *di x e si scrive $y = f(x)$ (leggi: "y uguale a effe di x").*

È molto importante ricordare che per assegnare una funzione occorre assegnare

- il dominio
- il codominio
- una legge o regola che indichi, per ogni x del dominio, quale sia l'unico y corrispondente del codominio.

Una (apparente) eccezione a questo fatto si ha nel caso delle funzioni elementari che hanno come dominio un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$ e come codominio $\mathbb{R}$. Si veda a questo proposito il successivo paragrafo 9.7 nella pagina 95.

La notazione più completa per le funzioni è la seguente:

$$f : A \to B,\ x \mapsto f(x),$$

ma spesso si scrive solo

$$x \mapsto f(x),$$

se gli insiemi A e B sono già stati precisati o sono chiari dal contesto. Si può anche dire semplicemente *la funzione $y = f(x)$*, anche se i puristi potrebbero storcere il naso.

Esempio 2.4. Se A e B sono l'insieme dei numeri reali, si può considerare la funzione che a ogni numero reale x fa corrispondere il suo quadrato. In questo caso si dovrebbe scrivere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

ma si può scrivere anche semplicemente

$$x \mapsto x^2$$

oppure (e noi lo faremo sistematicamente)

$$y = x^2.$$

Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce, come quello che segue.

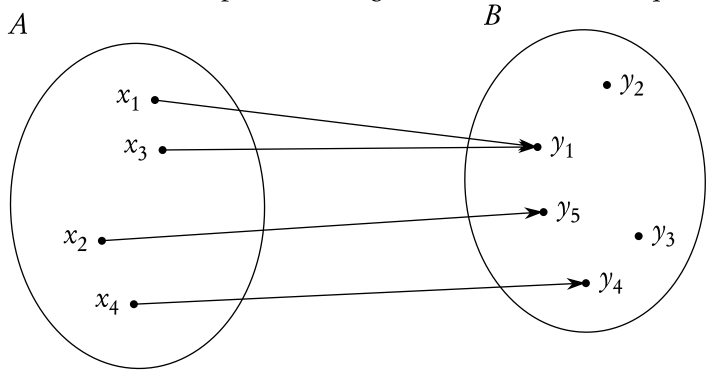


Figura 2.1 *Diagramma "a frecce" per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti)*

Si noti che *è obbligatorio* che da *ogni* punto (elemento dell'insieme) A parta *esattamente* una freccia, mentre sui punti dell'insieme B possono anche arrivare *più* frecce, oppure *nessuna* freccia. Si potrebbe dire, usando un linguaggio figurato, che A è l'insieme degli arcieri, B l'insieme dei bersagli e che ogni arciere ha a disposizione nella propria faretra solo una freccia che è costretto a lanciare, mentre non ci sono limitazioni sui bersagli da colpire: ci possono essere bersagli colpiti da più frecce, e anche bersagli non colpiti da alcuna freccia.

Ha particolare interesse nelle applicazioni la determinazione del sottoinsieme del codominio costituito da tutti i punti dove arriva almeno una freccia, cioè, formalmente, l'insieme

$$I \subseteq B = \{\, y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \,\}, \tag{2.11}$$

o anche, a parole, l'insieme degli y di B tali che esiste almeno un x di A, la cui immagine sia y. L'insieme I si chiama *insieme immagine*. L'insieme immagine si indica anche con $f(A)$, proprio a significare il fatto che si tratta dell'insieme delle immagini di tutte le x di A. Se C è un sottoinsieme di A, si può considerare l'insieme delle immagini di tutte le x di C (che sarà naturalmente un sottoinsieme dell'insieme immagine). Questo insieme si indica con $f(C)$.

È chiaro che rappresentazioni grafiche come quella appena vista hanno senso solo se gli insiemi in questione sono finiti: in caso contrario si dovrebbero disegnare infinite frecce, cosa chiaramente impossibile.

Si usano anche altri tipi di rappresentazione per le funzioni. Per esempio se si considera la funzione che a ogni numero naturale compreso tra 1 e 5 fa corrispondere la sua metà (funzione che ha come dominio i numeri naturali citati e come codominio i numeri razionali), si può usare una tabella a doppia entrata, in cui nella prima colonna si scrivono i numeri naturali 1, 2, ..., 5 e nella seconda colonna le *corrispondenti* metà di questi numeri.

x	$x/2$
1	$1/2$
2	1
3	$3/2$
4	2
5	$5/2$

Tabella 2.2 *Rappresentazione "tabulare" di una funzione*

Un altro tipo di rappresentazione è quello dei diagrammi a torta, molto significativo in casi speciali. Consideriamo, ad esempio, un corso universitario dove si sono iscritti 120 alunni, provenienti da varie provincie, come nella tabella che segue:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
5	70	15	10	20

Si comincerà con il calcolare le percentuali relative alle varie provincie:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
4.17	58.33	12.5	8.33	16.67

Successivamente si calcoleranno le ampiezze delle "fette di torta" da utilizzare per ciascuna provincia, tenendo conto che la torta totale ha un'apertura di 360°:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
15°	210°	45°	30°	60°

Il grafico è a questo punto immediato:

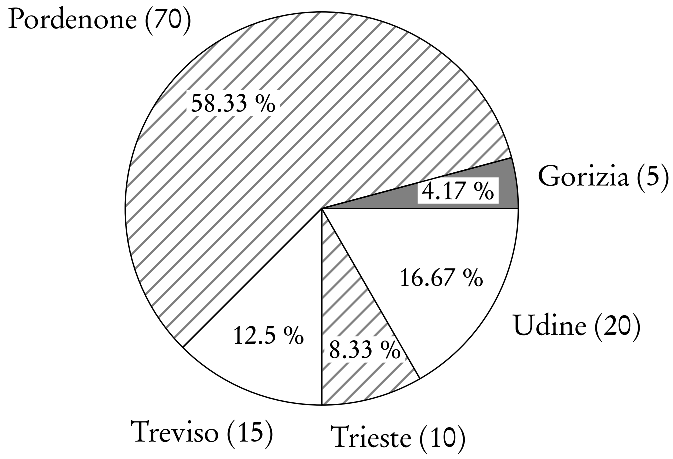


Figura 2.2 *Provenienza degli studenti del Corso …, ripartiti per Provincia, diagramma "a torta"*

Ancora un'altra possibilità è quella di un diagramma a barre, che proponiamo qui di seguito, senza commenti.

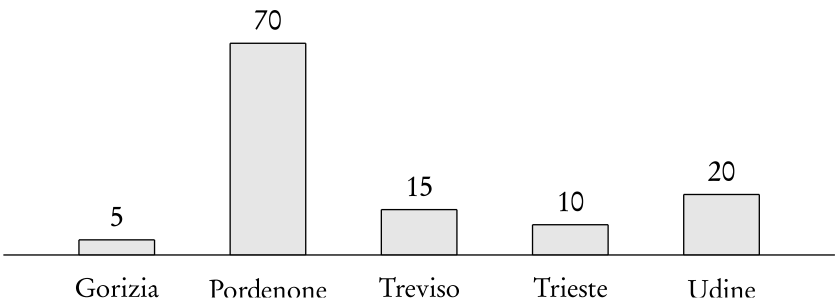


Figura 2.3 *Provenienza degli studenti del Corso …, ripartiti per Provincia, diagramma "a barre"*

La rappresentazione più conveniente nel caso delle funzioni tra due insiemi di numeri reali è però quella dei diagrammi o grafici cartesiani, in particolare nel caso in cui gli insiemi siano infiniti quando le rappresentazioni precedenti non sono utilizzabili. L'idea è di considerare un piano in cui si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali per semplicità) Oxy e rappresentarvi tutte le coppie (x, y) in cui x è un punto (numero) del dominio della funzione e $y = f(x)$ è il *corrispondente* valore nel codominio della funzione. Riprendendo in esame l'esempio proposto nella tabella 2.2, dobbiamo rappresentare i punti

$$A = (1, 1/2),\ B = (2, 1),\ C = (3, 3/2),\ D = (4, 2),\ E = (5, 5/2),$$

ottenendo il grafico che segue.

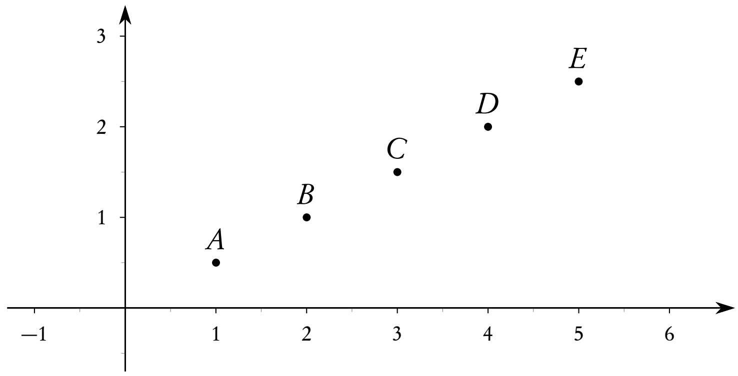


Figura 2.4 *Esempio di grafico cartesiano*

Il grafico della precedente figura 2.4 è in realtà un grafico a frecce "compattato": siccome i valori del dominio sono punti dell'asse x e quelli del codominio punti dell'asse y, possiamo sempre pensare di tracciare delle frecce che colleghino i punti del dominio con i corrispondenti del codominio, come quelle della figura 2.1, solo che è opportuno che le frecce "passino" per i punti A, B, …:

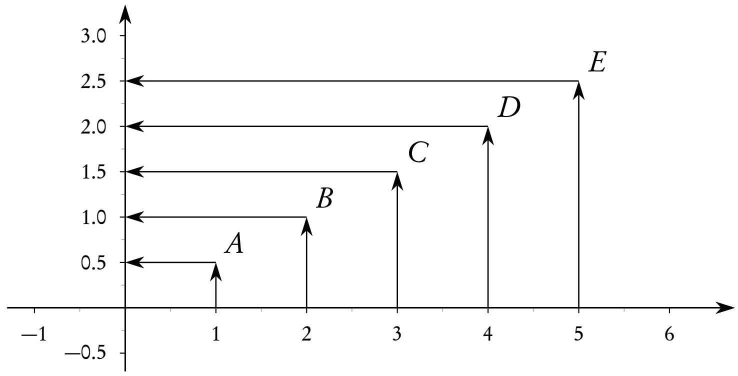


Figura 2.5 *Esempio di grafico cartesiano, con frecce*

Il grafico 2.4 "compatta" il grafico 2.5 nel senso che ne prende solo gli elementi essenziali, cioè gli "spigoli delle frecce": è evidente che dalla conoscenza degli spigoli si possono facilmente ricostruire le frecce.

Se si confronta la figura 2.4 con la tabella 2.2, ci si rende immediatamente conto dei notevoli vantaggi che il grafico presenta: da esso si può per esempio capire, "a colpo d'occhio", che al crescere di x nel dominio la corrispondente y del codominio cresce, e che tale crescita è *costante*. La cosa diventa ancora più significativa se si vuole considerare la funzione che a ogni numero reale x faccia corrispondere la sua metà: a differenza di quanto succedeva con la funzione rappresentata nella tabella 2.2, questa volta la x non varia più in un insieme finito e quindi una rappresentazione tabulare non ha alcun senso[(7)]. Un

[7] Si noti comunque che la regola (legge) che collega la x alla y è la stessa del caso precedente: per assegnare una funzione *non* è

diagramma cartesiano è decisamente più significativo:

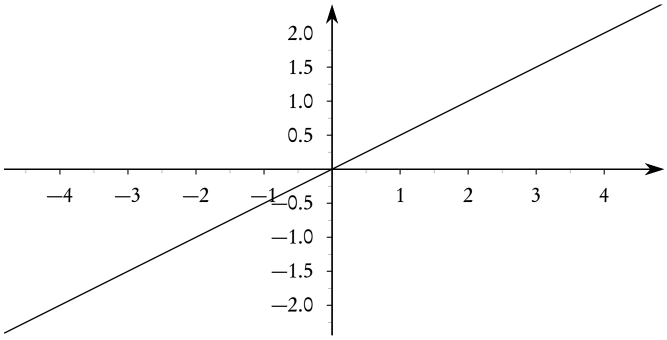


Figura 2.6 *Grafico della funzione* $y = {}^x/_2$

Naturalmente il diagramma 2.6 contiene anche i punti già rappresentati nel diagramma 2.4:

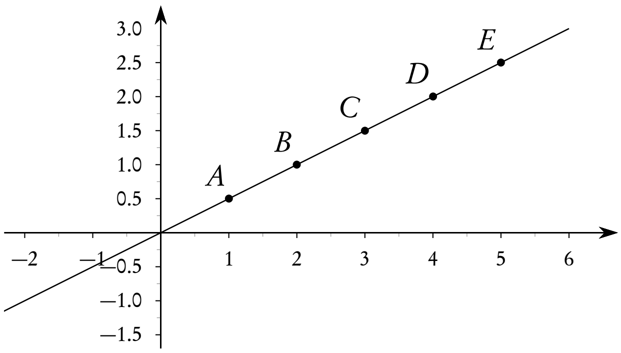


Figura 2.7 *Grafico della funzione* $y = {}^x/_2$*, con evidenziati alcuni punti*

ma contiene anche infiniti altri punti. Anche se non è chiaramente possibile rappresentare nel grafico *tutte* le coppie $(x, y) = (x, f(x))$ che visualizzano l'andamento della funzione, tuttavia la parte tracciata è sufficiente a rendere evidenti quasi tutte le proprietà che interessano.

Una buona parte del corso di Matematica Generale sarà dedicata proprio allo studio di strategie adatte a evidenziare le caratteristiche essenziali di una funzione (avente come dominio e codominio sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali) e a tracciarne un grafico indicativo. Un grande aiuto in questo senso può essere fornito dai numerosi software dedicati allo scopo[8], ma, come al solito, bisogna tenere conto che il computer *è una macchina finita* e quindi non può risolvere tutti i problemi. A questo proposito proponiamo un esempio "estremo", precisamente il grafico della funzione

$$f(x) = \sin {}^1/_x .$$

sufficiente assegnare la regola di calcolo, occorre anche fissare il dominio e il codominio.

[8]Tra i software commerciali segnaliamo *Mathematica* e *Maple*, due pacchetti estremamente sofisticati e complessi. Tra i software non commerciali segnaliamo *Maxima* (molto simile a *Mathematica*™ anche se non ne possiede tutte le potenzialità) e *Geogebra*. Riteniamo quest'ultimo particolarmente adatto per questo corso e segnaliamo che la maggior parte dei grafici contenuti in questo testo sono ottenuti proprio con *Geogebra*.

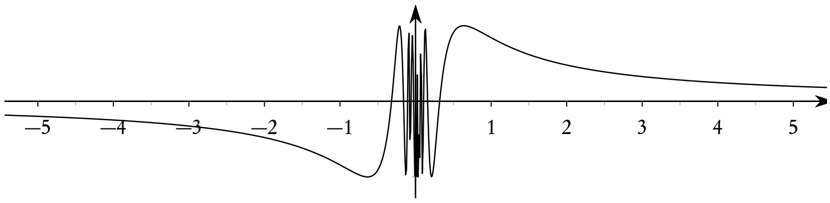


Figura 2.8 *Grafico di* $f(x) = \sin {}^1\!/\!_x$

È chiaro che, per valori di x prossimi allo zero, questo grafico è poco significativo[9]. Purtroppo nemmeno zoomate (in orizzontale) migliorano granché la situazione, come mostrano le due successive figure.

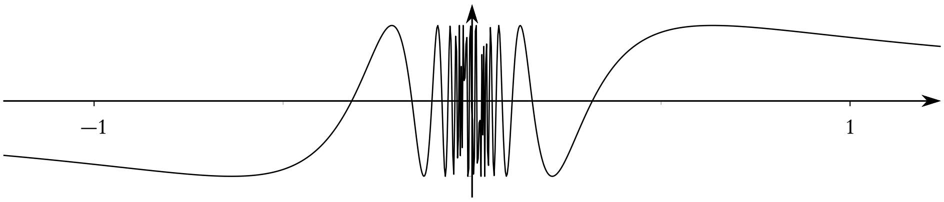


Figura 2.9 *Grafico di* $f(x) = \sin {}^1\!/\!_x$*, con uno zoom sull'asse delle* x

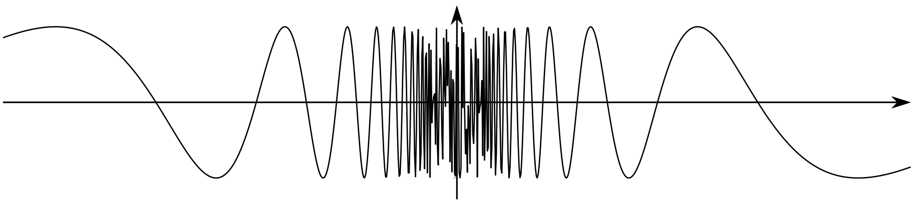


Figura 2.10 *Grafico di* $f(x) = \sin {}^1\!/\!_x$*, con un ulteriore zoom sull'asse delle* x

Naturalmente non sempre le cose vanno così male (per fortuna!). Per la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$, per esempio, il grafico fornito da un software di calcolo è sufficientemente accurato da contenere con buona accuratezza le informazioni necessarie.

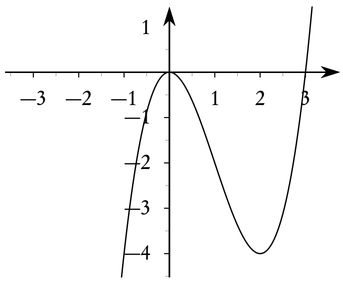


Figura 2.11 *Grafico di* $f(x) = x^3 - 3x^2$

[9] L'esempio che stiamo considerando richiede la conoscenza di elementi di trigonometria: chi non li possiede non si preoccupi, ne faremo un cenno nel seguito.

Da questo grafico si vede subito che, al crescere della x da valori negativi fino allo 0, anche la corrispondente y cresce (e abbastanza rapidamente) fino a raggiungere il valore 0; successivamente se la x cresce da 0 a 2, la y decresce fino a raggiungere il valore -4, per poi aumentare di nuovo (e di nuovo abbastanza rapidamente) al crescere di x.

In tutti i grafici cartesiani che abbiamo fatto, tranne quelli delle figure 2.9 e 2.10, abbiamo usato la stessa unità di misura sui due assi: sistemi cartesiani siffatti sono detti *monometrici*. Di solito però nelle applicazioni la cosa non è possibile, e ne vedremo in seguito i motivi. È opportuno tenere presente che se un sistema cartesiano nel piano non è monometrico, le figure possono essere deformate. Per esempio i due grafici della figura seguente mostrano la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, in due diversi sistemi di coordinate, di cui solo il primo è monometrico.

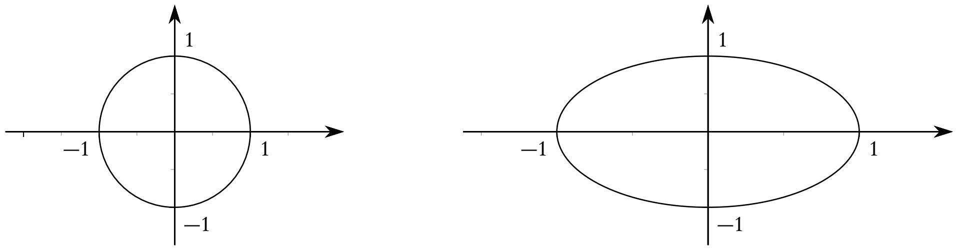


Figura 2.12 *Circonferenza di centro l'origine e raggio* 1*, in due diversi sistemi di coordinate, il primo monometrico, il secondo no*

2.9 Funzioni di due variabili - Introduzione

Un caso molto importante di funzioni con cui avremo a che fare nel seguito è quello delle funzioni in cui il dominio è un insieme di coppie di numeri reali (cioè un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) e il codominio è l'insieme dei numeri reali: diremo brevemente *funzioni di due variabili*. Potremo usare una scrittura del tipo

$$z = f(x, y). \tag{2.12}$$

La rappresentazione grafica cartesiana di funzioni di questo tipo richiede un sistema di tre assi (che per noi saranno sempre mutuamente ortogonali): abbiamo bisogno infatti di una coppia di numeri per i punti del dominio, più un numero per i corrispondenti valori del codominio. Come vedremo, nelle situazioni che ci interesseranno, questi grafici avranno l'aspetto di superfici nello spazio. Riservandoci di approfondire a suo tempo l'argomento, proponiamo solo un grafico di esempio nella figura 2.13.

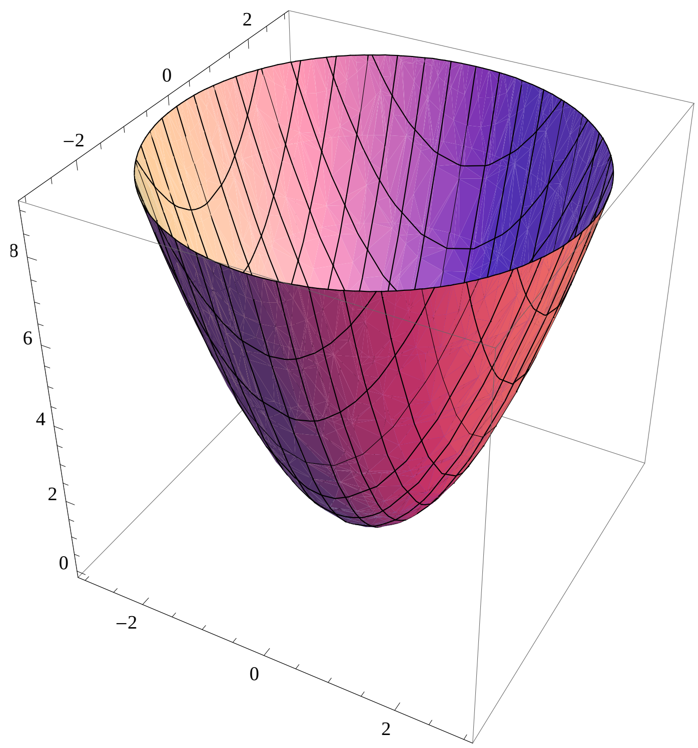


Figura 2.13 *Grafico della funzione* $z = x^2 + y^2$

2.10 Esercizi

Esercizio 2.1. *Dati gli insiemi* $A =]-\infty, 2]$, $B = \{1, 2\}$ *e* $C = [0, 5[$, *determinare*

1. $(A \setminus C) \cup B$;
2. $(A \setminus B) \cup C$;
3. $(A \setminus B) \cap C$;
4. $(C \setminus B) \cap A$.

Esercizio 2.2. *Dati gli insiemi* $A = \{1\}$, $B =]-1, 2[$ *e* $C =]0, +\infty[$, *determinare*

1. $(A \cup C) \cap B$;
2. $A \setminus C$;
3. $(C \setminus A) \cap B$;
4. $(C \cup B) \setminus A$;
5. $(b \setminus A) \cap C$.

Esercizio 2.3. *Discutere i seguenti quesiti, in modo sintetico ma esauriente.*

1. *Si possono trovare tre insiemi* A, B, C *tali che* $(A \cap B) \cup C = \emptyset$*?*
2. *Si possono trovare due insiemi* A *e* B *tali che* $A \cap B = A$*?*
3. *Si possono trovare tre insiemi* A, B, C *tali che* $(A \cap B) \cup C = A$*?*
4. *Se* $A \subseteq B$ *allora* $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

3 Equazioni

3.1 Equazioni lineari in una o due incognite

La più generale equazione *lineare* (cioè di primo grado) *in un'incognita* è del tipo

$$ax = b \quad , \quad a \neq 0 . \tag{3.1}$$

Essa ammette sempre una e una sola soluzione[1]:

$$x = \frac{b}{a} . \tag{3.2}$$

Se si prescinde dalla condizione $a \neq 0$, occorre distinguere tre casi nella valutazione delle soluzioni di un'equazione come quella considerata, e precisamente:

- $a \neq 0$: l'equazione ha, come già detto, solo la soluzione b/a;
- $a = 0 \wedge b \neq 0$: l'equazione non ha alcuna soluzione;
- $a = 0 \wedge b = 0$: l'equazione ammette infinite soluzioni (tutti i numeri reali).

È molto importante tenere conto dell'osservazione contenuta nelle righe precedenti, in particolare nella risoluzione di equazioni parametriche. Chiariamo il concetto con un esempio.

Esempio 3.1. Discutere ed eventualmente risolvere l'equazione seguente:

$$(a^2 - 1)x = a + 1 .$$

Tenendo conto di quanto detto si conclude che:

- se $a \neq \pm 1$, l'equazione ha la sola soluzione $x = (a+1)/(a^2-1) = 1/(a-1)$;
- se $a = -1$, l'equazione ha come soluzioni tutti i numeri reali;
- se $a = 1$, l'equazione non ha soluzioni.

La più generale equazione *lineare in due incognite* è del tipo

$$ax + by = c \quad , \quad (a, b) \neq (0, 0) . \tag{3.3}$$

La condizione sui parametri a e b si può leggere dicendo che essi non sono mai contemporaneamente nulli. Un'equazione come questa ha sempre infinite soluzioni: si tratta di tutte le coppie che si ottengono attribuendo ad una della due incognite un valore arbitrario e ricavando l'altra dall'equazione in una incognita rimanente (purchè il coefficiente di quest'altra incognita sia diverso da zero).

[1] Un importante teorema (*Teorema fondamentale dell'algebra*) ha come conseguenza che un'equazione di grado n ha, nell'insieme dei numeri reali, al massimo n soluzioni. Un'equazione del tipo 3.1 ha sempre esattamente una soluzione (come il suo grado), equazioni di grado superiore possono avere anche meno soluzioni di quanto indichi il grado (come si può vedere per esempio nelle equazioni di secondo grado).

Per esempio l'equazione

$$2x+3y=1$$

ha come soluzioni le coppie $(0,1/3)$, $(1/2,0)$, $(-1,1)$, ecc.

L'equazione, pensata in due incognite, con coefficiente della y uguale a 0,

$$3x=1,\ \text{ovvero } 3x+0y=1\,,$$

ha come soluzioni le coppie $(1/3,1)$, $(1/3,2)$, $(1/3,-5)$, ecc.

3.2 Sistemi di equazioni lineari in due incognite

Un sistema di equazioni consiste nella determinazione delle soluzioni comuni a due (o più) equazioni. Consideriamo, ed è il caso che ci interessa, un *sistema* di due equazioni lineari (cioè di primo grado) in due incognite:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & p \\ cx+dy & = & q \end{array}\right. . \tag{3.4}$$

Anche il sistema di equazioni ha un grado che si ottiene facendo il *prodotto* dei gradi delle due equazioni: in questo caso si hanno due equazioni di primo grado e quindi il sistema è anch'esso di primo grado.

Si dice *soluzione* del sistema una coppia di reali che sia soluzione comune della prima e della seconda equazione. Un sistema come quello proposto può avere:

- una sola soluzione (e allora si dice *determinato*);
- infinite soluzioni (e allora si dice *indeterminato*);
- nessuna soluzione (e allora si dice *incompatibile*, anche se di solito si usa il termine *impossibile*).

I sistemi che hanno soluzioni (una o infinite) si dicono genericamente *compatibili*.

Consideriamo alcuni esempi.

- $\left\{\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{array}\right.$: il sistema è compatibile e determinato, e ha come unica soluzione la coppia $(1,-1)$.
- $\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-4y=2 \end{array}\right.$: il sistema è compatibile e indeterminato, e ha come soluzioni tutte le coppie $(2t+1,t)\,\forall t\in\mathbb{R}$.
- $\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{array}\right.$: il sistema è incompatibile.

La risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite può avvenire in maniera elementare usando il cosiddetto *metodo di sostituzione*: si ricava un'incognita in una delle due equazioni e la si sostituisce nell'altra, ottenendo un'equazione in una sola incognita, facilmente risolubile; a questo punto il gioco è fatto. Per completezza riporto i calcoli necessari a risolvere il primo dei sistemi appena visti.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y=1-2x \\ x-y=2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y=1-2x \\ x-(1-2x)=2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y=1-2x \\ x=1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y=-1 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

3.3 Equazioni di secondo grado in una incognita

La più generale equazione di secondo grado in una incognita è del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0. \tag{3.5}$$

Per risolvere questa equazione si può ricorrere alla nota formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{3.6}$$

che fornisce

- 2 soluzioni distinte se la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ (detta *discriminante* o semplicemente *Delta*) è maggiore di zero;
- 1 sola soluzione (si usa anche dire *due soluzioni coincidenti* oppure *una soluzione doppia*) se $\Delta = 0$;
- nessuna soluzione nell'insieme dei numeri reali se $\Delta < 0$. In quest'ultimo caso l'equazione ha 2 soluzioni nell'insieme dei numeri complessi, ma non saremo interessati a valutarle.

Esempi.

- $2x^2 - 3x - 5 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(-5)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \left\langle \begin{matrix} 5/2 \\ -1 \end{matrix} \right.$
- $x^2 - 6x + 9 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$
- $x^2 - 2x + 2 = 0 \implies$ nessuna soluzione perché $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 < 0$.

3.4 Qualche equazione di grado superiore

Esistono formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado (formule che usano i numeri complessi), ma non saremo interessati a considerarle. Non esistono invece formule risolutive per equazioni dal quinto grado in su. Noi ci limiteremo a considerare solo due casi molto semplici.

3.4.1 Equazioni di tipo elementare

Sono quelle del tipo

$$ax^n + b = 0, \quad a \neq 0. \tag{3.7}$$

Esse si risolvono portando b a secondo membro, dividendo per a e successivamente estraendo la radice n-esima, tenendo conto delle differenze tra il caso di n pari e di n dispari, come mostrano gli esempi che seguono.

Esempio 3.2. $2x^3 + 54 = 0 \implies x^3 = -27 \implies x = -3$.

Esempio 3.3. $3x^3 - 12 = 0 \implies x^3 = 4 \implies x = \sqrt[3]{4}$.

Esempio 3.4. $2x^4 + 15 = 0 \implies x^4 = -15/2 \implies$ nessuna soluzione.

Esempio 3.5. $3x^4 - 14 = 0 \implies x^4 = 14/3 \implies x = \pm\sqrt[4]{14/3}$.

3.4.2 Equazioni scomponibili in fattori

Per risolvere le altre equazioni di grado superiore al secondo consideriamo solo la seguente strategia: portare tutto a primo membro, scrivendo l'equazione nella forma standard

$$f(x)=0;$$

scomporre (se possibile!) $f(x)$ nel prodotto di fattori di primo e secondo grado e successivamente applicare la *Legge dell'annullamento del prodotto*:

Teorema 3.1 (Legge dell'annullamento del prodotto)**.** *Un prodotto di due o più fattori è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero.*

Per capire praticamente come procedere, ragioniamo su alcuni esempi.

Esempio 3.6. $x^3-x^2=0 \implies x^2(x-1)=0 \implies x^2=0 \vee x-1=0 \implies x=0 \vee x=1.$

Esempio 3.7. $x^3-1=0 \implies (x-1)(x^2+x+1)=0 \implies x=1$ solamente, in quanto l'equazione $x^2+x+1=0$ non ha soluzioni ($\Delta<0$).

Esempio 3.8. $x^4-1=0 \implies (x^2-1)(x^2+1)=0 \implies (x-1)(x+1)(x^2+1)=0 \implies x=\pm 1.$ (Anche qui l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni).

3.5 Equazioni con radicali

Le equazioni contenenti radicali sono di norma molto difficili da risolvere e non esiste una tecnica standard per trattarle. Ci occuperemo solo di un caso molto semplice, precisamente le equazioni contenenti un solo radicale, normalmente quadratico o, al massimo, cubico.

L'idea base è quella di *isolare il radicale* lasciandolo a primo membro, preferibilmente preceduto dal segno $+$, e portando tutto il resto a secondo membro; successivamente si *elevano ambo i membri al quadrato o al cubo*, riducendosi così a una equazione non contenente radicali. Purtroppo l'elevazione al quadrato può comportare l'aggiunta di soluzioni estranee: occorrerà dunque, a posteriori, una verifica dell'accettabilità delle soluzioni trovate. Nessun problema invece nel caso di elevazione al cubo. Si vedano gli esempi che seguono per chiarire il metodo.

Esempio 3.9. $\sqrt{x+2}+x=0, \quad \sqrt{x+2}=-x, \quad x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0,$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{array}{c}-1\\ 2\end{array}\right.$, e si verifica subito che solo la soluzione $x=-1$ è accettabile.

Esempio 3.10. $\sqrt{x+2}-x=0, \quad \sqrt{x+2}=x, \quad x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0,$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{array}{c}-1\\ 2\end{array}\right.$, e si verifica subito che solo la soluzione $x=2$ è accettabile.

Esempio 3.11. $\sqrt{1+x^2}=x+2, \quad 1+x^2=(x+2)^2, \quad 4x+3=0, \quad x=-3/4$, soluzione accettabile.

Esempio 3.12. $\sqrt{2x^2+1}=1-x, \quad 2x^2+1=(x+2)^2, \quad 2x^2+1=1-2x+x^2, \quad x^2+2x=0,$ $x_1=-2, x_2=0$, entrambe soluzioni accettabili.

Esempio 3.13. $\sqrt[3]{x^2-x-1}=x-1, \quad x^2-x-1=x^3-3x^2+3x-1, \quad x^3-4x^2+4x=0, \quad x(x^2-4x+4)=0,$
$x=0 \vee x=2$, entrambe accettabili.

3.6 Sistemi di equazioni di grado superiore in due incognite

Saremo interessati a sistemi, di secondo e quarto grado, di due equazioni. Poiché il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni, se abbiamo un'equazione di primo grado e una di secondo grado il sistema avrà grado 2; se abbiamo due equazioni di secondo grado il sistema avrà grado 4. I sistemi di secondo grado si possono risolvere abbastanza facilmente, come vedremo su esempi, quelli di quarto grado sono spesso molto complessi e considereremo solo alcuni esempi elementari.

Esempio 3.14. Un sistema di secondo grado.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-y^2+y-1=0 \end{cases}.$$

Ricaviamo dalla prima $x=2-y$ e sostituiamo nella seconda, ottenendo $(2-y)^2-y^2+y-1=0$, ovvero $3-3y=1$, da cui $y=1$; sostituendo il valore trovato nella prima equazione, otteniamo $x=1$. Possiamo dire che la coppia di numeri $(1,1)$ è l'unica soluzione di questo sistema.

Esempio 3.15. Ancora un sistema di secondo grado.

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}.$$

Ricaviamo dalla prima $x=-2y$ e sostituiamo nella seconda, ottenendo, dopo qualche semplificazione, $5y^2-1=0$, da cui $y=\pm 1/\sqrt{5}$; sostituendo nella prima equazione troviamo $x=\mp 2/\sqrt{5}$. Dunque il sistema ha due soluzioni, precisamente le coppie

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\quad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

di numeri reali.

Esempio 3.16. Un sistema di quarto grado.

$$\begin{cases} x^2+4y^2-4=0 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases}.$$

Possiamo procedere ricavando $x^2=4-4y^2$ dalla prima equazione per poi sostituirlo nella seconda, ottenendo, dopo qualche semplificazione, $3y^2=2$, da cui $y=\pm\sqrt{2/3}$. Sostituendo, con ordine, uno alla volta i due valori trovati per y nella prima equazione, troviamo, per ciascuno, due valori di x. In totale abbiamo 4 coppie di soluzioni:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

In seguito vedremo l'interpretazione grafica di questi risultati.

3.7 Esercizi

Esercizio 3.1. *Risolvere i seguenti sistemi di equazioni.*

1. $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y-x+1=0 \\ x-y-8=0 \end{cases}$

4 Un po' di geometria analitica

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti fondamentali di geometria analitica, concetti che saranno utilizzati nel seguito del corso. In vista dello studio delle funzioni reali di due variabili reali, introdurremo anche alcune idee fondamentali della geometria analitica dello spazio.

4.1 Coordinate cartesiane di punti nel piano e nello spazio

Nello spazio si può introdurre un *Sistema di coordinate cartesiane* considerando 3 rette non complanari passanti per uno stesso punto O. Tutte le proprietà metriche (cioè quelle che riguardano lunghezze, distanze, ecc.) si esprimono in maniera più semplice se le tre rette sono ortogonali, e in questo caso si parla di coordinate cartesiane *ortogonali*. Su ciascuna delle tre rette si sceglie un'unità di misura e un verso e, quindi, un sistema di ascisse. Per ragioni di semplicità si sceglie di solito la stessa unità sulle tre rette e allora si parla di sistema cartesiano *monometrico*. Nel seguito useremo sempre un sistema *cartesiano ortogonale e monometrico*. Il punto di intersezione delle tre rette si chiama *origine* del sistema di coordinate. Le tre rette, dette anche *assi*, si indicano con O_x, O_y, O_z, o, semplicemente con x, y, z, se non ci sono possibilità di equivoci. I piani O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}, o, semplicemente, xy, xz, yz, si chiamano piani coordinati. Naturalmente nel piano bastano solo due assi e in questo caso l'asse O_x si chiama anche *asse delle ascisse*, l'asse O_y *asse delle ordinate*. Un sistema del tipo detto si indica con Oxy nel piano e con $Oxyz$ nello spazio.

Una volta scelto il sistema $Oxyz$, ad ogni punto P dello spazio si può far corrispondere una terna di numeri reali (una coppia nel piano), con la costruzione indicata in figura 4.1.

Per indicare le coordinate del punto P si scrive $P(x,y,z)$ ($P(x,y)$ nel piano), o anche, a volte, $P = (x,y,z)$ ($P = (x,y)$ nel piano).

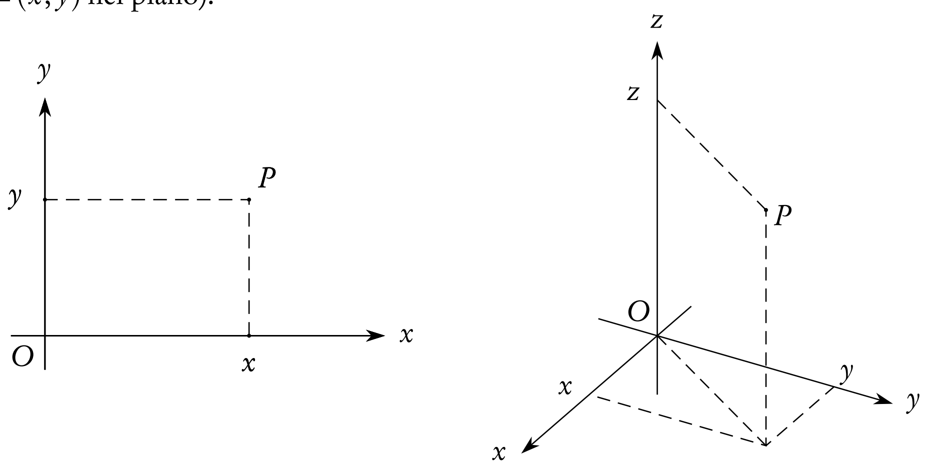


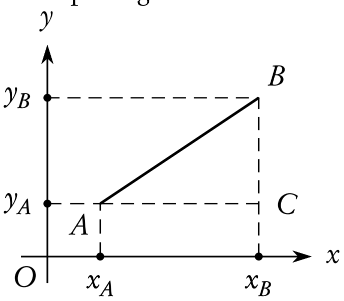
Figura 4.1 *Coordinate cartesiane di un punto nel piano e nello spazio*

4.2 Le formule fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio

Dati, nel piano riferito al sistema Oxy, due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, la *distanza tra i due punti* A, B (nell'ipotesi che il sistema di coordinate cartesiane sia ortogonale e monometrico) è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,. \tag{4.1}$$

Poiché questa formula è legata all'applicazione del teorema di Pitagora, la ortogonalità del sistema di coordinate è essenziale. Lo si può agevolmente controllare con riferimento alla figura 4.2.



$$\overline{AC} = x_C - x_A = x_B - x_A$$
$$\overline{BC} = y_B - y_C = y_B - y_A$$

Figura 4.2 *Distanza tra due punti e teorema di Pitagora*

Le coordinate del *punto medio* M del segmento AB sono invece date dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\,. \tag{4.2}$$

Tra le formule fondamentali riportiamo anche quella del *baricentro* G di un triangolo di vertici $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, che è sempre dato dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,. \tag{4.3}$$

4.3 La retta nel piano cartesiano

L'equazione generale di una retta nel piano cartesiano è

$$ax + by + c = 0 \tag{4.4}$$

dove i numeri a e b (coefficienti di x e y) non possono essere contemporaneamente nulli. Per disegnare la retta è sufficiente trovare due punti cioè due soluzioni dell'equazione.

Esempio 4.1. Rappresentare graficamente la seguente retta: $3x+2y-6=0$. Ponendo successivamente, per esempio, $x=0$ e poi $y=0$ si trova, rispettivamente, $y=3$ e $x=2$. Dunque la retta passa per i punti $(0,3)$ e $(2,0)$. Il grafico è il seguente.

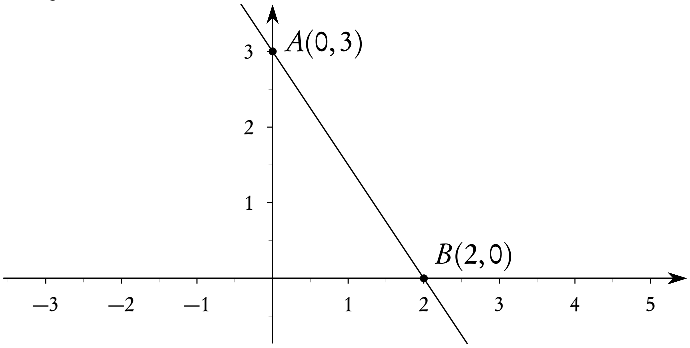


Figura 4.3 *Retta* $3x+2y-6=0$

Se $b\neq 0$ l'equazione si può trasformare nella forma

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b},$$

che di solito si scrive

$$y=mx+q. \tag{4.5}$$

Il numero m si chiama *coefficiente angolare* o *pendenza* della retta, il numero q *ordinata all'origine*. Per esempio la retta della figura 4.3 si può scrivere nella forma

$$y=-\frac{3}{2}x+3,$$

con $m=-3/2$ e $q=3$. Si può osservare che

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}, \tag{4.6}$$

e la stessa proprietà vale se si prendono due altri punti qualunque della retta. Questo rende evidente il perché del nome *coefficiente angolare*: si tratta del rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale quando ci si muove da un punto all'altro della retta. È evidente che se $m>0$ la retta è "in salita", se $m<0$ "in discesa", se $m=0$ è orizzontale. Il motivo del nome *ordinata all'origine* per il numero $q=2$ risulta evidente dalla figura 4.3. La formula (4.6) si usa di solito scrivere

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{4.7}$$

In sostanza la *differenza* y_B-y_A si indica con Δy (leggi "*delta* y"), la differenza x_B-x_A si indica con Δx (leggi "*delta* x"). Questa è una notazione molto importante e di uso comune: se si ha una qualunque grandezza, g, variabile, la differenza tra due valori della grandezza si chiama *variazione* e si indica con

Δg. Se Δg è positiva si parla di *incremento*, se Δg è negativa si parla di *decremento*. Per esempio se il guadagno g della mia impresa nel 2008 è stato di 150.000 \$ e nel 2009 di 180000 \$, si ha $\Delta g = 30000$ \$, cioè un *incremento* di 30000 \$ di guadagno, in un anno.

Le rette verticali sono caratterizzate dall'avere $b = 0$ e quindi equazioni del tipo $x = k$, quelle orizzontali dall'avere $m = 0$ e quindi equazioni del tipo $y = k$.

Tenendo conto del significato geometrico del coefficiente angolare possiamo concludere che due rette non verticali sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, mentre si dimostra che due rette, non verticali né orizzontali, sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1, ovvero se il coefficiente angolare di una è il reciproco cambiato di segno di quello dell'altra.

Per trovare l'equazione di una retta si possono presentare le seguenti due situazioni.

1. *Retta per un punto e di pendenza nota*: se $P(x_P, y_P)$ è il punto e m è il coefficiente angolare che indica la pendenza, l'equazione richiesta è:

$$y - y_P = m(x - x_P). \tag{4.8}$$

2. *Retta per due punti*: se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ sono i due punti, l'equazione richiesta[1] è:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A). \tag{4.9}$$

Esempio 4.2. Trovare la retta s passante per $(1,2)$ e parallela alla retta $r: 2x - y + 5 = 0$.

Scrivendo la retta r nella forma $y = 2x - 5$ se ne valuta subito il coefficiente angolare, $m = 2$. L'equazione richiesta è allora: $y - 2 = 2(x - 1)$, che si può semplificare in $2x - y = 0$.

Esempio 4.3. Trovare la retta s passante per $(2,1)$ e perpendicolare alla retta $r: x - 2y - 1 = 0$.

Si ha: $r: y = 1/2\,x - 1/2$. Dunque il coefficiente angolare della retta r è $1/2$ e quindi quello della retta s sarà -2 (il reciproco cambiato di segno). L'equazione richiesta sarà dunque: $y - 1 = -2(x - 2)$, che si semplifica in $2x + y - 5 = 0$.

Esempio 4.4. Trovare la retta passante per $(2,3)$ e $(4,-1)$.

Applicando la formula soprascritta si trova subito: $(x - 2)(-1 - 3) = (y - 3)(4 - 2)$, che si semplifica in $2x + y - 7 = 0$.

4.4 La parabola nel piano cartesiano

4.4.1 Parabola con asse verticale

Una parabola con asse verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{4.10}$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali.

- Se $a > 0$ volge la concavità verso l'alto; se $a < 0$ volge la concavità verso il basso.

[1] Conviene usare la forma che proponiamo qui, anziché quella sotto forma di frazione, comunemente proposta nei testi, in quanto quella forma *non* si applica né alle rette verticali né a quelle orizzontali, mentre la forma dell'equazione (4.9) va bene sempre.

– Il vertice V ha ascissa

$$x_V = -\frac{b}{2a}. \tag{4.11}$$

– L'ordinata del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.

4.4.2 Parabola con asse orizzontale

Una parabola con asse orizzontale ha equazione

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0, \tag{4.12}$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali.

– Se $a > 0$ volge la concavità verso destra; se $a < 0$ volge la concavità verso sinistra.
– Il vertice V ha ordinata

$$y_V = -\frac{b}{2a}. \tag{4.13}$$

– L'ascissa del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.

Per tracciare correttamente una parabola occorre valutare il segno di a, determinare il vertice e successivamente almeno qualche altro punto, preferibilmente le intersezioni con gli assi (se ci sono). Vediamo qualche esempio.

Esempio 4.5. $y = 2x^2 - x - 1$. La concavità è verso l'alto, il vertice ha ascissa $1/4$ e, quindi, ordinata $-9/8$. L'intersezione con l'asse delle y si ottiene ponendo $x = 0$, da cui $y = -1$. Le intersezioni con l'asse delle x si ottengono ponendo $y = 0$, da cui $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$ (ottenute con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado). A questo punto il tracciamento del grafico è facile e si ottiene:

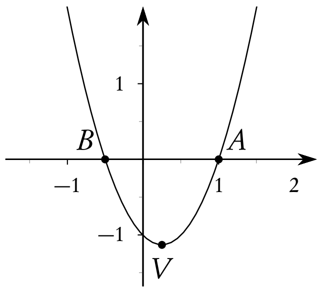


Figura 4.4 *Parabola di equazione* $y = 2x^2 - x - 1$

Esempio 4.6. $x = y^2 - 2y + 2$. La concavità è verso destra, il vertice ha ordinata 1 e, quindi, ascissa 1. L'intersezione con l'asse delle x si ottiene ponendo $y = 0$, da cui $x = 2$. Per trovare le intersezioni con l'asse delle y bisogna porre $x = 0$, ma l'equazione risultante non ha soluzioni (ha il $\Delta < 0$). Troviamo allora qualche altro punto, per esempio se $y = 2$, $x = 2$, mentre se $y = -1$, $x = 5$. A questo punto il tracciamento del grafico è semplice e si ottiene:

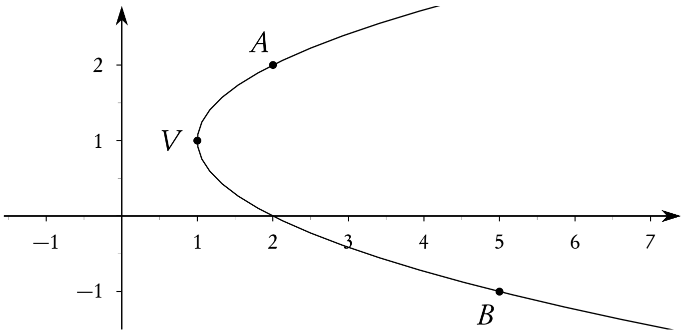


Figura 4.5 *Parabola di equazione* $x = y^2 - 2y + 2$

4.5 La circonferenza nel piano cartesiano

L'equazione generica di una circonferenza nel piano cartesiano è

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \tag{4.14}$$

con la condizione che

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0. \tag{4.15}$$

Se la condizione (4.15) non è verificata l'equazione (4.14) non ha alcuna soluzione. Se invece la condizione (4.15) è verificata la relativa circonferenza ha centro nel punto

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \tag{4.16}$$

e raggio dato dalla formula

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}, \tag{4.17}$$

dunque se $a^2 + b^2 - 4c > 0$ si tratta di una circonferenza vera e propria, se invece $a^2 + b^2 - 4c = 0$ si tratta di una circonferenza di raggio nullo, cioè "degenerata" in un punto.

Si presti particolare attenzione al fatto che, nell'equazione (4.14), detta *forma canonica*, i coefficienti di x^2 e y^2 *devono* essere così uguali a 1. Se essi fossero uguali tra di loro ma diversi da 1, bisognerebbe prima ridursi alla forma canonica; se essi fossero diversi tra di loro *non* si tratterebbe di una circonferenza.

L'equazione (4.14) della circonferenza si può scrivere in una maniera molto utile, se si conoscono il centro e il raggio:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2. \tag{4.18}$$

Esempio 4.7. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$: circonferenza con centro in $C(1, -2)$ e raggio $r = \sqrt{5}$. L'equazione si può scrivere nella forma $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

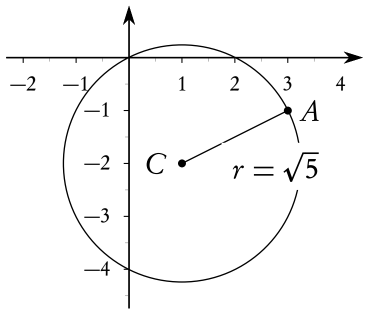


Figura 4.6 *Circonferenza di equazione* $x^2+y^2-2x+4y=0$

Esempio 4.8. $x^2+y^2-x-3y+5=0$: poiché $(-1)^2+(-3)^2-4\cdot 5<0$, l'equazione non ha alcuna soluzione.

Esempio 4.9. $x^2+y^2-2x-4y+5=0$: poiché $(-2)^2+(-4)^2-4\cdot 5=0$, si tratta di una circonferenza *degenere*, cioè ridotta a un solo punto, il suo centro, precisamente $C(1,2)$.

Esempio 4.10. $4x^2+4y^2-16x-8y+19=0$: innanzitutto osserviamo che i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali; per ottenere la forma canonica prevista dividiamo ambo i membri per 4, ottenendo

$$x^2+y^2-4x-2y+\frac{19}{4}=0\,.$$

A questo punto osserviamo che $a^2+b^2-4c=16+4-19=1>0$. Dunque l'equazione proposta ha come grafico una circonferenza di centro $C(2,1)$ e raggio $r={}^1\!/_2$. Il grafico è riportato nella figura 4.7.

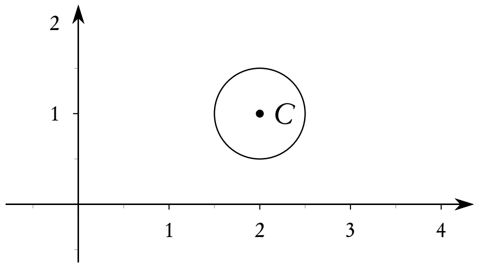


Figura 4.7 *Grafico dell'equazione* $4x^2+4y^2-16x-8y+19=0$

4.6 Ellisse ed iperbole

Ci occuperemo innanzitutto dell'equazione dell'ellisse e dell'iperbole in un caso particolare, precisamente il caso di centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati.

L'equazione generica dell'ellisse o iperbole di cui vogliamo occuparci è del tipo:

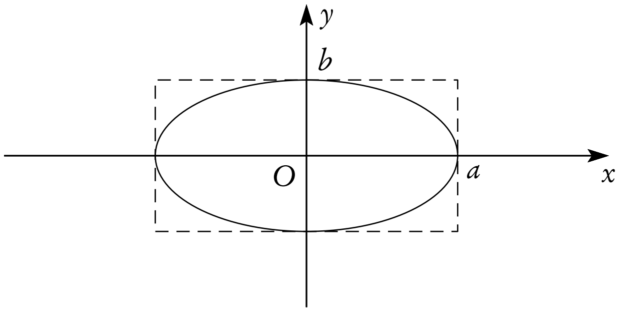
$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\pm 1 \tag{4.19}$$

Questa equazione rappresenta

1. un'ellisse se è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1$;
2. un'iperbole se è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$ oppure $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$;
3. non ha alcuna soluzione se è del tipo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

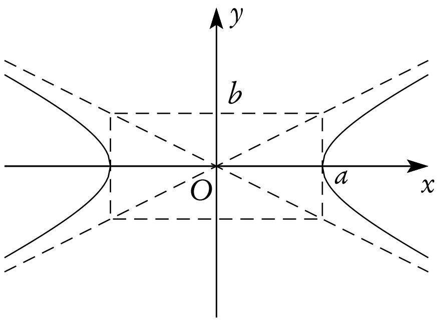
Nei primi due casi per la rappresentazione grafica si comincia col tracciare un rettangolo di centro l'origine e lati $2a$ (sull'asse orizzontale) e $2b$ (sull'asse verticale). Se si tratta di un'ellisse il suo grafico è immediato, come mostra la figura 4.8. Se si tratta di un'iperbole bisogna ancora tracciare le rette diagonali del rettangolo e poi procedere come nei grafici riportati oltre. Le due rette diagonali sono gli asintoti dell'iperbole.

I numeri a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse o iperbole rispettivamente.



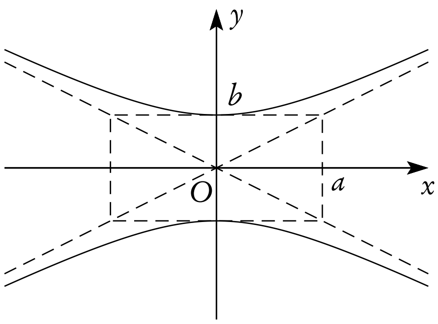
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1$$

Figura 4.8 *Ellisse con centro l'origine*



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$$

Figura 4.9 *Iperbole: primo caso*



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Figura 4.10 *Iperbole: secondo caso*

Esempio 4.11. $3x^2+2y^2-5=0$: per ottenere la forma canonica indicata nella formula (4.19) portiamo il 5 a secondo membro e dividiamo per 5, ottenendo

$$\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{5}y^2=1\,.$$

Occorre un ulteriore passaggio per arrivare alla forma richiesta, dove è previsto solo x^2 o y^2 al numeratore e il coefficiente al denominatore:

$$\frac{x^2}{5/3}+\frac{y^2}{5/2}=1\,.$$

Avremo dunque $a^2=5/3$ e $b^2=5/2$, ovvero

$$a=\sqrt{\frac{5}{3}},\quad b=\sqrt{\frac{5}{2}},$$

e l'equazione rappresenterà un'ellisse, il cui grafico è rappresentato nella figura 4.11.

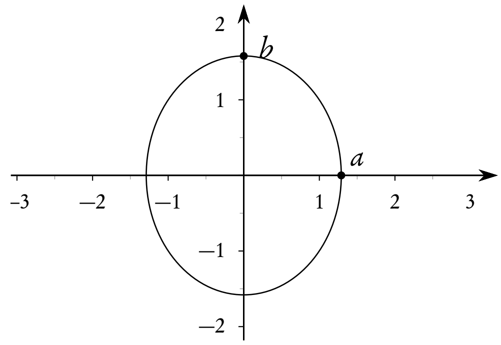


Figura 4.11 *Ellisse di equazione* $3x^2+2y^2-5=0$

Esempio 4.12. $-2x^2+4y^2+3=0$: procedendo come sopra indicato otteniamo, successivamente,

$$-2x^2+4y^2=-3,\quad 2x^2-4y^2=3,\quad \frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}y^2=1,\quad \frac{x^2}{3/2}-\frac{y^2}{3/4}=1\,.$$

L'equazione rappresenta dunque un'iperbole di semiassi

$$a=\sqrt{\frac{3}{2}},\quad b=\sqrt{\frac{3}{4}},$$

e del primo tipo, il cui grafico è rappresentato in figura 4.12

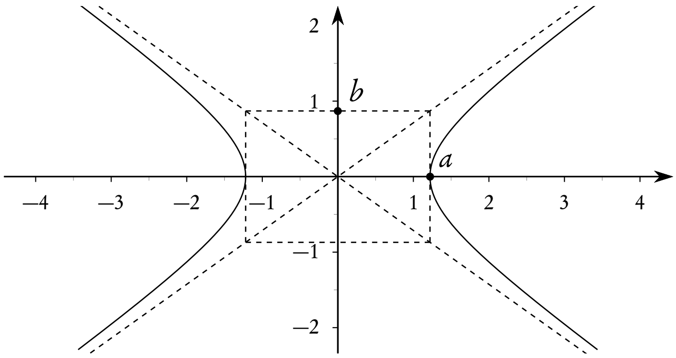


Figura 4.12 *Iperbole di equazione* $-2x^2 + 4y^2 + 3 = 0$

L'ellisse o l'iperbole, sempre con assi paralleli agli assi coordinati, possono anche avere il centro fuori dall'origine. In questo caso le equazioni, in forma canonica, sono del tipo

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_C)^2}{b^2} = \pm 1, \tag{4.20}$$

dove $C = (x_C, y_C)$ è il centro. Le rappresentazioni grafiche si fanno come già visto per le coniche con centro nell'origine, salvo, appunto, il fatto che il centro risulta ora *traslato*.

4.7 Risoluzione grafica di sistemi in due incognite

La rappresentazione di rette, parabole, ellissi ed iperboli rende possibile una interpretazione grafica molto significativa della risoluzione di sistemi di equazioni (di primo o secondo grado) in due incognite: se si rappresentano graficamente le curve relative a ciascuna equazione del sistema, le soluzioni del sistema corrisponderanno ai punti di intersezione di queste curve, rendendo anche evidente il motivo per cui a volte si hanno soluzioni e a volte no. Vediamo la cosa su alcuni esempi.

Esempio 4.13. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Procedendo con la tecnica di sostituzione già nota, si trova l'unica soluzione $(1, -1)$. Se si rappresentano graficamente le due rette che corrispondono alle equazioni del sistema, si vede che esse hanno un unico punto di intersezione, $(1, -1)$ appunto.

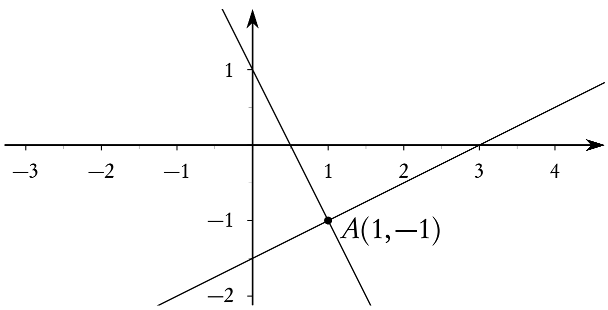


Figura 4.13 *Risoluzione grafica di un sistema di equazioni*

Esempio 4.14. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+2y=5 \end{cases}$

Questa volta il sistema non ha soluzioni e il tutto corrisponde al fatto che le due rette che corrispondono alle due equazioni del sistema sono parallele, come mostra la figura 4.14.

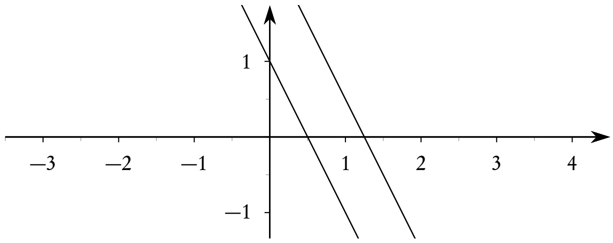


Figura 4.14 *Sistema di equazioni senza soluzioni*

Esempio 4.15. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x^2+2y^2-8x+3y+1=0 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha come soluzioni $(0,-1)$ e $(1,1)$ e il tutto trova conferma nelle intersezioni tra la retta e le circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema, come mostra la figura 4.15.

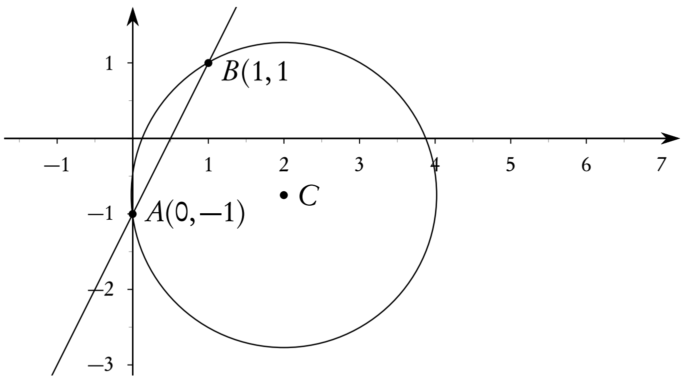


Figura 4.15 *Un sistema di secondo grado*

Esempio 4.16. $\begin{cases} 4x+3y=10 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha come unica soluzione $(8/5, 6/5)$ e il tutto trova conferma nel fatto che la retta e la circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema sono tra di loro tangenti, come mostra la figura 4.16.

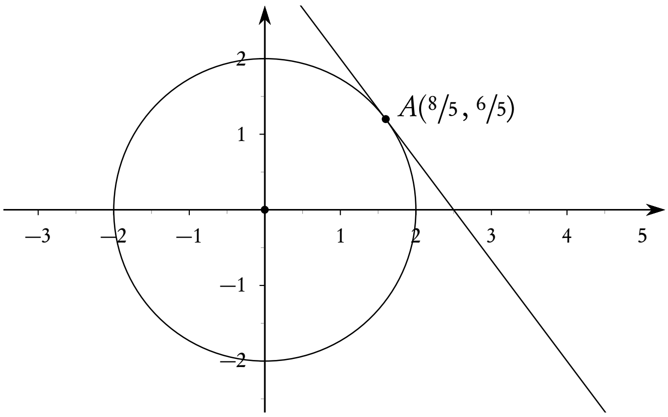


Figura 4.16 *Sistema di secondo grado con una sola soluzione*

Esempio 4.17. $\begin{cases} x^2+2y^2=4 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha quattro soluzioni, e precisamente $(-\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},-1)$, $(\sqrt{2},1)$, $(\sqrt{2},-1)$, e il tutto trova conferma nel fatto che l'ellisse e la circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema hanno quattro intersezioni, come mostra la figura 4.17.

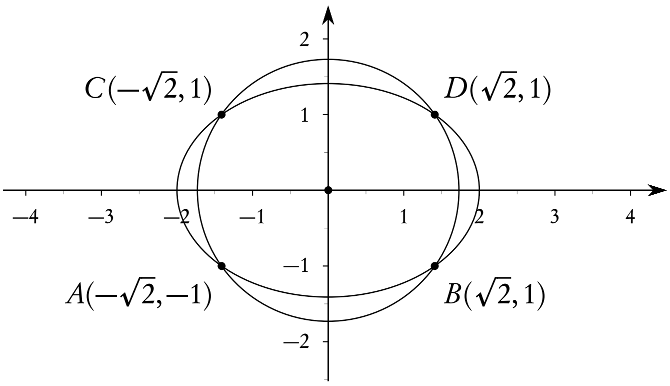


Figura 4.17 *Un sistema di quarto grado*

Le rappresentazioni grafiche che abbiamo considerato diventano ancora più importanti e significative quando si tratta di risolvere disequazioni, come vedremo successivamente.

4.8 Altri luoghi geometrici del piano

In generale se consideriamo un'equazione in due incognite, del tipo $f(x,y)=0$, l'insieme delle sue soluzioni sarà un sottoinsieme di punti del piano cartesiano, detto anche un *luogo*.

In caso di equazioni di tipo diverso da quelle che abbiamo considerato, non è, di solito, facile trovare le caratteristiche degli insiemi di soluzioni. Qualche volta si può scomporre $f(x,y)$ in fattori e poi usare la solita legge dell'annullamento del prodotto.

Esempio 4.18. $xy = 0$. Si tratta dell'unione tra gli insiemi $x = 0$ e $y = 0$, cioè dell'equazione complessiva dei due assi cartesiani.

Esempio 4.19. $x^2 - y^2 = 0$. Scritta l'equazione nella forma $(x - y)(x + y) = 0$, si conclude che si tratta dell'unione delle soluzioni delle equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$, cioè l'equazione complessiva delle due bisettrici dei quadranti. Si poteva anche, ancora più semplicemente, scrivere l'equazione direttamente nella forma $x = \pm y$, giungendo alle stesse conclusioni.

Esempio 4.20. $x^2 = 4$. Scritta l'equazione nella forma $(x - 2)(x + 2) = 0$, o anche, più semplicemente, $x = \pm 2$, si vede che si tratta dell'unione di due rette parallele all'asse delle y.

Esempio 4.21. $(x - y)(x - y - 1) = 0$. Con la solita legge dell'annullamento del prodotto si conclude che si tratta delle due rette (tra di loro parallele) $x - y = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Si noti che eseguendo i calcoli e semplificando si ottiene l'equazione di secondo grado in due incognite $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$.

In ogni caso, data un'equazione $f(x, y) = 0$, è sempre possibile *controllare* se un dato punto è o no soluzione dell'equazione stessa: basterà effettuare una semplice sostituzione.

Esempio 4.22. Il punto $(1, -1)$ è soluzione dell'equazione $x^2 - xy - 2^x = 0$, mentre il punto $(1, 1)$ non è soluzione.

Per ragioni di completezza segnaliamo che si dimostra che il luogo dei punti che soddisfano una equazione di secondo grado in due incognite, cioè un'equazione del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{4.21}$$

è sempre una *conica*, eventualmente una *conica degenere*, e precisamente una delle seguenti "curve":

1. una ellisse (con la circonferenza come caso particolare);
2. una parabola;
3. una iperbole;
4. una coppia di rette incidenti in un punto;
5. una coppia di rette parallele (eventualmente coincidenti);
6. un punto;
7. l'insieme vuoto.

Le seguenti equazioni forniscono un esempio per ciascuno di questi casi (la quasi totalità sono esempi già considerati nelle pagine precedenti).

1. $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ (ellisse, vedi la figura 4.11 della pagina 39);
2. $x^2 - y + x - 1$ (parabola);
3. $2x^2 - 4y^2 = 3$ (iperbole, vedi la figura 4.12 della pagina 40);
4. $x^2 - y^2 = 0$ (la coppia delle bisettrici dei quadranti, vedi sopra);
5. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$ (coppia di rette parallele, vedi sopra);
6. $x^2 + y^2 = 0$ (equazione cha come soluzioni solo l'origine, in quanto la somma di due quadrati può essere zero se e solo se entrambi i numeri sono zero);
7. $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ovvero $x^2 + y^2 = -1$ (nessuna soluzione, perché la somma di due quadrati non può essere negativa).

Questi luoghi si chiamano coniche perché si ottengono *sezionando* un doppio cono "indefinito" con un piano, come mostra la figura 4.18 nel caso particolare dell'iperbole, ma non intendiamo insistere oltre sull'argomento.

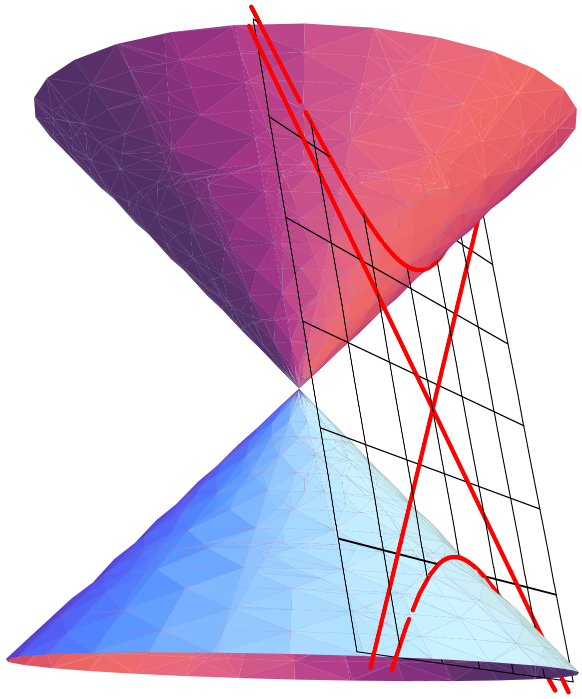


Figura 4.18 *Sezione di un cono ("indefinito") con un piano*

4.9 Esercizi

Esercizio 4.1. *Risolvere graficamente i sistemi dell'esercizio 3.1 della pagina 29.*

Esercizio 4.2. *Controllare se i punti indicati appartengono o no ai luoghi di punti individuati dalle equazioni date a fianco di ciascuno.*

1. $P(1,1)$; $\quad x^2 - xy^2 + 3x - 3 = 0$;
2. $Q(-1,2)$; $\quad xy - x^2y^3 + 3 = 0$;
3. $R(0,1)$; $\quad x^{2y} - y^x - 1 = 0$;

Esercizio 4.3. *Determinare, per via grafica, le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni in due incognite.*

1. $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x+1=0 \\ y+1=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x-8=0 \\ 1-x=0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} y-1=0 \\ y+3=0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-4=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2-9=0 \\ x+1=0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=4 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2-1=0 \\ x^2+(y-2)^2=40 \end{cases}$;

5 Disequazioni

Una disequazione è una espressione del tipo

$$f(x) \lesseqgtr g(x) \quad (\text{cioè } f(x) < g(x) \vee f(x) \leq g(x) \vee f(x) > g(x) \vee f(x) \geq g(x)),$$

nel caso di un'incognita, oppure del tipo

$$f(x,y) \lesseqgtr g(x,y) \quad (\text{cioè } f(x,y) < g(x,y) \vee f(x,y) \leq g(x,y) \vee f(x,y) < g(x,y) \vee f(x,y) \geq g(x,y)),$$

nel caso di due incognite.

Risolvere una disequazione significa trovare *tutti* i numeri, o *tutte* le coppie di numeri, che rendono vera la disuguaglianza.

Esempi.

- $3x^2 - 2x > 1$: il numero 2 è soluzione, il numero 0 non è soluzione.
- $x^2 - 2y^2 \geq x + y$: la coppia $(2,0)$ è soluzione, la coppia $(2,1)$ non è soluzione.

È importante notare subito che, nel caso di disequazioni in una incognita, *di solito*, si hanno infinite soluzioni, al contrario delle equazioni che, sempre di solito, hanno un numero finito di soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni si riesce normalmente a rappresentare in maniera semplice utilizzando i sottoinsiemi di numeri reali di cui abbiamo parlato nel capitolo 2, al paragrafo 2.7. Molto convenienti, come vedremo, sono le rappresentazioni grafiche.

Nel caso di disequazioni in due incognite la rappresentazione grafica diventa praticamente indispensabile, in quanto non è di solito possibile esprimere analiticamente in maniera semplice l'insieme delle soluzioni.

5.1 Disequazioni di primo grado

5.1.1 Il caso di un'incognita

Una disequazione di primo grado in un'incognita si può sempre ridurre a una delle forme

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0. \tag{5.1}$$

Conviene sempre ridursi al caso in cui $a > 0$, eventualmente cambiando il segno ad ambo i membri,(1) dopodiché si procede portando b a secondo membro e dividendo per a.

Esempio 5.1. $3x + 2 \leq 0$: $3x \leq -2$, $x \leq -2/3$, ovvero $x \in]-\infty, -2/3]$, insieme che si rappresenta graficamente come nella figura seguente.

[1]Attenzione: cambiando il segno è *obbligatorio* cambiare anche il verso della disequazione

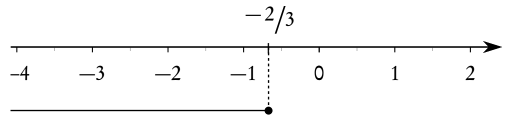


Figura 5.1 *La disequazione* $3x+2\leq 0$

Esempio 5.2. $2x+8<7x-1$: $-5x<-9$, $5x>9$, $x>9/5$, ovvero $x\in]9/5,+\infty[$, insieme che si rappresenta graficamente come nella figura seguente.

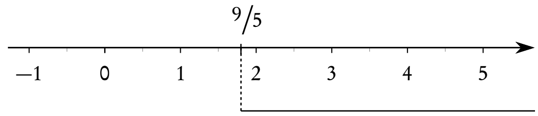


Figura 5.2 *La disequazione* $2x+8<7x-1$

Esempio 5.3. Si noti come nel primo caso il punto $-2/3$ era compreso nell'insieme delle soluzioni, nel secondo caso invece il punto $9/5$ non è compreso: è opportuno abituarsi a evidenziare questa differenza anche nel grafico, per esempio usando un "pallino pieno" nel primo caso come abbiamo fatto noi.[2]

5.1.2 Il caso di due incognite

Una disequazione di primo grado in due incognite si può sempre porre in una delle forme

$$ax+by+c>0,\quad ax+by+c\geq 0,\quad ax+by+c<0,\quad ax+by+c\leq 0. \tag{5.2}$$

Se teniamo conto che $ax+by+c=0$ ha come grafico una retta nel piano, e che una retta divide il piano in due semipiani, potremo concludere che una disequazione di primo grado in due incognite ha come soluzioni tutti i punti di uno dei due semipiani, comprendenti o meno la retta origine, a seconda della presenza o no del segno di $=$ nella disequazione. Per sapere quale dei due semipiani scegliere, conviene considerare un punto in uno dei due (fuori dalla retta origine dunque) e controllare numericamente se la disequazione è verificata per quel punto.

Esempio 5.4. $2x-y+1>0$. Si rappresenta graficamente la retta $2x-y+1=0$. Si prende poi il punto $(0,0)$, che non sta sulla retta: sostituendo le sue coordinate nella disequazione si vede subito che esse la soddisfano, dunque la disequazione è verificata da *tutti* i punti che stanno nello stesso semipiano di O, esclusa la retta origine.

[2] È ovvio che ciascuno può utilizzare il tipo di visualizzazione che preferisce, o a cui è stato abituato: l'importante è essere chiari e coerenti.

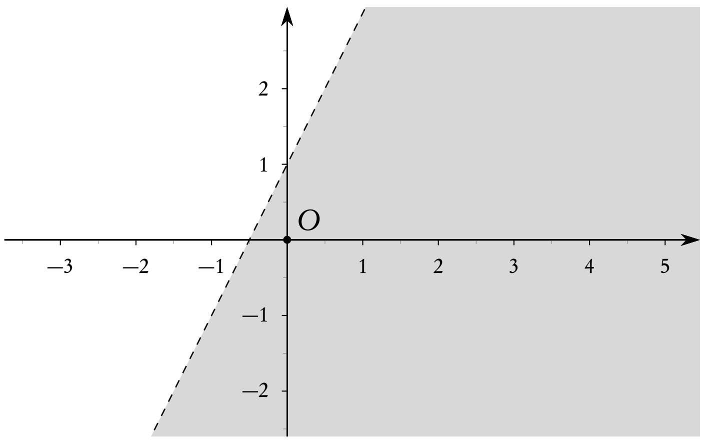


Figura 5.3 *La disequazione* $2x - y + 1 > 0$

Esempio 5.5. $2x + y + 1 \geq 0$. Procedendo come prima si trova l'insieme di soluzioni rappresentato in figura 5.4.

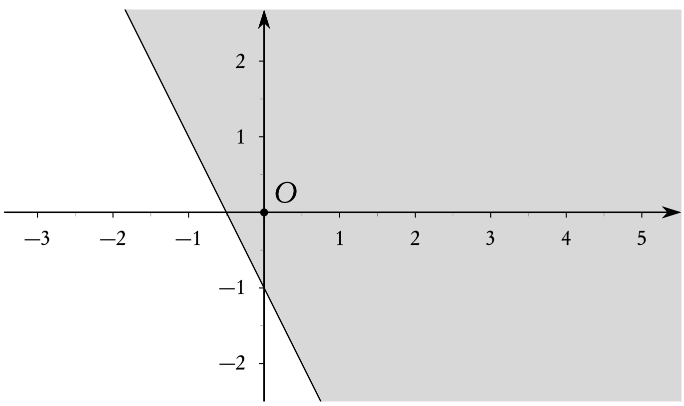


Figura 5.4 *La disequazione* $2x + y + 1 \geq 0$

5.2 Disequazioni di secondo grado

5.2.1 Il caso di un'incognita

Una disequazione di secondo grado in un'incognita si può sempre mettere in una delle forme sintetizzate nella formula seguente:

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0. \tag{5.3}$$

Il modo migliore per risolverla è quello di considerare la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e poi valutare dal grafico quali sono le x che corrispondono alle parti di parabola che stanno sopra o sotto l'asse delle ascisse, a seconda del verso della disequazione. Gli esempi che seguono chiariranno il metodo.[3]

Esempio 5.6. $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Il grafico di figura 5.5 rende evidente che le soluzioni sono $x \leq -1/2$ oppure $x \geq 1$, ovvero

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[.$$

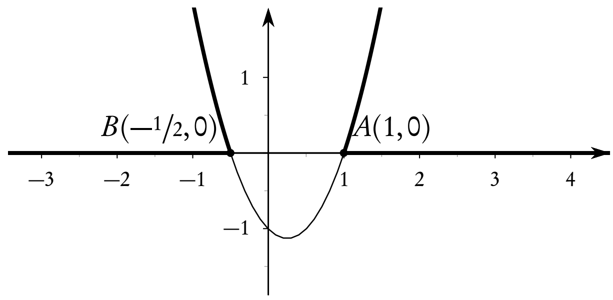


Figura 5.5 *La disequazione* $2x^2 - x - 1 \geq 0$

Questo insieme di soluzioni può essere rappresentato graficamente come segue, e come si deduce subito dalla figura 5.5 stessa.

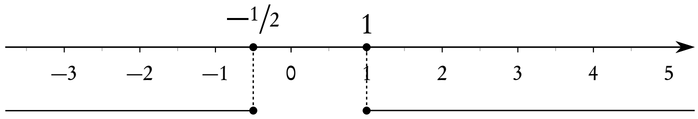


Figura 5.6 *Le soluzioni della disequazione* $2x^2 - x - 1 \geq 0$

Esempio 5.7. $-2x^2 + x - 1 \geq 0$. Il grafico di figura 5.7 rende evidente che la disequazione non ha nessuna soluzione. Si noti come invece le disequazioni $-2x^2 + x - 1 \leq 0$ e $-2x^2 + x - 1 < 0$ avrebbero avuto come insieme delle soluzioni tutti i numeri reali.

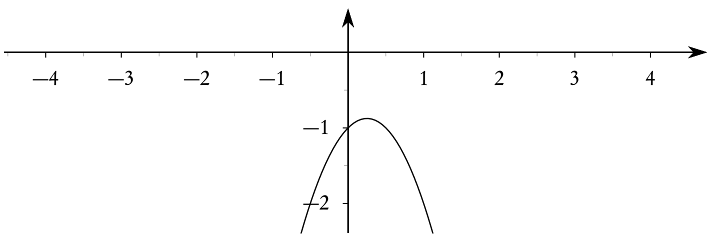


Figura 5.7 *La disequazione* $-2x^2 + x - 1 \geq 0$.

Esempio 5.8. $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ Dal grafico di figura 5.8 si deduce facilmente che la disequazione è verificata solo per $x = -1$: il trinomio $x^2 + 2x + 1$ non è infatti mai negativo e può essere nullo solo in corrispondenza di $x = -1$.

[3] Ci sono anche delle regole legate al segno di a e al tipo di discriminante dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, detta *equazione associata* alla disequazione. Purtroppo la memorizzazione di queste regole avviene quasi sempre in maniera scorretta, con conseguenti errori nella risoluzione. A nostro avviso la tecnica grafica è di gran lunga preferibile.

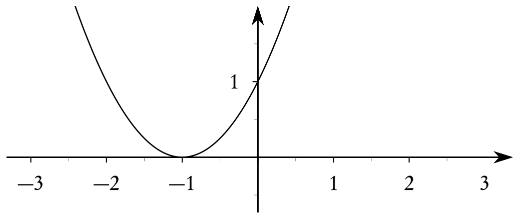


Figura 5.8 *La disequazione* $x^2+2x+1 \le 0$

5.2.2 Il caso di due incognite

La situazione è molto simile a quanto già visto per il caso delle equazioni di primo grado: rappresentata nel piano cartesiano la parabola, circonferenza, ellisse o iperbole corrispondente alla equazione in due incognite associata alla disequazione, si constata che il piano viene diviso in due regioni (sono, solo in apparenza, tre nel caso dell'iperbole). In una delle due regioni la disequazione è verificata, nell'altra no, e la ricerca della regione giusta si fa scegliendo un punto e controllando numericamente se in corrispondenza ad esso la disequazione è verificata o meno.

Esempio 5.9. $x^2+y^2-2x-2y+1 \le 0$. Si traccia la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-2y+1=0$; successivamente si controlla che sostituendo le coordinate di un punto interno (per esempio il centro, $(1,1)$, che sicuramente è interno) la disequazione è verificata. La disequazione sarà dunque verificata per tutti gli altri punti interni e per la circonferenza stessa, visto che la disequazione è del tipo "$\le$".

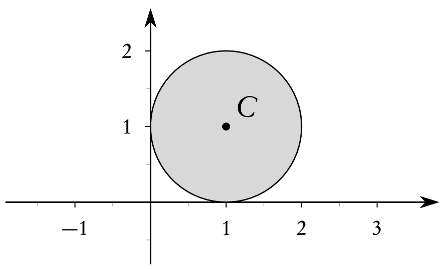


Figura 5.9 *La disequazione* $x^2+y^2-2x-2y+1 \le 0$

Esempio 5.10. $x^2-\dfrac{y^2}{4}<1$. Procedendo come sopra e provando con il punto $(0,0)$, si trova che la disequazione è verificata nella zona compresa tra i due rami dell'iperbole $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$, esclusa l'iperbole stessa, visto che nella disequazione manca il segno di $=$.

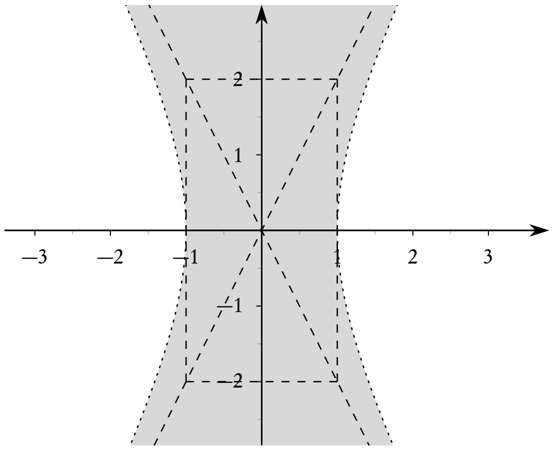


Figura 5.10 *La disequazione* $x^2 - \frac{y^2}{4} < 1$

5.3 Sistemi di disequazioni

Esattamente come nel caso dei sistemi di equazioni, risolvere un sistema di disequazioni significa trovare le soluzioni comuni. Poiché, a differenza delle equazioni, le soluzioni di una disequazione sono normalmente infinite, sarà generalmente più complesso trovare le soluzioni comuni, e le rappresentazioni grafiche potranno essere di grande aiuto.

5.3.1 Sistemi in una incognita

Esempio 5.11. $\begin{cases} 2x - 1 \le 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$.

Si risolvono separatamente le due disequazioni ottenendo $x \le 1/2$ per la prima e $x < 1 \lor x > 4$ per la seconda. A questo punto si costruisce un grafico come nella figura 5.11, dal quale è facile dedurre che le soluzioni del sistema sono costituite dall'insieme

$$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

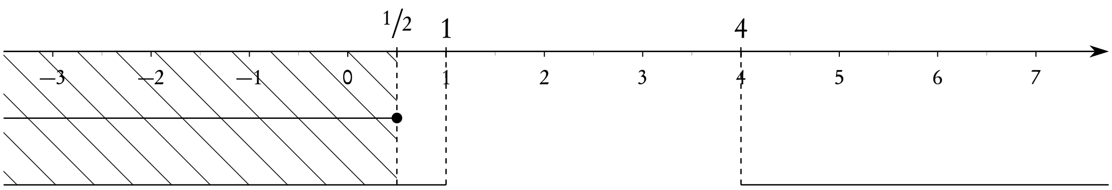


Figura 5.11 *Grafico per un sistema di disequazioni in una incognita*

5.3.2 Sistemi in due incognite

Per i sistemi in due incognite si procede in maniera simile, rappresentando nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni di ciascuna delle disequazioni e poi trovando le parti comuni. Come già per le equazioni non sarà possibile in generale esplicitare analiticamente l'insieme delle soluzioni: la soluzione grafica sarà essenziale.

Esempio 5.12. $\begin{cases} x^2+y^2-2x>0 \\ x-y-2>0 \end{cases}$.

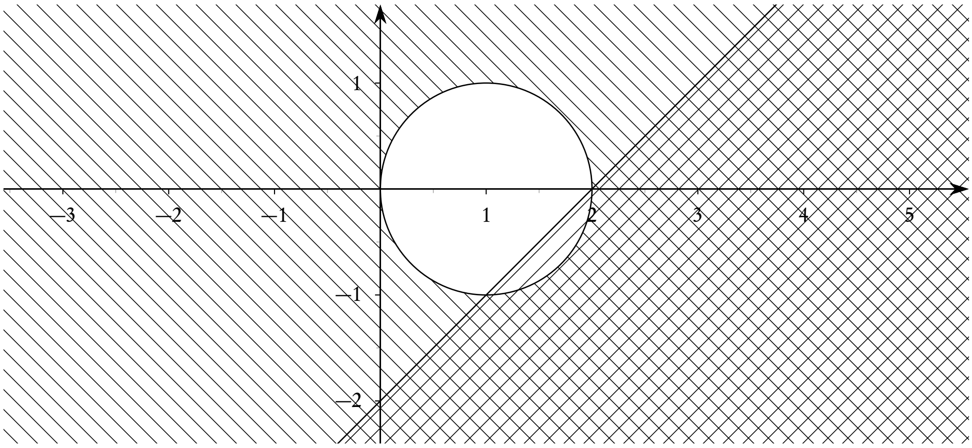


Figura 5.12 *Grafico per un sistema di disequazioni in due incognite*

L'insieme delle soluzioni è costituito dalla parte di piano dove si incrociano i due riempimenti obliqui, con l'esclusione sia dell'arco di circonferenza che delle due parti di retta.

5.4 Disequazioni scomponibili in fattori

Supponiamo di avere una disequazione (in una o due incognite) ridotta a forma normale, cioè del tipo

$$f(x) \lesseqgtr 0, \quad f(x,y) \lesseqgtr 0.$$

Se il primo membro non è di uno dei tipi già visti (cioè di primo e secondo grado) si può provare a scomporre in fattori e poi utilizzare la *regola dei segni* per risolvere la disequazione. La stessa tecnica si applica se si hanno disequazioni fratte. Precisamente si determina il *segno* di ciascuno dei fattori (insieme di positività, insieme di negatività, insieme dei punti ove si annulla) e poi si determina il segno del prodotto (o del quoziente). Per facilitare le conclusioni conviene utilizzare opportune rappresentazioni grafiche, in particolare nel caso di disequazioni in una incognita, come si vedrà sugli esempi.

Esempio 5.13. $(x^2-1)(x-2)>0$. Rappresentando graficamente la parabola $y=x^2-1$ si verifica subito che il fattore x^2-1 è positivo per $x<-1$ e per $x>1$, è negativo per $-1<x<1$, si annulla per $x=\pm 1$. Per il fattore $x-2$ è facile concludere che è positivo per $x>2$, negativo per $x<2$, si annulla per $x=2$. Se si costruisce con questi dati il grafico della figura 5.13, si può concludere facilmente.

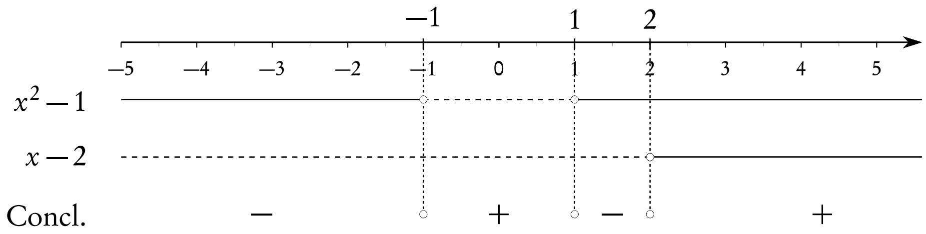


Figura 5.13 *Grafico di segno per la disequazione* $(x^2-1)(x-2)$

Si noti che abbiamo usato

- una linea continua per indicare le parti dove ciascun fattore è positivo;
- una linea tratteggiata per indicare le parti dove ciascun fattore è negativo;
- uno 0 per indicare i punti dove ciascun fattore si annulla.

La prima linea serve da riferimento per riportare i vari "caposaldi", l'ultima linea contiene le conclusioni (sulla base della regola dei segni), e qui abbiamo usato esplicitamente i segni + e −, oltre allo zero. Sulla linea dei caposaldi abbiamo riportato anche la graduazione; in realtà la cosa non è necessaria e non serve nemmeno rispettare le unità di misura, l'unica cosa che conta è l'ordine dei caposaldi.

Come già accennato, la figura 5.13 permette di concludere che la disequazione proposta è verificata per

$$x \in]-1,1[\cup]2,+\infty[\,.$$

Si noti che per risolvere la disequazione $(x^2-1)(x-2)<0$ *avremmo potuto utilizzare lo stesso grafico*, senza alcuna variazione e avremmo concluso che $(x^2-1)(x-2)<0$ è verificata per

$$x \in]-\infty,-1[\cup]1,2[.$$

Stesse considerazioni per le disequazioni $(x^2-1)(x-2)\le 0$ e $(x^2-1)(x-2)\ge 0$ che avrebbero avuto, rispettivamente, come insieme delle soluzioni

$$]-\infty,-1]\cup[1,2],$$

e

$$[-1,1]\cup[2,+\infty[\,.$$

Esempio 5.14. $\dfrac{x^2-1}{x-2}\ge 0$. La risoluzione di questa disequazione può utilizzare lo stesso grafico della precedente (la regola dei segni per un prodotto o per un quoziente è la stessa!); l'unica differenza consiste nel fatto che bisogna prestare attenzione al fatto che il fattore $x-2$ ora sta al denominatore è quindi *deve essere diverso da zero*. Si può introdurre uno speciale simbolo (per esempio una ×) per indicare che il valore $x=2$ deve andare escluso. Per evitare errori conviene indicarlo già esplicitamente nella linea dei caposaldi. Il grafico è riportato in figura 5.14.

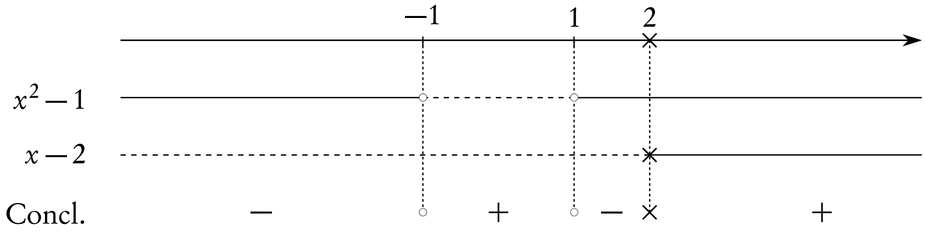


Figura 5.14 *Grafico di segno per la disequazione* $(x^2-1)/(x-2) \geq 0$

La disequazione proposta è verificata per

$$x \in [-1, 1] \cup]2, +\infty[.$$

Esempio 5.15. $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-2y} \geq 0$. Si procede a trovare il segno del numeratore e del denominatore, rappresentando il risultato nel piano. Successivamente si trova il segno del quoziente con la regola dei segni, esattamente come nel caso di una sola variabile: naturalmente le soluzioni saranno un sottoinsieme del piano che, di solito, non potrà essere descritto analiticamente.

Le figure 5.15 e 5.16 evidenziano gli insiemi di positività del numeratore e del denominatore rispettivamente; le regioni non evidenziate sono gli insiemi di negatività, le retta e la circonferenza sono i punti dove il numeratore e il denominatore si annullano e, naturalmente, questi ultimi andranno esclusi. In ciascuna delle figure è rappresentata anche la curva relativa all'altra, per un utile confronto. La figura 5.17 evidenzia l'insieme delle soluzioni della disequazione, da cui va esclusa l'intera circonferenza. Si noti in particolare che i due punti di intersezione tra la retta e la circonferenza non fanno parte dell'insieme delle soluzioni.

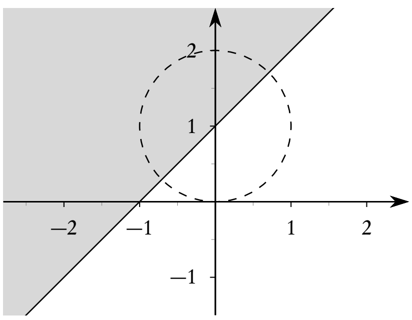


Figura 5.15 $x - y + 1 > 0$

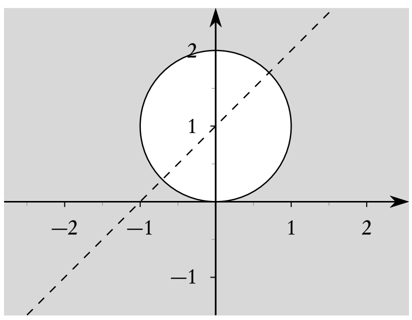


Figura 5.16 $x^2 + y^2 - 2y > 0$

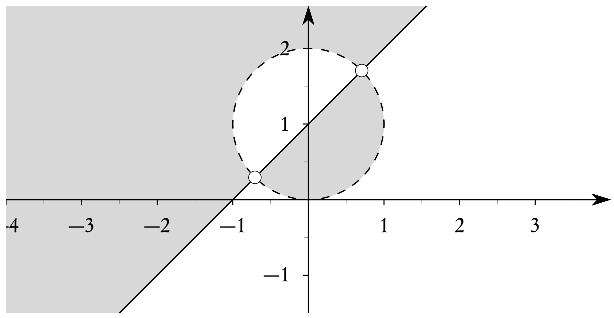


Figura 5.17 $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-2y} \geq 0$

5.5 Disequazioni con radicali

Come già le equazioni con radicali, anche le disequazioni con radicali sono abitualmente di difficile risoluzione. Tra quelle con radici quadrate ci occuperemo qui solo dei due tipi più importanti e frequenti nelle nostre applicazioni:

1. $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ (oppure $\sqrt{f(x)} > g(x)$);
2. $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ (oppure $\sqrt{f(x)} < g(x)$).

Per risolvere le disequazioni del primo tipo si considera l'unione delle soluzioni di due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \left(\text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}\right).$$

Per risolvere le disequazioni del secondo tipo si ricorre invece al seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \leq g(x) \end{cases}, \quad \left(\text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f^2(x) < g(x) \end{cases}\right).$$

Esempio 5.16. $\sqrt{x^2-9x+14} > x-8$. Si procede scrivendo e risolvendo i due sistemi, come indicato.

$$\begin{cases} x^2-9x+14 \geq 0 \\ x-8 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-9x+14 > (x-8)^2 \\ x-8 \geq 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema risulta verificato per $x \leq 2 \vee 7 \leq x < 8$, il secondo per $x \geq 8$. L'unione dei due è dunque verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 7$.

Esempio 5.17. $\sqrt{4x^2-13x+3} < 2x-3$. Scrivendo il sistema di tre equazioni indicato sopra si trova:

$$\begin{cases} 4x^2-13x+3 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 4x^2-13x+3 < (2x-3)^2 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $x \geq 3$, che è la soluzione della disequazione data.

Una disequazione che presenti un solo radicale di indice dispari (in particolare di indice 3), si risolve facilmente isolando il radicale ed elevando alla potenza uguale all'indice della radice: si tratta dunque di un problema formalmente più semplice che non il caso delle equazioni con radici quadrate.

Esempio 5.18. $\sqrt[3]{x^2+7} > 2$. Elevando al cubo si ottiene, semplificando, $x^2-1>0$, che ha per soluzioni $x<-1 \lor x>1$.

5.6 Esercizi

Esercizio 5.1. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $x^2+3x+2>0$;
2. $-x^2-3x+2<0$;
3. $4-x^2>0$;
4. $x^2-x+6<0$;
5. $(x^2+2x-8)(x+1)>0$;
6. $(x^2-2)(x+1)(1-x)\geq 0$;
7. $x(x^2+2)(2x-1)<0$;
8. $\dfrac{x+1}{x^2+1}<0$;
9. $\dfrac{2x-8}{1-x-x^2}>0$;
10. $\dfrac{x^2-4}{x+3}\leq 0$;
11. $x^3-27\geq 0$;
12. $2-x^3<0$;
13. $x^3(x^2-1)(2-x^2)\leq 0$;
14. $\dfrac{x-9}{x^3+1}\geq 0$;
15. $\dfrac{8-x^3}{x^3+9}\leq 0$.

Esercizio 5.2. *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.*

1. $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 2x+3\geq 0 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2+2x-8>0 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x+1<0 \\ x^2+1<0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 2x-8>0 \\ 1-x-x^2<0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} (1-3x^2)(x-2)<0 \\ (2+x)(1-x)>0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 3x-2<0 \\ 2x(3-x)>0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}<0 \\ \dfrac{2x+1}{x(2-3x)}>0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x}<0 \\ \dfrac{x+1}{1-x}>0 \end{cases}$.

Esercizio 5.3. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1-x}}<1$;
2. $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}>x+1$;
3. $\sqrt{1-x^2}<1-x$;
4. $\sqrt{x}<x$;
5. $\sqrt{1-x^2}>x^2$;
6. $\sqrt{x(x+1)}<1-x$.

Esercizio 5.4. *Determinare, per via grafica, le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni in due incognite.*

1. $\begin{cases} y-x+1>0 \\ 2x-3\leq 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x+2y-1>0 \\ 2x+3y+2\geq 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ y+1>0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x-8>0 \\ 1-x<0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} y-1>0 \\ y+3<0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x+y-1>0 \\ x-2y\leq 0 \\ x+y<0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x-y\leq 0 \\ x+3y>0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-4>0 \\ x+y+2\leq 0 \\ x-2y-1<0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2-9<0 \\ y-x+2\leq 0 \\ x+1>0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2\leq 4 \\ y-2x<0 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2-1<0 \\ x^2+(y-2)^2\leq 40 \\ x+y<0 \end{cases}$;

6 Esponenziali e logaritmi

6.1 Richiami sulle potenze

Se a è un numero reale qualunque e m è un naturale *maggiore o uguale* a 2, si definisce *potenza* di *base* a ed *esponente* m il numero

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-volte}} \tag{6.1}$$

Se $m = 1$ e a è ancora un numero reale qualunque, si pone, per definizione,

$$a^1 = a\,. \tag{6.2}$$

Si noti che a^1 *non è* un prodotto, in quanto per eseguire un prodotto occorrono *due* fattori.
Se poi a è un numero reale *diverso da zero*, si pone, sempre per definizione,

$$a^0 = 1\,. \tag{6.3}$$

Si noti che *non* abbiamo definito il simbolo 0^0, che non ha, dunque, *alcun significato*.

Con queste definizioni si completa il concetto di potenza di base reale ed esponente naturale. La definizione si estende poi fino a consentire anche esponenti interi negativi, ma con base sempre *diversa da zero*, ponendo

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0. \tag{6.4}$$

È opportuno segnalare esplicitamente, anche se è già indicato nella formula (6.4), che il simbolo $0^{\text{num.negativo}}$ *non* è definito.

È poi possibile ampliare ulteriormente la definizione fino a comprendere esponenti reali qualunque, ma con l'importantissima *limitazione* che la base debba essere *positiva*, o al massimo zero se l'esponente è non negativo. Per gli esponenti frazionari, cioè del tipo m/n, con n naturale > 1, la definizione di potenza è abbastanza semplice: si pone infatti, per definizione,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0; \qquad 0^{\frac{m}{n}} = 0, \quad \frac{m}{n} > 0\,. \tag{6.5}$$

L'estensione al caso di esponenti reali qualunque (per esempio $a^{\sqrt{2}}$) è decisamente più complessa, e una sua definizione rigorosa esula dagli scopi di questo corso. Ci accontenteremo di valutare il metodo su un esempio significativo. Supponiamo di voler definire $a^{\sqrt{2}}$. Si considerano le successive approssimazioni decimali di $\sqrt{2}$ con un numero sempre maggiore di cifre decimali:

$$1.4 = \frac{14}{10}, \quad 1.41 = \frac{141}{100}, \quad 1.414 = \frac{1414}{1000}, \quad 1.4142 = \frac{14142}{10000}, \quad \ldots$$

Noi sappiamo già calcolare a elevato a ciascuno degli esponenti che approssimano $\sqrt{2}$ (perché si tratta di esponenti frazionari); ebbene, $a^{\sqrt{2}}$ sarà il *valore limite* a cui tende questa successione di numeri, quando l'esponente tende ad essere $\sqrt{2}$.

Al di là comunque della definizione, ciò che conta è che valgono le seguenti proprietà delle potenze (valide qualunque sia il tipo di esponente, e con la limitazione che la base deve essere positiva quando qualche esponente non è intero, e naturalmente diversa da zero se compare al denominatore di una frazione).

$$(a^m)^n = a^{mn}; \tag{6.6}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{6.7}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \tag{6.8}$$

6.2 Le funzioni potenza

Si chiamano *funzioni potenza* le funzioni del tipo

$$f(x) = x^a, \tag{6.9}$$

essendo a un numero reale qualunque. Se a è un intero positivo allora il dominio di queste funzioni è tutto $\mathbb{R}$; se a è un intero negativo, il dominio è costituito dai reali diversi da zero; negli altri casi il dominio è costituito dai reali positivi.

È evidente che i grafici nei casi $a = 1$ e $a = 2$ rientrano in situazioni già viste: per $a = 1$ si tratta precisamente di una retta per l'origine, con pendenza 1 (la *bisettrice* del primo e terzo quadrante), nel caso $a = 2$ di una parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto, grafici che abbiamo riportato nelle figure 6.1 e 6.2 per comodità. I grafici relativi ad alcuni altri casi sono riportati nelle figure successive.

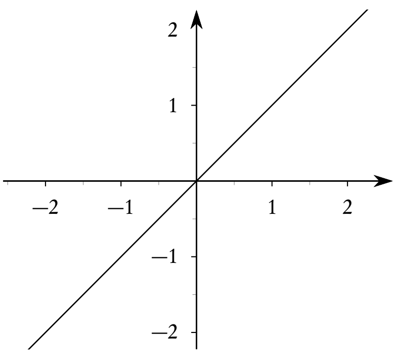


Figura 6.1 *La funzione* $f(x) = x^1 = x$

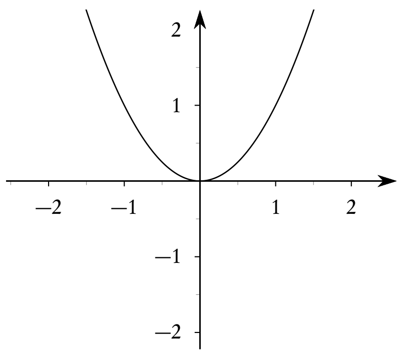


Figura 6.2 *La funzione* $f(x) = x^2$

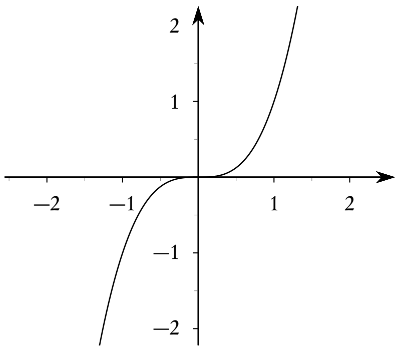


Figura 6.3 *La funzione* $f(x) = x^3$

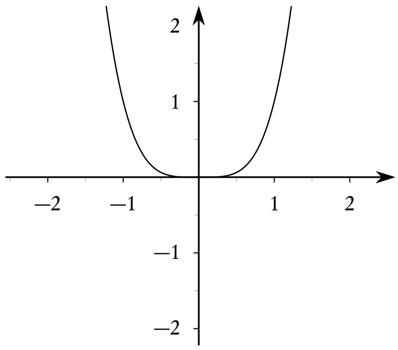


Figura 6.4 *La funzione* $f(x) = x^4$

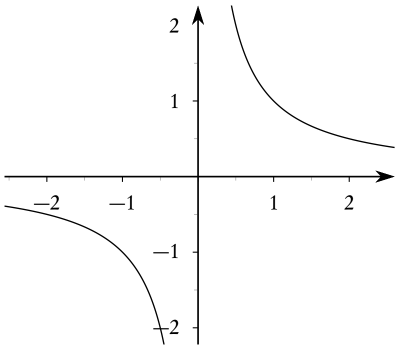


Figura 6.5 *La funzione* $f(x) = x^{-1} = {}^1\!/_x$

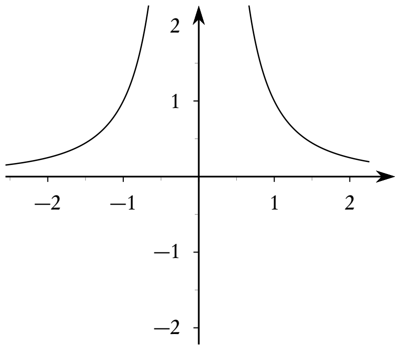


Figura 6.6 *La funzione* $f(x) = x^{-2} = {}^1\!/_{x^2}$

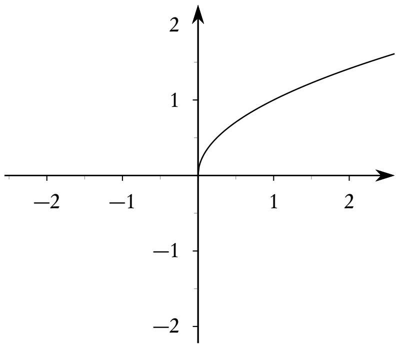


Figura 6.7 *La funzione* $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

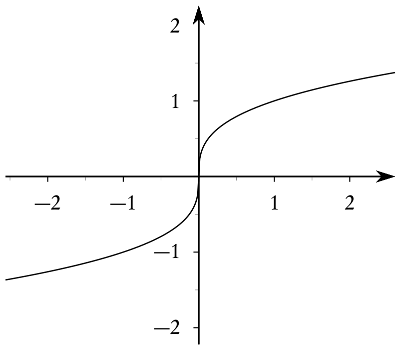


Figura 6.8 *La funzione* $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Anche se non è il caso qui di entrare nei dettagli, segnaliamo che, di solito, la funzione $x^{1/3}$ è ritenuta diversa da $\sqrt[3]{x}$, perché la prima si ritiene definita per $x \geq 0$, la seconda per tutti gli x reali. Si noti che, qualunque sia l'esponente a, il grafico della funzione x^a passa sempre per il punto $(1, 1)$, in accordo con il fatto che $1^a = 1$.

6.3 Le funzioni esponenziali

Simmetricamente alle funzioni potenza si introducono (e sono molto importanti!) le funzioni esponenziali, cioè le funzioni del tipo

$$f(x) = a^x, \quad a > 0. \tag{6.10}$$

Si noti che nelle funzioni potenza si ha la base variabile e l'esponente fisso, nelle funzioni esponenziali si ha la base fissa e l'esponente variabile. Il caso della base 1 è poco significativo in quanto $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. I grafici relativi a queste funzioni, con alcune scelte delle basi sono riportati nelle figure che seguono.

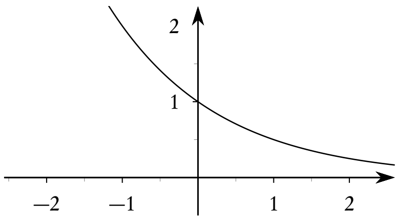


Figura 6.9 *La funzione* $f(x) = (1/2)^x$

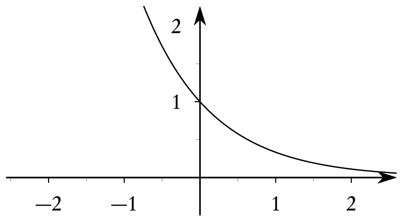


Figura 6.10 *La funzione* $f(x) = (1/3)^x$

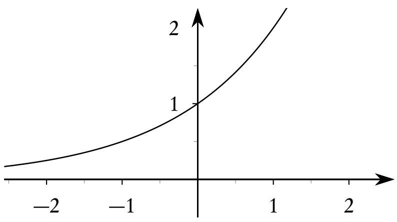


Figura 6.11 *La funzione* $f(x) = 2^x$

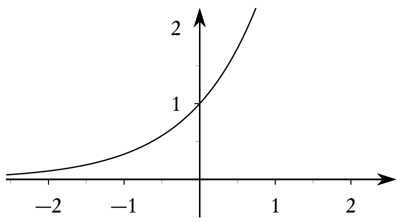


Figura 6.12 *La funzione* $f(x) = 3^x$

Come si può intuire dalle figure 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, si hanno due tipi di comportamento e precisamente:

1. se $0 < a < 1$, al crescere della x il corrispondente valore di y diminuisce (si parla di *funzione decrescente* come preciseremo meglio nel seguito);
2. se $a > 1$, al crescere della x cresce anche il corrispondente valore di y (si parla di *funzione crescente* come preciseremo meglio nel seguito).

È altresì importante osservare che la velocità della crescita, per funzioni esponenziali con base $a > 1$, è molto elevata. La cosa si può valutare bene controllando i dati della tabella 6.1.

x	x^2	2^x
1	1	2
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
10	100	1024
100	10000	$\sim 1.27 \cdot 10^{30}$

Tabella 6.1 *Confronto tra x^2 e 2^x*

Nelle applicazioni interessa principalmente il caso in cui la base della funzione esponenziale è il *numero di Nepero*, indicato con “e”, e di cui, per ora, ci basta sapere che si ha

$$e \simeq 2.718 .$$

Trattandosi di una base maggiore di 1, la relativa funzione esponenziale sarà crescente. Quando si parla di funzione esponenziale senza precisare la base, di solito si fa riferimento alla funzione e^x, che si scrive anche $\exp(x)$.

Si noti che tutte le funzioni esponenziali passano per il punto $(0, 1)$, in accordo con il fatto che $a^0 = 1$, per tutti i valori di a. Si noti infine (cosa molto importante!) che a^x è un numero strettamente maggiore di zero, qualunque sia x.

6.4 Le funzioni logaritmo

Un problema molto importante che si presenta con le funzioni esponenziali è quello della risoluzione di equazioni esponenziali come per esempio l’equazione $2^x = 8$. È evidente che l’unica soluzione possibile di questa equazione è $x = 3$ e questo trova conferma nel grafico della figura 6.13.

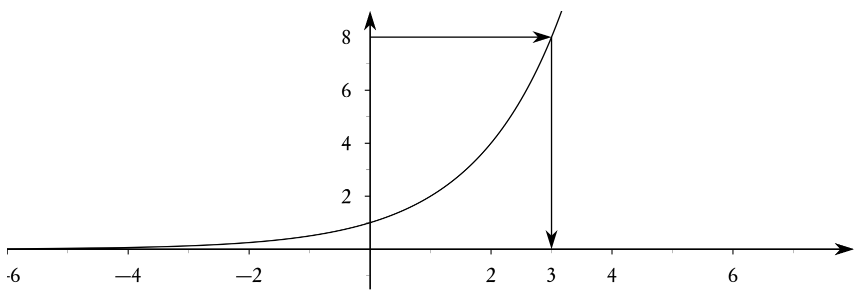


Figura 6.13 *L’equazione* $2^x = 8$

Se però consideriamo l’equazione $2^x = 3$, dall’esame della figura 6.14 possiamo concludere che ci deve essere una soluzione, ma essa non rientra in nessuno dei “numeri conosciuti”.

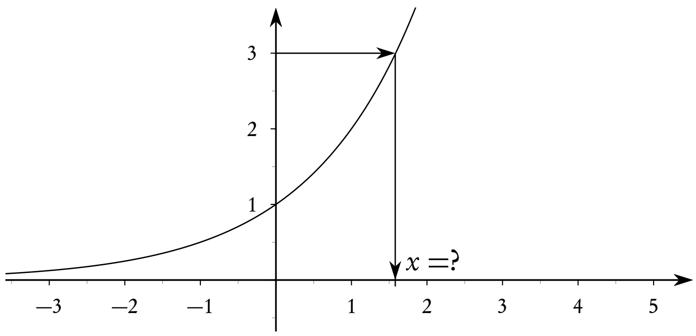


Figura 6.14 *L'equazione* $2^x = 3$

È per risolvere problemi come questo che si introduce il concetto di logaritmo. Precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 6.1. *Siano dati un numero reale* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *e un numero reale* $b > 0$. *Si chiama* logaritmo in base a di b, *e si indica con*

$$\log_a(b), \quad \textit{o semplicemente} \quad \log_a b\,, \tag{6.11}$$

*l'*esponente *che si deve dare ad a per ottenere b.*

In formule la definizione 6.1 si può sintetizzare come segue:

$$a^{\log_a b} = b\,. \tag{6.12}$$

Per esempio la x che risolve l'equazione $2^x = 3$ è data dal $\log_2 3$, perché

$$2^{\log_2 3} = 3\,.$$

Esempio 6.1. $\log_3 81 = 4$, perché $3^4 = 81$.

Esempio 6.2. $\log_{10} 1000 = 3$, perché $10^3 = 1000$.

Esempio 6.3. $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$, perché $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.

Esempio 6.4. $\log_{10} \dfrac{1}{10} = -1$, perché $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$.

In matematica la più importante base dei logaritmi è il numero "e" di Nepero e il logaritmo in base "e" si chiama anche *logaritmo naturale* e si indica con la scrittura $\ln x$, cioè si pone.[1]

$$\log_e x = \ln x\,. \tag{6.13}$$

[1]Purtroppo questa notazione non è adottata da tutti; alcuni scrivono $\log x$ per indicare il logaritmo naturale, mentre spesso la scrittura $\log x$ è usata per indicare il logaritmo in base 10. Noi useremo $\ln x$ per il logaritmo naturale, e $\log x$ per il logaritmo in base 10, in accordo con la quasi totalità delle calcolatrici e dei software per computer.

Dalle proprietà delle potenze si ricavano le seguenti proprietà dei logaritmi, che qui ci limitiamo solo ad enunciare, ricordando che a deve essere maggiore di zero e diverso da 1.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \quad x > 0, y > 0. \tag{6.14}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y\,, \quad x > 0, y > 0. \tag{6.15}$$

$$\log_a(x)^y = y\log_a x\,, \quad x > 0. \tag{6.16}$$

$$\log_a a = 1\,. \tag{6.17}$$

$$\log_a 1 = 0\,. \tag{6.18}$$

Ricordando la formula (6.12) e le proprietà appena scritte possiamo concludere che valgono le seguenti due proprietà che legano logaritmi ed esponenziali.

$$a^{\log_a x} = x,\ \forall x > 0, \qquad \log_a a^x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.19}$$

Le formule(6.19) esprimono la proprietà che le funzioni logaritmo ed esponenziale sono *inverse una dell'altra*, in un senso che preciseremo in seguito.

Nelle figure 6.15 e 6.16 sono riportati i grafici della funzione logaritmo con una base maggiore di 1 e una minore di 1: valgono le stesse osservazioni già fatte per le funzioni esponenziali.

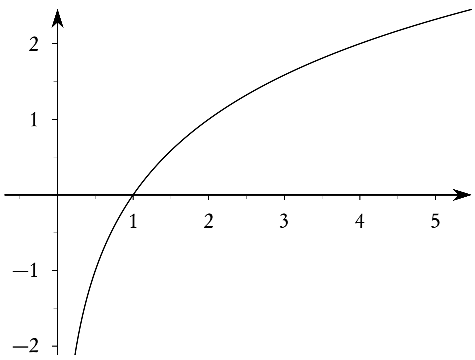


Figura 6.15 *La funzione* $\log_2 x$

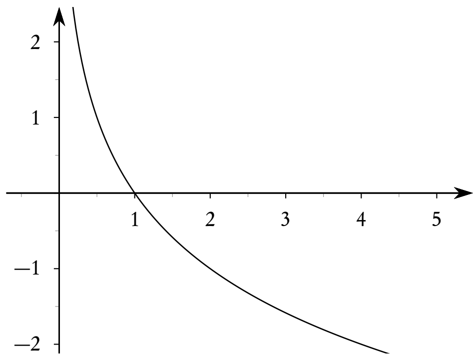


Figura 6.16 *La funzione* $\log_{1/2} x$

Si noti che tutte le funzioni logaritmo passano per il punto $(1,0)$, in accordo con il fatto che $\log_a 1 = 0$, per qualunque base a e che il dominio di queste funzioni è costituito da tutti gli $x > 0$ (attenzione: strettamente maggiori di zero!).

Le calcolatrici tascabili consentono di calcolare i logaritmi solo nella basi "e" e 10. Per calcolare i logaritmi in un'altra base si può usare la seguente *formula di cambiamento di base*, che ci limitiamo a dare senza alcuna giustificazione:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}\,. \tag{6.20}$$

6.5 Cenno sulle disequazioni con logaritmi ed esponenziali

Ci limiteremo a considerare solo casi molto semplici, ragionando principalmente su alcuni esempi.

Esempio 6.5. $2^x > 32\,(=2^5)$. Basta ricordare le proprietà delle potenze per concludere che la soluzione è $x > 5$ (attenzione: si noti che la base è maggiore di 1, per cui la funzione 2^x è crescente).

Esempio 6.6. $3^x < 5$. La strategia risolutiva più semplice consiste nel prendere il logaritmo naturale di ambo i membri e applicare le proprietà dei logaritmi: $\ln 3^x < \ln 5$, da cui $x \ln 3 < \ln 5$, e infine $x < \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.

Esempio 6.7. $2^{x^2-1} > 8$. Si osserva che si può scrivere $2^{x^2-1} > 2^3$, da cui $x^2 - 1 > 3$, $x^2 - 4 > 0$ e infine $x < -2 \vee x > 2$.

Esempio 6.8. $\ln(2x^2+x) > 0$. Si deve intanto tenere conto che deve essere $2x^2+x > 0$ perché il logaritmo abbia senso, da cui $x < -1/2 \vee x > 0$. Dopodiché si prende l'esponenziale in base e di ambo i membri, ottenendo

$$e^{\ln(2x^2+x)} > e^0, \Rightarrow 2x^2 - x > 1, \Rightarrow 2x^2 - x - 1 > 0, \Rightarrow x < -1 \vee x > 1/2 .$$

Tenendo conto delle condizioni di esistenza si trova infine che la disequazione è verificata per $x < -1 \vee x > 1/2$.

Esempio 6.9. $\ln(x-1) \geq \ln(-x+3)$. Si cominciano a scrivere le condizioni di esistenza: $x > 1 \wedge x < 3$, da cui $1 < x < 3$. Successivamente si prende l'esponenziale, in base e, di ambo i membri, ottenendo $x - 1 \geq -x + 3$, da cui $x \geq 2$. Tenendo conto delle condizioni di esistenza si trova $2 \leq x < 3$.

Esempio 6.10. $2^x > -3$. Poiché il primo membro è sempre positivo, la disequazione risulta verificata per tutti i valori reali di x.

7 Cenni di trigonometria

7.1 Angoli e loro misura in radianti

Angolo è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi l'origine in comune; l'origine delle semirette si chiama *vertice* dell'angolo, le due semirette si chiamano *lati* dell'angolo.

Gli angoli si misurano in *gradi sessagesimali* o in *radianti*. Nel primo caso si assume come unità di misura l'angolo costituito dalla 360^a parte dell'angolo giro, che si indica con 1° e si legge un grado sessagesimale, e si verifica quante volte questa unità o i suoi sottomultipli stanno nell'angolo da misurare. Come è ben noto, per esempio l'angolo retto con questa unità misura 90°.

Questo tipo di misura degli angoli, molto importante in tutte le applicazioni e molto usato, *non* va bene per gli scopi dell'analisi, dove si usa il metodo che ora indicheremo. Considerato un angolo $A\hat{O}B$, di vertice O, si tracci una circonferenza di centro O e raggio r; l'angolo stacca su questa circonferenza un arco di lunghezza a: si chiama *misura in radianti* dell'angolo $A\hat{O}B$ il rapporto tra la lunghezza dell'arco e la misura del raggio. Si noti che, essendo un rapporto di lunghezze, il numero che si ottiene è un *numero puro*, privo di dimensioni. Se, come di solito si fa, il raggio della circonferenza si sceglie uguale a 1, allora la misura dell'angolo coincide con la lunghezza dell'arco, tant'è che, a volte, si parla di archi anziché di angoli. Si veda la figura 7.1.

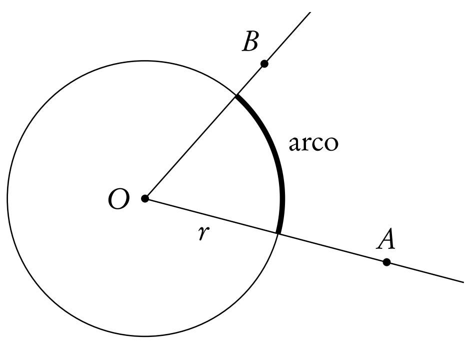


Figura 7.1 *Angoli e misura in radianti*

Gli angoli più importanti hanno, con questo sistema, le misure indicate nella tabella 7.1, dove abbiamo usato la scrittura $\alpha°$ per indicare la misura in gradi, e la scrittura α per indicare quella in radianti.

α°	α
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

Tabella 7.1 *Angoli e loro misura in gradi e radianti*

Gli angoli, nelle applicazioni, sono sempre angoli orientati, nel senso che è stabilito quale dei due lati è da considerarsi come primo e quale come secondo. Agli angoli orientati in senso antiorario[(1)] viene attribuito un segno positivo, a quelli orientati in senso orario un segno negativo. Inoltre, siccome con la misura in radianti abbiamo in sostanza identificato gli angoli con archi di circonferenza, si può immaginare, per misurare l'angolo, di "percorrere" (in senso orario o antiorario) l'arco a partire dal punto di intersezione della circonferenza con il primo lato fino a raggiungere il punto di intersezione con il secondo lato; questa "identificazione" ci consente di immaginare di percorrere anche più volte (in un senso o nell'altro) la circonferenza, ottenendo angoli (in realtà sarebbe meglio dire "archi") anche più lunghi di 2π. Si parla anche di angoli generalizzati. Per esempio nella figura 7.2 possiamo immaginare di partire dal punto P per giungere al punto Q percorrendo l'arco indicato (lungo 1 nell'esempio, come il raggio della circonferenza) oppure, una volta giunto in Q, possiamo immaginare di proseguire facendo un altro giro e arrivando nuovamente in Q dopo aver percorso un arco lungo, questa volta, $2\pi + 1$ (si tenga conto che, essendo il raggio $r = 1$, la circonferenza misura proprio 2π) o, ancora facendo due giri e percorrendo un arco lungo $4\pi + 1$, ecc.

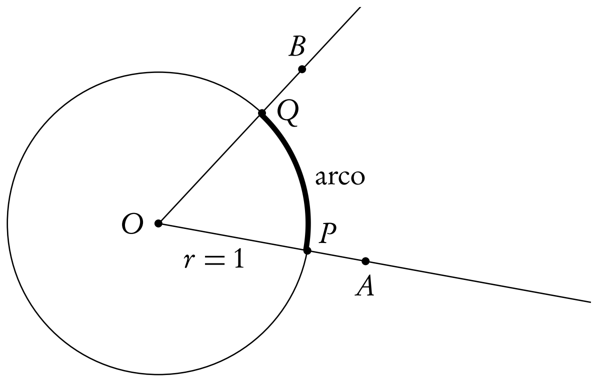


Figura 7.2 *Angoli generalizzati*

Se nel piano è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, possiamo sempre pensare che il vertice dell'angolo stia nell'origine degli assi e che il primo lato coincida con il semiasse positivo

[1]Ci affidiamo all'intuizione: in realtà i concetti di "senso orario" o "senso antiorario" non sono facili da definire rigorosamente.

delle x. La circonferenza, di raggio 1, che dobbiamo tracciare per misurare gli angoli ha allora centro nell'origine e quindi equazione $x^2+y^2=1$: la chiameremo *circonferenza goniometrica*. Possiamo, come già osservato, identificare gli angoli con archi di questa circonferenza. Anzi, possiamo pensare che ad ogni numero reale risulti associato un ben definito punto della circonferenza, anche se, ovviamente, a numeri che differiscono per 2π o multipli corrisponderà lo stesso punto: basta pensare di percorrere, a partire dal punto $(1,0)$, lungo la circonferenza un arco lungo quanto il valore assoluto del numero, in senso orario o antiorario a seconda che il numero sia negativo o positivo. Quello che conta nelle applicazioni (in particolare all'economia) è proprio questo fatto: ad ogni numero reale corrisponde un ben preciso punto della circonferenza goniometrica.

7.2 Le funzioni seno e coseno

Il punto, P, della circonferenza goniometrica che risulta associato ad un numero reale x ha una ascissa e una ordinata: $P=(x_P,y_P)$. Questa ascissa e questa ordinata hanno grande importanza nelle applicazioni e si dà la seguente definizione.

Definizione 7.1. *L'ascissa del punto P si chiama* coseno *del numero x; l'ordinata del punto P si chiama* seno *del numero reale x e si scrive*

$$x_P=\cos(x),\quad y_P=\sin(x),\ \textit{o, semplicemente,}\ x_P=\cos x,\quad y_P=\sin x. \tag{7.1}$$

Con queste definizioni possiamo considerare due nuove funzioni reali di variabile reale, dette *funzione coseno* e *funzione seno*, con i seguenti grafici.

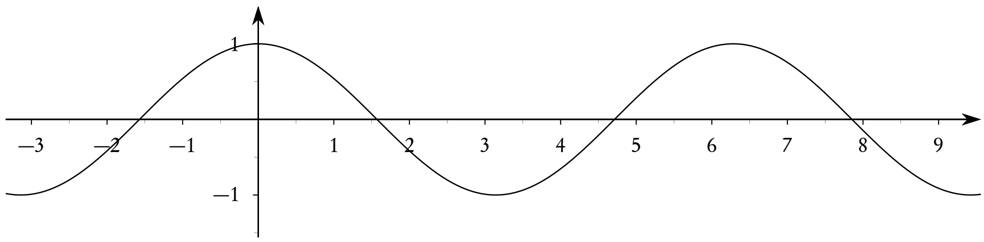


Figura 7.3 *La funzione coseno*

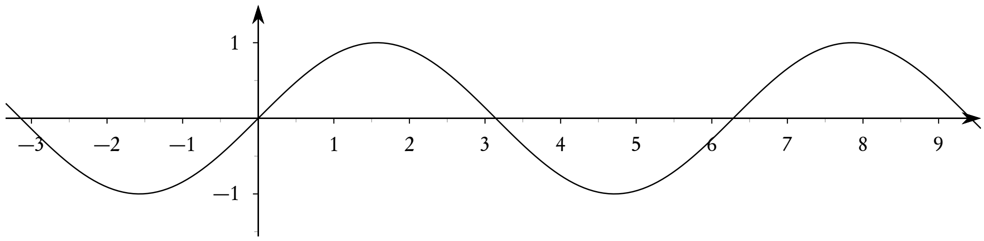


Figura 7.4 *La funzione seno*

Come mostrano le figure, e come risulta evidente dalla definizione, questi grafici si ripetono dopo un tratto lungo 2π (corrispondente alla lunghezza della circonferenza goniometrica). Si dice che le funzioni in questione sono *periodiche*, ed è proprio questa la cosa che conta, in quanto è alla base dello studio dei fenomeni che hanno un andamento oscillante. La figura 7.5 propone un esempio di una funzione ottenuta combinando opportunamente le funzioni seno e coseno: non è difficile scorgervi una tipico andamento delle quotazioni borsistiche.

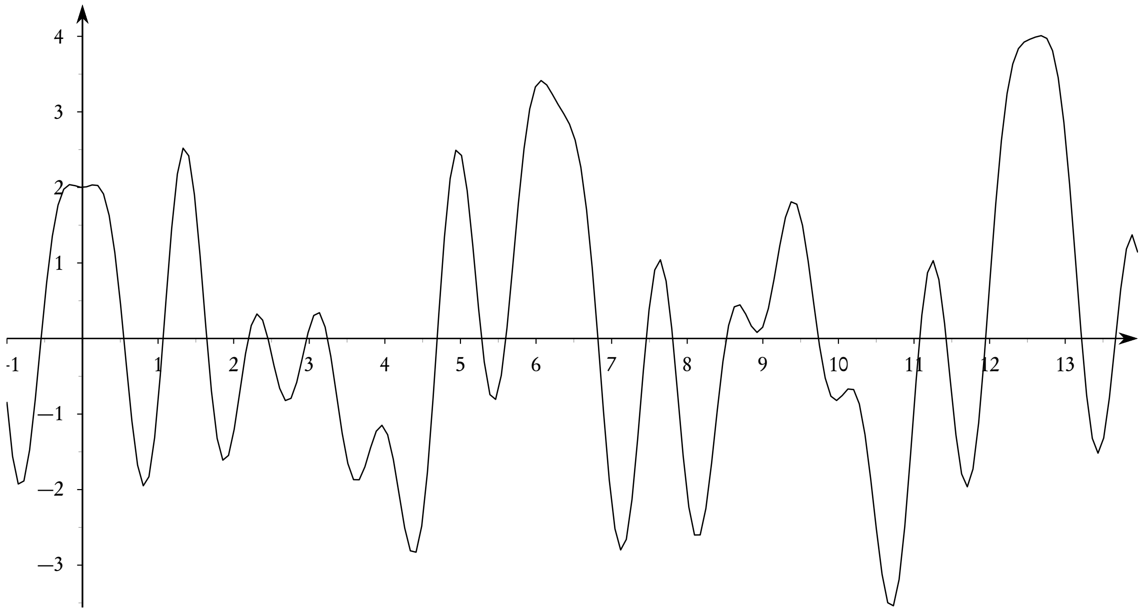


Figura 7.5 *Un esempio di "funzione oscillante"*

7.3 Formule di addizione e sottrazione

L'analisi del comportamento di una funzione od operazione rispetto alle operazioni fondamentali di somma e prodotto è un problema sempre di grande importanza. Ricordiamo, a mo' d'esempio, una situazione molto nota:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad (a\geq 0,\ b\geq 0);\qquad \sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}\,,$$

risultati che si esprimono a parole nel modo seguente: la radice del prodotto di due numeri positivi è il prodotto delle radici dei due numeri; la radice della somma di due numeri *non è* la somma delle radici. Ritroveremo problemi simili con i limiti, le derivate, gli integrali.

La situazione è complessa con le funzioni seno e coseno, per le quali valgono le seguenti formule, dette di addizione e sottrazione.

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\quad \sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\,. \tag{7.2}$$

Per esempio, sapendo che

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\,,$$

si deduce che

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Se, nelle formule di addizione, mettiamo $x=y$ otteniamo le seguenti formule, dette formule di duplicazione.

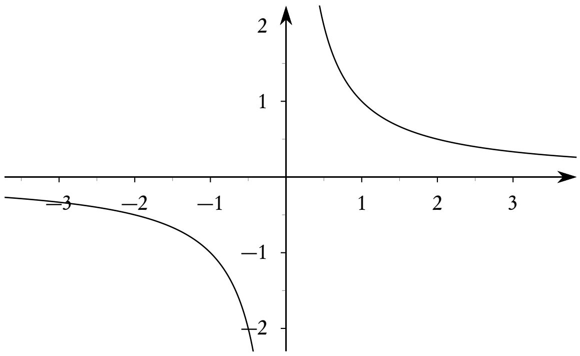
$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x\,,\quad \sin(2x)=2\sin x\cos x\,. \tag{7.3}$$

8 Primi grafici di funzioni

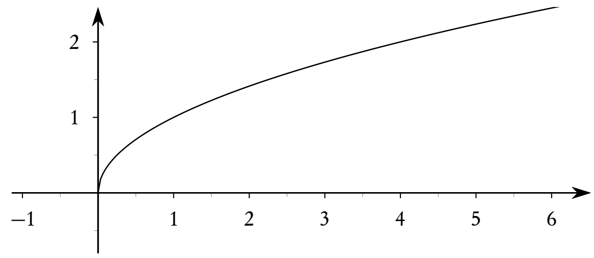
In questo capitolo presenteremo alcune tecniche di base per tracciare grafici di funzioni, a partire da altri grafici noti che abbiamo già incontrato nelle pagine precedenti e che qui riportiamo per comodità, con l'ulteriore introduzione della funzione valore assoluto.

8.1 Qualche grafico di base

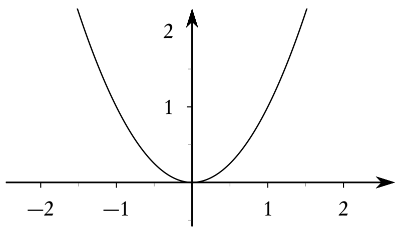
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$



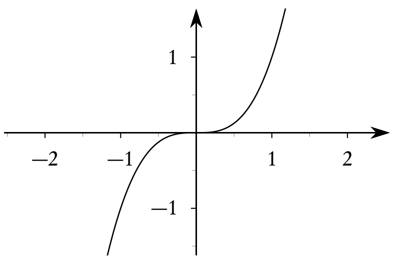
- $f(x) = \sqrt{x}$



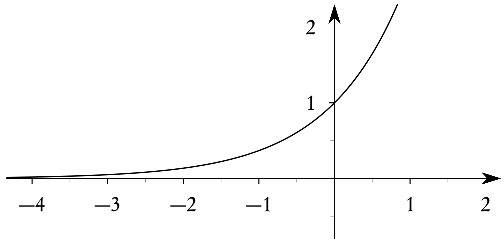
- $f(x) = x^2$



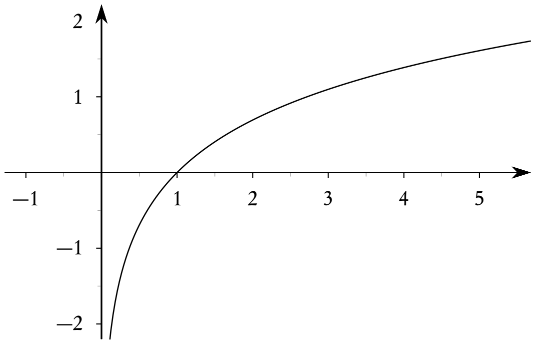
- $f(x) = x^3$



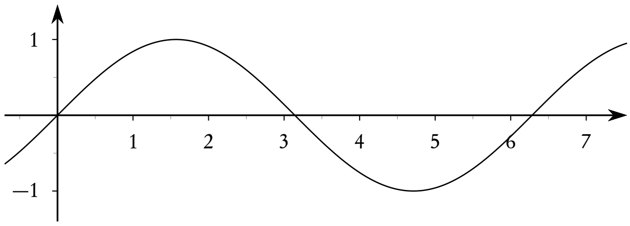
- $f(x) = e^x$



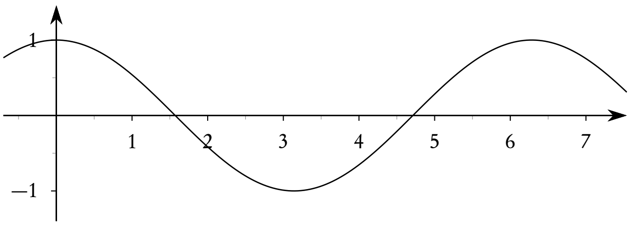
- $f(x) = \ln(x)$



- $f(x) = \sin(x)$



- $f(x) = \cos(x)$



8.2 Valore assoluto o modulo

Definizione 8.1. *Dato un numero reale x si chiama* valore assoluto, *o* modulo, *di x, e si indica con $|x|$, il numero positivo così definito:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases} . \tag{8.1}$$

Dal punto di vista grafico, se si rappresentano i numeri sulla retta cartesiana, il modulo di un numero rappresenta la sua *distanza* dall'origine.

La funzione valore assoluto, cioè $f(x) = |x|$ ha il grafico della figura 8.1.

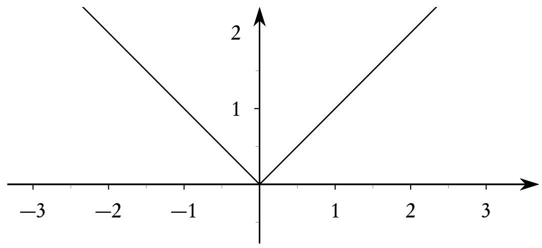


Figura 8.1 *La funzione valore assoluto*

Esempio 8.1. $|5| = 5$.

Esempio 8.2. $|-3| = 3$.

Esempio 8.3. $\left|1-\sqrt{2}\right| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$.

Esempio 8.4. $|-2| + \left|\sqrt{5}-2\right| = 2+(\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}$.

8.2.1 Proprietà del valore assoluto

Per la funzione valore assoluto valgono le seguenti proprietà.

- $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ se e soltanto se $x = 0$.
- $|x| = |-x|$.
- $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $|xy| = |x|\,|y|$.
- $|x-y| = |y-x|$.
- $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$.
- $|x|^2 = x^2$.

8.2.2 Disequazioni con valore assoluto

Le disequazioni fondamentali sono le seguenti.

$$|x| > a, \quad |x| \geq a, \quad |x| < a, \quad |x| \leq a,$$

dove a è un numero reale. Se a è negativo le prime due disequazioni sono sempre verificate, la terza e la quarta non sono mai verificate, per la prima proprietà del modulo riportata sopra. Se invece $a \geq 0$ allora:

- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$;
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$;
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Esempio 8.5. $|x| > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 0$, ovvero $x \neq 0$.

Esempio 8.6. $|x| \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 0$, ovvero tutti gli x, come del resto risulta dalle proprietà del modulo.

Esempio 8.7. $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

La discussione grafica di queste disequazioni è particolarmente significativa e fornisce una semplice giustificazione del metodo di risoluzione proposto. Lo possiamo vedere nell'esempio seguente.

Esempio 8.8. $|x| > 2$.

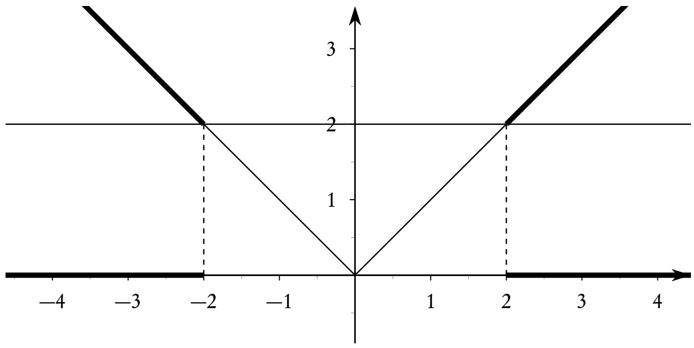


Figura 8.2 *La disequazione* $|x| > 2$

Per risolvere disequazioni di altro tipo bisognerà distinguere i vari casi che si possono presentare e poi unire tutti i risultati ottenuti. Per capire il metodo si possono vedere gli esempi che seguono.

Esempio 8.9. $|x| + 2x - 1 > 0$. Poiché $|x|$ può valere $-x$ o x, distingueremo due casi.

1. $\begin{cases} x < 0 \\ -x + 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 1/3 \end{cases}$.

Il primo sistema non ha soluzioni, il secondo è verificato per $x > 1/3$, dunque le soluzioni della disequazione proposta sono: $x > 1/3$.

Esempio 8.10. $|x - 1| + 3x - 5 < 0$. Poiché $|x - 1|$ può valere $x - 1$ oppure $-(x - 1) = -x + 1$, distingueremo sempre due casi.

1. $\begin{cases} x < 1 \\ -x + 1 + 3x - 5 < 0 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 + 3x - 5 < 0 \end{cases}$.

Il primo sistema è verificato per $x < 1$, il secondo per $1 \leq x < 3/2$, dunque le soluzioni della disequazione proposta sono: $x < 3/2$.

8.3 Grafici derivati

A partire da un grafico noto si possono costruire con semplici tecniche numerosi altri grafici: considereremo qui alcune di queste tecniche, facendo riferimento al generico grafico riportato nella figura 8.3.

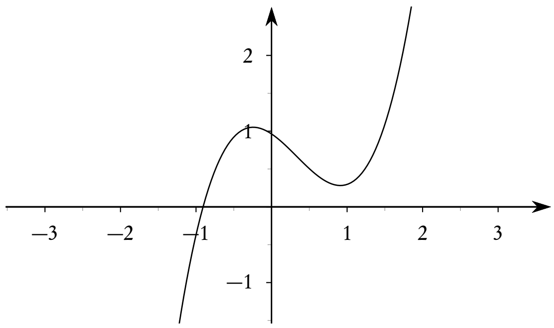
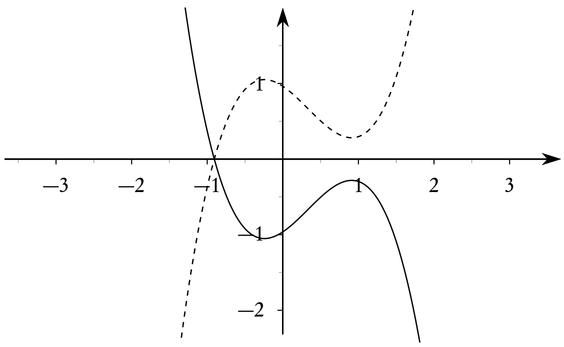


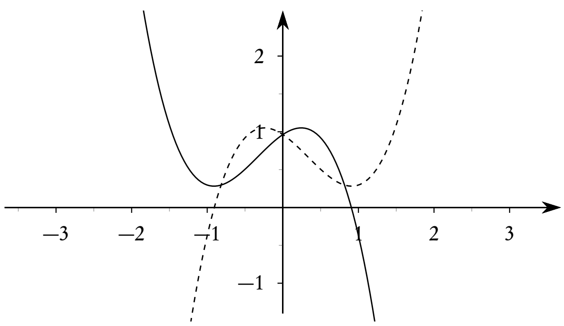
Figura 8.3 *Grafico di una generica funzione* $f(x)$

In tutti i grafici derivati che seguono abbiamo riportato in tratteggio anche il grafico originale, per un utile confronto.

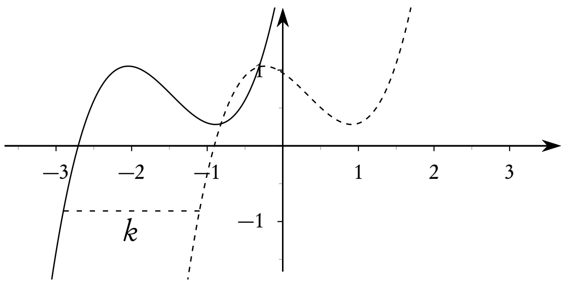
Simmetria rispetto all'asse delle x: cambiare $f(x)$ in $-f(x)$.



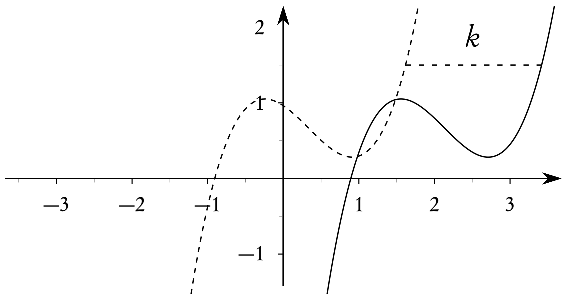
Simmetria rispetto all'asse delle y: cambiare $f(x)$ in $f(-x)$.



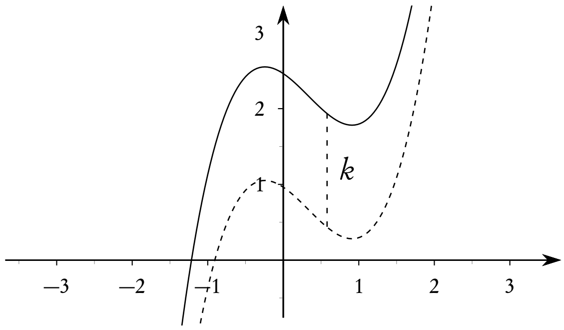
Traslazione di k (> 0) unità verso sinistra: cambiare $f(x)$ in $f(x+k)$.



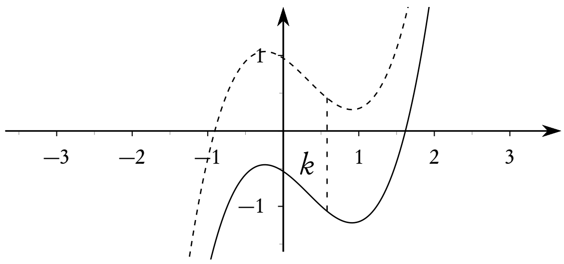
Traslazione di k (> 0) unità verso destra: cambiare $f(x)$ in $f(x-k)$.



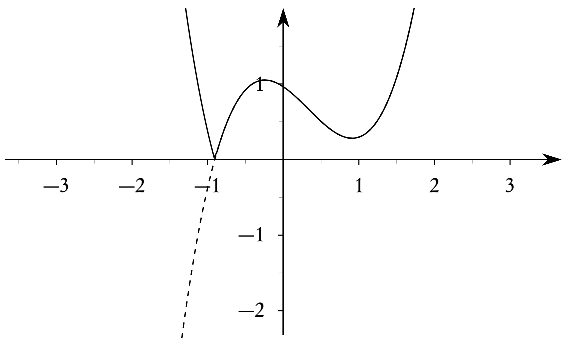
Traslazione di k (> 0) unità verso l'alto: cambiare $f(x)$ in $f(x)+k$.



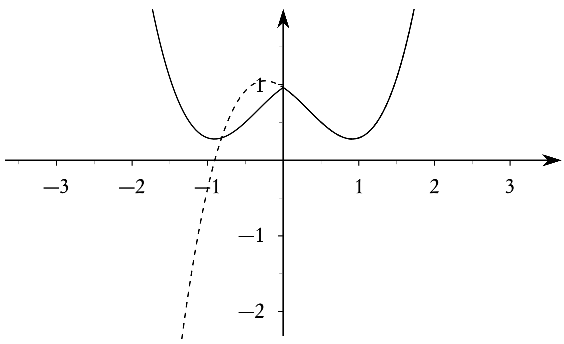
Traslazione di k (> 0) unità verso il basso: cambiare $f(x)$ in $f(x)-k$.



Per cambiare $f(x)$ in $|f(x)|$ si lascia inalterata la parte di grafico sopra l'asse delle x, mentre la parte di grafico sotto l'asse delle x viene "ribaltata" rispetto all'asse delle x stesso.



Per cambiare $f(x)$ in $f(|x|)$ si lascia inalterata la parte di grafico a destra dell'asse y, mentre la parte di grafico a sinistra dell'asse y si ottiene facendo la simmetrica della parte destra rispetto all'asse y stesso.



Naturalmente le tecniche viste possono essere usate in combinazione tra loro, come vedremo su alcuni esempi.

Esempio 8.11. Tracciare il grafico di $f(x) = -\sqrt{-x} + 1$.

Si comincia col tracciare il grafico di $g(x) = \sqrt{x}$ (vedi la relativa figura nella pagina 75). Poi si traccia il grafico di $\sqrt{-x}$ (simmetria rispetto all'asse delle y) e successivamente quello di $-\sqrt{-x}$ (ulteriore simmetria, questa volta rispetto all'asse delle x. Infine si traccia il grafico di $-\sqrt{-x}+1$, operando una traslazione verso l'alto di una unità. I tre passaggi sono riportati nelle figure 8.4, 8.5 e 8.6.

Si noti che si poteva anche scrivere $f(x) = -(\sqrt{-x} - 1)$. Si poteva dunque procedere a tracciare prima $\sqrt{x}$, poi $\sqrt{-x}$, successivamente $\sqrt{-x} - 1$, e infine $-(\sqrt{-x} - 1)$, ottenendo lo stesso risultato (come deve essere!).

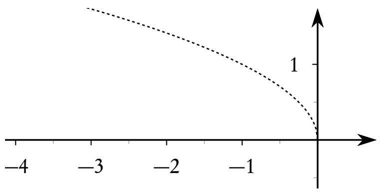


Figura 8.4 *Grafico di* $\sqrt{-x}$

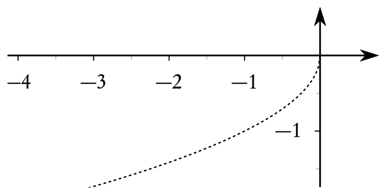


Figura 8.5 *Grafico di* $-\sqrt{-x}$

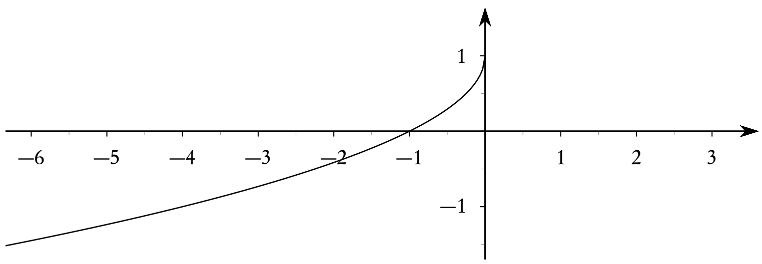


Figura 8.6 *Grafico di* $-\sqrt{-x}+1$

Esempio 8.12. Tracciare il grafico di $f(x) = \sqrt{-x-1}$.

È indispensabile riscrivere la funzione come $f(x) = \sqrt{-(x+1)}$, per poter ricondurre questo caso a quelli trattati (si presti particolare attenzione a questo fatto!). La successione questa volta è $\sqrt{x}$ (già noto), $\sqrt{-x}$ (anche questo già considerato sopra nella figura 8.4), e infine $\sqrt{-(x+1)}$, il cui grafico è riportato nella figura 8.7.

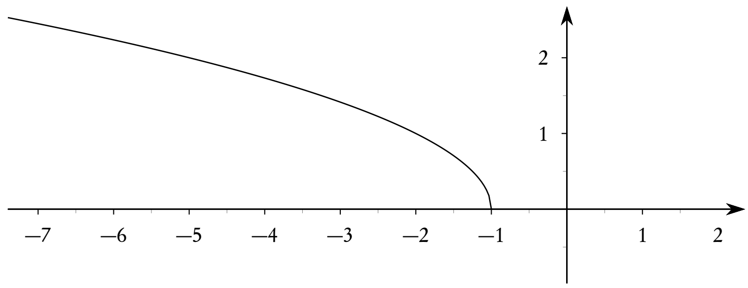


Figura 8.7 *La funzione* $\sqrt{-x-1}$

Esempio 8.13. Tracciare il grafico di $f(x) = \ln(|x-1|)$.

La successione richiesta è: $\ln x$ (già noto), $\ln|x|$ (a sinistra dell'asse y si prende il simmetrico della parte destra), e infine $\ln(|x-1|)$ (traslazione verso destra di una unità). I due passaggi finali sono riportati nelle figure 8.8 e 8.9.

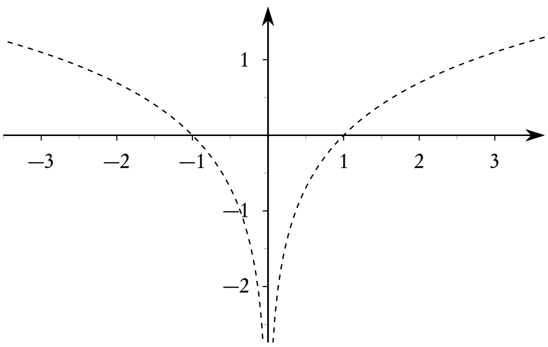


Figura 8.8 *Grafico di* $\ln|x|$

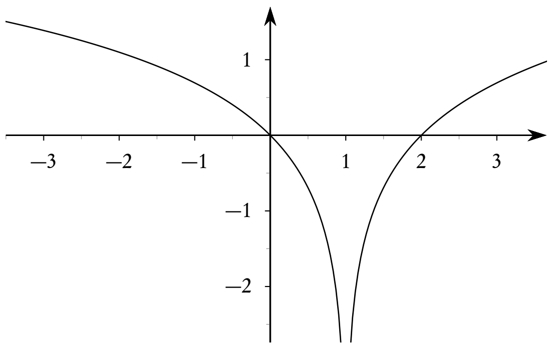


Figura 8.9 *Grafico di* $\ln|x-1|$

Esempio 8.14. Tracciare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$.

La successione di passaggi richiesta è: $\dfrac{1}{x}$ (già noto), $\dfrac{1}{x-1}$ (traslazione verso destra di 1 unità), e infine $\dfrac{1}{|x|-1}$ (sostituzione della parte a sinistra dell'asse y con la simmetrica della parte destra. Le figure 8.10 e 8.11 riportano i due ultimi passaggi. In esse abbiamo tracciato anche le rette $x = 1$ e $x = -1$, che costituiscono due *asintoti verticali*, secondo una definizione che daremo successivamente.

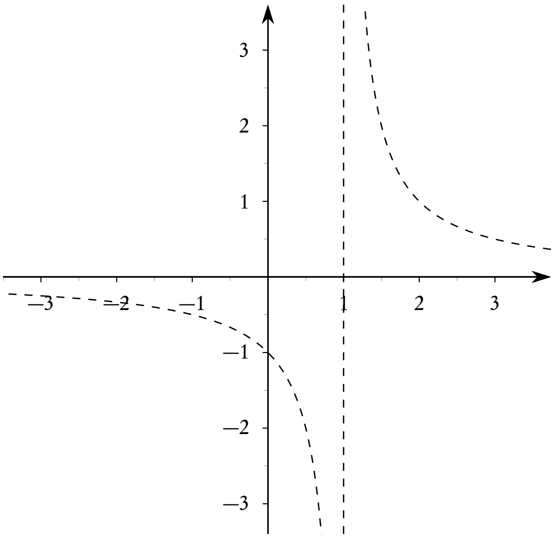


Figura 8.10 *Grafico di* $1/(x-1)$

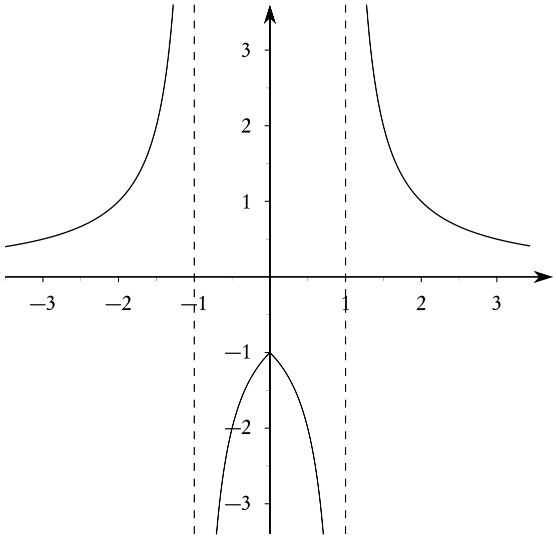


Figura 8.11 *Grafico di* $1/(|x|-1)$

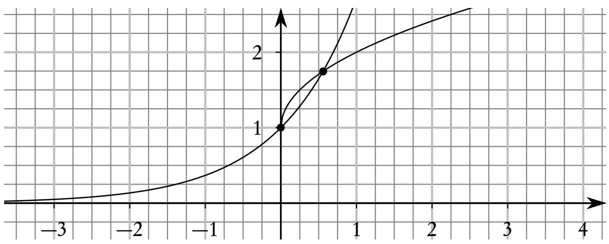
Si noti che, una volta tracciati i grafici con le tecniche viste, è possibile dedurre facilmente dai grafici stessi il dominio e l'insieme immagine della funzione.

Utilizzando i grafici di funzioni si possono anche risolvere, per via grafica, sistemi di equazioni in due incognite più complessi di quelli trattati nel paragrafo 4.7 del capitolo 4, anche se di solito si può agevolmente trovare il numero di soluzioni, mentre il valore esplicito delle soluzioni può essere trovato solo in via approssimata.

Esempio 8.15. Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} + 1 \\ y = e^x \end{cases}$$

si possono tracciare i grafici delle due funzioni e poi valutare il numero e la posizione dei loro punti di intersezione (valutazione più facile se si ha una carta finemente quadrettata).



La figura mostra che ci sono due intersezioni, una in corrispondenza di $x = 0$ (cosa abbastanza facile da verificare), la seconda circa in corrispondenza di $x = 0.5$. I corrispondenti valori di y sono 1 e circa 1.8. Un calcolo più preciso, fatto con opportuni software, fornisce $x = 0.557832337000022$ e $y = 1.746881742312678$.

Con le stesse tecniche si possono anche risolvere sistemi di disequazioni più complessi di quelli trattati nel paragrafo 5.3.2 del capitolo 5.

8.4 Esercizi

Esercizio 8.1. *Si tracci il grafico approssimativo delle seguenti funzioni, esplicitandone il dominio e l'insieme immagine.*

1. 2^{x-1};
2. $-\ln(1-x)$;
3. $\ln(x+1)+2$;
4. $-\ln(-x)-1$;
5. $e^{1-x}-1$;
6. $-(3^x+1)$;
7. $-(\ln(-x+1)-1)$;
8. $\ln(x-2)+3$;
9. $-\ln(-x)+1$;
10. -2^{-x};
11. -2^{-x};
12. -3^{x-1};
13. e^{-x-1};
14. $\sqrt{x-1}+1$;
15. $-\sqrt{-x}+1$;
16. $\sqrt{1-x}+2$;
17. $-(\sqrt{x+2}+1)$;
18. $-x^2+2$;
19. $-(x-2)^2+3$;
20. $(1-x)^3+2$;
21. $-(1-x)^2+2$;
22. $-(x+1)^2-2$;
23. $-x^3+3$.

Esercizio 8.2. *Determinare il numero delle soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni.*

1. $\begin{cases} y = x^3+1 \\ y = 2-(1-x)^2 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} y = 1+(2-x)^3 \\ y = \sqrt{x+1}+2 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} y = \ln(x-1)+2 \\ y = 1-\sqrt{x} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} y = \mathrm{e}^x \\ y = -\sqrt{x+2}+3 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{-x-1} \\ y = \sqrt{x}+3 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} y = \ln(x+1) \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$;

7. $\begin{cases} y = -\ln(x+1) \\ y = -\dfrac{1}{10}\,x \end{cases}$;

8. $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{-x}+3 \\ y = \ln(x-10) \end{cases}$.

Esercizio 8.3. *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.*

1. $\begin{cases} y+3^{-x}-2>0 \\ x^2+y^2<4 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} y-\ln(1-x)+1>0 \\ x^2+y^2\geq 1 \end{cases}$.

Esercizio 8.4. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $|x|<2$;
2. $|x+1|>3$;
3. $\left|x^2-1\right|<x$;
4. $|\mathrm{e}^x-1|>2$;
5. $|\log_2(x)-1|<2$;
6. $|x-1|<1$.

Esercizio 8.5. *Data la funzione* $f(x)=-\sqrt{-x+1}$, *determinarne l'insieme immagine e, successivamente, l'immagine dei seguenti insiemi.*

1. $A=[-3,2]$;
2. $B=]-2,-1[$;
3. $C=[0,1]$.

9 Ancora insiemi e funzioni

9.1 Insiemi limitati e illimitati di numeri reali

Attenzione: in tutto questo paragrafo gli insiemi considerati sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 9.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Un numero reale x si dice un* maggiorante *di A se*

$$x \geq a, \ \forall a \in A. \tag{9.1}$$

Un numero reale y si dice un minorante *di A se*

$$y \leq a, \ \forall a \in A. \tag{9.2}$$

Esempio 9.1. Sia $A =]-2, 8]$. Allora -5, $-\pi$, -2 sono minoranti; 8, 10, $\sqrt{89}$ sono maggioranti.

Esempio 9.2. Sia $A = \mathbb{N}$. Allora non esistono maggioranti, mentre tutti i numeri reali minori o ugauli a zero sono minoranti.

Esempio 9.3. Sia $A = \mathbb{Z}$. Allora non esistono né maggioranti, né minoranti.

Definizione 9.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. A dice* limitato superiormente *(o anche* limitato a destra*) se ha almeno un maggiorante. A dice* limitato inferiormente *(o anche* limitato a sinistra*) se ha almeno un minorante. Un insieme che sia limitato sia superiormente che inferiormente si dice* limitato. *Un insieme che non sia limitato superiormente o inferiormente si dice* illimitato superiormente *o* illimitato inferiormente. *Un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente si dice* illimitato.

Esempio 9.4. $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente, ma non superiormente.

Esempio 9.5. $\mathbb{Z}$ non è limitato né inferiormente né superiormente.

Esempio 9.6. $A =]2, 6[$ è limitato (sia superiormente che inferiormente).

Definizione 9.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Un numero $M \in A$ si dice il* massimo *di A se $M \geq a$, $\forall a \in A$; un numero $m \in A$ si dice il* minimo *di A se $m \leq a$, $\forall a \in A$.*

Si noti che abbiamo detto "il" massimo e "il" minimo perché, come si può dimostrare se il massimo c'è, è unico; analogamente per il minimo. Si tenga ben presente che il massimo e il minimo, se ci sono, appartengono all'insieme.

Esempio 9.7. Se $A = [0, 1]$, 1 è il massimo, mentre 0 è il minimo di A. Si scrive anche $1 = \max(A)$, $0 = \min(A)$.

Esempio 9.8. Se $A =]0, 1[$, A non ha né massimo né minimo.

Esempio 9.9. Se $A =]0, 1]$, $1 = \max(A)$, mentre A non ha minimo.

Esempio 9.10. $\min(\mathbb{N}) = 0$, mentre $\mathbb{N}$ non ha massimo.

Esempio 9.11. $\mathbb{Z}$ non ha né massimo né minimo.

Come è ovvio dalla definizione, e come mostrano gli esempi, un insieme illimitato superiormente non può avere massimo, uno illimitato inferiormente non può avere minimo, ma anche insiemi limitati possono non avere né massimo né minimo. Per ovviare a questo inconveniente si introducono i concetti di estremo superiore e inferiore che, in un certo senso, estendono quelli di massimo e minimo. L'introduzione di questi concetti è resa possibile dal fatto che si dimostra che se un insieme è limitato superiormente allora l'insieme dei suoi maggioranti ha sempre un minimo, se un insieme è limitato inferiormente allora l'insieme dei suoi minoranti ha sempre un massimo.

Definizione 9.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Allora il minimo dei maggioranti di A si chiama* estremo superiore *di A e si indica con* $\sup(A)$*. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme inferiormente limitato. Allora il massimo dei minoranti di A si chiama* estremo inferiore *di A e si indica con* $\inf(A)$*.*

Se A è superiormente illimitato si pone, per definizione, $\sup(A) = +\infty$*; se A è inferiormente illimitato si pone, per definizione,* $\inf(A) = -\infty$.

Possiamo quindi dire che ogni insieme di numeri reali ha sempre un estremo superiore (eventualmente $+\infty$) e un estremo inferiore (eventualmente $-\infty$). Per distinguere gli insiemi limitati dagli illimitati, per i primi parleremo di estremo superiore, oppure inferiore, *finiti*.

Esempio 9.12. $+\infty = \sup(\mathbb{N})$, $0 = \inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N})$.

Esempio 9.13. $+\infty = \sup(\mathbb{Z})$, $-\infty = \inf(\mathbb{Z})$.

Esempio 9.14. $1 = \sup(]0,1[)$, $0 = \inf(]0,1[)$.

Esempio 9.15. $1 = \sup([0,1]) = \max([0,1])$, $0 = \inf([0,1]) = \min([0,1])$.

Come mostrano gli esempi, e come è facile mostrare, se un insieme ha massimo, il massimo è anche estremo superiore, se un insieme ha minimo, il minimo è anche estremo inferiore.

Gli estremi superiore e inferiore, se finiti, godono delle due proprietà caratteristiche[1] elencate nel teorema che segue (invitando i più volenterosi a dimostrarlo).

Teorema 9.5. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora* $\sup(A)$ *è caratterizzato dalle seguenti due proprietà.*

1. $\sup(A) \geq a$, $\forall a \in A$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a > \sup(A) - \varepsilon$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme inferiormente limitato, allora $\inf(A)$ *è caratterizzato dalle seguenti due proprietà.*

1. $\inf(A) \leq a$, $\forall a \in A$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a < \inf(A) + \varepsilon$.

9.2 Insiemi limitati e illimitati nel piano

Anche per i sottoinsiemi del piano si può introdurre il concetto di insieme limitato e illimitato, ma la cosa è diversa dal caso degli insiemi sulla retta, perché sulla retta reale esiste un ordine (cioè nei numeri reali si può parlare di maggiore e di minore), mentre nel piano non esiste alcun ordine.

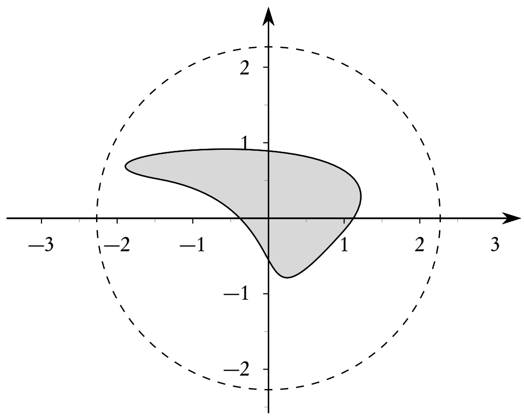
[1]Si dice proprietà caratteristiche perché sono condizioni necessarie e sufficienti perché un numero sia il sup di insieme.

Definizione 9.6. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *un sottoinsieme del piano. A si dice* limitato *se esiste un cerchio di centro l'origine e raggio* r *che lo contiene, altrimenti si dice* illimitato.

Come si vede si parla solo di insieme limitato o illimitato, non ha alcun senso il concetto di limitatezza superiore o inferiore, così come non hanno senso i concetti di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore o inferiore.

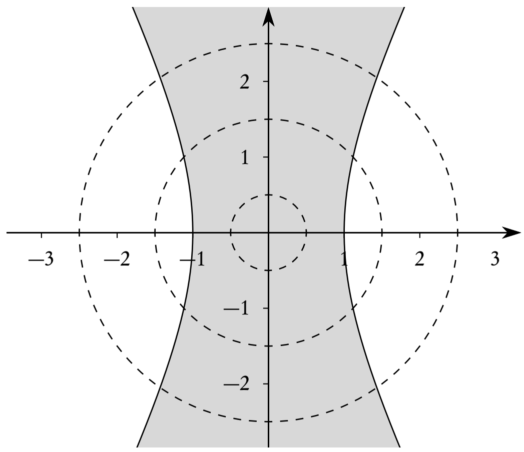
Esempio 9.16.

Un insieme limitato del piano e il cerchio che lo contiene



Esempio 9.17.

Un insieme illimitato del piano: nessun cerchio lo può contenere.



9.3 Un po' di topologia

Nel seguito avremo bisogno di utilizzare concetti simili per sottoinsiemi della retta e del piano. Per uniformare le definizioni conviene dare la seguente definizione.

Definizione 9.7. *Dato un punto P sulla retta (numero reale) o sul piano (coppia di numeri reali), diremo* palla *di centro P e raggio* ε *l'insieme di tutti i punti che hanno da P distanza minore di* ε*; diremo invece* palla chiusa *di centro P e raggio* ε *l'insieme di tutti i punti cha hanno da P distanza minore o uguale a* ε.

È evidente che sulla retta una palla è un intervallo (aperto o chiuso a seconda dei casi) che ha un numero c come centro e ε come semiampiezza; nel piano una palla è un cerchio di centro P e raggio ε, comprensivo o no della circonferenza di bordo, a seconda dei casi.

Definizione 9.8 (Intorno). *Dato un numero punto P sulla retta o nel piano, si chiama* intorno *di P, e si indica con $I(P)$, o con I_P, una qualunque palla aperta a cui P appartiene.*

Ci interesseranno in maniera particolare gli *intorni circolari*, che sono gli intorni costituiti dalle palle aperte che hanno P al centro: per questi intorni useremo, di solito, il simbolo $I(P,\varepsilon)$.

Definizione 9.9 (Punto interno). *Dato un insieme A, un punto P si dice* interno *ad A se esiste almeno un intorno di P tutto contenuto in A. È ovvio che un punto interno appartiene sempre all'insieme.*

Definizione 9.10 (Punto esterno). *Dato un insieme A, un punto P si dice* esterno *ad A se esso è interno al complementare di A, cioè se esiste almeno un intorno di P tutto contenuto nel complementare di A. È ovvio che un punto esterno non può appartenere all'insieme.*

Definizione 9.11 (Punto isolato). *Dato un insieme A, un punto P di A si dice* isolato *in A se esiste un intorno $I(P)$ di P tale che $I(P) \cap A = \{P\}$, cioè se esiste un intorno di P nel quale P è l'unico punto di A. È ovvio che un punto isolato appartiene sempre all'insieme.*

Definizione 9.12 (Punto di frontiera). *Dato un insieme A, un punto P si dice* di frontiera *per A se per ogni intorno $I(P)$ di P si ha $I(P) \cap A \neq \emptyset$ e contemporaneamente $I(P) \cap \complement A \neq \emptyset$, cioè se in ogni intorno di P cade almeno un punto di A e un punto fuori da A. Un punto di frontiera può appartenere oppure no all'insieme.*

Definizione 9.13 (Punto di accumulazione). *Dato un insieme A, un punto P si dice* di accumulazione *per A se in ogni intorno $I(P)$ di P cadono infiniti punti di A, cioè se l'insieme $I(P) \cap A$ contiene infiniti punti. Un punto di accumulazione può appartenere oppure no all'insieme.*

Di seguito alcuni esempi, prima con sottoinsiemi della retta, poi con sottoinsiemi del piano.

Esempio 9.18. In questo esempio sulla retta l'insieme A è così definito: $A = [0,2[\cup \{5\}$.

- 1 è un punto interno, perché l'intorno $I(1) =]1/2, 3/2[$ è tutto contenuto in A. L'insieme di tutti i punti interni è $]0,2[$.
- 7 è un punto esterno, perché l'intorno $I(5) =]6,8[$ è tutto contenuto nel complementare di A. L'insieme di tutti i punti esterni è $]-\infty,0[\cup]2,5[\cup [5,+\infty[$.
- 5 è un punto isolato, anzi è l'unico punto isolato, perché l'intorno $I(5) =]4,6[$, se intersecato con A, dà solo il punto 5 stesso.
- 0 è un punto di frontiera perché qualuqnue intorno di 0 contiene punti alla sua sinistra (che non stanno in A) e punti alla sua destra (e quelli immediatamente a destra di 0 stanno in A). Anche 2 è un punto di frontiera, per motivi simili. Si noti che 0 sta in A, mentre 2 non sta in A. Anche 5 è un punto di frontiera perché in ogni intorno di 5 cade un punto di A (5 stesso!) e punti del complementare di A (quelli immediatamente a sinistra e a destra di 5). 0, 2, 5 sono gli unici punti di frontiera.
- 1 è un punto di accumulazione, perché l'intorno $I(1) =]1/2, 3/2[$ contiene infiniti punti di A (anzi è costituito solo da punti di A). Anche 2 è punto di accumulazione, perché qualunque suo intorno contiene infiniti punti di A (quelli immediatamente a sinistra di 2 stesso). L'insieme di tutti i punti di accumulazione è $[0,2]$.

Si noti che essere *interno* non è la stesso cosa di *appartenere*, essere *esterno* non è la stessa cosa di *non appartenere*. Valgono poi alcune proprietà che si possono desumere dagli esempi e che i più volenterosi sono invitati a provare.

- Un punto interno è sempre di accumulazione;
- un punto interno non può essere né isolato né di frontiera;
- un punto isolato è sempre di frontiera;
- un punto isolato non può essere di accumulazione, anzi, in un certo senso punto isolato è il contrario di punto di accumulazione.

Esempio 9.19. In questo esempio sul piano, l'insieme A è costituito dall'unione del cerchio di centro l'origine e raggio 1, comprensivo della semicirconferenza di bordo contenuta nel semipiano $y \geq 0$, del punto $P = (1, 1)$ e dei punti della retta r di equazione $x = 2$. Lasciamo al lettore, come utile esercizio, il compito di provare quanto affermato.

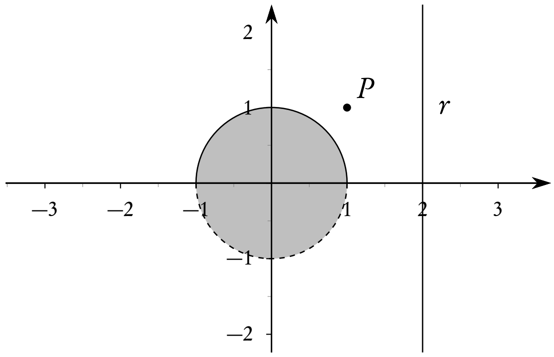


Figura 9.1 *Un insieme del piano*

- L'insieme dei punti interni è costituito dall'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1 (esclusa dunque la circonferenza di bordo).
- L'insieme dei punti esterni è costituito dai punti che stanno fuori dal cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1, con l'esclusione del punto P e dei punti della retta r.
- P è l'unico punto isolato.
- L'insieme dei punti di frontiera è costituito dai punti della circonferenza (non cerchio!) di centro l'origine e raggio 1, dal punto P e dai punti della retta r.
- L'insieme dei punti di accumulazione è costituito dal cerchio di centro l'origine e raggio 1 e dai punti della retta r.
- L'insieme A e un insieme illimitato del piano.

Definizione 9.14 (Insieme chiuso). *Un insieme A si dice* chiuso *se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Definizione 9.15 (Insieme aperto). *Un insieme A si dice* aperto *se il suo complementare è chiuso.*

Esempio 9.20. Le palle aperte sono insiemi aperti, le palle chiuse sono insiemi chiusi. In particolare gli intervalli aperti sono insiemi aperti, gli intervalli chiusi sono insiemi chiusi.

Esempio 9.21. L'insieme vuoto (sia come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che di $\mathbb{R}^2$) è sia aperto che chiuso. Analogamente tutto $\mathbb{R}$ (sulla retta) o tutto $\mathbb{R}^2$ (sul piano) sono aperti e chiusi. Questi sono gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi.

Esempio 9.22. Un intervallo del tipo $[a, b[$, oppure $]a, b]$ non è né aperto né chiuso.

Esempio 9.23. L'insieme del piano tracciato nella figura 9.1 non è né aperto né chiuso. Se a questo insieme aggiungo la semicirconferenza inferiore, diventa un insieme chiuso.

Esempio 9.24. L'insieme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è chiuso. Analogamente l'insieme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Seguono alcune proprietà la cui dimostrazione, come al solito, è lasciata per esercizio ai più volenterosi.

- Un insieme è aperto se e solo se tutti i suoi punti sono interni.
- Un insieme è chiuso se e solo contiene tutti i suoi punti di frontiera.
- Un insieme che abbia punti isolati non può essere aperto.
- Un insieme che abbia *solo* punti isolati è chiuso.
- Se A e B sono chiusi, anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono chiusi.
- Se A e B sono aperti, anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti. Se però si passa ad unioni o intersezioni di infiniti insiemi ci possono essere delle sorprese. Senza entrare troppo nei dettagli, consideriamo per esempio gli insiemi

$$]-1,1[,\ \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\ \left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[,\ \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ \dots,$$

  che sono tutti aperti. Facendo la loro intersezione resta solo il punto 0, che è un insieme chiuso, anzi un insieme costituito solo da un punto isolato.

9.4 Insiemi connessi. Insiemi convessi

Definizione 9.16 (Insieme connesso)**.** *Un insieme A (della retta o del piano) si dice* connesso *quando presi comunque due suoi punti P e Q esiste un arco di linea continua che li connette e tutto contenuto in A.*[(2)]

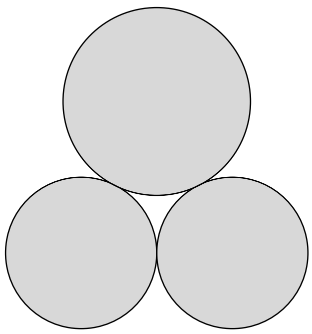
In $\mathbb{R}$ sono connessi tutti e soli gli intervalli, di qualunque tipo. In $\mathbb{R}^2$ le palle (aperte o chiuse) sono sempre connesse, ma ci sono anche insiemi connessi più complessi, come per esempio l'insieme costituito dai punti del primo e terzo quadrante, inclusi gli assi cartesiani.

Definizione 9.17 (Insieme convesso)**.** *Un insieme A (della retta o del piano) si dice* convesso *quando presi comunque due suoi punti P e Q esiste un segmento che li connette e tutto contenuto in A.*

È evidente che un insieme convesso è sempre connesso, ma, almeno nel piano, il viceversa non è vero: ci sono insiemi connessi ma non convessi, come vedremo sugli esempi. In $\mathbb{R}$, invece, i due concetti coincidono: gli unici insiemi connessi o convessi sono gli intervalli, e la cosa è quasi ovvia.

Esempio 9.25.

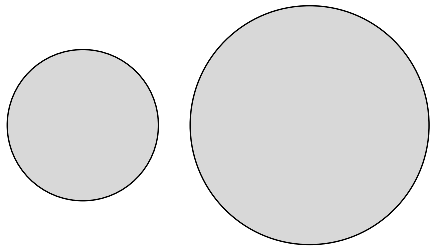
Un insieme connesso ma non convesso (le tre circonferenze bordo sono comprese nell'insieme).



[2]In realtà la definizione che qui abbiamo dato è quella di *connessione per archi*, mentre la definizione di connessione sarebbe più complessa. Per gli scopi del nostro corso, comunque, questa definizione "semplificata" è più che sufficiente.

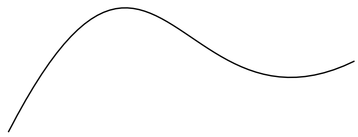
Esempio 9.26.

Un insieme non connesso (e quindi nemmeno convesso).



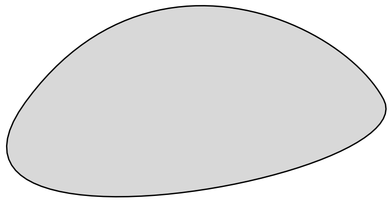
Esempio 9.27.

Un insieme connesso ma non convesso (una curva continua).



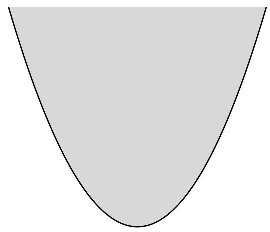
Esempio 9.28.

Un insieme connesso e convesso.



Esempio 9.29.

Un insieme connesso e convesso (si intende che l'insieme prosegue fino all'infinito, comprendendo tutta la parte interna alla parabola rappresentata).



9.5 Operazioni sulle funzioni

In questo paragrafo il dominio delle funzioni è un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$, mentre il codominio è sempre $\mathbb{R}$: diremo brevemente funzioni reali di una o due variabili reali, ma spesso parleremo semplicemente di funzioni di una o due variabili, senza ulteriori precisazioni.

Date due funzioni f e g, esse si possono sempre sommare, sottrarre e moltiplicare; se la seconda è sempre diversa da zero, si possono anche dividere.

Esempio 9.30. Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2 + 1$, entrambe con dominio $\mathbb{R}$, la funzione somma di f e g è $|x| + x^2 + 1$, la differenza è $|x| - x^2 - 1$, il prodotto $|x|(x^2 + 1)$, il quoziente $|x|/(x^2+1)$.

Esempio 9.31. Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, si può sempre fare la somma e il prodotto; per poter fare f/g si deve "restringere" il dominio, in modo da escludere il valore 0, che annullerebbe il denominatore.

Con opportune condizioni due funzioni f e g si possono anche *comporre*, cioè farle agire in successione: il risultato (in termini informatici diremmo l'output) della prima lo usiamo come input per la seconda, ottenendo alla fine il risultato voluto. Se per esempio la prima funzione è $f(x) = x^2$ e la seconda è $g(x) = e^x$, allora la composta di f (prima funzione) e g (seconda funzione) è e^{x^2}. La funzione composta si indica con $g(f(x))$; si presti particolare attenzione che la prima funzione è la più interna nella scrittura, la seconda è la più esterna.

Per poter fare la composizione si deve naturalmente richiedere che l'insieme immagine della prima sia contenuto nel dominio della seconda, visto che l'output della prima deve essere usato come input per la seconda. Se per esempio la prima funzione è$f(x) = x^2 - 1$ e la seconda è $g(x) = \sqrt{x}$, non si può fare a cuor leggero la composta, perché se, per esempio, $x = 0$, la prima dà come risultato -1 che non può essere "dato in pasto" alla seconda funzione. In casi come questo, comunque, basterà restringere il dominio della prima funzione: nell'esempio basterà limitarsi a considerare solo $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

9.6 Funzioni elementari e funzioni definite "a pezzi"

Si chiamano *elementari* le funzioni (definite in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$) in cui sulla variabile, o sulle due variabili, si eseguono solo operazioni di somma, sottrazione, prodotto, quoziente, o dove sono coinvolte le funzioni potenza, radice, logaritmo, esponenziale, seno e coseno. Si tratta praticamente di tutte le funzioni con cui avremo a che fare nel nostro corso.

Il modo più semplice che abbiamo a disposizione (e di cui faremo largo uso) per costruire funzioni non elementari è quello della definizione "a pezzi" (*piecewise definition* nei software più comuni). Si tratta sostanzialmente di "unire" due funzioni (o meglio due grafici di funzioni) definite, su due sottoinsiemi diversi (o ristrette a due insiemi diversi) di $\mathbb{R}$ (più raramente per noi di $\mathbb{R}^2$).

Esempio 9.32. Consideriamo le due funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{-x+1}$, la prima definita per $x \geq 0$, la seconda per $x \leq 1$. Di entrambe sappiamo già tracciare i grafici, riportati nelle figure 9.2 e 9.3.

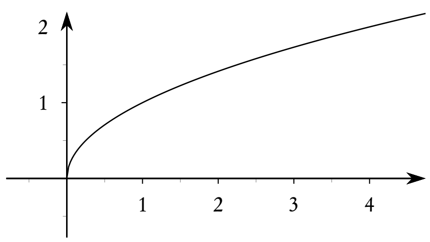


Figura 9.2 *La funzione* $\sqrt{x}$

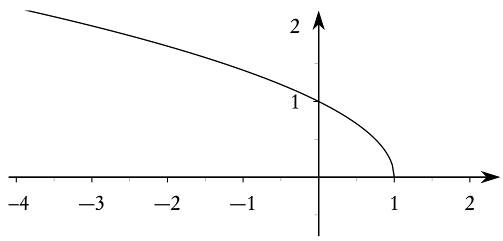
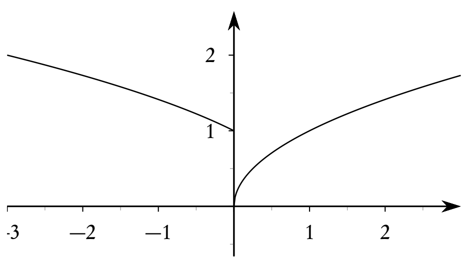


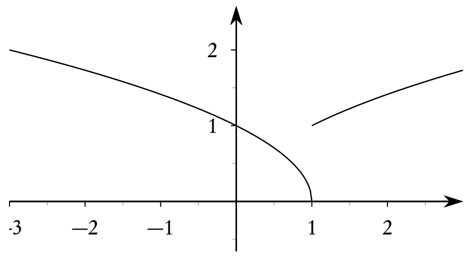
Figura 9.3 *La funzione* $\sqrt{-x-1}$

A partire da queste funzioni possiamo costruirne altre, come mostrato di seguito.

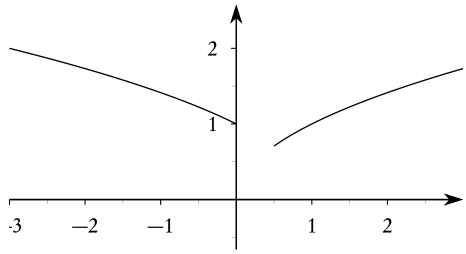
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{se} \quad x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} .$$



$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{se} \quad x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{se} \quad x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



9.7 Dominio delle funzioni elementari

Nel dare la definizione di funzione, vedi la definizione 2.8 nella pagina 16, abbiamo detto che per assegnare una funzione occorre assegnare un dominio, un codominio, e una legge che associ a ciascun punto del dominio un punto (e uno solo) del codominio. Nel caso delle funzioni elementari si sottintende sempre che il dominio sia il più grande sottoinsieme (di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$) in cui le operazioni da eseguire sulla variabile o sulle variabili hanno senso. Per determinare il dominio di queste funzioni si deve dunque in generale risolvere un sistema di disequazioni che esplicitano le condizioni da imporre affinché le operazioni da eseguire siano lecite.

Esempio 9.33. Per trovare il dominio di $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln(2-x)$, devo considerare il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} ,$$

che traducono in formule le condizioni che il radicando della radice quadrata sia non negativo e che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Il dominio è $1 \leq x < 2$.

Esempio 9.34. Per trovare il dominio di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$, devo risolvere la disequazione $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ (radicando non negativo), che ha come soluzioni tutti i punti del piano non interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

9.8 Funzioni crescenti e decrescenti

Attenzione: questi concetti sono validi *solo* per *funzioni di una variabile*.

Definizione 9.18 (Funzioni crescenti o decrescenti)**.** *Una funzione $f(x)$, definita in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice* crescente *se, presi comunque x_1, x_2 nel dominio, l'essere $x_1 < x_2$ implica che $f(x_1) \leq f(x_2)$ (se invece di $\leq$ si ha $<$, si dice* strettamente crescente*); la funzione si dice invece* decrescente *se, presi comunque x_1, x_2 nel dominio, l'essere $x_1 < x_2$ implica che $f(x_1) \geq f(x_2)$ (se invece di $\geq$ si ha $>$, si dice* strettamente decrescente*).*

In pratica una funzione è crescente se al crescere di x cresce anche il corrispondente valore di $y = f(x)$, decrescente in caso contrario, cioè al crescere di x decresce il corrispondente valore di $y = f(x)$.

Le funzioni e^x, $\ln x$, $\sqrt{x}$ sono tutte crescenti (strettamente); la funzione e^{-x} è decrescente (strettamente); la funzione x^2 non è né crescente né decrescente.

Se una funzione non è né crescente né decrescente, può succedere che sia *crescente* o *decrescente a tratti*. Per esempio la funzione x^2 è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$; la funzione $1/x$ è crescente sia per $x < 0$ che per $x > 0$ (ma, attenzione, non su tutto il suo dominio!). Le funzioni crescenti o decrescenti a tratti sono quelle che più comunemente ci capiterà di incontrare nel seguito.

9.9 Funzioni limitate e illimitate, massimi e minimi

Questi concetti si applicano sia alle funzioni di una variabile che a quelle di due variabili e sono concetti che riguardano l'insieme immagine di una funzione.

Definizione 9.19 (Funzioni limitate e illimitate)**.** *Una funzione f di una o due variabili si dice* limitata *se il suo insieme immagine è limitato,* illimitata *se tale è il suo insieme immagine. Si usano anche gli aggettivi* superiormente *e* inferiormente*, esattamente come per i sottoinsiemi dio $\mathbb{R}$.*

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono limitate; la funzione $1/x$ è illimitata; la funzione e^x è superiormente illimitata; la funzione $-x^2$ è inferiormente illimitata.

Definizione 9.20 (Massimo e minimo per una funzione)**.** *Il massimo e il minimo dell'insieme immagine di una funzione, se esistono, si chiamano rispettivamente* massimo assoluto *e* minimo assoluto *della funzione. L'estremo superiore e inferiore dell'insieme immagine di una funzione (che esistono sempre, eventualmente infiniti), si chiamano estremo superiore e inferiore della funzione. Spesso l'aggettivo* assoluto *si tralascia.*

La ricerca del massimo e del minimo assoluto di una funzione (se esistenti) è una delle più importanti applicazioni dell'analisi (problemi di *ottimizzazione*).

La funzione e^x non ha né max né min, il suo inf è 0, il suo sup $+ +\infty$. La funzione $\ln x$ non ha né max né min, il suo inf è $-\infty$, il suo sup $+ +\infty$. La funzione $\sin x$ ha 1 come max e -1 come min. La funzione x^2 ha 0 come min, mentre non ha max, il suo sup è $+\infty$.

Uno dei punti in corrispondenza dei quali la funzione assume il suo massimo o minimo si chiama *punto di massimo assoluto* o *punto di minimo assoluto*. La funzione $\sin x$ ha infiniti punti di massimo assoluto e di minimo assoluto,la funzione x^2 ha un solo punto di minimo assoluto (che è $x = 0$).

Definizione 9.21 (Massimi e minimi relativi)**.** *Un punto P del dominio di una funzione si chiama* punto di massimo relativo *se $\exists I(P)$ tale che, per ogni punto $Q \in I(P)$, si abbia $f(Q) \le f(P)$; il punto si chiama* punto di minimo relativo *se, nelle stesse condizioni, si ha invece $f(Q) \ge f(P)$. Il valore $f(P)$ si chiama* massimo relativo *o* minimo relativo *rispettivamente. Mentre il massimo (assoluto) e il minimo (assoluto), se esistono, sono unici, i massimi e minimi relativi possono essere più d'uno (anche infiniti).*

Esempio 9.35. La funzione rappresentata nella figura 9.4 ha i punti x_1 e x_3 come punti di massimo relativo, x_2 e x_4 come punti di minimo relativo; non ha né massimo né minimo assoluti.

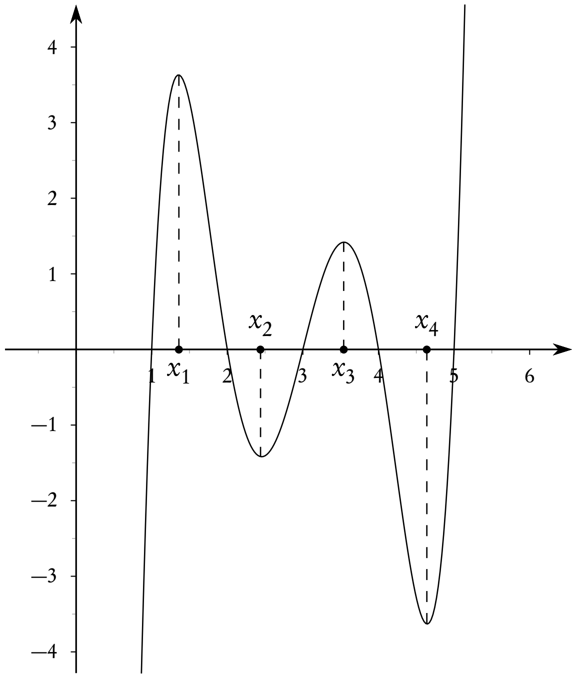


Figura 9.4 *Una funzione con due massimi e due minimi relativi*

Esempio 9.36. La funzione rappresentata nella figura 9.5 (si presuppone che il grafico mantenga indefinitamente l'andamento visualizzato) ha infiniti punti di massimo e di minimo relativo. Anche questa non ha né massimo né minimo assoluti.

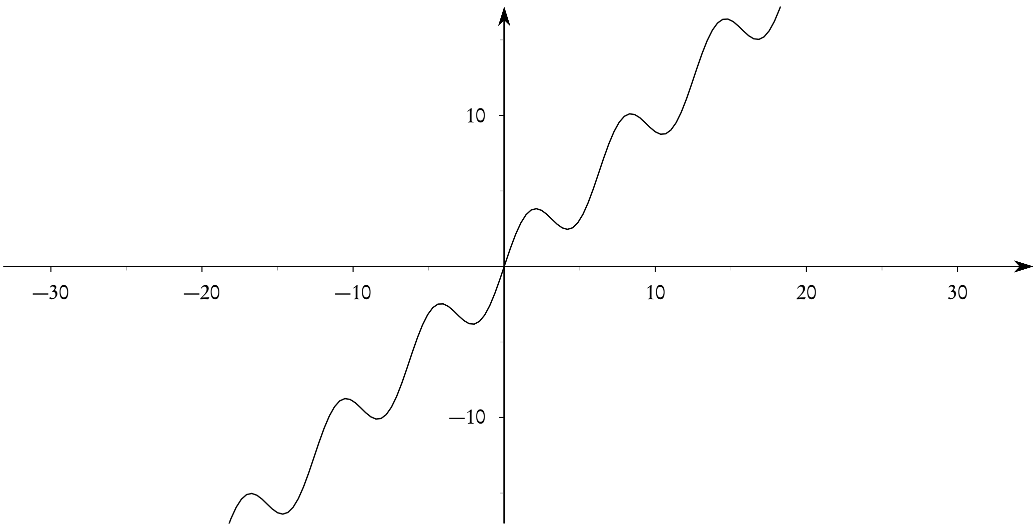


Figura 9.5 *Una funzione con infiniti massimi e minimi relativi*

Esempio 9.37. La situazione è identica nel caso di funzioni di due variabili, anche se, naturalmente, la produzione di un grafico è decisamente più complessa.

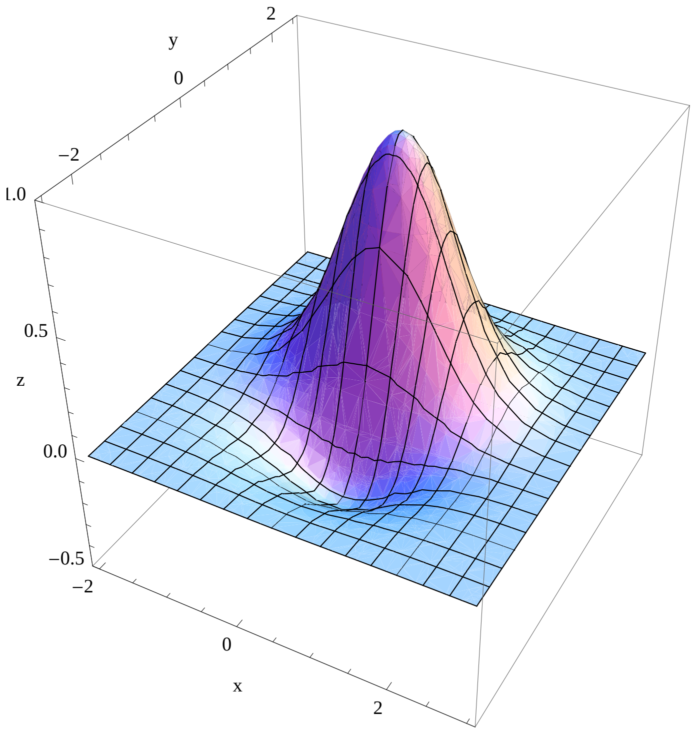


Figura 9.6 *Massimi e minimi in una funzione di due variabili*

9.10 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Definizione 9.22. *Una funzione $f : A \to B$ si dice* iniettiva *se due punti diversi del dominio P_1 e P_2 hanno immagini diverse; una funzione si dice* suriettiva *se ogni punto del codominio è immagine di almeno un punto del dominio, ovvero se l'insieme immagine coincide con il codominio; una funzione che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice* biiettiva *o* biunivoca.

Questi concetti hanno per noi interesse in particolare nel caso delle funzioni di una sola variabile. In questo caso è evidente che una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente è iniettiva.

Esempio 9.38. Le funzioni e^x, $\ln x$, x^3, $\sqrt{x}$ sono tutte funzioni iniettive.

Esempio 9.39. Le funzioni, aventi come codominio $\mathbb{R}$, $\ln x$ e x^3 sono funzioni suriettive. Anche le funzioni e^x e $\sqrt{x}$ possono diventare suriettive se "restringiamo" il codominio rispettivamente agli $y > 0$ e agli $y \geq 0$.

Esempio 9.40. La funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, x^3 è iniettiva e suriettiva, dunque biunivoca.

Esempio 9.41. La funzione x^2 non è iniettiva: i punti -1 e 1, per esempio, pur essendo diversi hanno la stessa immagine.

Esempio 9.42. La funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $\sin x$, non è iniettiva: esistono addirittura infiniti punti diversi del dominio che hanno la stessa immagine. La funzione non è nemmeno suriettiva, può tuttavia diventarlo se si restringe il codominio al solo intervallo $[-1,1]$. Si noti che anche restringendo il codominio la funzione non cambia sostanzialmente; dunque è sempre possibile, senza grandi rinunce, rendere suriettiva una funzione. Non così per l'iniettività.

9.11 Esercizi

Esercizio 9.1. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 5.1 della pagina 57, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.2. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 5.2 della pagina 57, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.3. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 2.1 della pagina 23, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.4. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 2.2 della pagina 23, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.5. *Discutere le seguenti questioni in modo sintetico, ma esauriente.*

- *Si possono trovare due insiemi uno aperto e l'altro chiuso tali che la loro unione sia un insieme aperto?*
- *Si possono trovare due insiemi uno aperto e l'altro chiuso tali che la loro intersezione sia un insieme aperto?*
- *Si possono trovare due insiemi entrambi aperti tali che la loro unione sia un insieme aperto?*
- *Si possono trovare due insiemi entrambi chiusi tali che la loro unione sia un insieme chiuso?*

Esercizio 9.6. *Discutere le seguenti questioni in modo sintetico, ma esauriente.*

- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando due funzioni limitate si ottiene sempre una funzione limitata.*
- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando una funzione limitata e una funzione illimitata si può ottenere una funzione limitata.*
- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando una funzione crescente e una decrescente si può ottenere una funzione crescente.*
- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando due funzioni decrescenti si può ottenere una funzione crescente.*

Esercizio 9.7. *Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio 8.1 della pagina 84, determinare le caratteristiche (limitate, illimitate, crescenti, decrescenti, massimi, minimi, ecc.).*

Esercizio 9.8. *Determinare il dominio delle seguenti funzioni e tutte le caratteristiche di tale insieme (limitato, illimitato, aperto, chiuso, punti interni, esterni, ecc.)*

1. $f(x)=x+1$;
2. $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$;

3. $f(x) = \sqrt{x+1}$;
4. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{1+x}$;
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$;
6. $f(x) = \sqrt{(x-1)(1+x)}$;
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-3}}$;
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2x-3}}$;
9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3-x}$;
10. $f(x) = \sqrt{2x}\sqrt{x+3}$;
11. $f(x) = \sqrt{x+1} - x + \sqrt{2-x}$.

Esercizio 9.9. *Determinare le caratteristiche degli insiemi soluzione dei sistemi dell'esercizio 4.3 della pagina 44.*

Esercizio 9.10. *Determinare le caratteristiche degli insiemi soluzione dei sistemi dell'esercizio 8.3 della pagina 85.*

Esercizio 9.11. *Determinare il dominio e le sue caratteristiche (aperto, ecc., punti interni, ecc.) per le seguenti funzioni di due variabili.*

1. $f(x,y) = \dfrac{x}{2-y}$;
2. $f(x,y) = \sqrt{(x+1)(y+1)}$;
3. $f(x,y) = \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{1+y}$;
4. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{1+x}}$;
5. $f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)(2-y)}$;
6. $f(x,y) = \sqrt{xy}$;
7. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{y+3}$;

8. $f(x,y) = \sqrt{2x}\sqrt{2y-3}$;
9. $f(x,y) = \sqrt{x+y-1} - \sqrt{x-y}$.

Notazioni utilizzate

Le notazioni utilizzate in questo testo sono quelle di default nel sistema tipografico $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$, notazioni che, nella maggior parte dei casi, concordano con quelle previste dalla normativa ISO $31-11$.

Segnaliamo inoltre che, nella numerazione dei teoremi, definizioni, osservazioni, ecc., abbiamo scelto di usare una numerazione progressiva per capitolo. Altri testi usano invece numerazioni progressive separatamente per i teoremi, le definizioni, ecc. Si tratta naturalmente solo di una questione di gusto personale.

La scrittura di un testo contenente molta matematica è sempre un'impresa ardua e che richiede molto tempo e fatica. Un aiuto indispensabile è fornito da un sistema di composizione come quello che abbiamo adottato (e che costituisce ormai lo standard de facto per i testi scientifici). Per chi fosse interessato a conoscere $\LaTeX\,2_{\varepsilon}$ segnaliamo che si tratta di un sistema di composizione tipografica di livello professionale e assolutamente gratuito. Tutte le informazioni utili si possono trovare sul sito ufficiale della comunità degli sviluppatori, `http://www.ctan.org/` e, in lingua italiana, sul sito degli Utilizzatori italiani di $\TeX$ e $\LaTeX$, `http://www.guit.sssup.it/`. Alcuni manuali introduttivi e consigli per iniziare si trovano anche sul sito personale del docente, `http://www.batmath.it`.

Elenco delle notazioni

$\neg$	"non" (negazione logica).
$\vee$	"vel", o, oppure (disgiunzione logica).
$\wedge$	"et", e, e contemporaneamente (congiunzione logica).
$\Rightarrow$	"implica", se ... allora ... (implicazione logica).
$\Leftrightarrow$	"se e solo se" (equivalenza logica).
$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, \dots, n, \dots \,\}$.
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \,\}$.
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/_{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \,\}$.
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi.
$\mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$	Numeri naturali, interi, razionali, reali, maggiori di 0.
$A, B, \dots$	Notazione per gli insiemi.
$A \subseteq B$	A è un sottoinsieme di B.
$A \subset B$	A è un sottoinsieme proprio di B.
$B \supseteq A$	B è un soprainsieme di A.
$B \supset A$	B è un soprainsieme proprio di A.
$A \setminus B$	Differenza tra gli insiemi A e B.
$[a, b]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$.
$]a, b[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$.
$]a, b]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$[a,b[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \,\}$.
$[a,+\infty[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \ge a \,\}$.
$]a,+\infty[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a \,\}$.
$]-\infty,a]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \le a \,\}$.
$]-\infty,a[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x < a \,\}$.
$f: D \to C\,,\ x \mapsto f(x)$	Notazione per le funzioni.
$\exp(x) = \mathrm{e}^x$	Notazione per la funzione esponenziale di base e.
$\ln(x)$	Logaritmo in base e di x.
$\log(x)$	Logaritmo in base 10 di x.

Osservazioni

- Per alcuni autori $\mathbb{N} = \{\, 1, 2, \dots, n, \dots \,\}$, cioè l'insieme dei naturali non comprende lo zero.
- L'insieme dei numeri razionali è in realtà l'insieme delle frazioni, come più sopra definito, ma con una opportuna relazione che renda identiche due frazioni equivalenti. Inoltre nulla cambierebbe se si prendessero frazioni in cui anche il denominatore possa essere intero (naturalmente diverso da 0).
- La notazione utilizzata in questi appunti per gli insiemi non è l'unica possibile. Altri usano per esempio lettere maiuscole in grassetto: **A**, **B**, … e questa scelta ha qualche indubbio vantaggio, in quanto anche i punti dello spazio sono abitualmente indicati con le lettere maiuscole corsive, con possibilità di confusione. In ogni caso tutto dovrebbe essere chiaro dal contesto.
- Molti usano $\subset$ per indicare i sottoinsiemi (propri o no) e $\subsetneq$, o $\subsetneqq$ per indicare i sottoinsiemi propri. Analoga osservazione per i soprainsiemi.
- Per indicare la differenza di due insiemi molti usano il simbolo $A - B$.
- Per quanto riguarda le notazioni sui logaritmi è da segnalare che la convenzione da noi scelta è quella in uso nella maggior parte dei software di calcolo e, quasi sempre, anche nelle calcolatrici tascabili. Altri adottano la notazione $\log(x)$ per indicare il logaritmo in base e e la notazione $\mathrm{Log}(x)$ o esplicitamente $\log_{10}(x)$ per indicare il logaritmo in base 10 del numero x.

Alfabeto greco

Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	α	A	nu (ni)	ν	N
beta	β	B	csi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	ro	ϱ	R
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	ϑ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	I	fi	φ	Φ
cappa	$\varkappa$	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu (mi)	μ	M	omega	ω	Ω

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph $\aleph$

Indice analitico

Precorso di matematica
Richiami teorici ed esercizi

Luciano Battaia

Università Ca' Foscari di Venezia - Dipartimento di Economia

Versione 1.1 del 10 novembre 2018

Questa dispensa è rivolta agli studenti che si accingono ad affrontare i corsi di matematica del primo anno di laurea in Economia e Commercio e affini, con particolare riguardo a coloro che devono frequentare i corsi OFA e relativi test.
Può essere di grande aiuto anche per un rapido ripasso dei concetti preliminari ritenuti indispensabili e in ogni caso dati per noti nei corsi di matematica del primo anno.