Corso di

Matematica Generale

- Appunti dalle lezioni -

Università degli Studi di Udine - Sede di Pordenone Facoltà di Economia

Appunti del corso

di

Matematica Generale

Luciano Battaia

Versione del 15 febbraio 2016

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.

Dobbiamo prendere gli allievi così come sono, richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura.

Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento.

Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Indice

Premessa

Questo testo contiene sostanzialmente lo schema delle lezioni di Matematica Generale tenute, nell'anno accademico 2010/2011, presso la sede di Pordenone dell'Università degli studi di Udine, per il corso di laurea in Economia e Commercio della Facoltà di Economia. Il testo è adatto a un corso di 70 ore di lezione, comprensive di esercitazioni: la ristrettezza dei tempi a disposizione impone numerose limitazioni sia nella scelta degli argomenti sia nel grado di approfondimento degli stessi. Naturalmente si è tenuto conto, sia nella scelta degli argomenti che nella loro trattazione, delle caratteristiche specifiche del corso di laurea in cui viene utilizzato il testo. In particolare durante il corso si è fatto estesamente uso di software opportuni, sia per tracciare grafici, che per visualizzare i concetti via via esposti. In sostanza questo corso non vuole essere un corso di analisi assolutamente formale, quanto piuttosto una introduzione, il più possibile "visuale" ai concetti chiave dell'analisi, sempre comunque mantenendo il dovuto rigore. Lo stesso tipo di impostazione è stata seguita per la presentazione e la discussione delle tecniche di calcolo specifiche dell'analisi, come quelle relative alle derivate e agli integrali: la scelta è sempre stata quella di presentare e discutere in dettaglio i concetti fondamentali, implementamdo solo le regole più importanti, evitando esercizi e problemi complessi. Infatti i software di calcolo simbolico attualmente diffusi (anche freeware come Geogebra) consentono di ottenere derivate e primitive di tutte le funzioni normalmente utilizzate nelle applicazioni senza alcuna difficoltà.

La raccolta comprende solo ed esclusivamente lo schema delle lezioni svolte e non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi, trattandosi di un *diario delle lezioni*, alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione più estesa e approfondita. In ogni caso si rimanda ai testi via via consigliati per i necessari completamenti che non trovano posto in questi appunti.

Il testo contiene anche la raccolta degli esercizi svolti e/o proposti durante il corso. Alcuni argomenti teorici sono sviluppati anche negli esercizi, che fanno integralmente parte del corso.

Molte delle idee, degli argomenti e degli esempi qui proposti sono tratti, spesso integralmente, da Appunti del prof. Nando Prati che ha tenuto questo corso negli anni accademici precedenti. Lo stesso vale per la raccolta di esercizi proposti.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo di posta elettronica batmath@gmail.com.

1 Richiami di concetti di base

In questo capitolo preliminare richiamiamo, senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità, alcuni concetti di "matematica di base", già noti dalle scuole medie superiori. Gli argomenti scelti sono quelli relativamente ai quali gli studenti del corso hanno riscontrato maggiori difficoltà.

1.1 Qualche prodotto e scomposizione notevole

In molti casi la risoluzione degli esercizi richiede l'esecuzione di prodotti di espressioni letterali al fine di semplificare le scritture o di ottenere i risultati voluti. Molti di questi prodotti sono *notevoli*, in quanto si presentano frequentemente e possono essere eseguiti rapidamente con l'uso di opportuni accorgimenti. Gli stessi accorgimenti, usati "in senso inverso", consentono di trasformare in prodotti certe espressioni algebriche scritte sotto forma di somma, e anche questa è una tecnica necessaria per risolvere gli esercizi. Qui di seguito raccogliamo alcune delle formule più comuni, fornendo anche qualche esempio di applicazione.

1.1.1 Raccoglimento a fattor comune

Conviene considerare subito degli esempi.

Esempi.

- $6x + 2x^2y + 4xy^2 = 2x(3 + xy + 2y^2)$.
- $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$.

A volte il raccoglimento può richiedere "due tempi".

Esempi.

- ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b).

Come si vede questo tipo di processo richiede un po' più di fantasia!

1.1.2 Prodotto di una somma per una differenza

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 . \tag{1.1}$$

Questa formula consente di eseguire velocemente il prodotto indicato e, letta in senso inverso, di trasformare la differenza di due quadrati in un prodotto.

Esempi.

- $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.
- $(-x - 2)(-x + 2) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$.
- $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

1.1.3 Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,. \tag{1.2}$$

Esempi.

– $(x+2y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$.

– $(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(3y) + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$.

– $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Le tecniche precedenti, e quelle che presenteremo successivamente, possono anche essere combinate tra loro.

Esempi.

– $x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = x(x+3)^2$.

– $(x+y-z)(x+y+z) = [(x+y)-z][(x+y)+z] = (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$.

1.1.4 Cubo di un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\,. \tag{1.3}$$

Esempi.

– $(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3\cdot 2x(y)^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

– $(x^2-3y)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 3y + 3x^2(3y)^2 - (3y)^3 = x^6 - 9x^4y + x^2y^2 - 27y^3$.

1.1.5 Somma o differenza di due cubi

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\,, \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\,. \tag{1.4}$$

Esempi.

– $(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

– $(8x^3 + 27y^3) = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$.

Si noti che, a differenza del caso dei quadrati, si può scomporre sia la *somma* che la *differenza* di due cubi. Si noti anche che i due trinomi tra parentesi dopo la scomposizione *non* sono dei quadrati, perchè *non c'è* il doppio prodotto.

1.2 Richiami sui radicali

In molte situazioni è utile saper semplificare espressioni contenenti radicali, senza approssimarli fin da subito con espressioni decimali. Un semplice esempio chiarirà il perché di questo fatto.

Supponiamo di dover calcolare $(\sqrt{2})^8$. Se teniamo conto delle proprietà delle potenze e dei radicali otteniamo $(\sqrt{2})^8 = \left((\sqrt{2})^2\right)^4 = 2^4 = 16$, senza alcuna approssimazione. Se invece approssimiamo $\sqrt{2}$ con 1.4, commettiamo un errore di poco più di un centesimo, trascurabile in molte situazioni. Calcolando però l'ottava potenza otteniamo (circa) 14.76, al posto del risultato corretto 16: un errore decisamente troppo grande! Naturalmente usando un maggior numero di cifre dopo la virgola per approssimare la radice quadrata di 2 le cose si sarebbero rimesse a posto, ma non sempre succede così, e il problema della correttezza delle approssimazioni numeriche è molto complesso.

Richiamiamo qui, fornendo anche qualche esempio, solo alcune delle tecniche di base utili per operare con i radicali, segnalando che i *radicandi* saranno sempre considerati *positivi* e che saremo principalmente interessati al caso di radici quadrate o al massimo cubiche.

$$\sqrt[n]{a^n} = a\,, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{(definizioni)}. \tag{1.5}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad \text{(radice di un prodotto)}. \tag{1.6}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{(radice di un quoziente)} \tag{1.7}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(potenza di un radicale)}. \tag{1.8}$$

$$\sqrt[n]{a^{np}} = a\,\sqrt[n]{a^p} \quad \text{(“portare fuori o dentro” dal segno di radice)}. \tag{1.9}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(semplificazione di un radicale)}. \tag{1.10}$$

Ricordiamo poi che *non* è valida alcuna proprietà relativamente alla radice di una somma: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Per quanto riguarda poi le operazioni di somma e prodotto coinvolgenti radicali si possono sommare solo radicali simili, mentre per moltiplicare due radicali bisogna “ridurli allo stesso indice”.

Esempi.

- $5\sqrt{8} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2^2 2} + 3\sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$.
- $3\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{2} = 3\sqrt{3^2 3} - \sqrt{2^2 3} + \sqrt{2} = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} = 7\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
- $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 4} = \sqrt[6]{32}$.

1.3 Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è il *quoziente di due polinomi*. Per esempio

$$\frac{x^3 + xy + y^2 + 2}{x^2 - y}$$

è una frazione algebrica.

Le operazioni sulle frazioni algebriche si eseguono esattamente come le operazioni sulle frazioni numeriche. Saremo interessati a qualche semplificazione, somma o prodotto di frazioni algebriche (in casi molto semplici!).

Esempi.

- $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} + \dfrac{x + 2}{x - 1} = \dfrac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} + \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x + x + 2}{x - 1} = \dfrac{2x+2}{x-1}\,.$
- $\dfrac{3x(x+2)}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{3x\cancel{(x+2)}}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{\cancel{x+2}} = \dfrac{3x(x-1)}{x+1} = \dfrac{3x^2 - 3x}{x+1}\,.$
- $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)} = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}\,.$

2 Insiemi, numeri, funzioni

2.1 Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo "un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*", ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire "un insieme è un insieme". Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: A, B, ...

La scrittura

$$x \in A \tag{2.1}$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge "x appartiene ad A". La (2.1) si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della (2.1) si scrive

$$x \notin A\,, \tag{2.2}$$

che si legge, naturalmente, "x non appartiene ad A". La (2.2) si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo $\forall$ ("*per ogni*"),

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (\forall x\; x \in A \Leftrightarrow x \in B) \tag{2.3}$$

dove la doppia freccia "$\Leftrightarrow$" si legge "*se e solo se*".

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con $\emptyset$, privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi, per esempio $A = \left\{\, 0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone} \,\right\}$.
2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A = \{\, x \mid x \text{ è un numero naturale pari} \,\}$.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{\, 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \dots \,\}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{\, 2,\ 3,\ \dots \,\}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P, dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15\,485\,863 \in P$, e per verificare che $2^{43\,112\,609} - 1 \in P$ (uno dei più grandi[1] primi conosciuti alla fine del 2009, con ben 12 978 189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un *sottoinsieme* di B, o che è *contenuto* in B, o anche che B è un *soprainsieme* di A, o che *contiene* A, e scriveremo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A\,. \tag{2.4}$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$A \subset B, \text{ oppure } B \supset A \tag{2.5}$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A$, $\forall A$. Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{\,a\,\} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli $\in$ e $\subset$ (o $\subseteq$): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con $\mathscr{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{\,a,\, b\,\}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\,\emptyset, \{\,a\,\}\,, \{\,b\,\}\,, A\,\}\ .$$

2.2 Operazioni tra insiemi

Definizione 2.1 (Unione di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* unione*, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi*[2]*.*

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{\,x \mid x \in A \vee x \in B\,\}\ . \tag{2.6}$$

Esempio. Se $A = \{\,0,\,1,\,2,\,3\,\}$ e $B = \{\,2,\,3,\,4\,\}$, allora $A \cup B = \{\,0,\,1,\,2,\,3,\,4\,\}$.

Definizione 2.2 (Intersezione di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* intersezione*, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.*

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{\,x \mid x \in A \wedge x \in B\,\}\ . \tag{2.7}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{\,2,\,3\,\}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

[1] A coloro che si chiedono quale possa essere l'interesse concreto a scoprire numeri primi sempre più grandi, segnaliamo che tutti gli algoritmi crittografici oggi usati, in particolare nel web, sono basati sull'uso di numeri primi con parecchie centinaia di cifre.

[2] I simboli $\vee$, *vel*, ed $\wedge$, *et*, sono normalmente usati in logica e nella teoria degli insiemi. Significano, rispettivamente, "*o*, *oppure*" ed "*e contemporaneamente*".

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione e si possono verificare per utile esercizio.

$$\begin{aligned} A \cup A = A; &\quad A \cap A = A; \\ A \cup B = B \cup A; &\quad A \cap B = B \cap A; \\ A \cup \emptyset = A; &\quad A \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cup B \supseteq A; &\quad A \cap B \subseteq A; \\ A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B; &\quad A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,. \tag{2.8}$$

Si noti che le proprietà distributive sono due: dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione. Nel caso della somma e prodotto tra numeri vale solo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $a(b + c) = ab + ac$.

Definizione 2.3 (Differenza di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* differenza*, e si indica con $A \setminus B$, o anche con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.*

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}\ . \tag{2.9}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A \setminus B = \{\, 0, 1 \,\}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si chiama anche *complementare di B rispetto ad A* e si indica con $\complement_A B$, o semplicemente con $\complement B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi: questo evita di avere problemi tipo quelli del paradosso[(3)] del barbiere. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con (x, y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y:

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1\,.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{\, a, b \,\} = \{\, b, a \,\} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a)\,.$$

Definizione 2.4 (Prodotto cartesiano)**.** *Dati due insiemi A e B si chiama loro* prodotto cartesiano*, o semplicemente* prodotto*, l'insieme, indicato con $A \times B$, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B:*

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{\, (a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \,\}\ .$$

[3] Questo famoso paradosso, formulato da Bertrand Russell agli inizi del 1900, è uno dei più importanti della storia della logica. Si può sintetizzare come segue: *In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. La domanda che ci poniamo è: il barbiere rade se stesso?*

È una conseguenza immediata della definizione che $A \times B \neq B \times A$. Nel caso particolare che $A = B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A \times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte si scriverà A^n in luogo di $A \times A \times \cdots \times A$.

2.3 Numeri

Gli "oggetti base" su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono i seguenti:

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\,.$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il "presentare" questi insiemi.

- $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri *naturali* che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo". Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

  $$\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, \dots, n, \dots \,\}\ .$$

  L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.
- $\mathbb{Z}$ (il simbolo usato è legato alla parola tedesca *zahl*, cioè *numero*, *cifra*) è l'insieme dei numeri *interi*, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei "numeri naturali con segno" (attenzione però al fatto che $+0 = -0 = 0$, ovvero al fatto che 0 non ha segno!):

  $$\mathbb{Z} = \{\, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \,\}\ .$$

  Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un *successivo*.
- $\mathbb{Q}$ (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, *ratio* in latino) è l'insieme dei numeri *razionali*, ovvero delle *frazioni* con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, occorre tenere conto che due frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali, rappresentano lo stesso numero. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):

  $$\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \,\}\ .$$

  I numeri razionali si possono anche scrivere come *numeri decimali*, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di *successivo* di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):

  $$\text{se } a = \frac{m}{n} \text{ e } b = \frac{p}{q}\,,\ \text{ allora il numero } c = \frac{a+b}{2} \text{ è razionale ed è compreso tra } a \text{ e } b.$$
- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri *reali*. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come π, ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse

difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare "all'estrema destra", e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall'insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell'ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in $\mathbb{N}$ non si può sempre fare la sottrazione, mentre in $\mathbb{Z}$ e successivi si, in $\mathbb{Z}$ non si può sempre fare la divisione, mentre in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si (tranne per zero, ovviamente!).

Occasionalmente avremo la necessità di utilizzare anche l'insieme dei numeri complessi, che si indica con $\mathbb{C}$ e che è un soprainsieme dell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il vantaggio principale di questo insieme numerico è che in esso si può sempre estrarre la radice quadrata, anche dei numeri negativi.

2.4 Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nell'analisi. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

Definizione 2.5. *Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano* intervalli*, con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

$]a, a[$	$\emptyset$	*intervallo vuoto*
$]a, b[$	$\{ x \mid a < x < b \}$	*intervallo limitato* aperto
$[a, b]$	$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$	*intervallo limitato* chiuso
$[a, b[$	$\{ x \mid a \leq x < b \}$	*intervallo limitato* chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a, b]$	$\{ x \mid a < x \leq b \}$	*intervallo limitato* aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a, +\infty[$	$\{ x \mid x > a \}$	*intervallo superiormente illimitato* aperto
$[a, +\infty[$	$\{ x \mid x \geq a \}$	*intervallo superiormente illimitato* chiuso
$]-\infty, a[$	$\{ x \mid x < a \}$	*intervallo inferiormente illimitato* aperto
$]-\infty, a]$	$\{ x \mid x \leq a \}$	*intervallo inferiormente illimitato* chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo.
Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti*, quelli illimitati anche* semirette.

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme $\mathbb{R}$ si usa la scrittura $]-\infty, +\infty[$ e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che $a = b$ l'intervallo chiuso $[a, a]$ si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo*.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza*. L'intervallo (aperto) di centro x_0 e raggio δ è allora

$$]x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta[\,.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

2.5 Funzioni

Dati due insiemi A e B hanno grande interesse nelle applicazioni le relazioni che possono intercorrere tra di loro. Tra tutte le relazioni hanno un interesse cruciale le *funzioni*, in particolare le funzioni che collegano tra di loro insiemi di numeri reali. Vista l'importanza del concetto diamo una definizione esplicita di funzione, che riassuma quelle che sono le proprietà che ci interesseranno.

Definizione 2.6. *Dati due insiemi A e B (che per noi saranno sempre due insiemi di numeri reali), si dice* funzione *di A in B una qualunque legge che faccia corrispondere* a ogni *elemento di A* uno ed un solo elemento *di B.*

L'insieme A è detto dominio *della funzione, l'insieme B è detto* codominio*. Se x è un elemento dell'insieme A e y è l'*unico *elemento di B che corrisponde ad A, si dice che y è* funzione *di x e si scrive $y = f(x)$ (leggi: "y uguale a effe di x").*

La notazione più completa per le funzioni è la seguente:

$$f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x)\,,$$

ma spesso si scrive solo

$$x \mapsto f(x)\,,$$

se gli insiemi A e B sono già stati precisati o sono chiari dal contesto. Si può anche dire semplicemente *la funzione $y = f(x)$*, anche se i puristi potrebbero storcere il naso.

Esempio. Se A e B sono l'insieme dei numeri reali, si può considerare la funzione che a ogni numero reale x fa corrispondere il suo quadrato. In questo caso si dovrebbe scrivere

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

ma si può scrivere anche semplicemente

$$x \mapsto x^2$$

oppure (e noi lo faremo sistematicamente)

$$y = x^2\,.$$

Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce, come quello che segue.

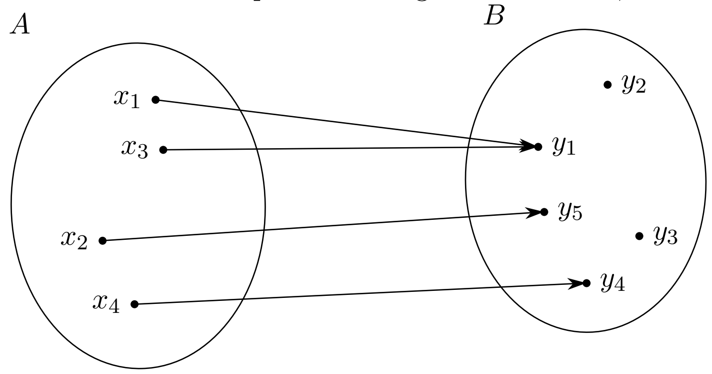


Figura 2.1 *Diagramma "a frecce" per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti)*

Si noti che *è obbligatorio* che da *ogni* punto (elemento dell'insieme) A parta *esattamente* una freccia, mentre sui punti dell'insieme B possono anche arrivare *più* frecce, oppure *nessuna* freccia. Si potrebbe dire, usando un linguaggio figurato, che A è l'insieme degli arcieri, B l'insieme dei bersagli e che ogni arciere ha a disposizione nella propria faretra solo una freccia che è costretto a lanciare, mentre non ci sono limitazioni sui bersagli da colpire: ci possono essere bersagli colpiti da più frecce, e anche bersagli non colpiti da alcuna freccia.

Ha particolare interesse nelle applicazioni la determinazione del sottoinsieme del codominio costituito da tutti i punti dove arriva almeno una freccia, cioè, formalmente, l'insieme

$$I \subseteq B = \{\, y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \,\}\,, \tag{2.10}$$

o anche, a parole, l'insieme degli y di B tali che esiste almeno un x di A, la cui immagine sia y. L'insieme I si chiama *insieme immagine*. L'insieme immagine si indica anche con $f(A)$, proprio a significare il fatto che si tratta dell'insieme delle immagini di tutte le x di A. Se C è un sottoinsieme di A, si può considerare l'insieme delle immagini di tutte le x di C (che sarà naturalmente un sottoinsieme dell'insieme immagine). Questo insieme si indica con $f(C)$.

È chiaro che rappresentazioni grafiche come quella appena vista hanno senso solo se gli insiemi in questione sono finiti: in caso contrario si dovrebbero disegnare infinite frecce, cosa chiaramente impossibile.

Si usano anche altri tipi di rappresentazione per le funzioni. Per esempio se si considera la funzione che a ogni numero naturale compreso tra 1 e 5 fa corrispondere la sua metà (funzione che ha come dominio i numeri naturali citati e come codominio i numeri razionali), si può usare una tabella a doppia entrata, in cui nella prima colonna si scrivono i numeri naturali 1, 2, ..., 5 e nella seconda colonna le *corrispondenti* metà di questi numeri.

x	$x/2$
1	$1/2$
2	1
3	$3/2$
4	2
5	$5/2$

Tabella 2.1 *Rappresentazione "tabulare" di una funzione*

Un altro tipo di rappresentazione è quello dei diagrammi a torta, molto significativo in casi speciali. Consideriamo, ad esempio, un corso universitario dove si sono iscritti 120 alunni, provenienti da varie provincie, come nella tabella che segue:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
5	70	15	10	20

Si comincerà con il calcolare le percentuali relative alle varie provincie:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
4.17	58.33	12.5	8.33	16.67

Successivamente si calcoleranno le ampiezze delle "fette di torta" da utilizzare per ciascuna provincia, tenendo conto che la torta totale ha un'apertura di 360°:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
15°	210°	45°	30°	60°

Il grafico è a questo punto immediato:

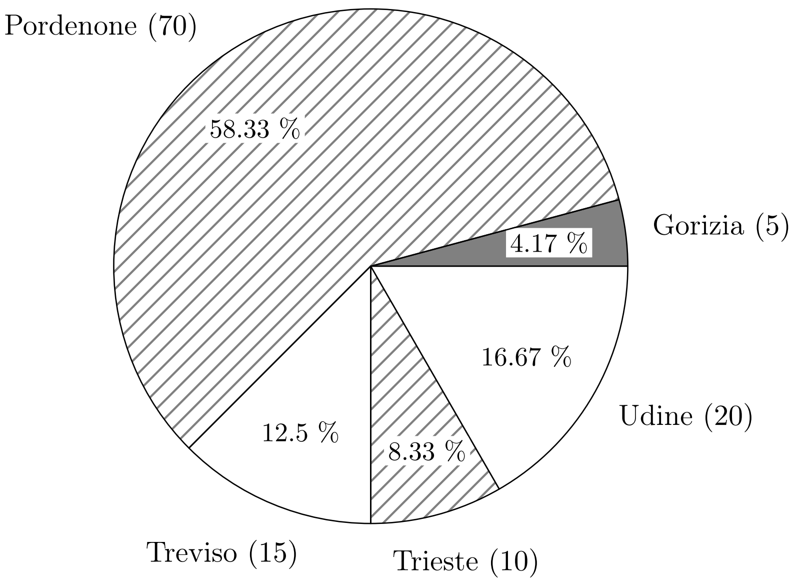


Figura 2.2 *Provenienza degli studenti del Corso ..., ripartiti per Provincia, diagramma "a torta"*

Ancora un'altra possibilità è quella di un diagramma a barre, che proponiamo qui di seguito, senza commenti.

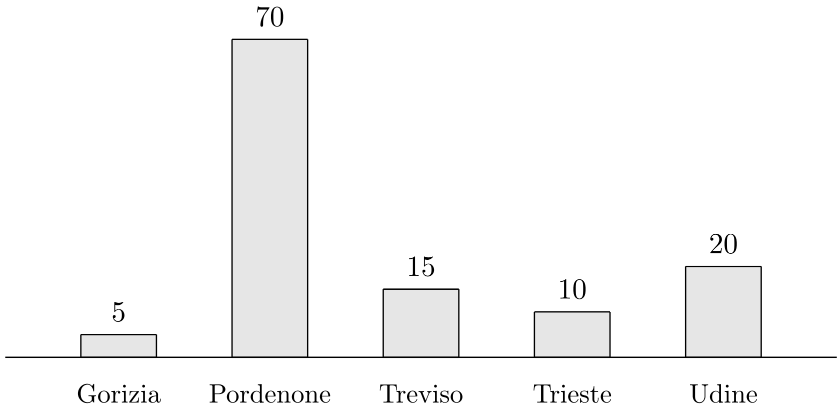


Figura 2.3 *Provenienza degli studenti del Corso ..., ripartiti per Provincia, diagramma "a barre"*

La rappresentazione più conveniente nel caso delle funzioni tra due insiemi di numeri reali è però quella dei diagrammi o grafici cartesiani, in particolare nel caso in cui gli insiemi siano infiniti quando le rappresentazioni precedenti non sono utilizzabili. L'idea è di considerare un piano in cui si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali per semplicità) Oxy e rappresentarvi tutte le coppie (x, y) in cui x è un punto (numero) del dominio della funzione e $y = f(x)$ è il *corrispondente* valore nel codominio della funzione. Riprendendo in esame l'esempio proposto nella tabella 2.1, dobbiamo rappresentare i punti

$$A = (1, 1/2),\ B = (2, 1),\ C = (3, 3/2),\ D = (4, 2),\ E = (5, 5/2)\,,$$

ottenendo il grafico che segue.

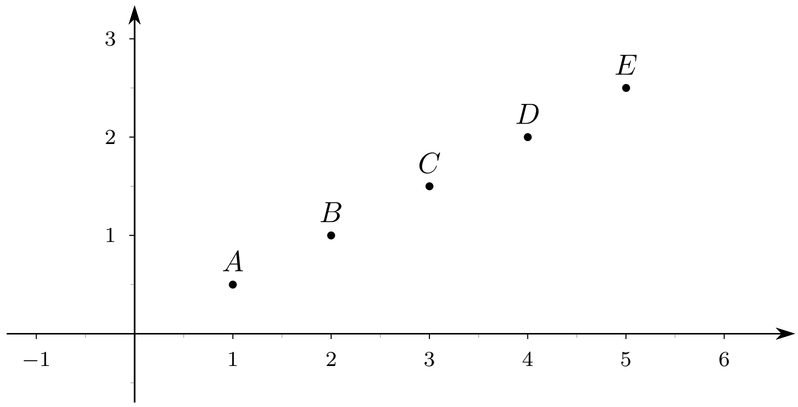


Figura 2.4 *Esempio di grafico cartesiano*

Il grafico della precedente figura 2.4 è in realtà un grafico a frecce “compattato”: siccome i valori del dominio sono punti dell'asse x e quelli del codominio punti dell'asse y, possiamo sempre pensare di tracciare delle frecce che colleghino i punti del dominio con i corrispondenti del codominio, come quelle della figura 2.1, solo che è opportuno che le frecce “passino” per i punti A, B, ...:

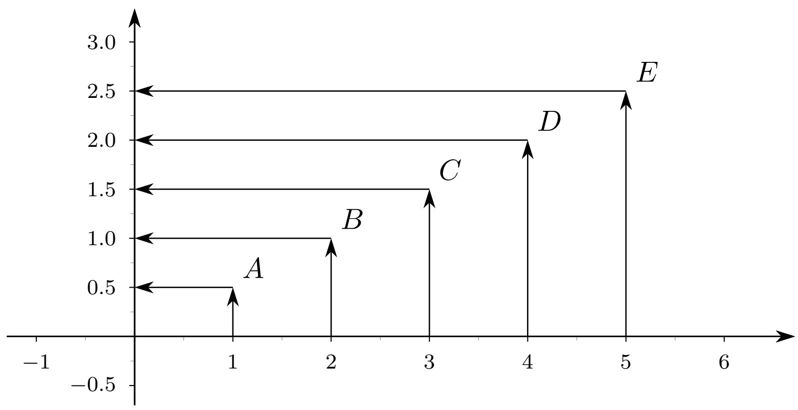


Figura 2.5 *Esempio di grafico cartesiano, con frecce*

Il grafico 2.4 “compatta” il grafico 2.5 nel senso che ne prende solo gli elementi essenziali, cioè gli “spigoli delle frecce”: è evidente che dalla conoscenza degli spigoli si possono facilmente ricostruire le frecce.

Se si confronta la figura 2.4 con la tabella 2.1, ci si rende immediatamente conto dei notevoli vantaggi che il grafico presenta: da esso si può per esempio capire, “a colpo d'occhio”, che al crescere di x nel dominio la corrispondente y del codominio cresce, e che tale crescita è *costante*. La cosa diventa ancora più significativa se si vuole considerare la funzione che a ogni numero reale x faccia corrispondere la sua metà: a differenza di quanto succedeva con la funzione rappresentata nella tabella 2.1, questa volta la x non varia più in un insieme finito e quindi una rappresentazione tabulare non ha alcun senso(4). Un diagramma cartesiano è decisamente più significativo:

(4)Si noti comunque che la regola (legge) che collega la x alla y è la stessa del caso precedente: per assegnare una funzione *non* è sufficiente assegnare la regola di calcolo, occorre anche fissare il dominio e il codominio.

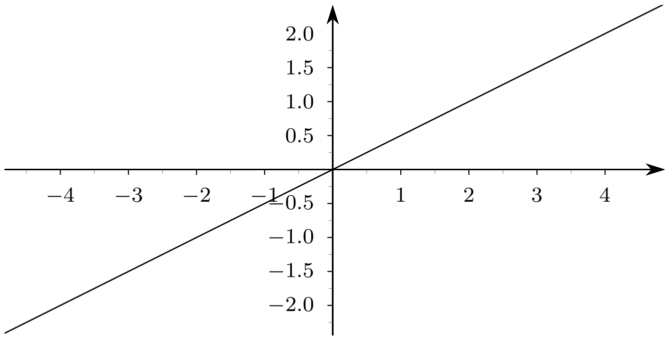


Figura 2.6 *Grafico della funzione* $y = x/2$

Naturalmente il diagramma 2.6 contiene anche i punti già rappresentati nel diagramma 2.4:

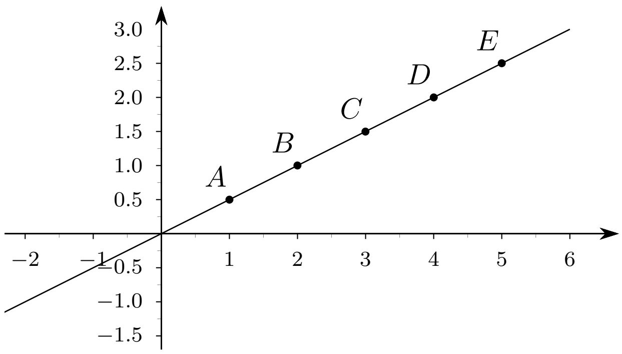


Figura 2.7 *Grafico della funzione* $y = x/2$*, con evidenziati alcuni punti*

ma contiene anche infiniti altri punti. Anche se non è chiaramente possibile rappresentare nel grafico *tutte* le coppie $(x, y) = (x, f(x))$ che visualizzano l'andamento della funzione, tuttavia la parte tracciata è sufficiente a rendere evidenti quasi tutte le proprietà che interessano.

Una buona parte di questo corso sarà dedicata proprio allo studio di strategie adatte a evidenziare le caratteristiche essenziali di una funzione (avente come dominio e codominio sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali) e a tracciarne un grafico indicativo. Un grande aiuto in questo senso può essere fornito dai numerosi software dedicati allo scopo(5), ma, come al solito, bisogna tenere conto che il computer *è una macchina finita* e quindi non può risolvere tutti i problemi. A questo proposito proponiamo un esempio "estremo", precisamente il grafico della funzione

$$f(x) = \sin 1/x\,.$$

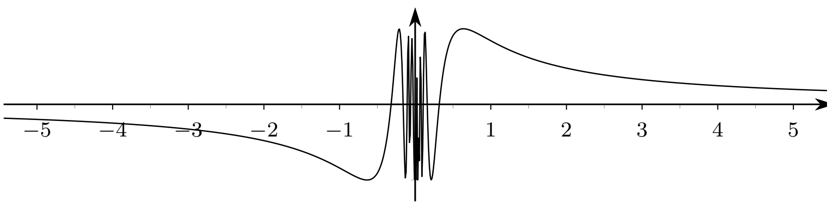


Figura 2.8 *Grafico di* $f(x) = \sin 1/x$

[5] Tra i software commerciali segnaliamo *Mathematica* e *Maple*, due pacchetti estremamente sofisticati e complessi. Tra i software non commerciali segnaliamo *Maxima* (molto simile a *Mathematica*™ anche se non ne possiede tutte le potenzialità) e *Geogebra*. Riteniamo quest'ultimo particolarmente adatto per questo corso e segnaliamo che la maggior parte dei grafici contenuti in questo testo sono ottenuti proprio con *Geogebra*.

È chiaro che, per valori di x prossimi allo zero, questo grafico è poco significativo[6]. Purtroppo nemmeno zoomate (in orizzontale) migliorano granché la situazione, come mostrano le due successive figure.

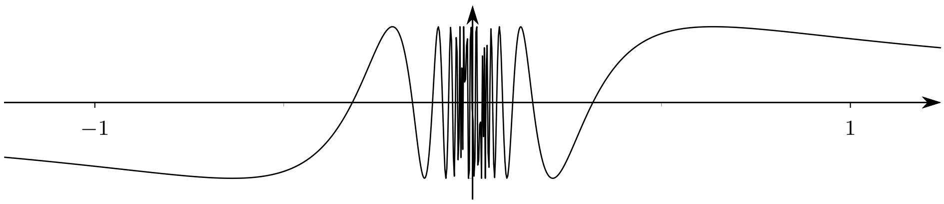


Figura 2.9 *Grafico di $f(x) = \sin {}^1/x$, con uno zoom sull'asse delle x*

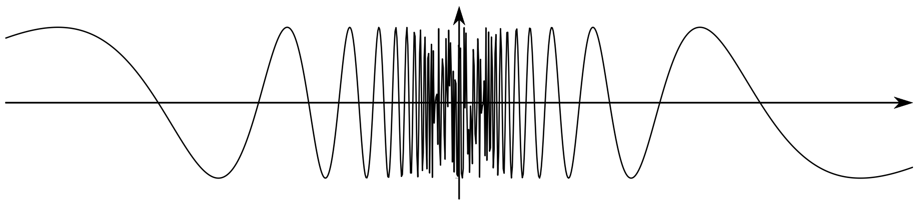


Figura 2.10 *Grafico di $f(x) = \sin {}^1/x$, con un ulteriore zoom sull'asse delle x*

Naturalmente non sempre le cose vanno così male (per fortuna!). Per la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$, per esempio, il grafico fornito da un software di calcolo è sufficientemente accurato da contenere con buona accuratezza le informazioni necessarie.

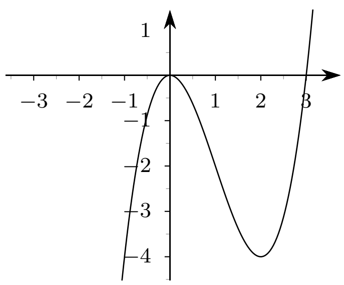
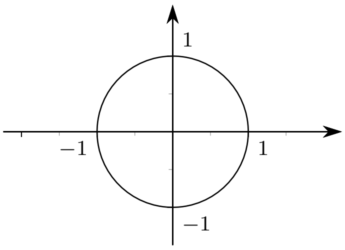


Figura 2.11 *Grafico di $f(x) = x^3 - 3x^2$*

Da questo grafico si vede subito che, al crescere della x da valori negativi fino allo 0, anche la corrispondente y cresce (e abbastanza rapidamente) fino a raggiungere il valore 0; successivamente se la x cresce da 0 a 2, la y decresce fino a raggiungere il valore -4, per poi aumentare di nuovo (e di nuovo abbastanza rapidamente) al crescere di x.

In tutti i grafici cartesiani che abbiamo fatto, tranne quelli delle figure 2.9 e 2.10, abbiamo usato la stessa unità di misura sui due assi: sistemi cartesiani siffatti sono detti *monometrici*. Di solito però nelle applicazioni la cosa non è possibile, e ne vedremo in seguito i motivi. È opportuno tenere presente che se un sistema cartesiano nel piano non è monometrico, le figure possono essere deformate. Per esempio i due grafici della figura seguente mostrano la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, in due diversi sistemi di coordinate, di cui solo il primo è monometrico.

[6] L'esempio che stiamo considerando richiede la conoscenza di elementi di trigonometria: chi non li possiede non si preoccupi, ne faremo un cenno nel seguito.



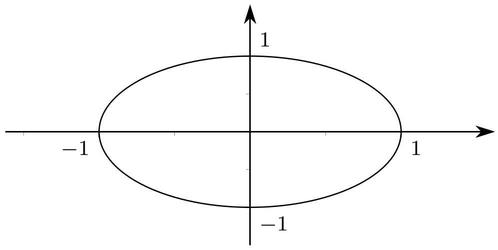


Figura 2.12 *Circonferenza di centro l'origine e raggio* 1*, in due diversi sistemi di coordinate, il primo monometrico, il secondo no*

2.6 Funzioni di due variabili - Introduzione

Un caso molto importante di funzioni con cui avremo a che fare nel seguito è quello delle funzioni in cui il dominio è un insieme di coppie di numeri reali (cioè un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) e il codominio è l'insieme dei numeri reali: diremo brevemente *funzioni di due variabili*. Potremo usare una scrittura del tipo

$$z = f(x, y). \tag{2.11}$$

La rappresentazione grafica cartesiana di funzioni di questo tipo richiede un sistema di tre assi (che per noi saranno sempre mutuamente ortogonali): abbiamo bisogno infatti di una coppia di numeri per i punti del dominio, più un numero per i corrispondenti valori del codominio. Come vedremo, nelle situazioni che ci interesseranno, questi grafici avranno l'aspetto di superfici nello spazio. Riservandoci di approfondire a suo tempo l'argomento, proponiamo solo un grafico di esempio nella figura 2.13.

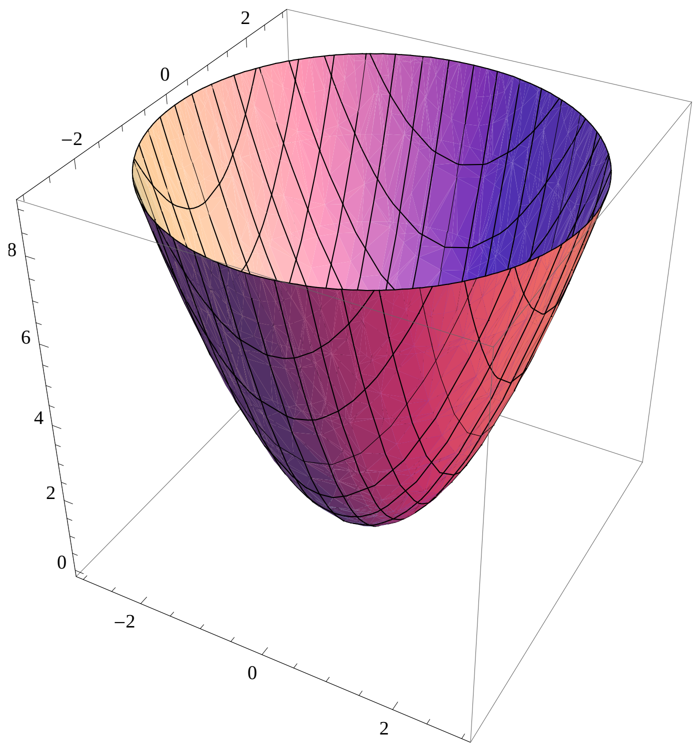


Figura 2.13 *Grafico della funzione* $z = x^2 + y^2$

2.7 Esercizi

Esercizio 2.1. *Dati gli insiemi* $A =]-\infty, 2]$, $B = \{ 1, 2 \}$ *e* $C = [0, 5[$, *determinare*

1. $(A \setminus C) \cup B$;
2. $(A \setminus B) \cup C$;
3. $(A \setminus B) \cap C$;
4. $(C \setminus B) \cap A$.

Esercizio 2.2. *Dati gli insiemi* $A = \{ 1 \}$, $B =]-1, 2[$ *e* $C =]0, +\infty[$, *determinare*

1. $(A \cup C) \cap B$;
2. $A \setminus C$;
3. $(C \setminus A) \cap B$;
4. $(C \cup B) \setminus A$;
5. $(b \setminus A) \cap C$.

Esercizio 2.3. *Discutere i seguenti quesiti, in modo sintetico ma esauriente.*

1. *Si possono trovare tre insiemi* A, B, C *tali che* $(A \cap B) \cup C = \emptyset$*?*
2. *Si possono trovare due insiemi* A *e* B *tali che* $A \cap B = A$*?*
3. *Si possono trovare tre insiemi* A, B, C *tali che* $(A \cap B) \cup C = A$*?*
4. *Se* $A \subseteq B$ *allora* $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

3 Equazioni

3.1 Equazioni lineari in una o due incognite

La più generale equazione *lineare* (cioé di primo grado) *in un'incognita* è del tipo

$$ax = b \quad , \quad a \neq 0 \,. \tag{3.1}$$

Essa ammette sempre una e una sola soluzione[1]:

$$x = \frac{b}{a} \,. \tag{3.2}$$

Se si prescinde dalla condizione $a \neq 0$, occorre distinguere tre casi nella valutazione delle soluzioni di un'equazione come quella considerata, e precisamente:

- $a \neq 0$: l'equazione ha, come già detto, solo la soluzione b/a;
- $a = 0 \wedge b \neq 0$: l'equazione non ha alcuna soluzione;
- $a = 0 \wedge b = 0$: l'equazione ammette infinite soluzioni (tutti i numeri reali).

È molto importante tenere conto dell'osservazione contenuta nelle righe precedenti, in particolare nella risoluzione di equazioni parametriche. Chiariamo il concetto con un esempio.

Esempio. Discutere ed eventualmente risolvere l'equazione seguente:

$$(a^2 - 1)x = a + 1 \,.$$

Tenendo conto di quanto detto si conclude che:

- se $a \neq \pm 1$, l'equazione ha la sola soluzione $x = (a+1)/(a^2-1) = 1/(a-1)$;
- se $a = -1$, l'equazione ha come soluzioni tutti i numeri reali;
- se $a = 1$, l'equazione non ha soluzioni.

La più generale equazione *lineare in due incognite* è del tipo

$$ax + by = c \quad , \quad (a, b) \neq (0, 0) \,. \tag{3.3}$$

La condizione sui parametri a e b si può leggere dicendo che essi non sono mai contemporaneamente nulli. Un'equazione come questa ha sempre infinite soluzioni: si tratta di tutte le coppie che si ottengono attribuendo ad una della due incognite un valore arbitrario e ricavando l'altra dall'equazione in una incognita rimanente (purchè il coefficiente di quest'altra incognita sia diverso da zero).

Per esempio l'equazione

$$2x + 3y = 1$$

ha come soluzioni le coppie $(0, 1/3)$, $(1/2, 0)$, $(-1, 1)$, ecc.

L'equazione, pensata in due incognite, con coefficiente della y uguale a 0,

$$3x = 1, \text{ ovvero } 3x + 0y = 1 \,,$$

ha come soluzioni le coppie $(1/3, 1)$, $(1/3, 2)$, $(1/3, -5)$, ecc.

[1] Un importante teorema (*Teorema fondamentale dell'algebra*) ha come conseguenza che un'equazione di grado n ha, nell'insieme dei numeri reali, al massimo n soluzioni. Un'equazione del tipo 3.1 ha sempre esattamente una soluzione (come il suo grado), equazioni di grado superiore possono avere anche meno soluzioni di quanto indichi il grado (come si può vedere per esempio nelle equazioni di secondo grado).

3.2 Sistemi di equazioni lineari in due incognite

Un sistema di equazioni consiste nella determinazione delle soluzioni comuni a due (o più) equazioni. Consideriamo, ed è il caso che ci interessa, un *sistema* di due equazioni lineari (cioè di primo grado) in due incognite:

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + by & = & p \\ cx + dy & = & q \end{array}\right. . \tag{3.4}$$

Anche il sistema di equazioni ha un grado che si ottiene facendo il *prodotto* dei gradi delle due equazioni: in questo caso si hanno due equazioni di primo grado e quindi il sistema è anch'esso di primo grado.

Si dice *soluzione* del sistema una coppia di reali che sia soluzione comune della prima e della seconda equazione. Un sistema come quello proposto può avere:

- una sola soluzione (e allora si dice *determinato*);
- infinite soluzioni (e allora si dice *indeterminato*);
- nessuna soluzione (e allora si dice *incompatibile*, anche se di solito si usa il termine *impossibile*).

I sistemi che hanno soluzioni (una o infinite) si dicono genericamente *compatibili*.

Consideriamo alcuni esempi.

- $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$: il sistema è compatibile e determinato, e ha come unica soluzione la coppia $(1, -1)$.
- $\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{array}\right.$: il sistema è compatibile e indeterminato, e ha come soluzioni tutte le coppie $(2t + 1, t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
- $\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{array}\right.$: il sistema è incompatibile.

La risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite può avvenire in maniera elementare usando il cosiddetto *metodo di sostituzione*: si ricava un'incognita in una delle due equazioni e la si sostituisce nell'altra, ottenendo un'equazione in una sola incognita, facilmente risolubile; a questo punto il gioco è fatto. Per completezza riporto i calcoli necessari a risolvere il primo dei sistemi appena visti.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ x - y = 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ x - (1 - 2x) = 2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ x = 1 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. .$$

3.3 Equazioni di secondo grado in una incognita

La più generale equazione di secondo grado in una incognita è del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad a \neq 0\,. \tag{3.5}$$

Per risolvere questa equazione si può ricorrere alla nota formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \tag{3.6}$$

che fornisce

- 2 soluzioni distinte se la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ (detta *discriminante* o semplicemente *Delta*) è maggiore di zero;

- 1 sola soluzione (si usa anche dire *due soluzioni coincidenti* oppure *una soluzione doppia*) se $\Delta = 0$;
- nessuna soluzione nell'insieme dei numeri reali se $\Delta < 0$. In quest'ultimo caso l'equazione ha 2 soluzioni nell'insieme dei numeri complessi, ma non saremo interessati a valutarle.

Esempi.

- $2x^2 - 3x - 5 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(-5)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 5/2 \\ -1 \end{array} \right.$
- $x^2 - 6x + 9 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$
- $x^2 - 2x + 2 = 0 \implies$ nessuna soluzione perché $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 < 0$.

3.4 Qualche equazione di grado superiore

Esistono formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado (formule che usano i numeri complessi), ma non saremo interessati a considerarle. Non esistono invece formule risolutive per equazioni dal quinto grado in su. Noi ci limiteremo a considerare solo due casi molto semplici.

3.4.1 Equazioni di tipo elementare

Sono quelle del tipo

$$ax^n + b = 0\,, \quad a \neq 0. \tag{3.7}$$

Esse si risolvono portando b a secondo membro, dividendo per a e successivamente estraendo la radice n-esima, tenendo conto delle differenze tra il caso di n pari e di n dispari, come mostrano gli esempi che seguono.

Esempi.

- $2x^3 + 54 = 0 \implies x^3 = -27 \implies x = -3.$
- $3x^3 - 12 = 0 \implies x^3 = 4 \implies x = \sqrt[3]{4}.$
- $2x^4 + 15 = 0 \implies x^4 = -15/2 \implies$ nessuna soluzione.
- $3x^4 - 14 = 0 \implies x^4 = 14/3 \implies x = \pm\sqrt[4]{14/3}.$

3.4.2 Equazioni scomponibili in fattori

Per risolvere le altre equazioni di grado superiore al secondo consideriamo solo la seguente strategia: portare tutto a primo membro, scrivendo l'equazione nella forma standard

$$f(x) = 0;$$

scomporre (se possibile!) $f(x)$ nel prodotto di fattori di primo e secondo grado e successivamente applicare la *Legge dell'annullamento del prodotto*:

Teorema 3.1 (Legge dell'annullamento del prodotto)**.** *Un prodotto di due o più fattori è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero.*

Per capire praticamente come procedere, ragioniamo su alcuni esempi.

Esempi.

- $x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x-1) = 0 \implies x^2 = 0 \lor x - 1 = 0 \implies x = 0 \lor x = 1.$
- $x^3 - 1 = 0 \implies (x-1)(x^2+x+1) = 0 \implies x = 1$ solamente, in quanto l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ non ha soluzioni ($\Delta < 0$).
- $x^4 - 1 = 0 \implies (x^2-1)(x^2+1) = 0 \implies (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \implies x = \pm 1.$ (Anche qui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni).

3.5 Equazioni con radicali

Le equazioni contenenti radicali sono di norma molto difficili da risolvere e non esiste una tecnica standard per trattarle. Ci occuperemo solo di un caso molto semplice, precisamente le equazioni contenenti un solo radicale, normalmente quadratico o, al massimo, cubico.

L'dea base è quella di *isolare il radicale* lasciandolo a primo membro, preferibilmente preceduto dal segno +, e portando tutto il resto a secondo membro; successivamente si *elevano ambo i membri al quadrato o al cubo*, riducendosi così a una equazione non contenente radicali. Purtroppo l'elevazione al quadrato può comportare l'aggiunta di soluzioni estranee: occorrerà dunque, a posteriori, una verifica dell'accettabilità delle soluzioni trovate. Nessun problema invece nel caso di elevazione al cubo. Si vedano gli esempi che seguono per chiarire il metodo.

Esempi.

– $\sqrt{x+2}+x=0, \quad \sqrt{x+2}=-x, \quad x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0,$
  $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{array}{c}-1\\2\end{array}\right.$, e si verifica subito che solo la soluzione $x=-1$ è accettabile.
– $\sqrt{x+2}-x=0, \quad \sqrt{x+2}=x, \quad x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0,$
  $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{array}{c}-1\\2\end{array}\right.$, e si verifica subito che solo la soluzione $x=2$ è accettabile.
– $\sqrt{1+x^2}=x+2, \quad 1+x^2=(x+2)^2, \quad 4x+3=0, \quad x=-3/4$, soluzione accettabile.
– $\sqrt{2x^2+1}=1-x, \quad 2x^2+1=(x+2)^2, \quad 2x^2+1=1-2x+x^2, \quad x^2+2x=0,$
  $x_1=-2, x_2=0$, entrambe soluzioni accettabili.
– $\sqrt[3]{x^2-x-1}=x-1, \quad x^2-x-1=x^3-3x^2+3x-1, \quad x^3-4x^2+4x=0, \quad x(x^2-4x+4)=0,$
  $x=0\vee x=2$, entrambe accettabili.

3.6 Sistemi di equazioni di grado superiore in due incognite

Saremo interessati a sistemi, di secondo e quarto grado, di due equazioni. Poiché il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni, se abbiamo un'equazione di primo grado e una di secondo grado il sistema avrà grado 2; se abbiamo due equazioni di secondo grado il sistema avrà grado 4. I sistemi di secondo grado si possono risolvere abbastanza facilmente, come vedremo su esempi, quelli di quarto grado sono spesso molto complessi e considereremo solo alcuni esempi elementari.

Esempi.

– Un sistema di secondo grado.
  $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-y^2+y-1=0 \end{cases}.$
  Ricaviamo dalla prima $x=2-y$ e sostituiamo nella seconda, ottenendo $(2-y)^2-y^2+y-1=0$, ovvero $3-3y=1$, da cui $y=1$; sostituendo il valore trovato nella prima equazione, otteniamo $x=1$. Possiamo dire che la coppia di numeri $(1,1)$ è l'unica soluzione di questo sistema.
– Ancora un sistema di secondo grado.
  $\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}.$
  Ricaviamo dalla prima $x=-2y$ e sostituiamo nella seconda, ottenendo, dopo qualche semplificazione, $5y^2-1=0$, da cui $y=\pm 1/\sqrt{5}$; sostituendo nella prima equazione troviamo

$x = \mp 2/\sqrt{5}$. Dunque il sistema ha due soluzioni, precisamente le coppie

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

di numeri reali.

– Un sistema di quarto grado.
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$
Possiamo procedere ricavando $x^2 = 4 - 4y^2$ dalla prima equazione per poi sostituirlo nella seconda, ottenendo, dopo qualche semplificazione, $3y^2 = 2$, da cui $y = \pm\sqrt{2/3}$. Sostituendo, con ordine, uno alla volta i due valori trovati per y nella prima equazione, troviamo, per ciascuno, due valori di x. In totale abbiamo 4 coppie di soluzioni:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

In seguito vedremo l'interpretazione grafica di questi risultati.

3.7 Esercizi

Esercizio 3.1. *Risolvere i seguenti sistemi di equazioni.*

1. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases}$

4 Un po' di geometria analitica

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti fondamentali di geometria analitica, concetti che saranno utilizzati nel seguito del corso. In vista dello studio delle funzioni reali di due variabili reali, introdurremo anche alcune idee fondamentali della geometria analitica dello spazio.

4.1 Coordinate cartesiane di punti nel piano e nello spazio

Nello spazio si può introdurre un *Sistema di coordinate cartesiane* considerando 3 rette non complanari passanti per uno stesso punto O. Tutte le proprietà metriche (cioè quelle che riguardano lunghezze, distanze, ecc.) si esprimono in maniera più semplice se le tre rette sono ortogonali, e in questo caso si parla di coordinate cartesiane *ortogonali*. Su ciascuna delle tre rette si sceglie un'unità di misura e un verso e, quindi, un sistema di ascisse. Per ragioni di semplicità si sceglie di solito la stessa unità sulle tre rette e allora si parla di sistema cartesiano *monometrico*. Nel seguito useremo sempre un sistema *cartesiano ortogonale e monometrico*. Il punto di intersezione delle tre rette si chiama *origine* del sistema di coordinate. Le tre rette, dette anche *assi*, si indicano con O_x, O_y, O_z, o, semplicemente con x, y, z, se non ci sono possibilità di equivoci. I piani O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}, o, semplicemente, xy, xz, yz, si chiamano piani coordinati. Naturalmente nel piano bastano solo due assi e in questo caso l'asse O_x si chiama anche *asse delle ascisse*, l'asse O_y *asse delle ordinate*. Un sistema del tipo detto si indica con Oxy nel piano e con $Oxyz$ nello spazio.

Una volta scelto il sistema $Oxyz$, ad ogni punto P dello spazio si può far corrispondere una terna di numeri reali (una coppia nel piano), con la costruzione indicata in figura 4.1.

Per indicare le coordinate del punto P si scrive $P(x, y, z)$ ($P(x, y)$ nel piano), o anche, a volte, $P = (x, y, z)$ ($P = (x, y)$ nel piano).

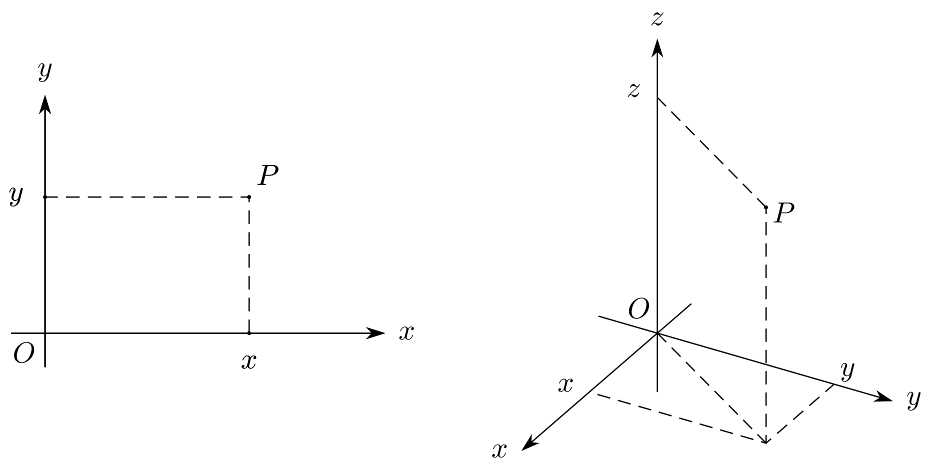


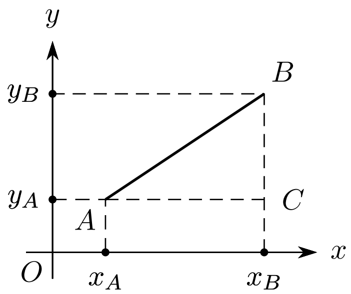
Figura 4.1 *Coordinate cartesiane di un punto nel piano e nello spazio*

4.2 Le formule fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio

Dati, nel piano riferito al sistema Oxy, due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, la *distanza tra i due punti* A, B (nell'ipotesi che il sistema di coordinate cartesiane sia ortogonale e monometrico) è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,. \tag{4.1}$$

Poiché questa formula è legata all'applicazione del teorema di Pitagora, la ortogonalità del sistema di coordinate è essenziale. Lo si può agevolmente controllare con riferimento alla figura 4.2.



$$\overline{AC} = x_C - x_A = x_B - x_A$$
$$\overline{BC} = y_B - y_C = y_B - y_A$$

Figura 4.2 *Distanza tra due punti e teorema di Pitagora*

Le coordinate del *punto medio* M del segmento AB sono invece date dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}\,, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\,. \tag{4.2}$$

Tra le formule fondamentali riportiamo anche quella del *baricentro* G di un triangolo di vertici $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, che è sempre dato dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,. \tag{4.3}$$

4.3 La retta nel piano cartesiano

L'equazione generale di una retta nel piano cartesiano è

$$ax + by + c = 0 \tag{4.4}$$

dove i numeri a e b (coefficienti di x e y) non possono essere contemporaneamente nulli. Per disegnare la retta è sufficiente trovare due punti cioè due soluzioni dell'equazione.

Esempio. Rappresentare graficamente la seguente retta: $3x + 2y - 6 = 0$. Ponendo successivamente, per esempio, $x = 0$ e poi $y = 0$ si trova, rispettivamente, $y = 3$ e $x = 2$. Dunque la retta passa per i punti $(0, 3)$ e $(2, 0)$. Il grafico è il seguente.

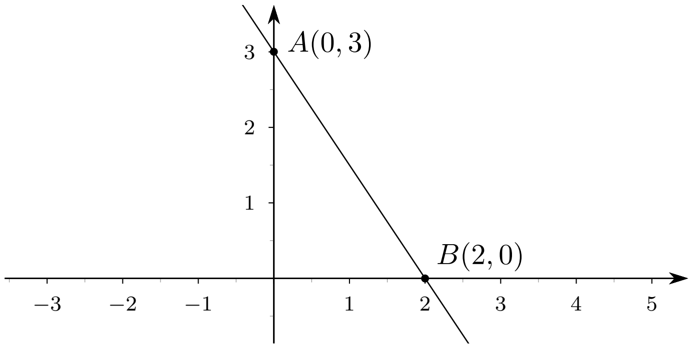


Figura 4.3 *Retta* $3x + 2y - 6 = 0$

Se $b \neq 0$ l'equazione si può trasformare nella forma

$$y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}\,,$$

che di solito si scrive

$$y = mx + q\,. \tag{4.5}$$

Il numero m si chiama *coefficiente angolare* o *pendenza* della retta, il numero q *ordinata all'origine*. Per esempio la retta della figura 4.3 si può scrivere nella forma

$$y = -\frac{3}{2}x + 2\,,$$

con $m = -3/2$ e $q = 2$. Si può osservare che

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,, \tag{4.6}$$

e la stessa proprietà vale se si prendono due altri punti qualunque della retta. Questo rende evidente il perché del nome *coefficiente angolare*: si tratta del rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale quando ci si muove da un punto all'altro della retta. È evidente che se $m > 0$ la retta è "in salita", se $m < 0$ "in discesa", se $m = 0$ è orizzontale. Il motivo del nome *ordinata all'origine* per il numero $q = 2$ risulta evidente dalla figura 4.3. La formula (4.6) si usa di solito scrivere

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,. \tag{4.7}$$

In sostanza la *differenza* $y_B - y_A$ si indica con Δy (leggi "*delta y*"), la differenza $x_B - x_A$ si indica con Δx (leggi "*delta x*"). Questa è una notazione molto importante e di uso comune: se si ha una qualunque grandezza, g, variabile, la differenza tra due valori della grandezza si chiama *variazione* e si indica con Δg. Se Δg è positiva si parla di *incremento*, se Δg è negativa si parla di *decremento*. Per esempio se il guadagno g della mia impresa nel 2008 è stato di 150.000 \$ e nel 2009 di 180000 \$, si ha $\Delta g = 30000$ \$, cioè un *incremento* di 30000 \$ di guadagno, in un anno.

Le rette verticali sono caratterizzate dall'avere $b = 0$ e quindi equazioni del tipo $x = k$, quelle orizzontali dall'avere $m = 0$ e quindi equazioni del tipo $y = k$.

Tenendo conto del significato geometrico del coefficiente angolare possiamo concludere che due rette non verticali sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, mentre si dimostra che due rette, non verticali né orizzontali, sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1, ovvero se il coefficiente angolare di una è il reciproco cambiato di segno di quello dell'altra.

Per trovare l'equazione di una retta si possono presentare le seguenti due situazioni.

1. *Retta per un punto e di pendenza nota*: se $P(x_P, y_P)$ è il punto e m è il coefficiente angolare che indica la pendenza, l'equazione richiesta è:

$$y - y_P = m(x - x_P)\,. \tag{4.8}$$

2. *Retta per due punti*: se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ sono i due punti, l'equazione richiesta[1] è:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)\,. \tag{4.9}$$

Esempi.

– Trovare la retta s passante per $(1, 2)$ e parallela alla retta $r\colon 2x - y + 5 = 0$.

  Scrivendo la retta r nella forma $y = 2x-5$ se ne valuta subito il coefficiente angolare, $m = 2$. L'equazione richiesta è allora: $y - 2 = 2(x - 1)$, che si può semplificare in $2x - y = 0$.

– Trovare la retta s passante per $(2, 1)$ e perpendicolare alla retta $r\colon x - 2y - 1 = 0$.

  Si ha: $r\colon y = {}^1\!/\!_2\, x - {}^1\!/\!_2$. Dunque il coefficiente angolare della retta r è ${}^1\!/\!_2$ e quindi quello della retta s sarà -2 (il reciproco cambiato di segno). L'equazione richiesta sarà dunque: $y - 1 = -2(x - 2)$, che si semplifica in $2x + y - 5 = 0$.

– Trovare la retta passante per $(2, 3)$ e $(4, -1)$.

  Applicando la formula soprascritta si trova subito: $(x - 2)(-1 - 3) = (y - 3)(4 - 2)$, che si semplifica in $2x + y - 7 = 0$.

4.4 La parabola nel piano cartesiano

4.4.1 Parabola con asse verticale

Una parabola con asse verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0\,, \tag{4.10}$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali.

– Se $a > 0$ volge la concavità verso l'alto; se $a < 0$ volge la concavità verso il basso.
– Il vertice V ha ascissa

$$x_V = -\frac{b}{2a}\,. \tag{4.11}$$

– L'ordinata del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.

4.4.2 Parabola con asse orizzontale

Una parabola con asse orizzontale ha equazione

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0\,, \tag{4.12}$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali.

– Se $a > 0$ volge la concavità verso destra; se $a < 0$ volge la concavità verso sinistra.

[1] Conviene usare la forma che proponiamo qui, anziché quella sotto forma di frazione, comunemente proposta nei testi, in quanto quella forma *non* si applica né alle rette verticali né a quelle orizzontali, mentre la forma dell'equazione (4.9) va bene sempre.

– Il vertice V ha ordinata

$$y_V = -\frac{b}{2a}\,. \tag{4.13}$$

– L'ascissa del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.

Per tracciare correttamente una parabola occorre valutare il segno di a, determinare il vertice e successivamente almeno qualche altro punto, preferibilmente le intersezioni con gli assi (se ci sono). Vediamo qualche esempio.

Esempi.

– $y = 2x^2 - x - 1$. La concavità è verso l'alto, il vertice ha ascissa $1/4$ e, quindi, ordinata $-9/8$. L'intersezione con l'asse delle y si ottiene ponendo $x = 0$, da cui $y = -1$. Le intersezioni con l'asse delle x si ottengono ponendo $y = 0$, da cui $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$ (ottenute con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado). A questo punto il tracciamento del grafico è facile e si ottiene:

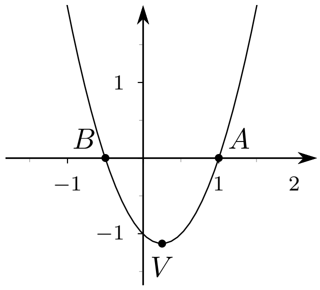


Figura 4.4 *Parabola di equazione* $y = 2x^2 - x - 1$

– $x = y^2 - 2y + 2$. La concavità è verso destra, il vertice ha ordinata 1 e, quindi, ascissa 1. L'intersezione con l'asse delle x si ottiene ponendo $y = 0$, da cui $x = 2$. Per trovare le intersezioni con l'asse delle y bisogna porre $x = 0$, ma l'equazione risultante non ha soluzioni (ha il $\Delta < 0$). Troviamo allora qualche altro punto, per esempio se $y = 2$, $x = 2$, mentre se $y = -1$, $x = 5$. A questo punto il tracciamento del grafico è semplice e si ottiene:

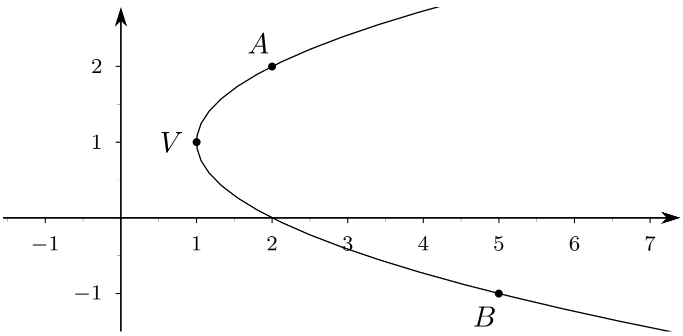


Figura 4.5 *Parabola di equazione* $x = y^2 - 2y + 2$

4.5 La circonferenza nel piano cartesiano

L'equazione generica di una circonferenza nel piano cartesiano è

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\,, \tag{4.14}$$

con la condizione che

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0\,. \tag{4.15}$$

Se la condizione (4.15) non è verificata l'equazione (4.14) non ha alcuna soluzione. Se invece la condizione (4.15) è verificata la relativa circonferenza ha centro nel punto

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)\,, \tag{4.16}$$

e raggio dato dalla formula

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}\,, \tag{4.17}$$

dunque se $a^2 + b^2 - 4c > 0$ si tratta di una circonferenza vera e propria, se invece $a^2 + b^2 - 4c = 0$ si tratta di una circonferenza di raggio nullo, cioè "degenerata" in un punto.

Si presti particolare attenzione al fatto che, nell'equazione (4.14), detta *forma cononica*, i coefficienti di x^2 e y^2 *devono* essere così uguali a 1. Se essi fossero uguali tra di loro ma diversi da 1, bisognerebbe prima ridursi alla forma canonica; se essi fossero diversi tra di loro *non* si tratterebbe di una circonferenza.

L'equazione (4.14) della circonferenza si può scrivere in una maniera molto utile, se si conoscono il centro e il raggio:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2\,. \tag{4.18}$$

Esempi.

- $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$: circonferenza con centro in $C(1, -2)$ e raggio $r = \sqrt{5}$. L'equazione si può scrivere nella forma $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

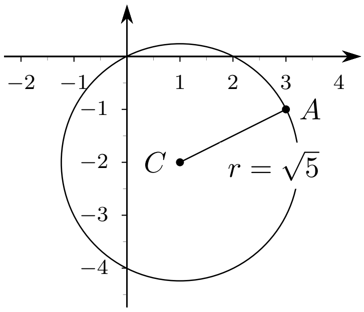


Figura 4.6 *Circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

- $x^2 + y^2 - x - 3y + 5 = 0$: poiché $(-1)^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 5 < 0$, l'equazione non ha alcuna soluzione.
- $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$: poiché $(-2)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 0$, si tratta di una circonferenza *degenere*, cioè ridotta a un solo punto, il suo centro, precisamente $C(1, 2)$.
- $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 19 = 0$: innanzitutto osserviamo che i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali; per ottenere la forma canonica prevista dividiamo ambo i membri per 4, ottenendo

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + \frac{19}{4} = 0\,.$$

A questo punto osserviamo che $a^2 + b^2 - 4c = 16 + 4 - 19 = 1 > 0$. Dunque l'equazione proposta ha come grafico una circonferenza di centro $C(2, 1)$ e raggio $r = 1/2$. Il grafico è riportato nella figura 4.7.

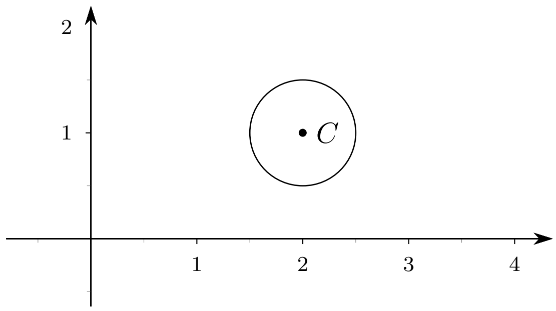


Figura 4.7 *Grafico dell'equazione* $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 19 = 0$

4.6 Ellisse ed iperbole

Ci occuperemo innanzitutto dell'equazione dell'ellisse e dell'iperbole in un caso particolare, precisamente il caso di centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati.

L'equazione generica dell'ellisse o iperbole di cui vogliamo occuparci è del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \tag{4.19}$$

Questa equazione rappresenta

1. un'ellisse se è del tipo: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = +1$;
2. un'iperbole se è del tipo: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = +1$ oppure $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$;
3. non ha alcuna soluzione se è del tipo: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

Nei primi due casi per la rappresentazione grafica si comincia col tracciare un rettangolo di centro l'origine e lati $2a$ (sull'asse orizzontale) e $2b$ (sull'asse verticale). Se si tratta di un'ellisse il suo grafico è immediato, come mostra la figura 4.8. Se si tratta di un'iperbole bisogna ancora tracciare le rette diagonali del rettangolo e poi procedere come nei grafici riportati oltre. Le due rette diagonali sono gli asintoti dell'iperbole.

I numeri a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse o iperbole rispettivamente.

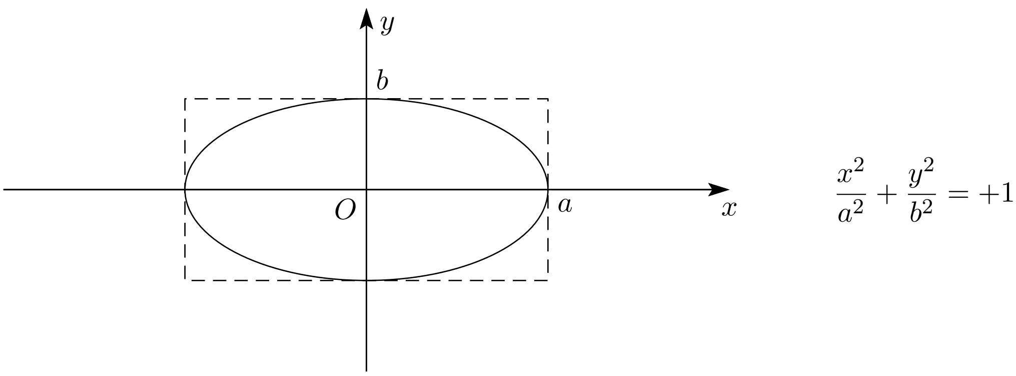
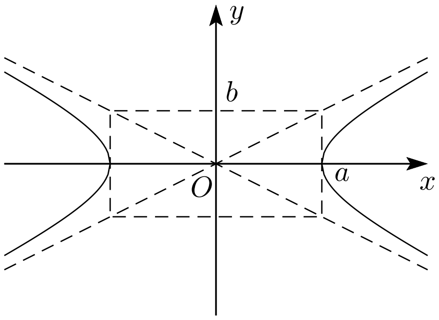
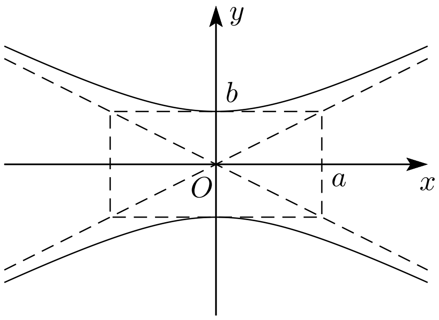


Figura 4.8 *Ellisse con centro l'origine*



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1$$

Figura 4.9 *Iperbole: primo caso*



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Figura 4.10 *Iperbole: secondo caso*

Esempi.

– $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$: per ottenere la forma canonica indicata nella formula (4.19) portiamo il 5 a secondo membro e dividiamo per 5, ottenendo

$$\frac{3}{5}\,x^2 + \frac{2}{5}\,y^2 = 1\,.$$

Occorre un ulteriore passaggio per arrivare alla forma richiesta, dove è previsto solo x^2 o y^2 al numeratore e il coefficiente al denominatore:

$$\frac{x^2}{5/3} + \frac{y^2}{5/2} = 1\,.$$

Avremo dunque $a^2 = 5/3$ e $b^2 = 5/2$, ovvero

$$a = \sqrt{\frac{5}{3}}\,, \quad b = \sqrt{\frac{5}{2}}\,,$$

e l'equazione rappresenterà un'ellisse, il cui grafico è rappresentato nella figura 4.11.

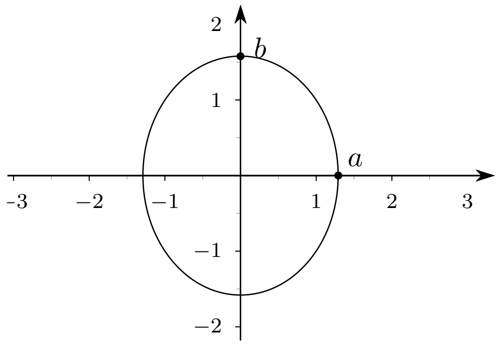


Figura 4.11 *Ellisse di equazione* $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$

– $-2x^2 + 4y^2 + 3 = 0$: procedendo come sopra indicato otteniamo, successivamente,

$$-2x^2 + 4y^2 = -3, \quad 2x^2 - 4y^2 = 3, \quad \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{3/2} - \frac{y^2}{3/4} = 1\,.$$

L'equazione rappresenta dunque un'iperbole di semiassi

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}}\,, \quad b = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

e del primo tipo, il cui grafico è rappresentato in figura 4.12

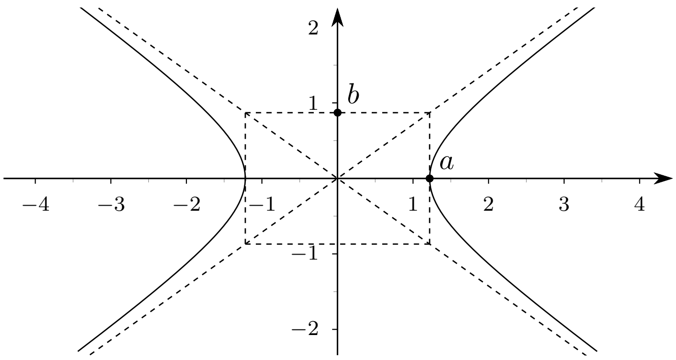


Figura 4.12 *Iperbole di equazione* $-2x^2 + 4y^2 + 3 = 0$

L'ellisse o l'iperbole, sempre con assi paralleli agli assi coordinati, possono anche avere il centro fuori dall'origine. In questo caso le equazioni, in forma canonica, sono del tipo

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1\,, \tag{4.20}$$

dove $C = (x_C, y_C)$ è il centro. Le rappresentazioni grafiche si fanno come già visto per le coniche con centro nell'origine, salvo, appunto, il fatto che il centro risulta ora *traslato*.

4.7 Risoluzione grafica di sistemi in due incognite

La rappresentazione di rette, parabole, ellissi ed iperboli rende possibile una interpretazione grafica molto significativa della risoluzione di sistemi di equazioni (di primo o secondo grado) in due incognite: se si rappresentano graficamente le curve relative a ciascuna equazione del sistema, le soluzioni del sistema corrisponderanno ai punti di intersezione di queste curve, rendendo anche evidente il motivo per cui a volte si hanno soluzioni e a volte no. Vediamo la cosa su alcuni esempi.

Esempi.

– $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Procedendo con la tecnica di sostituzione già nota, si trova l'unica soluzione $(1, -1)$. Se si rappresentano graficamente le due rette che corrispondono alle equazioni del sistema, si vede che esse hanno un unico punto di intersezione, $(1, -1)$ appunto.

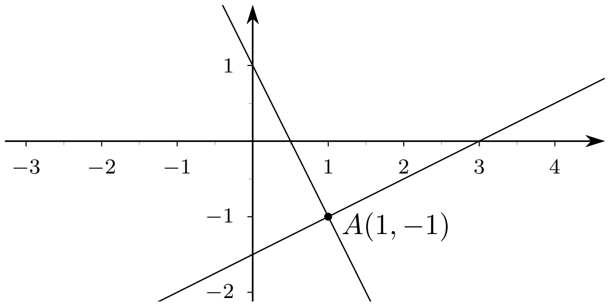


Figura 4.13 *Risoluzione grafica di un sistema di equazioni*

– $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Questa volta il sistema non ha soluzioni e il tutto corrisponde al fatto che le due rette che corrispondono alle due equazioni del sistema sono parallele, come mostra la figura 4.14.

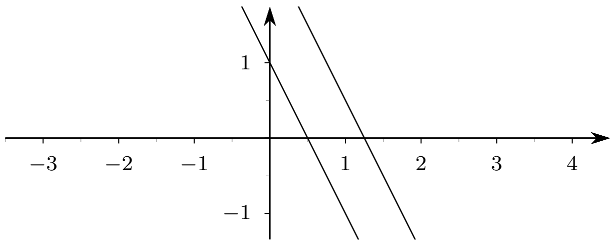


Figura 4.14 *Sistema di equazioni senza soluzioni*

– $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha come soluzioni $(0, -1)$ e $(1, 1)$ e il tutto trova conferma nelle intersezioni tra la retta e le circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema, come mostra la figura 4.15.

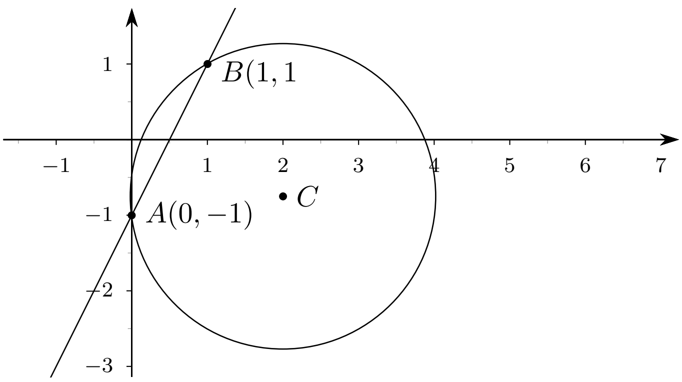


Figura 4.15 *Un sistema di secondo grado*

– $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha come unica soluzione $(8/5\,,\,6/5)$ e il tutto trova conferma nel fatto che la retta e la circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema sono tra di loro tangenti, come mostra la figura 4.16.

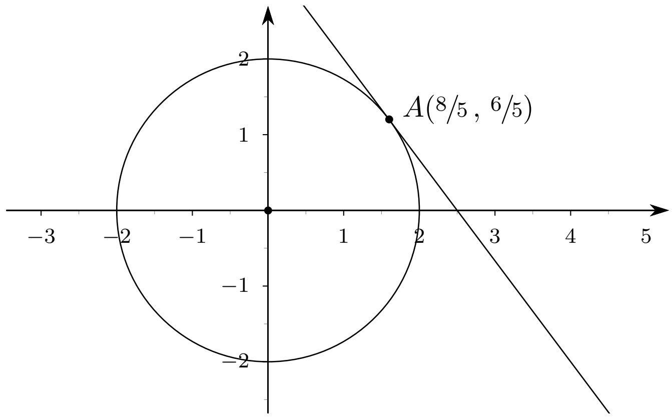


Figura 4.16 *Sistema di secondo grado con una sola soluzione*

– $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha quattro soluzioni, e precisamente $(-\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, -1)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, -1)$, e il tutto trova conferma nel fatto che l'ellisse e la circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema hanno quattro intersezioni, come mostra la figura 4.17.

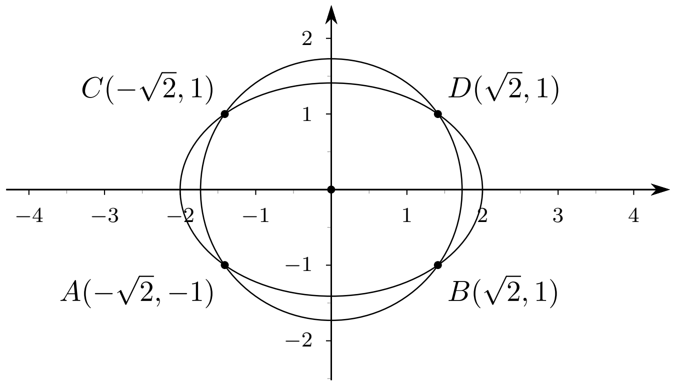


Figura 4.17 *Un sistema di quarto grado*

Le rappresentazioni grafiche che abbiamo considerato diventano ancora più importanti e significative quando si tratta di risolvere disequazioni, come vedremo successivamente.

4.8 Altri luoghi geometrici del piano

In generale se consideriamo un'equazione in due incognite, del tipo $f(x, y) = 0$, l'insieme delle sue soluzioni sarà un sottoinsieme di punti del piano cartesiano, detto anche un *luogo*.

In caso di equazioni di tipo diverso da quelle che abbiamo considerato, non è, di solito, facile trovare le caratteristiche degli insiemi di soluzioni. Qualche volta si può scomporre $f(x, y)$ in fattori e poi usare la solita legge dell'annullamento del prodotto.

Esempi.

- $xy = 0$. Si tratta dell'unione tra gli insiemi $x = 0$ e $y = 0$, cioè dell'equazione complessiva dei due assi cartesiani.
- $x^2 - y^2 = 0$. Scritta l'equazione nella forma $(x - y)(x + y) = 0$, si conclude che si tratta dell'unione delle soluzioni delle equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$, cioè l'equazione

complessiva delle due bisettrici dei quadranti. Si poteva anche, ancora più semplicemente, scrivere l'equazione direttamente nella forma $x = \pm y$, giungendo alle stesse conclusioni.
- $x^2 = 4$. Scritta l'equazione nella forma $(x-2)(x+2) = 0$, o anche, più semplicemente, $x = \pm 2$, si vede che si tratta dell'unione di due rette parallele all'asse delle y.
- $(x-y)(x-y-1) = 0$. Con la solita legge dell'annullamento del prodotto si conclude che si tratta delle due rette (tra di loro parallele) $x - y = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Si noti che eseguendo i calcoli e semplificando si ottiene l'equazione di secondo grado in due incognite $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$.

In ogni caso, data un'equazione $f(x, y) = 0$, è sempre possibile *controllare* se un dato punto è o no soluzione dell'equazione stessa: basterà effettuare una semplice sostituzione.

Esempio. Il punto $(1, -1)$ è soluzione dell'equazione $x^2 - xy - 2^x = 0$, mentre il punto $(1, 1)$ non è soluzione.

Per ragioni di completezza segnaliamo che si dimostra che il luogo dei punti che soddisfano una equazione di secondo grado in due incognite, cioè un'equazione del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,, \tag{4.21}$$

è sempre una *conica*, eventualmente una *conica degenere*, e precisamente una delle seguenti "curve":

1. una ellisse (con la circonferenza come caso particolare);
2. una parabola;
3. una iperbole;
4. una coppia di rette incidenti in un punto;
5. una coppia di rette parallele (eventualmente coincidenti);
6. un punto;
7. l'insieme vuoto.

Le seguenti equazioni forniscono un esempio per ciascuno di questi casi (la quasi totalità sono esempi già considerati nelle pagine precedenti).

1. $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ (ellisse, vedi la figura 4.11 della pagina 32);
2. $x^2 - y + x - 1$ (parabola);
3. $2x^2 - 4y^2 = 3$ (iperbole, vedi la figura 4.12 della pagina 33);
4. $x^2 - y^2 = 0$ (la coppia delle bisettrici dei quadranti, vedi sopra);
5. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$ (coppia di rette parallele, vedi sopra);
6. $x^2 + y^2 = 0$ (equazione cha come soluzioni solo l'origine, in quanto la somma di due quadrati può essere zero se e solo se entrambi i numeri sono zero);
7. $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ovvero $x^2 + y^2 = -1$ (nessuna soluzione, perché la somma di due quadrati non può essere negativa).

Questi luoghi si chiamano coniche perché si ottengono *sezionando* un doppio cono "indefinito" con un piano, come mostra la figura 4.18 nel caso particolare dell'iperbole, ma non intendiamo insistere oltre sull'argomento.

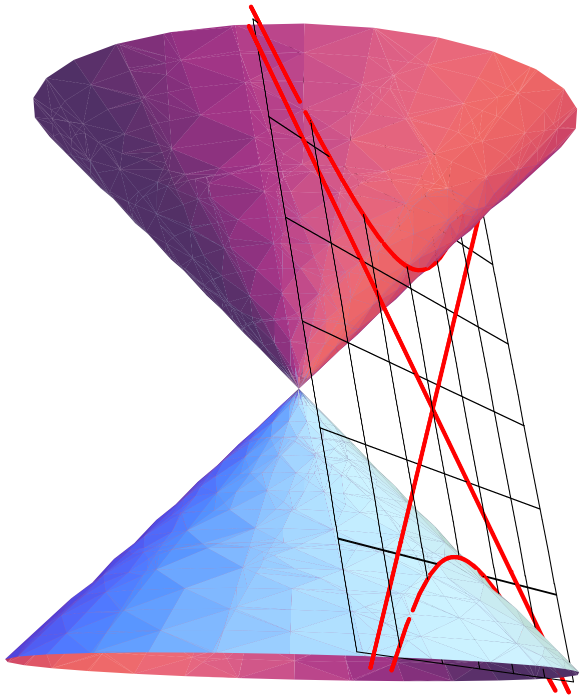


Figura 4.18 *Sezione di un cono ("indefinito") con un piano*

4.9 Esercizi

Esercizio 4.1. *Risolvere graficamente i sistemi dell'esercizio 3.1 della pagina 23.*

Esercizio 4.2. *Controllare se i punti indicati appartengono o no ai luoghi di punti individuati dalle equazioni date a fianco di ciascuno.*

1. $P(1,1)$; $\quad x^2 - xy^2 + 3x - 3 = 0$;
2. $Q(-1,2)$; $\quad xy - x^2y^3 + 3 = 0$;
3. $R(0,1)$; $\quad x^{2y} - y^x - 1 = 0$;

Esercizio 4.3. *Determinare, per via grafica, le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni in due incognite.*

1. $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x - 8 = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 - 9 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + (y-2)^2 = 40 \end{cases}$;

5 Disequazioni

Una disequazione è una espressione del tipo

$$f(x) \lesseqgtr g(x) \quad (\text{cioè } f(x) < g(x) \vee f(x) \leq g(x) \vee f(x) > g(x) \vee f(x) \geq g(x)),$$

nel caso di un'incognita, oppure del tipo

$$f(x,y) \lesseqgtr g(x,y) \quad (\text{cioè } f(x,y) < g(x,y) \vee f(x,y) \leq g(x,y) \vee f(x,y) < g(x,y) \vee f(x,y) \geq g(x,y)),$$

nel caso di due incognite.

Risolvere una disequazione significa trovare *tutti* i numeri, o *tutte* le coppie di numeri, che rendono vera la disuguaglianza.

Esempi.

- $3x^2 - 2x > 1$: il numero 2 è soluzione, il numero 0 non è soluzione.
- $x^2 - 2y^2 \geq x + y$: la coppia $(2,0)$ è soluzione, la coppia $(2,1)$ non è soluzione.

È importante notare subito che, nel caso di disequazioni in una incognita, *di solito*, si hanno infinite soluzioni, al contrario delle equazioni che, sempre di solito, hanno un numero finito di soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni si riesce di solito a rappresentare in maniera semplice utilizzando i sottoinsiemi di numeri reali di cui abbiamo parlato nel capitolo 2, al paragrafo 2.4. Molto convenienti, come vedremo, sono le rappresentazioni grafiche.

Nel caso di disequazioni in due incognite la rappresentazione grafica diventa praticamente indispensabile, in quanto non è di solito possibile esprimere analiticamente in maniera semplice l'insieme delle soluzioni.

5.1 Disequazioni di primo grado

5.1.1 Il caso di un'incognita

Una disequazione di primo grado in un'incognita si può sempre ridurre a una delle forme

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0\,. \tag{5.1}$$

Conviene sempre ridursi al caso in cui $a > 0$, eventualmente cambiando il segno ad ambo i membri,[1] dopodiché si procede portando b a secondo membro e dividendo per a.

Esempi.

- $3x + 2 \leq 0$: $3x \leq -2$, $x \leq -2/3$, ovvero $x \in]-\infty, -2/3]$, insieme che si rappresenta graficamente come nella figura seguente.

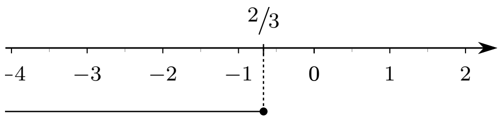


Figura 5.1 *La disequazione* $3x + 2 \leq 0$

[1] Attenzione: cambiando il segno è *obbligatorio* cambiare anche il verso della disequazione

– $2x+8<7x-1$: $-5x<-9$, $5x>9$, $x>9/5$, ovvero $x\in]9/5,+\infty[$, insieme che si rappresenta graficamente come nella figura seguente.

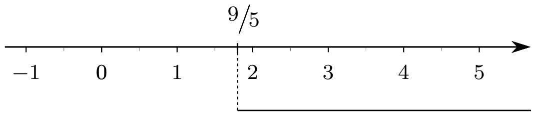


Figura 5.2 *La disequazione* $2x+8<7x-1$

Si noti come nel primo caso il punto $-2/3$ era compreso nell'insieme delle soluzioni, nel secondo caso invece il punto $9/5$ non è compreso: è opportuno abituarsi a evidenziare questa differenza anche nel grafico, per esempio usando un "pallino pieno" nel primo caso come abbiamo fatto noi.[2]

5.1.2 Il caso di due incognite

Una disequazione di primo grado in due incognite si può sempre porre in una delle forme

$$ax+by+c>0,\quad ax+by+c\geq 0,\quad ax+by+c<0,\quad ax+by+c\leq 0. \tag{5.2}$$

Se teniamo conto che $ax+by+c=0$ ha come grafico una retta nel piano, e che una retta divide il piano in due semipiani, potremo concludere che una disequazione di primo grado in due incognite ha come soluzioni tutti i punti di uno dei due semipiani, comprendenti o meno la retta origine, a seconda della presenza o no del segno di $=$ nella disequazione. Per sapere quale dei due semipiani scegliere, conviene considerare un punto in uno dei due (fuori dalla retta origine dunque) e controllare numericamente se la disequazione è verificata per quel punto.

Esempi.

– $2x-y+1>0$. Si rappresenta graficamente la retta $2x-y+1=0$. Si prende poi il punto $(0,0)$, che non sta sulla retta: sostituendo le sue coordinate nella disequazione si vede subito che esse la soddisfano, dunque la disequazione è verificata da *tutti* i punti che stanno nello stesso semipiano di O, esclusa la retta origine.

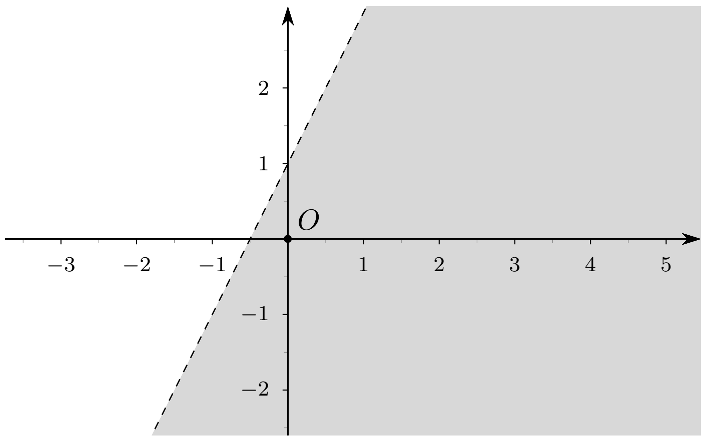


Figura 5.3 *La disequazione* $2x-y+1>0$

– $2x+y+1\geq 0$. Procedendo come prima si trova l'insieme di soluzioni rappresentato in figura 5.4.

[2] È ovvio che ciascuno può utilizzare il tipo di visualizzazione che preferisce, o a cui è stato abituato: l'importante è essere chiari e coerenti.

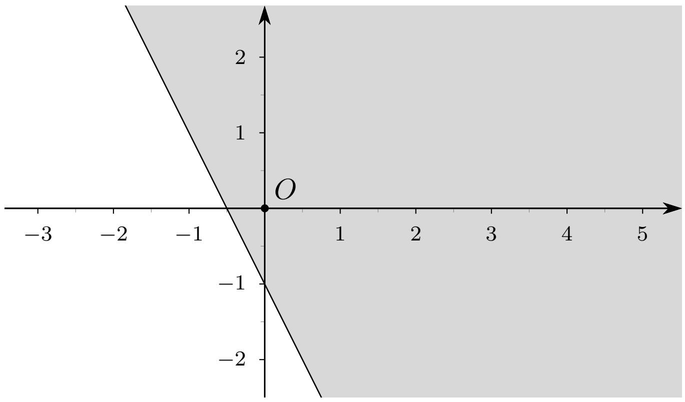


Figura 5.4 *La disequazione* $2x + y + 1 \geq 0$

5.2 Disequazioni di secondo grado

5.2.1 Il caso di un'incognita

Una disequazione di secondo grado in un'incognita si può sempre mettere in una delle forme sintetizzate nella formula seguente:

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0\,. \tag{5.3}$$

Il modo migliore per risolverla è quello di considerare la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e poi valutare dal grafico quali sono le x che corrispondono alle parti di parabola che stanno sopra o sotto l'asse delle ascisse, a seconda del verso della disequazione. Gli esempi che seguono chiariranno il metodo.[3]

Esempi.

– $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Il grafico di figura 5.5 rende evidente che le soluzioni sono $x \leq -1/2$ oppure $x \geq 1$, ovvero

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[.$$

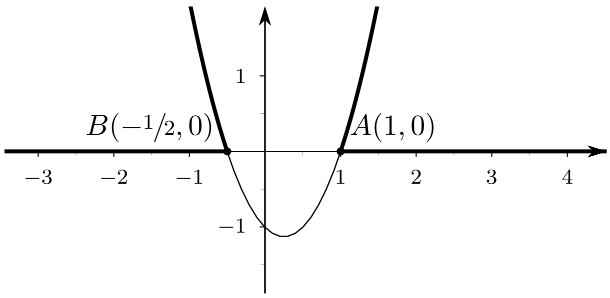


Figura 5.5 *La disequazione* $2x^2 - x - 1 \geq 0$

Questo insieme di soluzioni può essere rappresentato graficamente come segue, e come si deduce subito dalla figura 5.5 stessa.

[3] Ci sono anche delle regole legate al segno di a e al tipo di discriminante dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, detta *equazione associata* alla disequazione. Purtroppo la memorizzazione di queste regole avviene quasi sempre in maniera scorretta, con conseguenti errori nella risoluzione. A nostro avviso la tecnica grafica è di gran lunga preferibile.

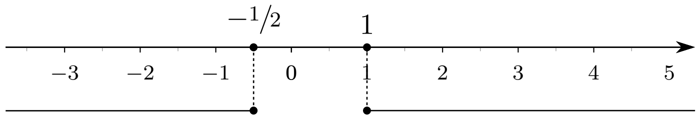


Figura 5.6 *Le soluzioni della disequazione* $2x^2 - x - 1 \geq 0$

- $-2x^2 + x - 1 \geq 0$. Il grafico di figura 5.7 rende evidente che la disequazione non ha nessuna soluzione. Si noti come invece le disequazioni $-2x^2+x-1 \leq 0$ e $-2x^2+x-1 < 0$ avrebbero avuto come insieme delle soluzioni tutti i numeri reali.

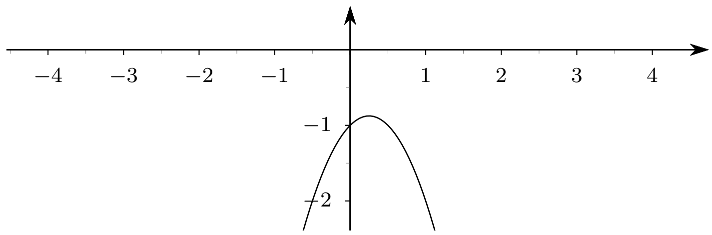


Figura 5.7 *La disequazione* $2x^2 + x - 1 \geq 0$.

- $x^2+2x+1 \leq 0$ Dal grafico di figura 5.8 si deduce facilmente che la disequazione è verificata solo per $x = -1$: il trinomio $x^2 + 2x + 1$ non è infatti mai negativo e può essere nullo solo in corrispondenza di $x = -1$.

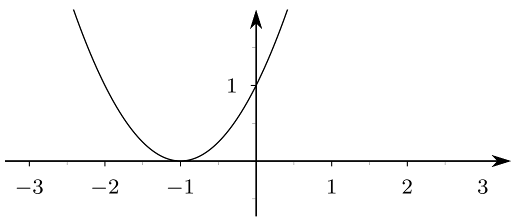


Figura 5.8 *La disequazione* $x^2 + 2x + 1 \leq 0$

5.2.2 Il caso di due incognite

La situazione è molto simile a quanto già visto per il caso delle equazioni di primo grado: rappresentata nel piano cartesiano la parabola, circonferenza, ellisse o iperbole corrispondente alla equazione in due incognite associata alla disequazione, si constata che il piano viene diviso in due regioni (sono, solo in apparenza, tre nel caso dell'iperbole). In una delle due regioni la disequazione è verificata, nell'altra no, e la ricerca della regione giusta si fa scegliendo un punto e controllando numericamente se in corrispondenza ad esso la disequazione è verificata o meno.

Esempi.

- $x^2+y^2-2x-2y+1 \leq 0$. Si traccia la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-2y+1 = 0$; successivamente si controlla che sostituendo le coordinate di un punto interno (per esempio il centro, $(1, 1)$, che sicuramente è interno) la disequazione è verificata. La disequazione sarà dunque verificata per tutti gli altri punti interni e per la circonferenza stessa, visto che la disequazione è del tipo "$\leq$".

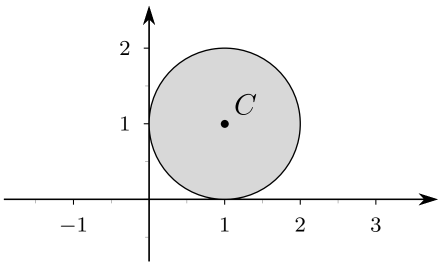


Figura 5.9 *La disequazione* $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0$

– $x^2 - \dfrac{y^2}{4} < 1$. Procedendo come sopra e provando con il punto $(0, 0)$, si trova che la disequazione è verificata nella zona compresa tra i due rami dell'iperbole $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$, esclusa l'iperbole stessa, visto che nella disequazione manca il segno di $=$.

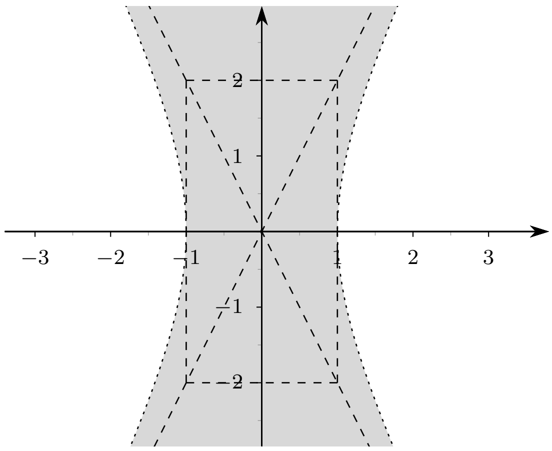


Figura 5.10 *La disequazione* $x^2 - \dfrac{y^2}{4} < 1$

5.3 Sistemi di disequazioni

Esattamente come nel caso dei sistemi di equazioni, risolvere un sistema di disequazioni significa trovare le soluzioni comuni. Poiché, a differenza delle equazioni, le soluzioni di una disequazione sono normalmente infinite, sarà generalmente più complesso trovare le soluzioni comuni, e le rappresentazioni grafiche potranno essere di grande aiuto.

5.3.1 Sistemi in una incognita

Esempio. $\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$.

Si risolvono separatamente le due disequazioni ottenendo $x \leq 1/2$ per la prima e $x < 1 \lor x > 4$ per la seconda. A questo punto si costruisce un grafico come nella figura 5.11, dal quale è facile dedurre che le soluzioni del sistema sono costituite dall'insieme

$$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

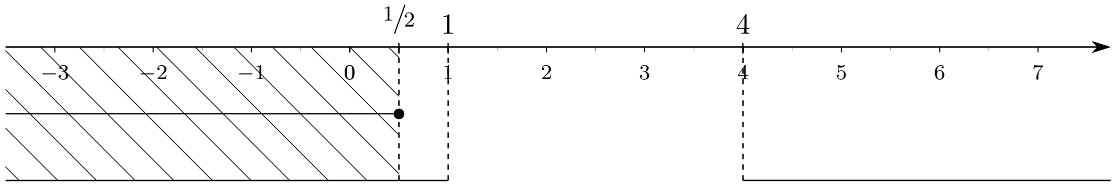


Figura 5.11 *Grafico per un sistema di disequazioni in una incognita*

5.3.2 Sistemi in due incognite

Per i sistemi in due incognite si procede in maniera simile, rappresentando nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni di ciascuna delle disequazioni e poi trovando le parti comuni. Come già per le equazioni non sarà possibile in generale esplicitare analiticamente l'insieme delle soluzioni: la soluzione grafica sarà essenziale.

Esempio. $\begin{cases} x^2+y^2-2x>0 \\ x-y-2>0 \end{cases}$.

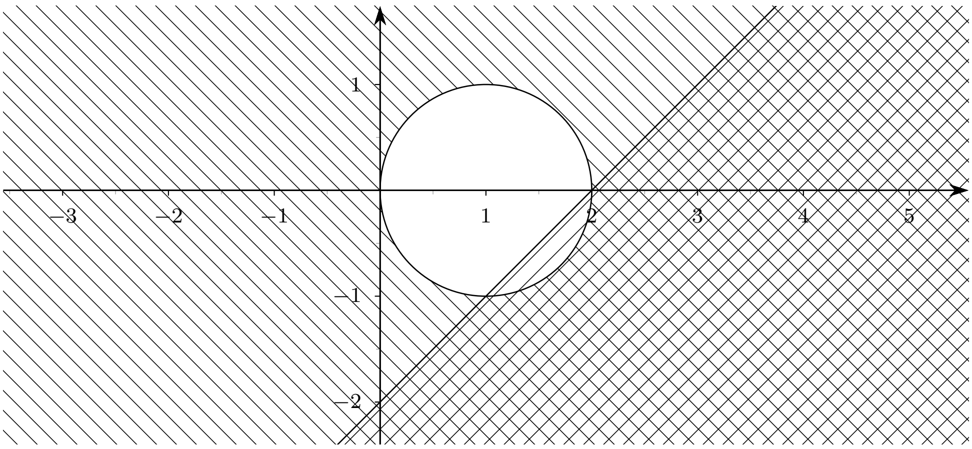


Figura 5.12 *Grafico per un sistema di disequazioni in due incognite*

L'insieme delle soluzioni è costituito dalla parte di piano dove si incrociano i due riempimenti obliqui, con l'esclusione sia dell'arco di circonferenza che delle due parti di retta.

5.4 Disequazioni scomponibili in fattori

Supponiamo di avere una disequazione (in una o due incognite) ridotta a forma normale, cioè del tipo

$$f(x) \lesseqgtr 0, \quad f(x,y) \lesseqgtr 0\,.$$

Se il primo membro non è di uno dei tipi già visti (cioè di primo e secondo grado) si può provare a scomporre in fattori e poi utilizzare la *regola dei segni* per risolvere la disequazione. La stessa tecnica si applica se si hanno disequazioni fratte. Precisamente si determina il *segno* di ciascuno dei fattori (insieme di positività, insieme di negatività, insieme dei punti ove si annulla) e poi si determina il segno del prodotto (o del quoziente). Per facilitare le conclusioni conviene utilizzare opportune rappresentazioni grafiche, in particolare nel caso di disequazioni in una incognita, come si vedrà sugli esempi.

Esempi.

– $(x^2-1)(x-2) > 0$. Rappresentando graficamente la parabola $y = x^2 - 1$ si verifica subito che il fattore $x^2 - 1$ è positivo per $x < -1$ e per $x > 1$, è negativo per $-1 < x < 1$, si annulla per $x = \pm 1$. Per il fattore $x - 2$ è facile concludere che è positivo per $x > 2$, negativo per $x < 2$, si annulla per $x = 2$. Se si costruisce con questi dati il grafico della figura 5.13, si può concludere facilmente.

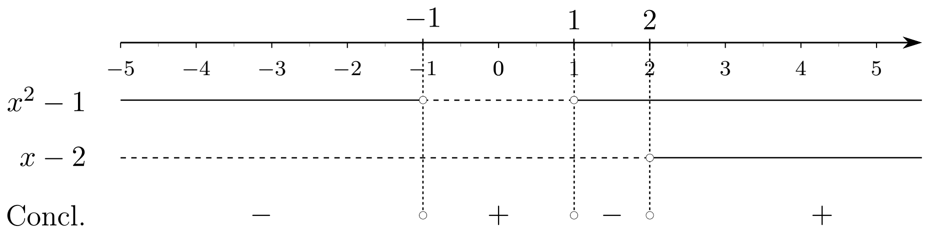


Figura 5.13 *Grafico di segno per la disequazione* $(x^2-1)(x+2)$

Si noti che abbiamo usato

- una linea continua per indicare le parti dove ciascun fattore è positivo;
- una linea tratteggiata per indicare le parti dove ciascun fattore è negativo;
- uno 0 per indicare i punti dove ciascun fattore si annulla.

La prima linea serve da riferimento per riportare i vari "caposaldi", l'ultima linea contiene le conclusioni (sulla base della regola dei segni), e qui abbiamo usato esplicitamente i segni $+$ e $-$, oltre allo zero. Sulla linea dei caposaldi abbiamo riportato anche la graduazione; in realtà la cosa non è necessaria e non serve nemmeno rispettare le unità di misura, l'unica cosa che conta è l'ordine dei caposaldi.
Come già accennato, la figura 5.13 permette di concludere che la disequazione proposta è verificata per

$$x \in]-1, 1[\cup]2, +\infty[\,.$$

Si noti che per risolvere la disequazione $(x^2-1)(x+2) < 0$ *avremmo potuto utilizzare lo stesso grafico*, senza alcuna variazione e avremmo concluso che $(x^2-1)(x+2) < 0$ è verificata per

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, 2[.$$

Stesse considerazioni per le disequazioni $(x^2-1)(x+2) \leq 0$ e $(x^2-1)(x+2) \geq 0$ che avrebbero avuto, rispettivamente, come insieme delle soluzioni

$$]-\infty, -1] \cup [1, 2]\,,$$

e

$$[-1, 1] \cup [2, +\infty[\,.$$

– $\dfrac{x^2-1}{x+2} \geq 0$. La risoluzione di questa disequazione può utilizzare lo stesso grafico della precedente (la regola dei segni per un prodotto o per un quoziente è la stessa!); l'unica differenza consiste nel fatto che bisogna prestare attenzione al fatto che il fattore $x+2$ ora sta al denominatore è quindi *deve essere diverso da zero*. Si può introdurre uno speciale simbolo (per esempio una $\times$) per indicare che il valore $x = 2$ deve andare escluso. Per evitare errori conviene indicarlo già esplicitamente nella linea dei caposaldi. Il grafico è riportato in figura 5.14.

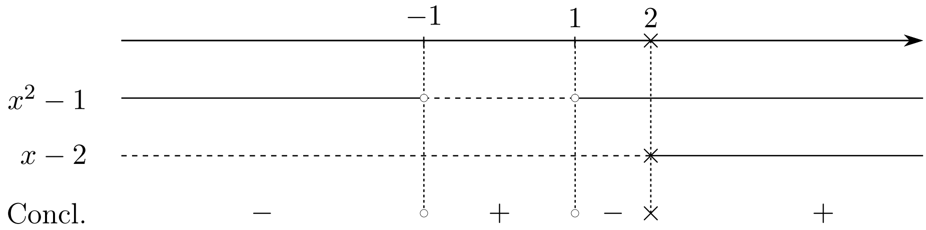


Figura 5.14 *Grafico di segno per la disequazione* $(x^2-1)/(x+2) \geq 0$

La disequazione proposta è verificata per

$$x \in [-1, 1] \cup]2, +\infty[.$$

– $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-2y} \geq 0$. Si procede a trovare il segno del numeratore e del denominatore, rappresentando il risultato nel piano. Successivamente si trova il segno del quoziente con la regola dei segni, esattamente come nel caso di una sola variabile: naturalmente le soluzioni saranno un sottoinsieme del piano che, di solito, non potrà essere descritto analiticamente. Le figure 5.15 e 5.16 evidenziano gli insiemi di positività del numeratore e del denominatore rispettivamente; le regioni non evidenziate sono gli insiemi di negatività, le retta e la circonferenza sono i punti dove il numeratore e il denominatore si annullano e, naturalmente, questi ultimi andranno esclusi. In ciascuna delle figure è rappresentata anche la curva relativa all'altra, per un utile confronto. La figura 5.17 evidenzia l'insieme delle soluzioni della disequazione, da cui va esclusa l'intera circonferenza. Si noti in particolare che i due punti di intersezione tra la retta e la circonferenza non fanno parte dell'insieme delle soluzioni.

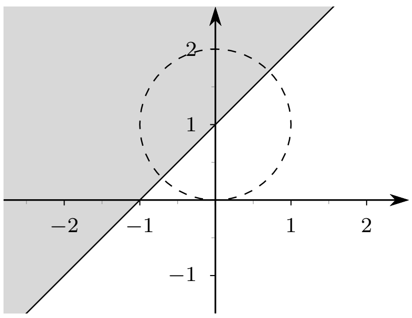


Figura 5.15 $x - y + 1 > 0$

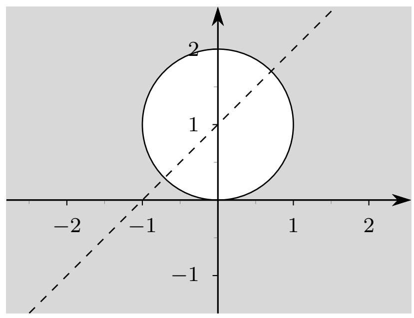


Figura 5.16 $x^2 + y^2 - 2y > 0$

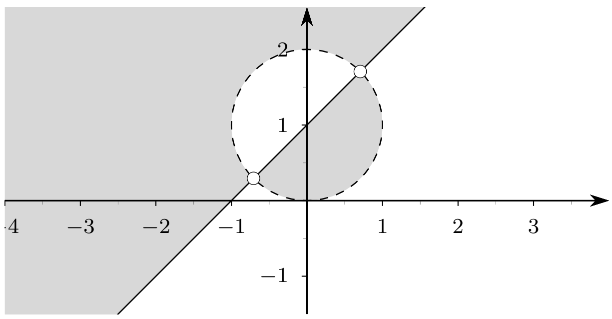


Figura 5.17 $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-2y} \geq 0$

5.5 Disequazioni con radicali

Come già le equazioni con radicali, anche le disequazioni con radicali sono abitualmente di difficile risoluzione. Tra quelle con radici quadrate ci occuperemo qui solo dei due tipi più importanti e frequenti nelle nostre applicazioni:

1. $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ (oppure $\sqrt{f(x)} > g(x)$);
2. $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ (oppure $\sqrt{f(x)} < g(x)$).

Per risolvere le disequazioni del primo tipo si considera l'unione delle soluzioni di due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \left(\text{oppure} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}\right).$$

Per risolvere le disequazioni del secondo tipo si ricorre invece al seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \leq g(x) \end{cases}, \quad \left(\text{oppure} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f^2(x) < g(x) \end{cases}\right).$$

Esempi.

– $\sqrt{x^2 - 9x + 14} > x - 8$. Si procede scrivendo e risolvendo i due sistemi, come indicato.

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \geq 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 9x + 14 > (x-8)^2 \\ x - 8 \geq 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema risulta verificato per $x \leq 2 \vee 7 \leq x < 8$, il secondo per $x \geq 8$. L'unione dei due è dunque verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 7$.

– $\sqrt{4x^2 - 13x + 3} < 2x - 3$. Scrivendo il sistema di tre equazioni indicato sopra si trova:

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 3 \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 13x + 3 < (2x-3)^2 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $x \geq 3$, che è la soluzione della disequazione data.

Una disequazione che presenti un solo radicale di indice dispari (in particolare di indice 3), si risolve facilmente isolando il radicale ed elevando alla potenza uguale all'indice della radice: si tratta dunque di un problema formalmente più semplice che non il caso delle equazioni con radici quadrate.

Esempio. $\sqrt[3]{x^2 + 7} > 2$. Elevando al cubo si ottiene, semplificando, $x^2 - 1 > 0$, che ha per soluzioni $x < -1 \vee x > 1$.

5.6 Esercizi

Esercizio 5.1. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $x^2 + 3x + 2 > 0$;
2. $-x^2 - 3x + 2 < 0$;
3. $4 - x^2 > 0$;
4. $x^2 - x + 6 < 0$;
5. $(x^2 + 2x - 8)(x + 1) > 0$;

6. $(x^2-2)(x+1)(1-x) \geq 0$;
7. $x(x^2+2)(2x-1) < 0$;
8. $\dfrac{x+1}{x^2+1} < 0$;
9. $\dfrac{2x-8}{1-x-x^2} > 0$;
10. $\dfrac{x^2-4}{x+3} \leq 0$;
11. $x^3-27 \geq 0$;
12. $2-x^3 < 0$;
13. $x^3(x^2-1)(2-x^2) \leq 0$;
14. $\dfrac{x-9}{x^3+1} \geq 0$;
15. $\dfrac{8-x^3}{x^3+9} \leq 0$.

Esercizio 5.2. *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.*

1. $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2+2x-8>0 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x+1<0 \\ x^2+1<0 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} 2x-8>0 \\ 1-x-x^2<0 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} (1-3x^2)(x-2)<0 \\ (2+x)(1-x)>0 \end{cases}$;
6. $\begin{cases} 3x-2<0 \\ 2x(3-x)>0 \end{cases}$;
7. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}<0 \\ \dfrac{2x+1}{x(2-3x)}>0 \end{cases}$;
8. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x}<0 \\ \dfrac{x+1}{1-x}>0 \end{cases}$.

Esercizio 5.3. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1-x}} < 1$;
2. $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} > x+1$;
3. $\sqrt{1-x^2} < 1-x$;

4. $\sqrt{x} < x$;

5. $\sqrt{1-x^2} > x^2$;

6. $\sqrt{x(x+1)} < 1-x$.

Esercizio 5.4. *Determinare, per via grafica, le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni in due incognite.*

1. $\begin{cases} y-x+1>0 \\ 2x-3\leq 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x+2y-1>0 \\ 2x+3y+2\geq 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ y+1>0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x-8>0 \\ 1-x<0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} y-1>0 \\ y+3<0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x+y-1>0 \\ x-2y\leq 0 \\ x+y<0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x-y\leq 0 \\ x+3y>0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-4>0 \\ x+y+2\leq 0 \\ x-2y-1<0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2-9<0 \\ y-x+2\leq 0 \\ x+1>0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2\leq 4 \\ y-2x<0 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2-1<0 \\ x^2+(y-2)^2\leq 40 \\ x+y<0 \end{cases}$;

6 Esponenziali e logaritmi

6.1 Richiami sulle potenze

Se a è un numero reale qualunque e m è un naturale *maggiore o uguale* a 2, si definisce *potenza* di *base* a ed *esponente* m il numero

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-volte}} \tag{6.1}$$

Se $m = 1$ e a è ancora un numero reale qualunque, si pone, per definizione,

$$a^1 = a\,. \tag{6.2}$$

Si noti che a^1 *non è* un prodotto, in quanto per eseguire un prodotto occorrono *due* fattori.

Se poi a è un numero reale *diverso da zero*, si pone, sempre per definizione,

$$a^0 = 1\,. \tag{6.3}$$

Si noti che *non* abbiamo definito il simbolo 0^0, che non ha, dunque, *alcun significato*.

Con queste definizioni si completa il concetto di potenza di base reale ed esponente naturale. La definizione si estende poi fino a consentire anche esponenti interi negativi, ma con base sempre *diversa da zero*, ponendo

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}\,, \quad a \neq 0. \tag{6.4}$$

È opportuno segnalare esplicitamente, anche se è già indicato nella formula (6.4), che il simbolo $0^{\text{num.negativo}}$ *non* è definito.

È poi possibile ampliare ulteriormente la definizione fino a comprendere esponenti reali qualunque, ma con l'importantissima *limitazione* che la base debba essere *positiva*, o al massimo zero se l'esponente è non negativo. Per gli esponenti frazionari, cioè del tipo m/n, con n naturale > 1, la definizione di potenza è abbastanza semplice: si pone infatti, per definizione,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,, \quad a > 0\,; \qquad 0^{\frac{m}{n}} = 0, \quad \frac{m}{n} > 0\,. \tag{6.5}$$

L'estensione al caso di esponenti reali qualunque (per esempio $a^{\sqrt{2}}$) è decisamente più complessa, e una sua definizione rigorosa esula dagli scopi di questo corso. Ci accontenteremo di valutare il metodo su un esempio significativo. Supponiamo di voler definire $a^{\sqrt{2}}$. Si considerano le successive approssimazioni decimali di $\sqrt{2}$ con un numero sempre maggiore di cifre decimali:

$$1.4 = \frac{14}{10}, \quad 1.41 = \frac{141}{100}, \quad 1.414 = \frac{1414}{1000}, \quad 1.4142 = \frac{14142}{10000}, \quad \dots$$

Noi sappiamo già calcolare a elevato a ciascuno degli esponenti che approssimano $\sqrt{2}$ (perché si tratta di esponenti frazionari); ebbene, $a^{\sqrt{2}}$ sarà il *valore limite* a cui tende questa successione di numeri, quando l'esponente tende ad essere $\sqrt{2}$.

Al di là comunque della definizione, ciò che conta è che valgono le seguenti proprietà delle potenze (valide qualunque sia il tipo di esponente, e con la limitazione che la base deve essere positiva quando qualche esponente non è intero, e naturalmente diversa da zero se compare al denominatore di una frazione).

$$(a^m)^n = a^{mn}; \tag{6.6}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{6.7}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \tag{6.8}$$

6.2 Le funzioni potenza

Si chiamano *funzioni potenza* le funzioni del tipo

$$f(x) = x^a\,, \tag{6.9}$$

essendo a un numero reale qualunque. Se a è un intero positivo allora il dominio di queste funzioni è tutto $\mathbb{R}$; se a è un intero negativo, il dominio è costituito dai reali diversi da zero; negli altri casi il dominio è costituito dai reali positivi.

È evidente che i grafici nei casi $a = 1$ e $a = 2$ rientrano in situazioni già viste: per $a = 1$ si tratta precisamente di una retta per l'origine, con pendenza 1 (la *bisettrice* del primo e terzo quadrante), nel caso $a = 2$ di una parabola con vertice nell'origine e concavità verso l'alto, grafici che abbiamo riportato nelle figure 6.1 e 6.2 per comodità. I grafici relativi ad alcuni altri casi sono riportati nelle figure successive.

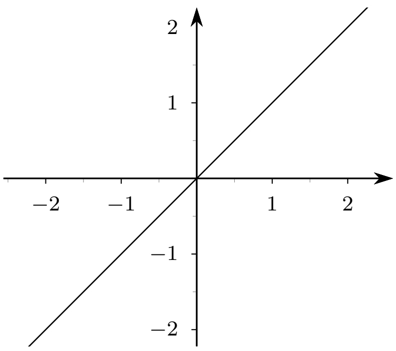


Figura 6.1 *La funzione* $f(x) = x^1 = x$

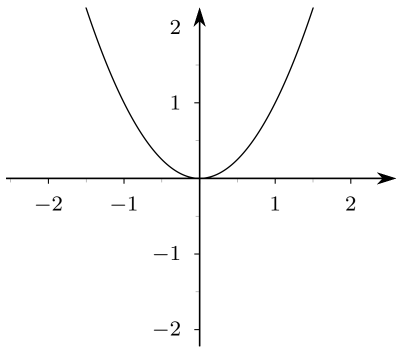


Figura 6.2 *La funzione* $f(x) = x^2$

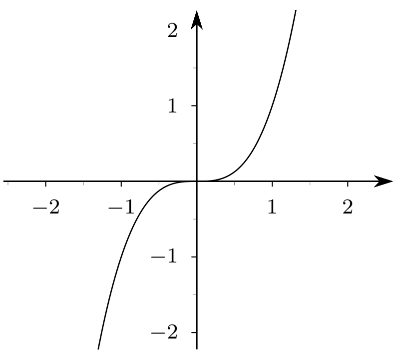


Figura 6.3 *La funzione* $f(x) = x^3$

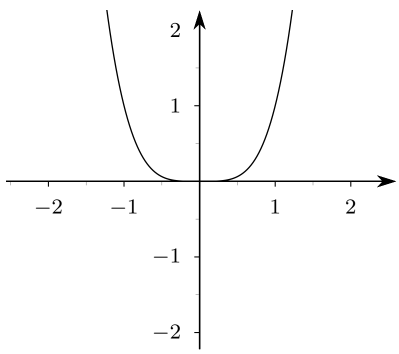


Figura 6.4 *La funzione* $f(x) = x^4$

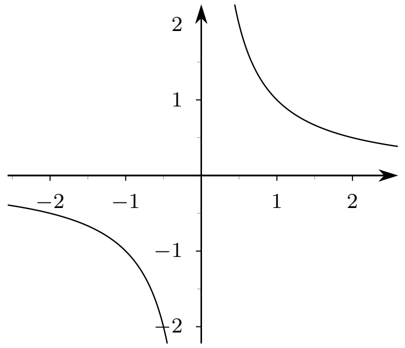


Figura 6.5 *La funzione* $f(x) = x^{-1} = 1/x$

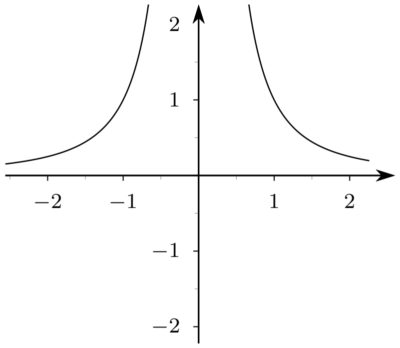


Figura 6.6 *La funzione* $f(x) = x^{-2} = 1/x^2$

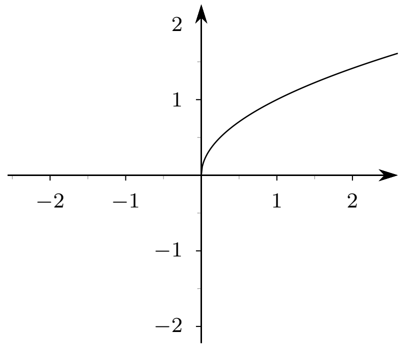


Figura 6.7 *La funzione* $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

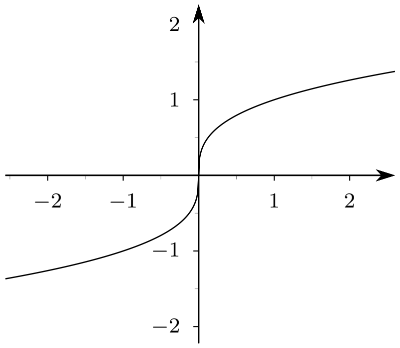


Figura 6.8 *La funzione* $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Anche se non è il caso qui di entrare nei dettagli, segnaliamo che, di solito, la funzione $x^{1/3}$ è ritenuta diversa da $\sqrt[3]{x}$, perché la prima si ritiene definita per $x \geq 0$, la seconda per tutti gli x reali. Si noti che, qualunque sia l'esponente a, il grafico della funzione x^a passa sempre per il punto $(1, 1)$, in accordo con il fatto che $1^a = 1$.

6.3 Le funzioni esponenziali

Simmetricamente alle funzioni potenza si introducono (e sono molto importanti!) le funzioni esponenziali, cioè le funzioni del tipo

$$f(x) = a^x, \quad a > 0\,. \tag{6.10}$$

Si noti che nelle funzioni potenza si ha la base variabile e l'esponente fisso, nelle funzioni esponenziali si ha la base fissa e l'esponente variabile. Il caso della base 1 è poco significativo in quanto $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. I grafici relativi a queste funzioni, con alcune scelte delle basi sono riportati nelle figure che seguono.

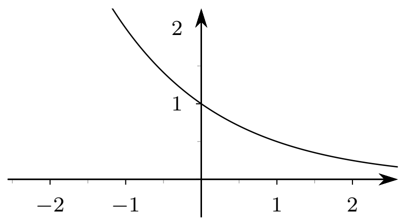


Figura 6.9 *La funzione* $f(x) = (1/2)^x$

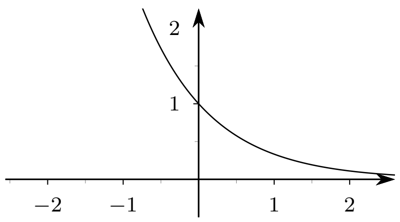


Figura 6.10 *La funzione* $f(x) = (1/3)^x$

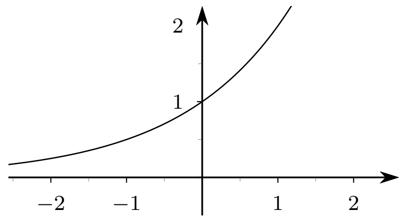


Figura 6.11 *La funzione* $f(x) = 2^x$

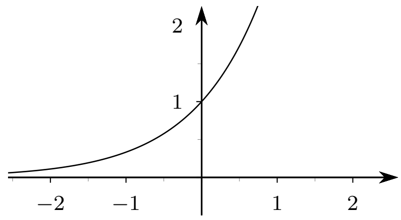


Figura 6.12 *La funzione* $f(x) = 3^x$

Come si può intuire dalle figure 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, si hanno due tipi di comportamento e precisamente:

1. se $0 < a < 1$, al crescere della x il corrispondente valore di y diminuisce (si parla di *funzione decrescente* come preciseremo meglio nel seguito);
2. se $a > 1$, al crescere della x cresce anche il corrispondente valore di y (si parla di *funzione crescente* come preciseremo meglio nel seguito).

È altresì importante osservare che la velocità della crescita, per funzioni esponenziali con base $a > 1$, è molto elevata. La cosa si può valutare bene controllando i dati della tabella 6.1.

x	x^2	2^x
1	1	2
2	4	4
3	9	8
4	16	16
5	25	32
6	36	64
10	100	1024
100	10000	$\sim 1.27 \cdot 10^{30}$

Tabella 6.1 *Confronto tra* x^2 *e* 2^x

Nelle applicazioni interessa principalmente il caso in cui la base della funzione esponenziale è il *numero di Nepero*, indicato con "e", e di cui, per ora, ci basta sapere che si ha

$$\mathrm{e} \simeq 2.718\,.$$

Trattandosi di una base maggiore di 1, la relativa funzione esponenziale sarà crescente. Quando si parla di funzione esponenziale senza precisare la base, di solito si fa riferimento alla funzione e^x, che si scrive anche $\exp(x)$.

Si noti che tutte le funzioni esponenziali passano per il punto $(0, 1)$, in accordo con il fatto che $a^0 = 1$, per tutti i valori di a. Si noti infine (cosa molto importante!) che a^x è un numero strettamente maggiore di zero, qualunque sia x.

6.4 Le funzioni logaritmo

Un problema molto importante che si presenta con le funzioni esponenziali è quello della risoluzione di equazioni esponenziali come per esempio l'equazione $2^x = 8$. È evidente che l'unica soluzione possibile di questa equazione è $x = 3$ e questo trova conferma nel grafico della figura 6.13.

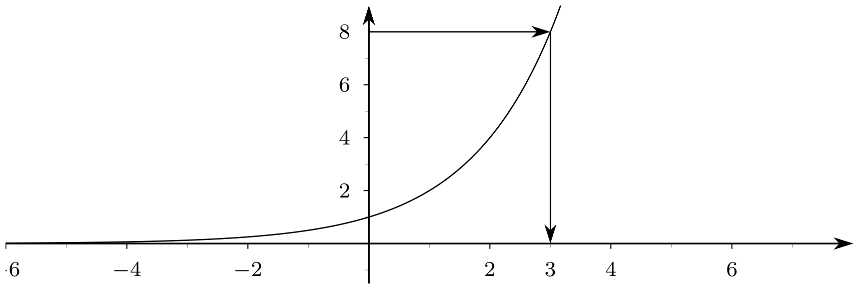


Figura 6.13 *L'equazione* $2^x = 8$

Se però consideriamo l'equazione $2^x = 3$, dall'esame della figura 6.14 possiamo concludere che ci deve essere una soluzione, ma essa non rientra in nessuno dei "numeri conosciuti".

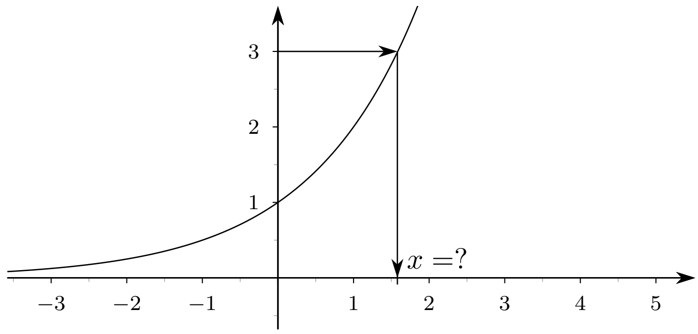


Figura 6.14 *L'equazione* $2^x = 3$

È per risolvere problemi come questo che si introduce il concetto di logaritmo. Precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 6.1. *Siano dati un numero reale $a > 0$ e $a \neq 1$ e un numero reale $b > 0$. Si chiama* logaritmo in base a di b, *e si indica con*

$$\log_a(b), \quad \textit{o semplicemente} \quad \log_a b\,, \tag{6.11}$$

*l'*esponente *che si deve dare ad a per ottenere b.*

In formule la definizione 6.1 si può sintetizzare come segue:

$$a^{\log_a b} = b\,. \tag{6.12}$$

Per esempio la x che risolve l'equazione $2^x = 3$ è data dal $\log_2 3$, perché

$$2^{\log_2 3} = 3\,.$$

Esempi.

- $\log_3 81 = 4$, perché $2^4 = 81$.
- $\log_{10} 1000 = 3$, perché $10^3 = 1000$.
- $\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$, perché $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$.
- $\log_{10} \dfrac{1}{10} = -1$, perché $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$.

In matematica la più importante base dei logaritmi è il numero "e" di Nepero e il logaritmo in base "e" si chiama anche *logaritmo naturale* e si indica con la scrittura $\ln x$, cioè si pone.[1]

$$\log_{\mathrm{e}} x = \ln x\,. \tag{6.13}$$

Dalle proprietà delle potenze si ricavano le seguenti proprietà dei logaritmi, che qui ci limitiamo solo ad enunciare, ricordando che a deve essere maggiore di zero e diverso da 1.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \quad x > 0,\ y > 0. \tag{6.14}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y\,, \quad x > 0,\ y > 0. \tag{6.15}$$

$$\log_a (x)^y = y \log_a x\,, \quad x > 0. \tag{6.16}$$

$$\log_a a = 1\,. \tag{6.17}$$

$$\log_a 1 = 0\,. \tag{6.18}$$

Ricordando la formula (6.12) e le proprietà appena scritte possiamo concludere che valgono le seguenti due proprietà che legano logaritmi ed esponenziali.

$$a^{\log_a x} = x,\ \forall x > 0, \qquad \log_a a^x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.19}$$

Le formule(6.19) esprimono la proprietà che le funzioni logaritmo ed esponenziale sono *inverse una dell'altra*, in un senso che preciseremo in seguito.

Nelle figure 6.15 e 6.16 sono riportati i grafici della funzione logaritmo con una base maggiore di 1 e una minore di 1: valgono le stesse osservazioni già fatte per le funzioni esponenziali.

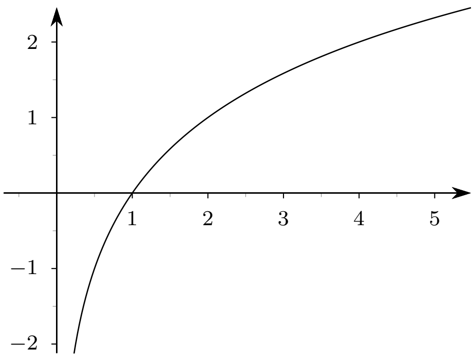


Figura 6.15 *La funzione* $\log_2 x$

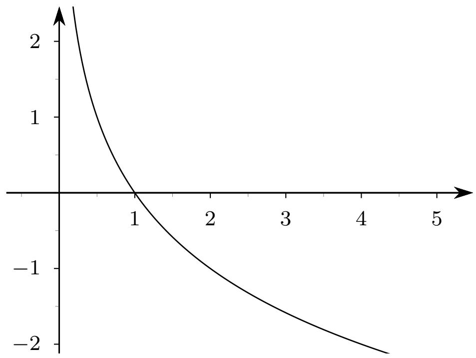


Figura 6.16 *La funzione* $\log_{1/2} x$

Si noti che tutte le funzioni logaritmo passano per il punto $(1,0)$, in accordo con il fatto che $\log_a 1 = 0$, per qualunque base a e che il dominio di queste funzioni è costituito da tutti gli $x > 0$ (attenzione: strettamente maggiori di zero!).

Le calcolatrici tascabili consentono di calcolare i logaritmi solo nella basi "e" e 10. Per calcolare i logaritmi in un'altra base si può usare la seguente *formula di cambiamento di base*, che ci limitiamo a dare senza alcuna giustificazione:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}\,. \tag{6.20}$$

[1] Purtroppo questa notazione non è adottata da tutti; alcuni scrivono $\log x$ per indicare il logaritmo naturale, mentre spesso la scrittura $\log x$ è usata per indicare il logaritmo in base 10. Noi useremo $\ln x$ per il logaritmo naturale, e $\log x$ per il logaritmo in base 10, in accordo con la quasi totalità delle calcolatrici e dei software per computer.

6.5 Cenno sulle disequazioni con logaritmi ed esponenziali

Ci limiteremo a considerare solo casi molto semplici, ragionando principalmente su alcuni esempi.

Esempi.

- $2^x > 32\ (= 2^5)$. Basta ricordare le proprietà delle potenze per concludere che la soluzione è $x > 5$ (attenzione: si noti che la base è maggiore di 1, per cui la funzione 2^x è crescente).
- $3^x < 5$. La strategia risolutiva più semplice consiste nel prendere il logaritmo naturale di ambo i membri e applicare le proprietà dei logaritmi: $\ln 3^x < \ln 5$, da cui $x \ln 3 < \ln 5$, e infine $x < \dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.
- $2^{x^2-1} > 8$. Si osserva che si può scrivere $2^{x^2-1} > 2^3$, da cui $x^2 - 1 > 3$, $x^2 - 4 > 0$ e infine $x < -2 \lor x > 2$.
- $\ln(2x^2+x) > 0$. Si deve intanto tenere conto che deve essere $2x^2+x > 0$ perché il logaritmo abbia senso, da cui $x < -1/2 \lor x > 0$. Dopodiché si prende l'esponenziale in base e di ambo i membri, ottenendo

  $$\mathrm{e}^{\ln(2x^2+x)} > \mathrm{e}^0, \Rightarrow 2x^2 - x > 1, \Rightarrow 2x^2 - x - 1 > 0, \Rightarrow x < -1 \lor x > 1/2\,.$$

  Tenendo conto delle condizioni di esistenza si trova infine che la disequazione è verificata per $x < -1 \lor x > 1/2$.
- $\ln(x-1) \ge \ln(-x+3)$. Si cominciano a scrivere le condizioni di esistenza: $x > 1 \land x < 3$, da cui $1 < x < 3$. Successivamente si prende l'esponenziale, in base e, di ambo i membri, ottenendo $x - 1 \ge -x + 3$, da cui $x \ge 2$. Tenendo conto delle condizioni di esistenza si trova $2 \le x < 3$.
- $2^x > -3$. Poiché il primo membro è sempre positivo, la disequazione risulta verificata per tutti i valori reali di x.

7 Cenni di trigonometria

7.1 Angoli e loro misura in radianti

Angolo è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi l'origine in comune; l'origine delle semirette si chiama *vertice* dell'angolo, le due semirette si chiamano *lati* dell'angolo.

Gli angoli si misurano in *gradi sessagesimali* o in *radianti*. Nel primo caso si assume come unità di misura l'angolo costituito dalla 360ª parte dell'angolo giro, che si indica con $1°$ e si legge un grado sessagesimale, e si verifica quante volte questa unità o i suoi sottomultipli stanno nell'angolo da misurare. Come è ben noto, per esempio l'angolo retto con questa unità misura $90°$.

Questo tipo di misura degli angoli, molto importante in tutte le applicazioni e molto usato, *non* va bene per gli scopi dell'analisi, dove si usa il metodo che ora indicheremo. Considerato un angolo $A\hat{O}B$, di vertice O, si tracci una circonferenza di centro O e raggio r; l'angolo stacca su questa circonferenza un arco di lunghezza a: si chiama *misura in radianti* dell'angolo $A\hat{O}B$ il rapporto tra la lunghezza dell'arco e la misura del raggio. Si noti che, essendo un rapporto di lunghezze, il numero che si ottiene è un *numero puro*, privo di dimensioni. Se, come di solito si fa, il raggio della circonferenza si sceglie uguale a 1, allora la misura dell'angolo coincide con la lunghezza dell'arco, tant'è che, a volte, si parla di archi anziché di angoli. Si veda la figura 7.1.

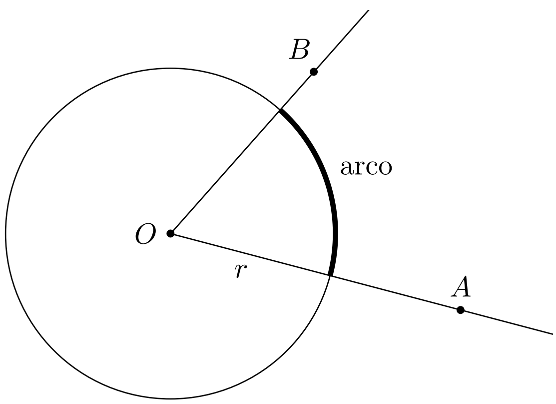


Figura 7.1 *Angoli e misura in radianti*

Gli angoli più importanti hanno, con questo sistema, le misure indicate nella tabella 7.1, dove abbiamo usato la scrittura $\alpha°$ per indicare la misura in gradi, e la scrittura α per indicare quella in radianti.

$\alpha°$	α
$0°$	0
$30°$	$\pi/6$
$45°$	$\pi/4$
$60°$	$\pi/3$
$90°$	$\pi/2$
$180°$	π
$270°$	$3\pi/2$
$360°$	2π

Tabella 7.1 *Angoli e loro misura in gradi e radianti*

Gli angoli, nelle applicazioni, sono sempre angoli orientati, nel senso che è stabilito quale dei due lati è da considerarsi come primo e quale come secondo. Agli angoli orientati in senso antiorario[(1)] viene attribuito un segno positivo, a quelli orientati in senso orario un segno negativo. Inoltre, siccome con la misura in radianti abbiamo in sostanza identificato gli angoli con archi di circonferenza, si può immaginare, per misurare l'angolo, di "percorrere" (in senso orario o antiorario) l'arco a partire dal punto di intersezione della circonferenza con il primo lato fino a raggiungere il punto di intersezione con il secondo lato; questa "identificazione" ci consente di immaginare di percorrere anche più volte (in un senso o nell'altro) la circonferenza, ottenendo angoli (in realtà sarebbe meglio dire "archi") anche più lunghi di 2π. Si parla anche di angoli generalizzati. Per esempio nella figura 7.2 possiamo immaginare di partire dal punto P per giungere al punto Q percorrendo l'arco indicato (lungo 1 nell'esempio, come il raggio della circonferenza) oppure, una volta giunto in Q, possiamo immaginare di proseguire facendo un altro giro e arrivando nuovamente in Q dopo aver percorso un arco lungo, questa volta, $2\pi + 1$ (si tenga conto che, essendo il raggio $r = 1$, la circonferenza misura proprio 2π) o, ancora facendo due giri e percorrendo un arco lungo $4\pi + 1$, ecc.

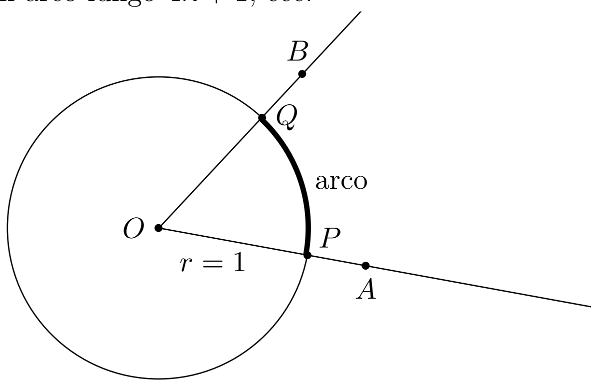


Figura 7.2 *Angoli generalizzati*

Se nel piano è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane, possiamo sempre pensare che il vertice dell'angolo stia nell'origine degli assi e che il primo lato coincida con il semiasse positivo delle x. La circonferenza, di raggio 1, che dobbiamo tracciare per misurare gli angoli ha allora centro nell'origine e quindi equazione $x^2 + y^2 = 1$: la chiameremo *circonferenza goniometrica*. Possiamo, come già osservato, identificare gli angoli con archi di questa circonferenza. Anzi, possiamo pensare che ad ogni numero reale risulti associato un ben definito punto della circonferenza, anche se, ovviamente, a numeri che differiscono per 2π o multipli corrisponderà

[1] Ci affidiamo all'intuizione: in realtà i concetti di "senso orario" o "senso antiorario" non sono facili da definire rigorosamente.

lo stesso punto: basta pensare di percorrere, a partire dal punto $(1, 0)$, lungo la circonferenza un arco lungo quanto il valore assoluto del numero, in senso orario o antiorario a seconda che il numero sia negativo o positivo. Quello che conta nelle applicazioni (in particolare all'economia) è proprio questo fatto: ad ogni numero reale corrisponde un ben preciso punto della circonferenza goniometrica.

7.2 Le funzioni seno e coseno

Il punto, P, della circonferenza goniometrica che risulta associato ad un numero reale x ha una ascissa e una ordinata: $P = (x_P, y_P)$. Questa ascissa e questa ordinata hanno grande importanza nelle applicazioni e si dà la seguente definizione.

Definizione 7.1. *L'ascissa del punto P si chiama* coseno *del numero x; l'ordinata del punto P si chiama* seno *del numero reale x e si scrive*

$$x_P = \cos(x), \quad y_P = \sin(x), \quad \text{o, semplicemente, } x_P = \cos x, \quad y_P = \sin x. \tag{7.1}$$

Con queste definizioni possiamo considerare due nuove funzioni reali di variabile reale, dette *funzione coseno* e *funzione seno*, con i seguenti grafici.

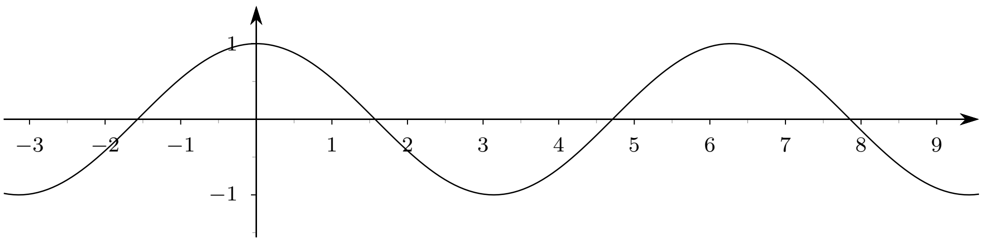


Figura 7.3 *La funzione coseno*

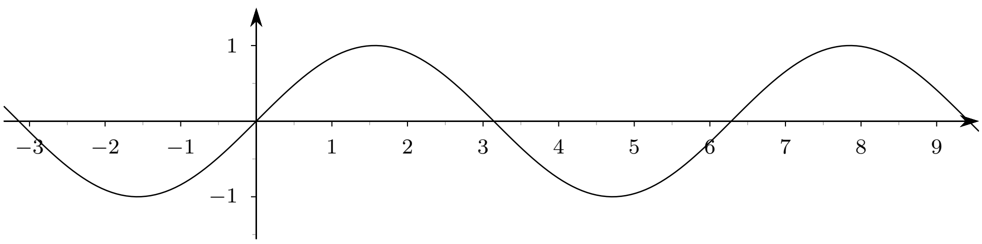


Figura 7.4 *La funzione seno*

Come mostrano le figure, e come risulta evidente dalla definizione, questi grafici si ripetono dopo un tratto lungo 2π (corrispondente alla lunghezza della circonferenza goniometrica). Si dice che le funzioni in questione sono *periodiche*, ed è proprio questa la cosa che conta, in quanto è alla base dello studio dei fenomeni che hanno un andamento oscillante. La figura 7.5 propone un esempio di una funzione ottenuta combinando opportunamente le funzioni seno e coseno: non è difficile scorgervi una tipico andamento delle quotazioni borsistiche.

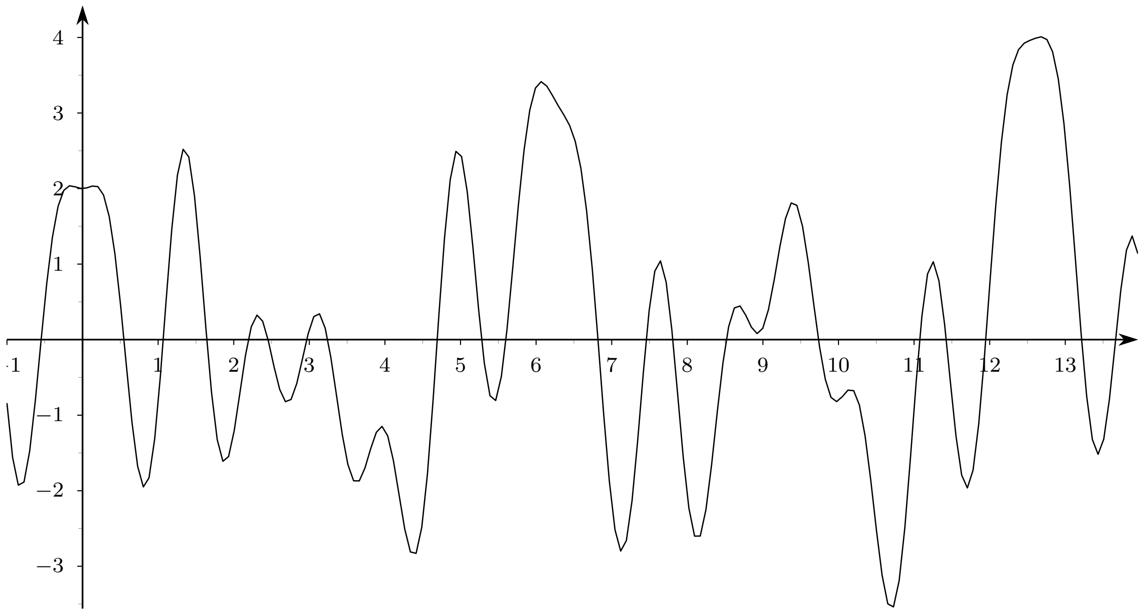


Figura 7.5 *Un esempio di "funzione oscillante"*

7.3 Formule di addizione e sottrazione

L'analisi del comportamento di una funzione od operazione rispetto alle operazioni fondamentali di somma e prodotto è un problema sempre di grande importanza. Ricordiamo, a mo' d'esempio, una situazione molto nota:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad (a\geq 0,\ b\geq 0)\,;\qquad \sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}\,,$$

risultati che si esprimono a parole nel modo seguente: la radice del prodotto di due numeri positivi è il prodotto delle radici dei due numeri; la radice della somma di due numeri *non è* la somma delle radici. Ritroveremo problemi simili con i limiti, le derivate, gli integrali.

La situazione è complessa con le funzioni seno e coseno, per le quali valgono le seguenti formule, dette di addizione e sottrazione.

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\quad \sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y\,. \tag{7.2}$$

Per esempio, sapendo che

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\,,$$

si deduce che

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\,.$$

Se, nelle formule di addizione, mettiamo $x=y$ otteniamo le seguenti formule, dette formule di duplicazione.

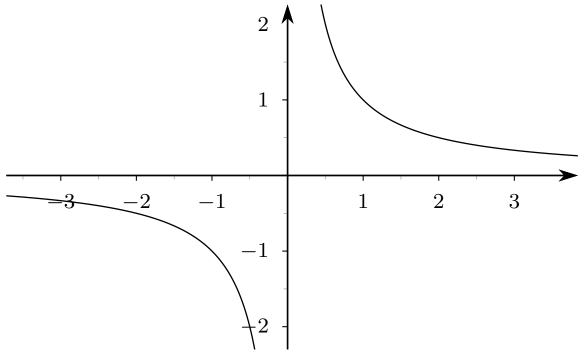
$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x\,,\quad \sin(2x)=2\sin x\cos x\,. \tag{7.3}$$

8 Primi grafici di funzioni

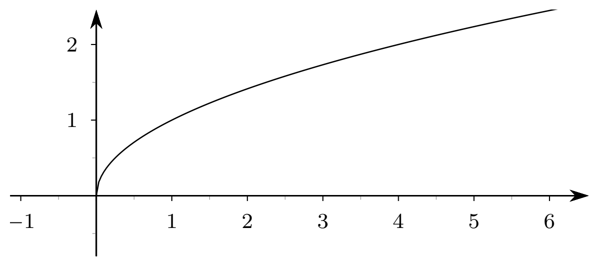
In questo capitolo presenteremo alcune tecniche di base per tracciare grafici di funzioni, a partire da altri grafici noti che abbiamo già incontrato nelle pagine precedenti e che qui riportiamo per comodità, e utilizzando la funzione valore assoluto.

8.1 Qualche grafico di base

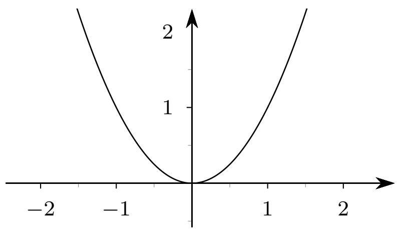
– $f(x) = \dfrac{1}{x}$



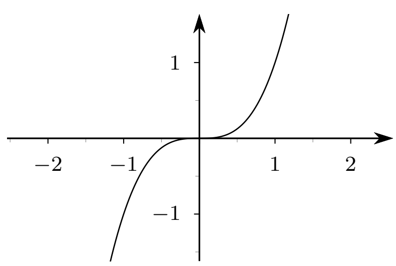
– $f(x) = \sqrt{x}$



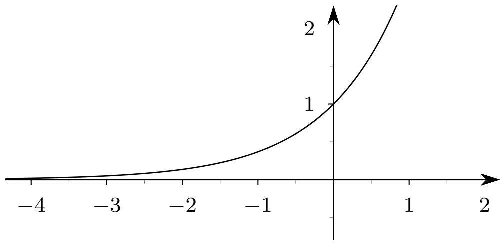
– $f(x) = x^2$



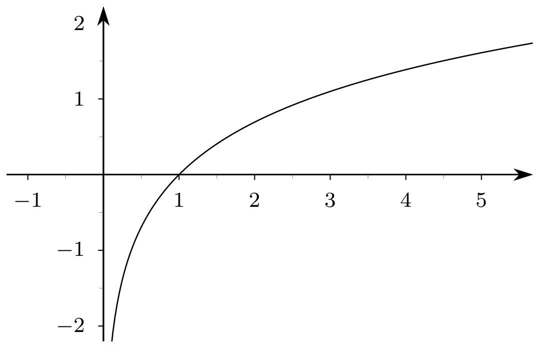
– $f(x) = x^3$



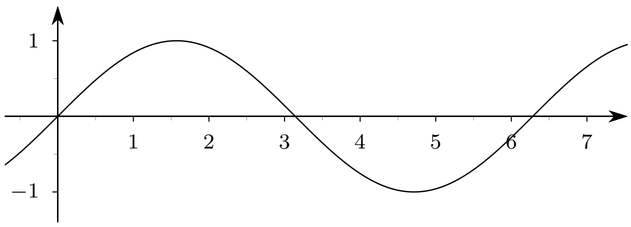
– $f(x) = \mathrm{e}^x$



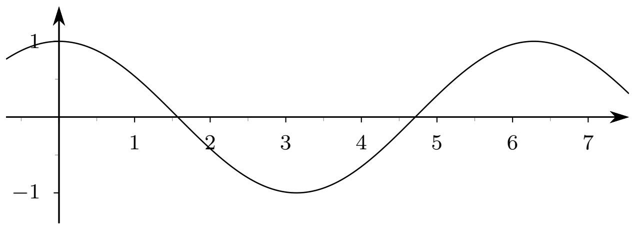
– $f(x) = \ln(x)$



– $f(x) = \sin(x)$



– $f(x) = \cos(x)$



8.2 Valore assoluto o modulo

Definizione 8.1. *Dato un numero reale x si chiama* valore assoluto*, o* modulo*, di x, e si indica con $|x|$, il numero positivo così definito:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases} . \tag{8.1}$$

Dal punto di vista grafico, se si rappresentano i numeri sulla retta cartesiana, il modulo di un numero rappresenta la sua *distanza* dall'origine.

La funzione valore assoluto, cioè $f(x) = |x|$ ha il grafico della figura 8.1.

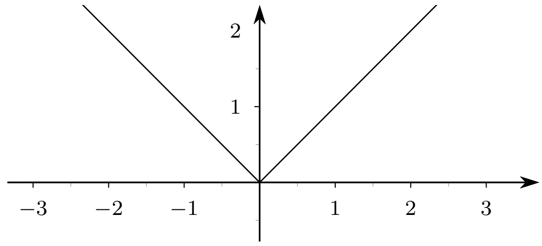


Figura 8.1 *La funzione valore assoluto*

Esempi.

- $|5| = 5$.
- $|-3| = 3$.
- $\left|1 - \sqrt{2}\right| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.
- $|-2| + \left|\sqrt{5} - 2\right| = 2 + (\sqrt{5} - 2) = \sqrt{5}$.

8.2.1 Proprietà del valore assoluto

Per la funzione valore assoluto valgono le seguenti proprietà.

- $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ se e soltanto se $x = 0$.
- $|x| = |-x|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- $|xy| = |x|\,|y|$.
- $|x - y| = |y - x|$.
- $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.
- $|x|^2 = x^2$.

8.2.2 Disequazioni con valore assoluto

Le disequazioni fondamentali sono le seguenti.

$$|x| > a, \quad |x| \geq a, \quad |x| < a, \quad |x| \leq a,$$

dove a è un numero reale. Se a è negativo le prime due disequazioni sono sempre verificate, la terza e la quarta non sono mai verificate, per la prima proprietà del modulo riportata sopra. Se invece $a \geq 0$ allora:

- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$;
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$;
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Esempi.

- $|x| > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 0$, ovvero $x \neq 0$.
- $|x| \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 0$, ovvero tutti gli x, come del resto risulta dalle proprietà del modulo.
- $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

La discussione grafica di queste disequazioni è particolarmente significativa e fornisce una semplice giustificazione del metodo di risoluzione proposto. Lo possiamo vedere nell'esempio seguente.

Esempio. $|x| > 2$.

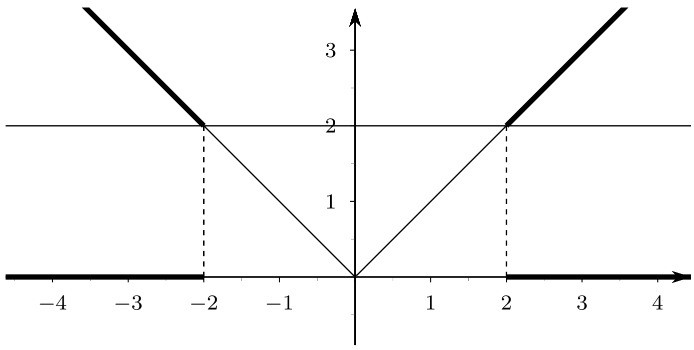


Figura 8.2 *La disequazione* $|x| > 2$

Per risolvere disequazioni di altro tipo bisognerà distinguere i vari casi che si possono presentare e poi unire tutti i risultati ottenuti. Per capire il metodo si possono vedere gli esempi che seguono.

Esempi.

- $|x| + 2x - 1 > 0$. Poiché $|x|$ può valere $-x$ o x, distingueremo due casi.
  1. $\begin{cases} x < 0 \\ -x + 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$;
  2. $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 1/3 \end{cases}$.

  Il primo sistema non ha soluzioni, il secondo è verificato per $x > 1/3$, dunque le soluzioni della disequazione proposta sono: $x > 1/3$.
- $|x - 1| + 3x - 5 < 0$. Poiché $|x - 1|$ può valere $x - 1$ oppure $-(x - 1) = -x + 1$, distingueremo sempre due casi.
  1. $\begin{cases} x < 1 \\ -x + 1 + 3x - 5 < 0 \end{cases}$.
  2. $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 + 3x - 5 < 0 \end{cases}$.

  Il primo sistema è verificato per $x < 1$, il secondo per $1 \leq x < 3/2$, dunque le soluzioni della disequazione proposta sono: $x < 3/2$.

8.3 Grafici derivati

A partire da un grafico noto si possono costruire con semplici tecniche numerosi altri grafici: considereremo qui alcune di queste tecniche, facendo riferimento al generico grafico riportato nella figura 8.3.

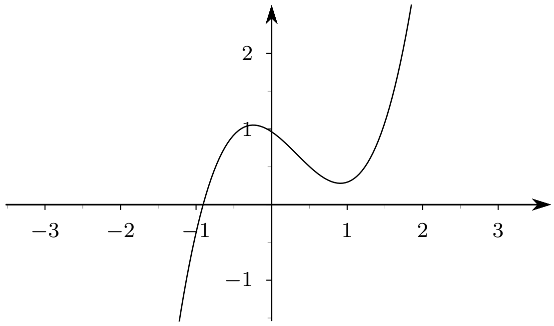
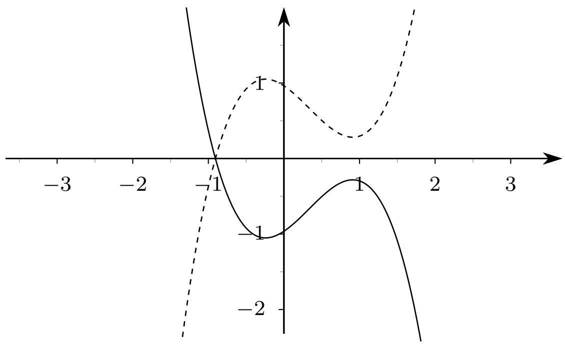


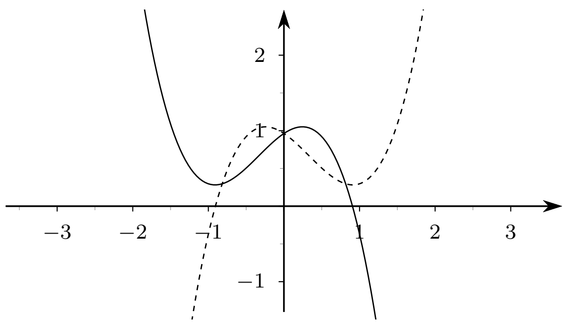
Figura 8.3 *Grafico di una generica funzione* $f(x)$

In tutti i grafici derivati che seguono abbiamo riportato in tratteggio anche il grafico originale, per un utile confronto.

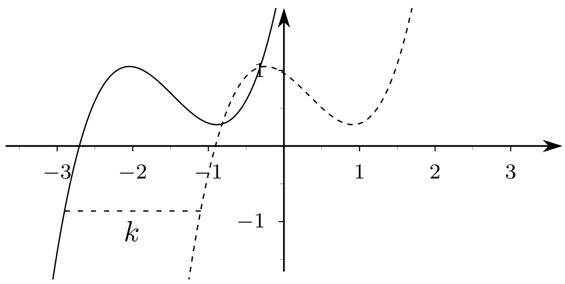
– Simmetria rispetto all'asse delle x: cambiare $f(x)$ in $-f(x)$.



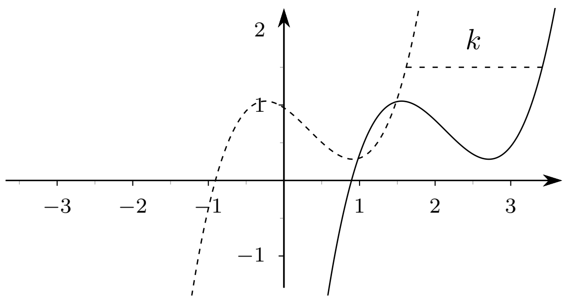
– Simmetria rispetto all'asse delle y: cambiare $f(x)$ in $f(-x)$.



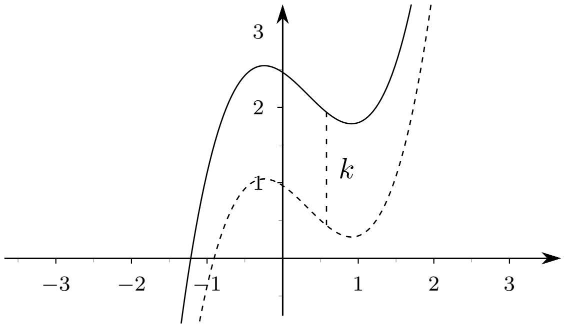
– Traslazione di k (> 0) unità verso sinistra: cambiare $f(x)$ in $f(x+k)$.



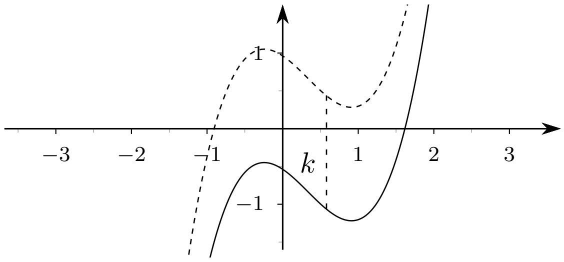
– Traslazione di k (> 0) unità verso destra: cambiare $f(x)$ in $f(x-k)$.



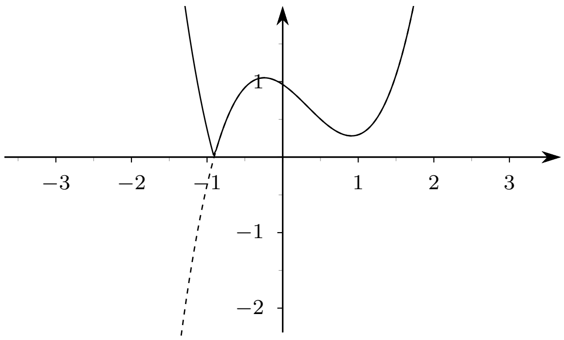
– Traslazione di k (> 0) unità verso l'alto: cambiare $f(x)$ in $f(x) + k$.



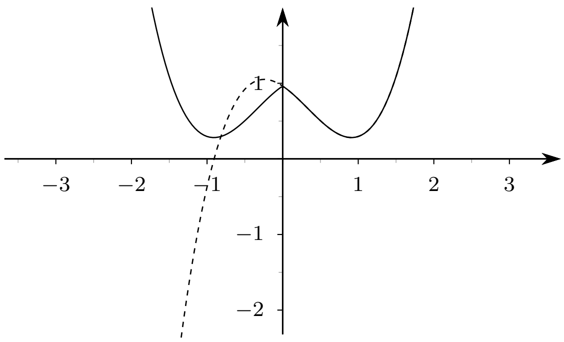
– Traslazione di k (> 0) unità verso il basso: cambiare $f(x)$ in $f(x) - k$.



– Per cambiare $f(x)$ in $|f(x)|$ si lascia inalterata la parte di grafico sopra l'asse delle x, mentre la parte di grafico sotto l'asse delle x viene "ribaltata" rispetto all'asse delle x stesso.



– Per cambiare $f(x)$ in $f(|x|)$ si lascia inalterata la parte di grafico a destra dell'asse y, mentre la parte di grafico a sinistra dell'asse y si ottiene facendo la simmetrica della parte destra rispetto all'asse y stesso.



Naturalmente le tecniche viste possono essere usate in combinazione tra loro, come vedremo su alcuni esempi.

Esempi.

– Tracciare il grafico di $f(x) = -\sqrt{-x} + 1$.
Si comincia col tracciare il grafico di $g(x) = \sqrt{x}$ (vedi la relativa figura nella pagina 63). Poi si traccia il grafico di $\sqrt{-x}$ (simmetria rispetto all'asse delle y) e successivamente quello di $-\sqrt{-x}$ (ulteriore simmetria, questa volta rispetto all'asse delle x. Infine si traccia il grafico di $-\sqrt{-x} + 1$, operando una traslazione verso l'alto di una unità. I tre passaggi sono riportati nelle figure 8.4, 8.5 e 8.6.
Si noti che si poteva anche scrivere $f(x) = -(\sqrt{-x} - 1)$. Si poteva dunque procedere a tracciare prima $\sqrt{x}$, poi $\sqrt{-x}$, successivamente $\sqrt{-x} - 1$, e infine $-(\sqrt{-x} - 1)$, ottenendo lo stesso risultato (come deve essere!).

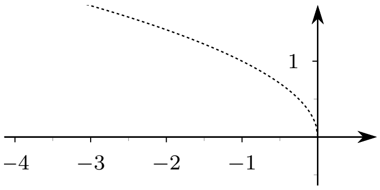


Figura 8.4 *Grafico di* $\sqrt{-x}$

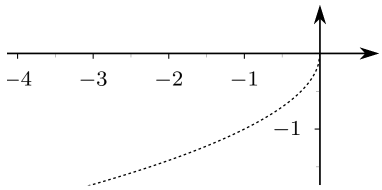


Figura 8.5 *Grafico di* $-\sqrt{-x}$

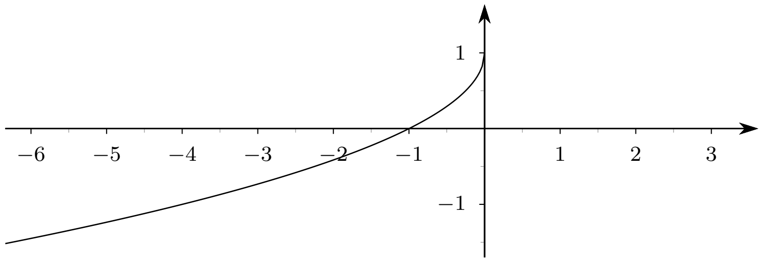


Figura 8.6 *Grafico di* $-\sqrt{-x}+1$

– Tracciare il grafico di $f(x) = -\sqrt{-x-1}$.
È indispensabile riscrivere la funzione come $f(x) = \sqrt{-(x+1)}$, per poter ricondurre questo caso a quelli trattati (si presti particolare attenzione a questo fatto!). La successione questa volta è $\sqrt{x}$ (già noto), $\sqrt{-x}$ (anche questo già considerato sopra nella figura 8.4), e infine $\sqrt{-(x+1)}$, il cui grafico è riportato nella figura 8.7.

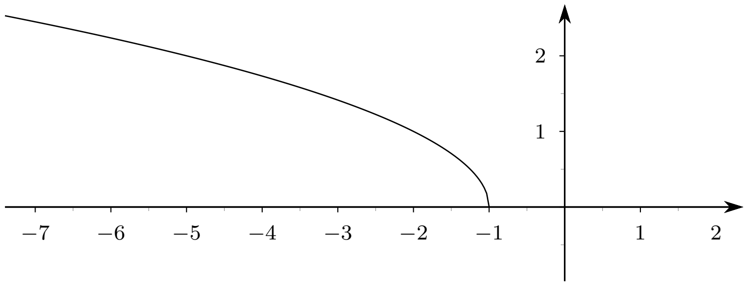


Figura 8.7 *La funzione* $\sqrt{-x-1}$

– Tracciare il grafico di $f(x) = \ln(|x-1|)$.
La successione richiesta è: $\ln x$ (già noto), $\ln |x|$ (a sinistra dell'asse y si prende il simmetrico della parte destra), e infine $\ln(|x-1|)$ (traslazione verso destra di una unità). I due passaggi finali sono riportati nellea figure 8.8 e 8.9.

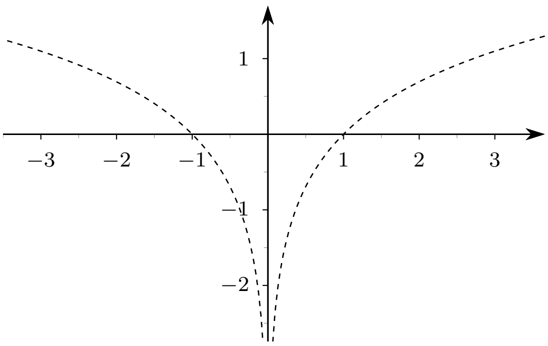


Figura 8.8 *Grafico di* $\ln|x|$

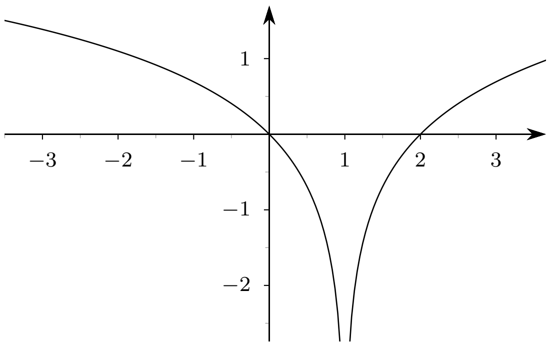


Figura 8.9 *Grafico di* $\ln|x-1|$

– Tracciare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$.
La successione di passaggi richiesta è: $\dfrac{1}{x}$ (già noto), $\dfrac{1}{x-1}$ (traslazione verso destra di 1 unità), e infine $\dfrac{1}{|x|-1}$ (sostituzione della parte a sinistra dell'asse y con la simmetrica della parte destra. Le figure 8.10 e 8.11 riportano i due ultimi passaggi. In esse abbiamo tracciato anche le rette $x = 1$ e $x = -1$, che costituiscono due *asintoti verticali*, secondo una definizione che daremo successivamente.

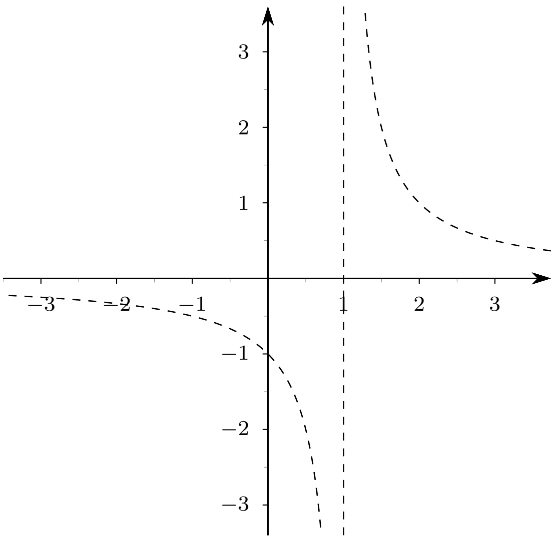


Figura 8.10 *Grafico di* $^1/_{x-1}$

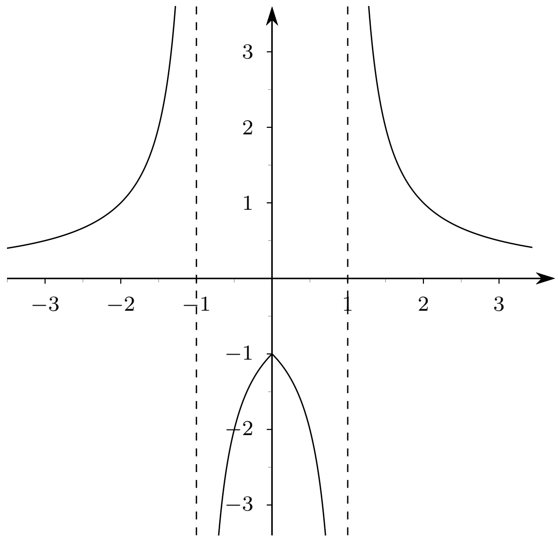


Figura 8.11 *Grafico di* $^1/_{|x|-1}$

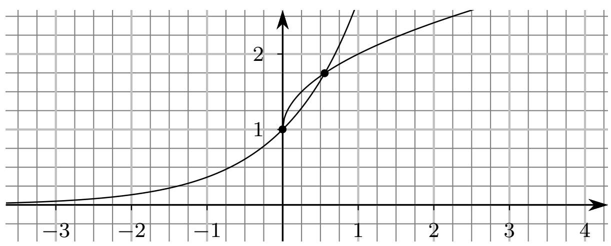
Si noti che, una volta tracciati i grafici con le tecniche viste, è possibile dedurre facilmente dai grafici stessi il dominio e l'insieme immagine della funzione.

Utilizzando i grafici di funzioni si possono anche risolvere, per via grafica, sistemi di equazioni in due incognite più complessi di quelli trattati nel paragrafo 4.7 del capitolo 4, anche se di solito si può agevolmente trovare il numero di soluzioni, mentre il valore esplicito delle soluzioni può essere trovato solo in via approssimata.

Esempio. Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} + 1 \\ y = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

si possono tracciare i grafici delle due funzioni e poi valutare il numero e la posizione dei loro punti di intersezione (valutazione più facile se si ha una carta finemente quadrettata).



La figura mostra che ci sono due intersezioni, una in corrispondenza di $x = 0$ (cosa abbastanza facile da verificare), la seconda circa in corrispondenza di $x = 0.5$. I corrispondenti valori di y sono 1 e circa 1.8. Un calcolo più preciso, fatto con opportuni software, fornisce $x = 0.557832337000022$ e $y = 1.746881742312678$.

Con le stesse tecniche si possono anche risolvere sistemi di disequazioni più complessi di quelli trattati nel paragrafo 5.3.2 del capitolo 5.

8.4 Esercizi

Esercizio 8.1. *Si tracci il grafico approssimativo delle seguenti funzioni, esplicitandone il dominio e l'insieme immagine.*

1. 2^{x-1};
2. $-\ln(1-x)$;
3. $\ln(x+1)+2$;
4. $-\ln(-x)-1$;
5. $\mathrm{e}^{1-x}-1$;
6. $-(3^x+1)$;
7. $-(\ln(-x+1)-1)$;
8. $\ln(x-2)+3$;
9. $-\ln(-x)+1$;
10. -2^{-x};
11. -2^{-x};
12. -3^{x-1};
13. e^{-x-1};
14. $\sqrt{x-1}+1$;
15. $-\sqrt{-x}+1$;
16. $\sqrt{1-x}+2$;
17. $-(\sqrt{x+2}+1)$;
18. $-x^2+2$;
19. $-(x-2)^2+3$;
20. $(1-x)^3+2$;
21. $-(1-x)^2+2$;
22. $-(x+1)^2-2$;
23. $-x^3+3$.

Esercizio 8.2. *Determinare il numero delle soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni.*

1. $\begin{cases} y = x^3+1 \\ y = 2-(1-x)^2 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} y = 1+(2-x)^3 \\ y = \sqrt{x+1}+2 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} y = \ln(x-1)+2 \\ y = 1-\sqrt{x} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} y = \mathrm{e}^x \\ y = -\sqrt{x+2} + 3 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{-x-1} \\ y = \sqrt{x} + 3 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} y = \ln(x+1) \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$;

7. $\begin{cases} y = -\ln(x+1) \\ y = -\dfrac{1}{10}\,x \end{cases}$;

8. $\begin{cases} y = \mathrm{e}^{-x} + 3 \\ y = \ln(x-10) \end{cases}$.

Esercizio 8.3. *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.*

1. $\begin{cases} y + 3^{-x} - 2 > 0 \\ x^2 + y^2 < 4 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} y - \ln(1-x) + 1 > 0 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$.

Esercizio 8.4. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $|x| < 2$;
2. $|x+1| > 3$;
3. $|x^2 - 1| < x$;
4. $|\mathrm{e}^x - 1| > 2$;
5. $|\log_2(x) - 1| < 2$;
6. $|x-1| < 1$.

Esercizio 8.5. *Data la funzione $f(x) = -\sqrt{-x+1}$, determinarne l'insieme immagine e, successivamente, l'immagine dei seguenti insiemi.*

1. $A = [-3, 2]$;
2. $B =]-2, -1[$;
3. $C = [0, 1]$.

9 Ancora insiemi e funzioni

9.1 Insiemi limitati e illimitati di numeri reali

Attenzione: in tutto questo paragrafo gli insiemi considerati sono sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 9.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Un numero reale x si dice un* maggiorante *di A se*

$$x \geq a,\ \forall a \in A. \tag{9.1}$$

Un numero reale y si dice un minorante *di A se*

$$y \leq a,\ \forall a \in A. \tag{9.2}$$

Esempi.
- Sia $A =]-2, 8]$. Allora -5, $-\pi$, -2 sono minoranti; 8, 10, $\sqrt{89}$ sono maggioranti.
- Sia $A = \mathbb{N}$. Allora non esistono maggioranti, mentre tutti i numeri reali minori o ugauli a zero sono minoranti.
- Sia $A = \mathbb{Z}$. Allora non esistono né maggioranti, né minoranti.

Definizione 9.2. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. A dice* limitato superiormente *(o anche* limitato a destra*) se ha almeno un maggiorante. A dice* limitato inferiormente *(o anche* limitato a sinistra*) se ha almeno un minorante. Un insieme che sia limitato sia superiormente che inferiormente si dice* limitato*. Un insieme che non sia limitato superiormente o inferiormente si dice* illimitato superiormente *o* illimitato inferiormente*. Un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente si dice* illimitato*.*

Esempi.
- $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente, ma non superiormente.
- $\mathbb{Z}$ non è limitato né inferiormente né superiormente.
- $A =]2, 6[$ è limitato (sia superiormente che inferiormente).

Definizione 9.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Un numero $M \in A$ si dice il* massimo *di A se $M \geq a$, $\forall a \in A$; un numero m si dice il* minimo *di A se $m \leq a$, $\forall a \in A$.*

Si noti che abbiamo detto "il" massimo e "il" minimo perché, come si può dimostrare se il massimo c'è, è unico; analogamente per il minimo. Si tenga ben presente che il massimo e il minimo, se ci sono, appartengono all'insieme.

Esempi.
- Se $A = [0, 1]$, 1 è il massimo, mentre 0 è il minimo di A. Si scrive anche $1 = \max(A)$, $0 = \min(A)$.
- Se $A =]0, 1[$, A non ha né massimo né minimo.
- Se $A =]0, 1]$, $1 = \max(A)$, mentre A non ha minimo.
- $\min(\mathbb{N}) = 0$, mentre $\mathbb{N}$ non ha massimo.
- $\mathbb{Z}$ non ha né massimo né minimo.

Come è ovvio dalla definizione, e come mostrano gli esempi, un insieme illimitato superiormente non può avere massimo, uno illimitato inferiormente non può avere minimo, ma anche insiemi limitati possono non avere né massimo né minimo. Per ovviare a questo inconveniente si introducono i concetti di estremo superiore e inferiore che, in un certo senso, estendono quelli di massimo e minimo. L'introduzione di questi concetti è resa possibile dal fatto che si dimostra che se un insieme è limitato superiormente allora l'insieme dei suoi maggioranti ha sempre un minimo, se un insieme è limitato inferiormente allora l'insieme dei suoi minoranti ha sempre un massimo.

Definizione 9.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Allora il minimo dei maggioranti di A si chiama* estremo superiore *di A e si indica con* $\sup(A)$. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme inferiormente limitato. Allora il massimo dei minoranti di A si chiama* estremo inferiore *di A e si indica con* $\inf(A)$.

Se A è superiormente illimitato si pone, per definizione, $\sup(A) = +\infty$*; se A è inferiormente illimitato si pone, per definizione,* $\inf(A) = -\infty$.

Possiamo quindi dire che ogni insieme di numeri reali ha sempre un estremo superiore (eventualmente $+\infty$) e un estremo inferiore (eventualmente $-\infty$). Per distinguere gli insiemi limitati dagli illimitati, per i primi parleremo di estremo superiore, oppure inferiore, *finiti*.

Esempi.

- $+\infty = \sup(\mathbb{N})$, $0 = \inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N})$.
- $+\infty = \sup(\mathbb{Z})$, $-\infty = \inf(\mathbb{Z})$.
- $1 = \sup(]0,1[)$, $0 = \inf(]0,1[)$.
- $1 = \sup([0,1]) = \max([0,1])$, $0 = \inf([0,1]) = \min([0,1])$.

Come mostrano gli esempi, e come è facile mostrare, se un insieme ha massimo, il massimo è anche estremo superiore, se un insieme ha minimo, il minimo è anche estremo inferiore.

Gli estremi superiore e inferiore, se finiti, godono delle due proprietà caratteristiche[1] elencate nel teorema che segue (invitando i più volenterosi a dimostrarlo).

Teorema 9.5. *Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora* $\sup(A)$ *è caratterizzato dalle seguenti due proprietà.*

1. $\sup(A) \geq a$, $\forall a \in A$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a > \sup(A) - \varepsilon$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme inferiormente limitato, allora $\inf(A)$ *è caratterizzato dalle seguenti due proprietà.*

1. $\inf(A) \leq a$, $\forall a \in A$;
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $a < \inf(A) + \varepsilon$.

9.2 Insiemi limitati e illimitati nel piano

Anche per i sottoinsiemi del piano si può introdurre il concetto di insieme limitato e illimitato, ma la cosa è diversa dal caso degli insiemi sulla retta, perché sulla retta reale esiste un ordine (cioè nei numeri reali si può parlare di maggiore e di minore), mentre nel piano non esiste alcun ordine.

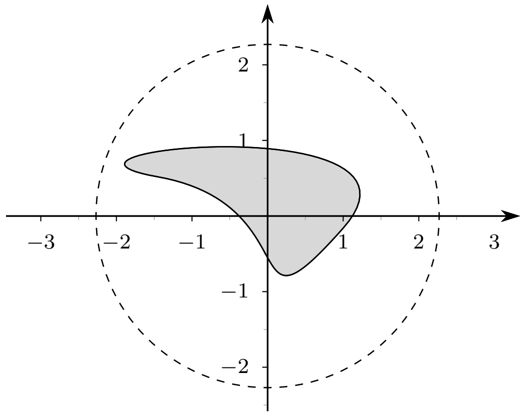
Definizione 9.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme del piano. A si dice* limitato *se esiste un cerchio di centro l'origine e raggio r che lo contiene, altrimenti si dice* illimitato.

[1] Si dice proprietà caratteristiche perché sono condizioni necessarie e sufficienti perché un numero sia il sup di insieme.

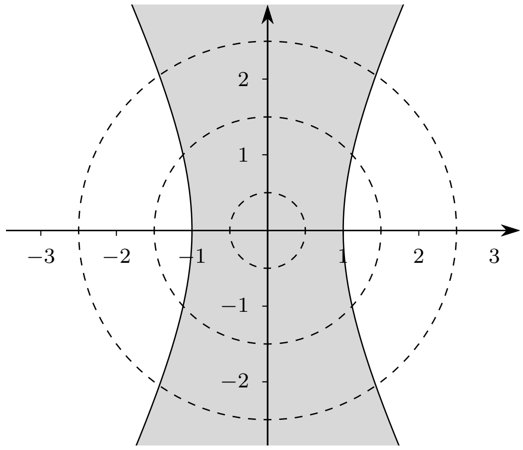
Come si vede si parla solo di insieme limitato o illimitato, non ha alcun senso il concetto di limitatezza superiore o inferiore, così come non hanno senso i concetti di maggiorante, minorante, massimo, minimo, estremo superiore o inferiore.

Esempi.

– Un insieme limitato del piano e il cerchio che lo contiene



– Un insieme illimitato del piano: nessun cerchio lo può contenere.



9.3 Un po' di topologia

Nel seguito avremo bisogno di utilizzare concetti simili per sottoinsiemi della retta e del piano. Per uniformare le definizioni conviene dare la seguente definizione.

Definizione 9.7. *Dato un punto P sulla retta (numero reale) o sul piano (coppia di numeri reali), diremo* palla *di centro P e raggio ε l'insieme di tutti i punti che hanno da P distanza minore di ε; diremo invece* palla chiusa *di centro P e raggio ε l'insieme di tutti i punti cha hanno da P distanza minore o uguale a ε.*

È evidente che sulla retta una palla è un intervallo (aperto o chiuso a seconda dei casi) che ha un numero c come centro e ε come semiampiezza; nel piano una palla è un cerchio di centro P e raggio ε, comprensivo o no della circonferenza di bordo, a seconda dei casi.

Definizione 9.8 (Intorno)**.** *Dato un numero punto P sulla retta o nel piano, si chiama* intorno *di P, e si indica con $I(P)$, o con I_P, una qualunque palla aperta a cui P appartiene.*

Ci interesseranno in maniera particolare gli *intorni circolari*, che sono gli intorni costituiti dalle palle aperte che hanno P al centro: per questi intorni useremo, di solito, il simbolo $I(P, \varepsilon)$.

Definizione 9.9 (Punto interno)**.** *Dato un insieme A, un punto P si dice* interno *ad A se esiste almeno un intorno di P tutto contenuto in A. È ovvio che un punto interno appartiene sempre all'insieme.*

Definizione 9.10 (Punto esterno)**.** *Dato un insieme A, un punto P si dice* esterno *ad A se esso è interno al complementare di A, cioè se esiste almeno un intorno di P tutto contenuto nel complementare di A. È ovvio che un punto esterno non può appartenere all'insieme.*

Definizione 9.11 (Punto isolato)**.** *Dato un insieme A, un punto P di A si dice* isolato *in A se esiste un intorno $I(P)$ di P tale che $I(P) \cap A = \{P\}$, cioè se esiste un intorno di P nel quale P è l'unico punto di A. È ovvio che un punto isolato appartiene sempre all'insieme.*

Definizione 9.12 (Punto di frontiera)**.** *Dato un insieme A, un punto P si dice* di frontiera *per A se per ogni intorno $I(P)$ di P si ha $I(P) \cap A \neq \emptyset$ e contemporaneamente $I(P) \cap \complement A \neq \emptyset$, cioè se in ogni intorno di P cade almeno un punto di A e un punto fuori da A. Un punto di frontiera può appartenere oppure no all'insieme.*

Definizione 9.13 (Punto di accumulazione)**.** *Dato un insieme A, un punto P si dice* di accumulazione *per A se in ogni intorno $I(P)$ di P cadono infiniti punti di A, cioè se l'insieme $I(P) \cap A$ contiene infiniti punti. Un punto di accumulazione può appartenere oppure no all'insieme.*

Di seguito alcuni esempi, prima con sottoinsiemi della retta, poi con sottoinsiemi del piano.

Esempi.

In tutti questi esempi sulla retta l'insieme A è così definito: $A = [0, 2[\cup \{5\}$.

- 1 è un punto interno, perché l'intorno $I(1) =]1/2\,, 3/2[$ è tutto contenuto in A. L'insieme di tutti i punti interni è $]0, 2[$.
- 7 è un punto esterno, perché l'intorno $I(5) =]6, 8[$ è tutto contenuto nel complementare di A. L'insieme di tutti i punti esterni è $]-\infty, [0 \cup]2, 5[\cup [5, +\infty[$.
- 5 è un punto isolato, anzi è l'unico punto isolato, perché l'intorno $I(5) =]4, 6[$, se intersecato con A, dà solo il punto 5 stesso.
- 0 è un punto di frontiera perché qualuqnue intorno di 0 contiene punti alla sua sinistra (che non stanno in A) e punti alla sua destra (e quelli immediatamente a destra di 0 stanno in A). Anche 2 è un punto di frontiera, per motivi simili. Si noti che 0 sta in A, mentre 2 non sta in A. Anche 5 è un punto di frontiera perché in ogni intorno di 5 cade un punto di A (5 stesso!) e punti del complementare di A (quelli immediatamente a sinistra e a destra di 5). 0, 2, 5 sono gli unici punti di frontiera.
- 1 è un punto di accumulazione, perché l'intorno $I(1) =]1/2\,, 3/2[$ contiene infiniti punti di A (anzi è costituito solo da punti di A). Anche 2 è punto di accumulazione, perché qualunque suo intorno contiene infiniti punti di A (quelli immediatamente a sinistra di 2 stesso). L'insieme di tutti i punti di accumulazione è $[0, 2]$.

Si noti che essere *interno* non è la stesso cosa di *appartenere*, essere *esterno* non è la stessa cosa di *non appartenere*. Valgono poi alcune proprietà che si possono desumere dagli esempi e che i più volenterosi sono invitati a provare.

- Un punto interno è sempre di accumulazione;
- un punto interno non può essere né isolato né di frontiera;
- un punto isolato è sempre di frontiera;
- un punto isolato non può essere di accumulazione, anzi, in un certo senso punto isolato è il contrario di punto di accumulazione.

Esempi.

In tutti questi esempi sul piano, l'insieme A è costituito dall'unione del cerchio di centro l'origine e raggio 1, comprensivo della semicirconferenza di bordo contenuta nel semipiano $y \geq 0$, del punto $P = (1, 1)$ e dei punti della retta r di equazione $x = 2$. Lasciamo al lettore, come utile esercizio, il compito di provare quanto affermato negli esempi.

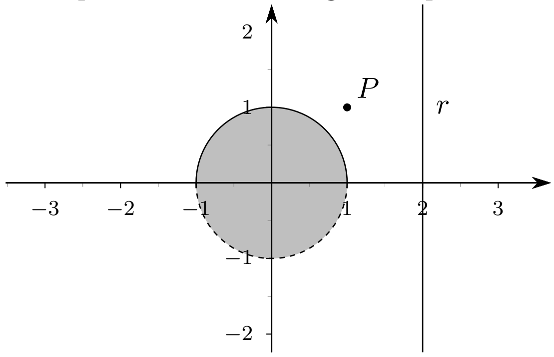


Figura 9.1 *Un insieme del piano*

- L'insieme dei punti interni è costituito dall'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1 (esclusa dunque la circonferenza di bordo).
- L'insieme dei punti esterni è costituito dai punti che stanno fuori dal cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1, con l'esclusione del punto P e dei punti della retta r.
- P è l'unico punto isolato.
- L'insieme dei punti di frontiera è costituito dai punti della circonferenza (non cerchio!) di centro l'origine ne raggio 1, dal punto P e dai punti della retta r.
- L'insieme dei punti di accumulazione è costituito dall'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1 e dai punti della retta r.
- L'insieme A e un insieme illimitato del piano.

Definizione 9.14 (Insieme chiuso)**.** *Un insieme A si dice* chiuso *se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Definizione 9.15 (Insieme aperto)**.** *Un insieme A si dice* aperto *se il suo complementare è chiuso.*

Esempi.

- Le palle aperte sono insiemi aperti, le palle chiuse sono insiemi chiusi. In particolare gli intervalli aperti sono insiemi aperti, gli intervalli chiusi sono insiemi chiusi.
- L'insieme vuoto (sia come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che di $\mathbb{R}^2$) è sia aperto che chiuso. Analogamente tutto $\mathbb{R}$ (sulla retta) o tutto $\mathbb{R}^2$ (sul piano) sono aperti e chiusi. Questi sono gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi.
- Un intervallo del tipo $[a, b[$, oppure $]a, b]$ non è né aperto né chiuso.
- L'insieme del piano tracciato nella figura 9.1 non è né aperto né chiuso. Se a questo insieme aggiungo la semicirconferenza inferiore, diventa un insieme chiuso.
- L'insieme $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ è chiuso. Analogamente l'insieme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Seguono alcune proprietà la cui dimostrazione, come al solito, è lasciata per esercizio ai più volenterosi.

- Un insieme è aperto se e solo se tutti i suoi punti sono interni.
- Un insieme è chiuso se e solo contiene tutti i suoi punti di frontiera.
- Un insieme che abbia punti isolati non può essere aperto.
- Un insieme che abbia *solo* punti isolati è chiuso.
- Se A e B sono chiusi, anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono chiusi.
- Se A e B sono aperti, anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono aperti. Se però si passa ad unioni o intersezioni di infiniti insiemi ci possono essere delle sorprese. Senza entrare troppo nei

dettagli, consideriamo per esempio gli insiemi

$$]-1,1[,\ \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[,\ \left]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right[,\ \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ \dots,$$

che sono tutti aperti. Facendo la loro intersezione resta solo il punto 0, che è un insieme chiuso, anzi un insieme costituito solo da un punto isolato.

9.4 Insiemi connessi. Insiemi convessi

Definizione 9.16 (Insieme connesso)**.** *Un insieme A (della retta o del piano) si dice* connesso *quando presi comunque due suoi punti P e Q esiste un arco di linea continua che li connette e tutto contenuto in A.*[2]

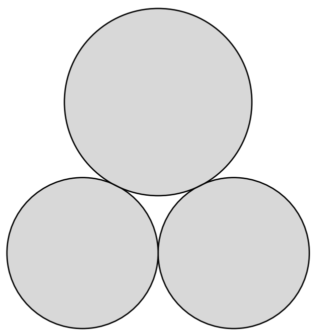
In $\mathbb{R}$ sono connessi tutti e soli gli intervalli, di qualunque tipo. In $\mathbb{R}^2$ le palle (aperte o chiuse) sono sempre connesse, ma ci sono anche insiemi connessi più complessi, come per esempio l'insieme costituito dai punti del primo e terzo quadrante, inclusi gli assi cartesiani.

Definizione 9.17 (Insieme convesso)**.** *Un insieme A (della retta o del piano) si dice* convesso *quando presi comunque due suoi punti P e Q esiste un segmento che li connette e tutto contenuto in A.*

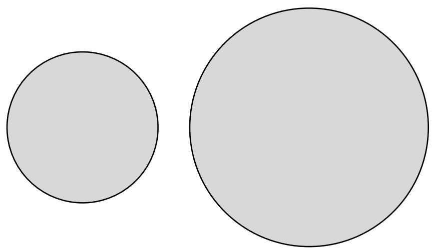
È evidente che un insieme convesso è sempre connesso, ma, almeno nel piano, il viceversa non è vero: ci sono insiemi connessi ma non convessi, come vedremo sugli esempi. In $\mathbb{R}$, invece, i due concetti coincidono: gli unici insiemi connessi o convessi sono gli intervalli, e la cosa è quasi ovvia.

Esempi.

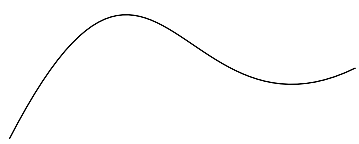
- Un insieme connesso ma non convesso (le tre circonferenze bordo sono comprese nell'insieme).



- Un insieme non connesso (e quindi nemmeno convesso).

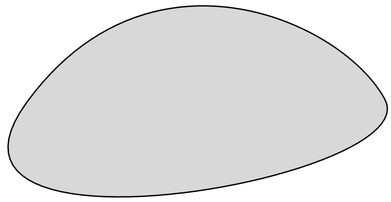


- Un insieme connesso ma non convesso (una curva continua).

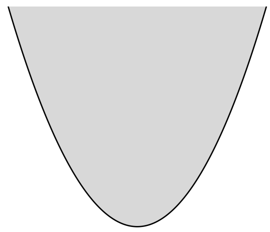


[2] In realtà la definizione che qui abbiamo dato è quella di *connessione per archi*, mentre la definizione di connessione sarebbe più complessa. Per gli scopi del nostro corso, comunque, questa definizione "semplificata" è più che sufficiente.

– Un insieme connesso e convesso.



– Un insieme connesso e convesso (si intende che l'insieme prosegue fino all'infinito, comprendendo tutta la parte interna alla parabola rappresentata).



9.5 Operazioni sulle funzioni

In questo paragrafo il dominio delle funzioni è un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$, mentre il codominio è sempre $\mathbb{R}$: diremo brevemente funzioni reali di una o due variabili reali, ma spesso parleremo semplicemente di funzioni di una o due variabili, senza ulteriori precisazioni.

Date due funzioni f e g, esse si possono sempre sommare, sottrarre e moltiplicare; se la seconda è sempre diversa da zero, si possono anche dividere.

Esempi.

- Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2 + 1$, entrambe con dominio $\mathbb{R}$, la funzione somma di f e g è $|x| + x^2 + 1$, la differenza è $|x| - x^2 - 1$, il prodotto $|x|\,(x^2 + 1)$, il quoziente $|x|/(x^2 + 1)$.
- Se $f(x) = \mathrm{e}^x$ e $g(x) = x^2$, si può sempre fare la somma e il prodotto; per poter fare f/g si deve "restringere" il dominio, in modo da escludere il valore 0, che annullerebbe il denominatore.

Con opportune condizioni due funzioni f e g si possono anche *comporre*, cioè farle agire in successione: il risultato (in termini informatici diremmo l'output) della prima lo usiamo come input per la seconda, ottenendo alla fine il risultato voluto. Se per esempio la prima funzione è $f(x) = x^2$ e la seconda è $g(x) = \mathrm{e}^x$, allora la composta di f (prima funzione) e g (seconda funzione) è e^{x^2}. La funzione composta si indica con $g(f(x))$; si presti particolare attenzione che la prima funzione è la più interna nella scrittura, la seconda è la più esterna.

Per poter fare la composizione si deve naturalmente richiedere che l'insieme immagine della prima sia contenuto nel dominio della seconda, visto che l'output della prima deve essere usato come input per la seconda. Se per esempio la prima funzione è$f(x) = x^2 - 1$ e la seconda è $g(x) = \sqrt{x}$, non si può fare a cuor leggero la composta, perché se, per esempio, $x = 0$, la prima dà come risultato -1 che non può essere "dato in pasto" alla seconda funzione. In casi come questo, comunque, basterà restringere il dominio della prima funzione: nell'esempio basterà limitarsi a considerare solo $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

9.6 Funzioni elementari e funzioni definite "a pezzi"

Si chiamano *elementari* le funzioni (definite in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$) in cui sulla variabile, o sulle due variabili, si eseguono solo operazioni di somma, sottrazione, prodotto, quoziente, o dove sono coinvolte le funzioni potenza, radice, logaritmo, esponenziale, seno e coseno. Si tratta praticamente di tutte le funzioni con cui avremo a che fare nel nostro corso.

Il modo più semplice che abbiamo a disposizione (e di cui faremo largo uso) per costruire funzioni non elementari è quello della definizione "a pezzi" (*piecewise definition* nei software più comuni). Si tratta sostanzialmente di “unire” due funzioni (o meglio due grafici di funzioni) definite, su due sottoinsiemi diversi (o ristrette a due insiemi diversi) di $\mathbb{R}$ (più raramente per noi di $\mathbb{R}^2$).

Esempio. Consideriamo le due funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{-x+1}$, la prima definita per $x \geq 0$, la seconda per $x \leq 1$. Di entrambe sappiamo già tracciare i grafici, riportati nelle figure 9.2 e 9.3.

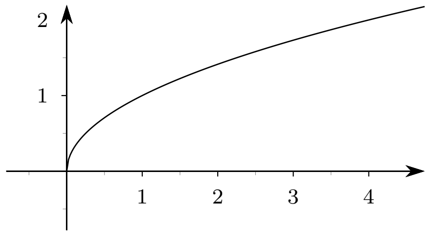


Figura 9.2 *La funzione* $\sqrt{x}$

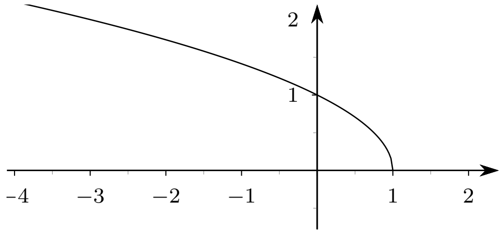
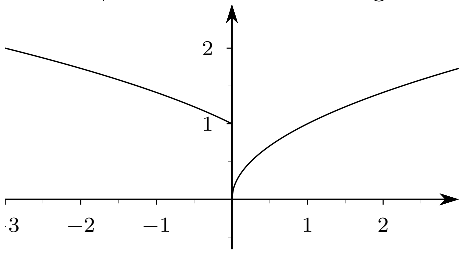


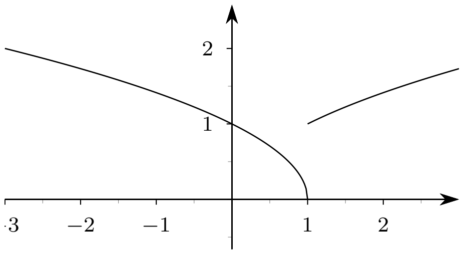
Figura 9.3 *La funzione* $\sqrt{-x-1}$

A partire da queste funzioni possiamo costruirne altre, come mostrato di seguito.

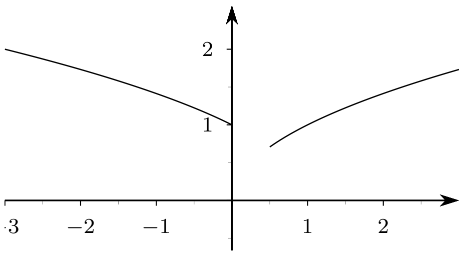
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{se} \quad x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} .$$



$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{se} \quad x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



$$k(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, & \text{se} \quad x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$



9.7 Dominio delle funzioni elementari

Nel dare la definizione di funzione, vedi la definizione 2.6 nella pagina 10, abbiamo detto che per assegnare una funzione occorre assegnare un dominio, un codominio, e una legge che associ a ciascun punto del dominio un punto (e uno solo) del codominio. Nel caso delle funzioni elementari si sottintende sempre che il dominio sia il più grande sottoinsieme (di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{R}^2$) in cui le operazioni da eseguire sulla variabile o sulle variabili hanno senso. Per determinare il dominio di queste funzioni si deve dunque in generale risolvere un sistema di disequazioni che esplicitano le condizioni da imporre affinché le operazioni da eseguire siano lecite.

Esempi.

1. Per trovare il dominio di $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln(2-x)$, devo considerare il seguente sistema di disequazioni
$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases},$$
che traducono in formule le condizioni che il radicando della radice quadrata sia non negativo e che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo. Il dominio è $1 \leq x < 2$.
2. Per trovare il dominio di $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$, devo risolvere la disequazione $x^2+y^2-1 \geq 0$ (radicando non negativo), che ha come soluzioni tutti i punti del piano non interni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

9.8 Funzioni crescenti e decrescenti

Attenzione: questi concetti sono validi *solo* per *funzioni di una variabile.*

Definizione 9.18 (Funzioni crescenti o decrescenti)**.** *Una funzione $f(x)$, definita in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice* crescente *se, presi comunque x_1, x_2 nel dominio, l'essere $x_1 < x_2$ implica che $f(x_1) \leq f(x_2)$ (se invece di $\leq$ si ha $<$, si dice* strettamente crescente*); la funzione si dice invece* decrescente *se, presi comunque x_1, x_2 nel dominio, l'essere $x_1 < x_2$ implica che $f(x_1) \geq f(x_2)$ (se invece di $\geq$ si ha $>$, si dice* strettamente decrescente*).*

In pratica una funzione è crescente se al crescere di x cresce anche il corrispondente valore di $y = f(x)$, decrescente in caso contrario, cioè al crescere di x decresce il corrispondente valore di $y = f(x)$.

Le funzioni e^x, $\ln x$, $\sqrt{x}$ sono tutte crescenti (strettamente); la funzione e^{-x} è decrescente (strettamente); la funzione x^2 non è né crescente né decrescente.

Se una funzione non è né crescente né decrescente, può succedere che sia *crescente* o *decrescente a tratti*. Per esempio la funzione x^2 è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$; la funzione $1/x$ è crescente sia per $x < 0$ che per $x > 0$ (ma, attenzione, non su tutto il suo dominio!). Le funzioni crescenti o decrescenti a tratti sono quelle che più comunemente ci capiterà di incontrare nel seguito.

9.9 Funzioni limitate e illimitate, massimi e minimi

Questi concetti si applicano sia alle funzioni di una variabile che a quelle di due variabili e sono concetti che riguardano l'insieme immagine di una funzione.

Definizione 9.19 (Funzioni limitate e illimitate)**.** *Una funzione f di una o due variabili si dice* limitata *se il suo insieme immagine è limitato,* illimitata *se tale è il suo insieme immagine. Si usano anche gli aggettivi* superiormente *e* inferiormente*, esattamente come per i sottoinsiemi dio $\mathbb{R}$.*

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono limitate; la funzione $1/x$ è illimitata; la funzione e^x è superiormente illimitata; la funzione $-x^2$ è inferiormente illimitata.

Definizione 9.20 (Massimo e minimo per una funzione)**.** *Il massimo e il minimo dell'insieme immagine di una funzione, se esistono, si chiamano rispettivamente* massimo assoluto *e* minimo assoluto *della funzione. L'estremo superiore e inferiore dell'insieme immagine di una funzione (che esistono sempre, eventualmente infiniti), si chiamano estremo superiore e inferiore della funzione. Spesso l'aggettivo* assoluto *si tralascia.*

La ricerca del massimo e del minimo assoluto di una funzione (se esistenti) è una delle più importanti applicazioni dell'analisi (problemi di *ottimizzazione*).

La funzione e^x non ha né max né min, il suo inf è 0, il suo sup $+ +\infty$. La funzione $\ln x$ non ha né max né min, il suo inf è $-\infty$, il suo sup $+ +\infty$. La funzione $\sin x$ ha 1 come max e -1 come min. La funzione x^2 ha 0 come min, mentre non ha max, il suo sup è $+\infty$.

Uno dei punti in corrispondenza dei quali la funzione assume il suo massimo o minimo si chiama *punto di massimo assoluto* o *punto di minimo assoluto*. La funzione $\sin x$ ha infiniti punti di massimo assoluto e di minimo assoluto,la funzione x^2 ha un solo punto di minimo assoluto (che è $x = 0$).

Definizione 9.21 (Massimi e minimi relativi)**.** *Un punto P del dominio di una funzione si chiama* punto di massimo relativo *se $\exists I(P)$ tale che, per ogni punto $Q \in I(P)$, si abbia $f(Q) \leq f(P)$; il punto si chiama* punto di minimo relativo *se, nelle stesse condizioni, si ha invece $f(Q) \geq f(P)$. Il valore $f(P)$ si chiama* massimo relativo *o* minimo relativo *rispettivamente. Mentre il massimo (assoluto) e il minimo (assoluto), se esistono, sono unici, i massimi e minimi relativi possono essere più d'uno (anche infiniti).*

Esempi.

– La funzione rappresentata nella figura 9.4 ha i punti x_1 e x_3 come punti di massimo relativo, x_2 e x_4 come punti di minimo relativo; non ha né massimo né minimo assoluti.

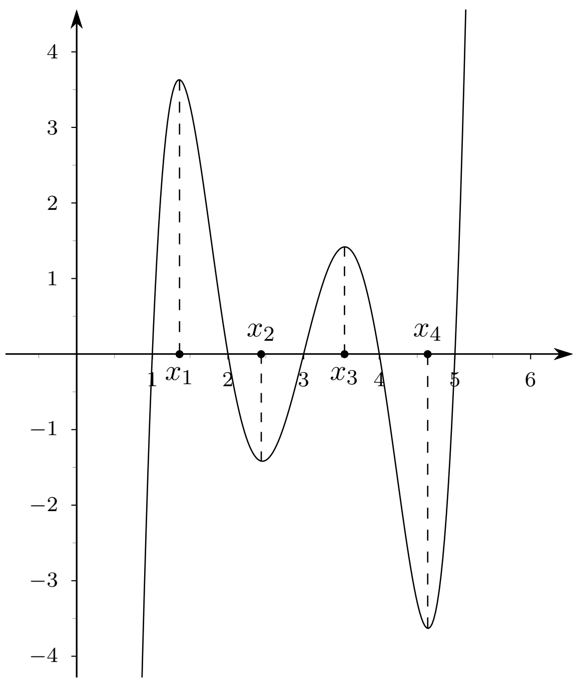


Figura 9.4 *Una funzione con due massimi e due minimi relativi*

– La funzione rappresentata nella figura 9.5 (si presuppone che il grafico mantenga indefinitamente l'andamento visualizzato) ha infiniti punti di massimo e di minimo relativo. Anche questa non ha né massimo né minimo assoluti.

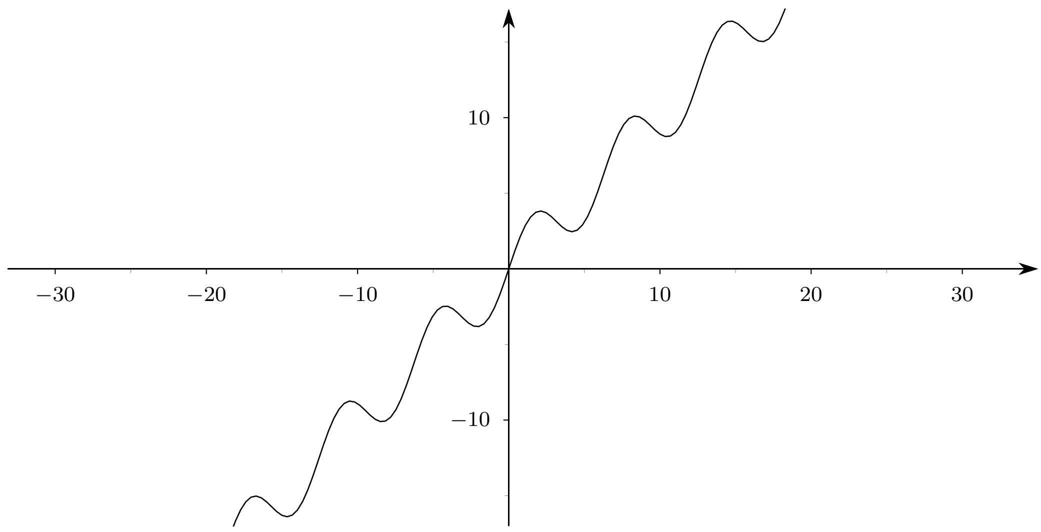


Figura 9.5 *Una funzione con infiniti massimi e minimi relativi*

– La situazione è identica nel caso di funzioni di due variabili, anche se, naturalmente, la produzione di un grafico è decisamente più complessa.

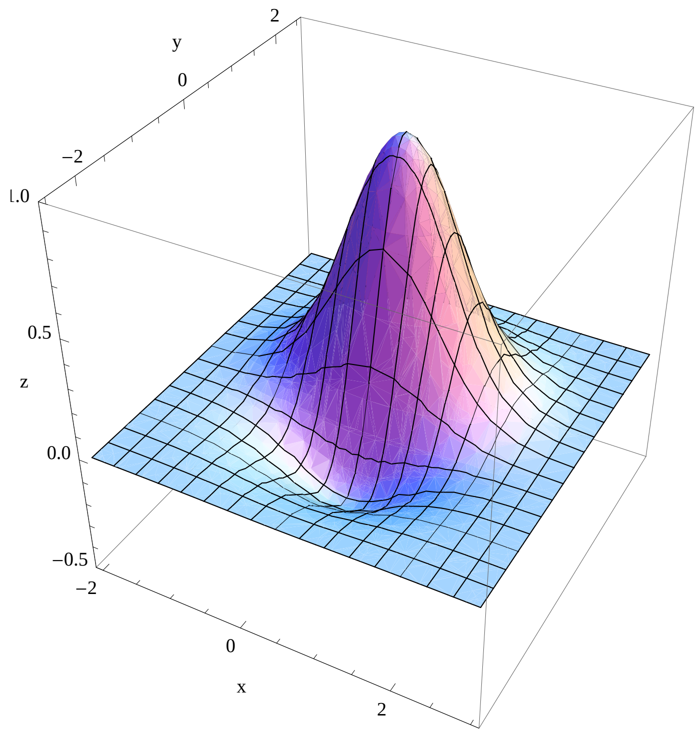


Figura 9.6 *Massimi e minimi in una funzione di due variabili*

9.10 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Definizione 9.22. *Una funzione $f\colon A \to B$ si dice* iniettiva *se due punti diversi del dominio P_1 e P_2 hanno immagini diverse; una funzione si dice* suriettiva *se ogni punto del codominio è immagine di almeno un punto del dominio, ovvero se l'insieme immagine coincide con il codominio; una funzione che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice* biiettiva *o* biunivoca.

Questi concetti hanno per noi interesse in particolare nel caso delle funzioni di una sola variabile. In questo caso è evidente che una funzione strettamente crescente o strettamente decrescente è iniettiva.

Esempi.

- Le funzioni e^x, $\ln x$, x^3, $\sqrt{x}$ sono tutte funzioni iniettive.
- Le funzioni, aventi come codominio $\mathbb{R}$, $\ln x$ e x^3 sono funzioni suriettive. Anche le funzioni e^x e $\sqrt{x}$ possono diventare suriettive se "restringiamo" il codominio rispettivamente agli $y > 0$ e agli $y \geq 0$.
- La funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, x^3 è iniettiva e suriettiva, dunque biunivoca.
- La funzione x^2 non è iniettiva: i punti -1 e 1, per esempio, pur essendo diversi hanno la stessa immagine.
- La funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $\sin x$, non è iniettiva: esistono addirittura infiniti punti diversi del dominio che hanno la stessa immagine. La funzione non è nemmeno suriettiva, può tuttavia diventarlo se si restringe il codominio al solo intervallo $[-1, 1]$. Si noti che anche restringendo il codominio la funzione non cambia sostanzialmente; dunque è sempre possibile, senza grandi rinunce, rendere suriettiva una funzione. Non così per l'iniettività.

9.11 Esercizi

Esercizio 9.1. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 5.1 della pagina 47, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.2. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 5.2 della pagina 48, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.3. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 2.1 della pagina 17, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.4. *Per ciascun insieme di soluzioni dell'esercizio 2.2 della pagina 17, determinare le caratteristiche (aperto, chiuso, limitato, ecc.).*

Esercizio 9.5. *Discutere le seguenti questioni in modo sintetico, ma esauriente.*

- *Si possono trovare due insiemi uno aperto e l'altro chiuso tali che la loro unione sia un insieme aperto?*
- *Si possono trovare due insiemi uno aperto e l'altro chiuso tali che la loro intersezione sia un insieme aperto?*
- *Si possono trovare due insiemi entrambi aperti tali che la loro unione sia un insieme aperto?*
- *Si possono trovare due insiemi entrambi chiusi tali che la loro unione sia un insieme chiuso?*

Esercizio 9.6. *Discutere le seguenti questioni in modo sintetico, ma esauriente.*

- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando due funzioni limitate si ottiene sempre una funzione limitata.*
- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando una funzione limitata e una funzione illimitata si può ottenere una funzione limitata.*
- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando una funzione crescente e una decrescente si può ottenere una funzione crescente.*
- *Se si costruisce una funzione definita a pezzi (in due pezzi) usando due funzioni decrescenti si può ottenere una funzione crescente.*

Esercizio 9.7. *Per ciascuna delle funzioni dell'esercizio 8.1 della pagina 71, determinare le caratteristiche (limitate, illimitate, crescenti, decrescenti, massimi, minimi, ecc.).*

Esercizio 9.8. *Determinare il dominio delle seguenti funzioni e tutte le caratteristiche di tale insieme (limitato, illimitato, aperto, chiuso, punti interni, esterni, ecc.)*

1. $f(x) = x + 1$;
2. $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$;
3. $f(x) = \sqrt{x+1}$;
4. $f(x) = \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{1+x}$;
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$;
6. $f(x) = \sqrt{(x-1)(1+x)}$;
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-3}}$;
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2x-3}}$;
9. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{3-x}$;
10. $f(x) = \sqrt{2x}\sqrt{x+3}$;
11. $f(x) = \sqrt{x+1} - x + \sqrt{2-x}$.

Esercizio 9.9. *Determinare le caratteristiche degli insiemi soluzione dei sistemi dell'esercizio 4.3 della pagina 37.*

Esercizio 9.10. *Determinare le caratteristiche degli insiemi soluzione dei sistemi dell'esercizio 8.3 della pagina 72.*

Esercizio 9.11. *Determinare il dominio e le sue caratteristiche (aperto, ecc., punti interni, ecc.) per le seguenti funzioni di due variabili.*

1. $f(x,y) = \dfrac{x}{2-y}$;
2. $f(x,y) = \sqrt{(x+1)(y+1)}$;
3. $f(x,y) = \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{1+y}$;
4. $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y}{1+x}}$;
5. $f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)(2-y)}$;
6. $f(x,y) = \sqrt{xy}$;
7. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{y+3}$;

8. $f(x, y) = \sqrt{2x}\sqrt{2y - 3}$;
9. $f(x, y) = \sqrt{x + y - 1} - \sqrt{x - y}$.

10 Limiti e continuità per funzioni di una variabile

10.1 Considerazioni introduttive

Prima di iniziare la vera e propria trattazione dell'importante concetto di limite per le funzioni reali, consideriamo alcuni esempi per capire il senso delle definizioni formali che daremo, segnalando che, vista la natura e gli scopi di questo corso privilegeremo sempre gli aspetti più propriamente "applicativi", naturalmente non rinunciando al rigore necessario.

Esempio. Consideriamo la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

il cui dominio naturale è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cioè l'insieme dei reali negativi, e poniamoci il seguente problema, che avrà notevole importanza nel seguito: *Considerato che non è possibile calcolare il valore di f in corrispondenza di $x = 0$, perché 0 non appartiene al dominio della funzione, è almeno possibile valutare il comportamento di f se la x, a partire da un valore "*prossimo a*" 0, si avvicina "*quanto più è possibile*" a 0[(1)]?*

Per rispondere a questa domanda usiamo un foglio di calcolo e calcoliamo i valori di x (in radianti), $sin(x)$ e ${}^{\sin x}/_{x}$, a partire, per esempio, da $x = 1$ fino ad avvicinarci a $x = 0$. Abbiamo riportato i risultati di questo calcolo nella tabella 10.1.

Come si può notare, il rapporto presente nell'ultima colonna si avvicina sempre più a 1 (si noti, nelle ultime 3 righe, che i valori di x e di $\sin x$ nella tabella sono identici, ma questo fatto è una conseguenza degli errori di arrotondamento del foglio di calcolo: in realtà $\sin x$ è sempre minore di x, come risulta evidente dalla definizione che ne abbiamo dato).

Una ulteriore verifica di questo fatto può essere ottenuta se tracciamo il grafico della funzione f in questione: si noti che, in corrispondenza del punto $(0, 1)$, non viene tracciato alcun punto sul grafico.

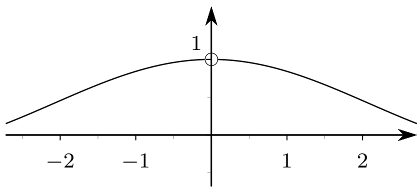


Figura 10.1 *Grafico della funzione ${}^{\sin x}/_{x}$, nei pressi di 0*

Potremo riassumere questo comportamento dicendo che, per x che "tende" a 0, ${}^{\sin x}/_{x}$ "tende' a 1, in formule

$$x \to 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \to 1\,,$$

[1]Abbiamo usato le virgolette su "*prossimo a*" e su "*quanto più è possibile*", perché sono termini che dovranno essere precisati, in quanto non hanno un significato univoco

x	$\sin x$	$\sin x/x$
1,000000000000000	0,841470984807896	0,841470984807896
0,500000000000000	0,479425538604203	0,958851077208406
0,400000000000000	0,389418342308650	0,973545855771626
0,300000000000000	0,295520206661340	0,985067355537799
0,200000000000000	0,198669330795061	0,993346653975306
0,100000000000000	0,099833416646828	0,998334166468282
0,050000000000000	0,049979169270678	0,999583385413567
0,040000000000000	0,039989334186634	0,999733354665854
0,030000000000000	0,029995500202496	0,999850006749855
0,020000000000000	0,019998666693333	0,999933334666654
0,010000000000000	0,009999833334167	0,999983333416667
0,005000000000000	0,004999979166693	0,999995833338542
0,004000000000000	0,003999989333342	0,999997333335467
0,003000000000000	0,002999995500002	0,999998500000675
0,002000000000000	0,001999998666667	0,999999333333466
0,001000000000000	0,000999999833333	0,999999833333342
0,000500000000000	0,000499999979167	0,999999958333334
0,000100000000000	0,000099999999833	0,999999998333333
0,000050000000000	0,000049999999979	0,999999999583333
0,000010000000000	0,000010000000000	0,999999999983333
0,000005000000000	0,000005000000000	0,999999999995833
0,000001000000000	0,000001000000000	0,999999999999833

Tabella 10.1 *Valori di x, $\sin x$, $\sin x/x$, per x variabile da 1 a "quasi 0"*

o, come scriveremo di solito,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

Esempio. Come secondo esempio consideriamo la funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,,$$

il cui dominio naturale è $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Anche qui, usando un foglio di calcolo, determiniamo (se c'è!!) il valore a cui tende questo rapporto, al tendere di x a 1 (valore non compreso nel dominio), a partire, per esempio, da $x=2$. Otteniamo la tabella 10.2.

Anche in questo caso possiamo usare un grafico per un ulteriore controllo numerico del risultato.

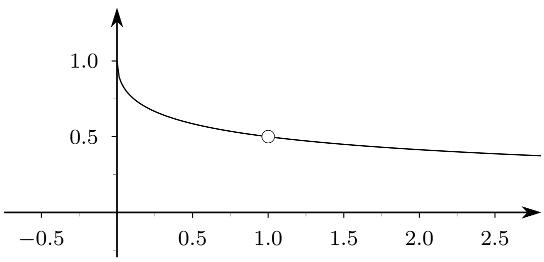


Figura 10.2 *Grafico della funzione $f(x)=(\sqrt{x}-1)/(x-1)$*

Come prima, notiamo che in corrispondenza di $x=1$ non viene tracciato alcun punto sul grafico della funzione.

Potremo scrivere ora:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}\,,$$

naturalmente riservandoci di precisare meglio il senso della scrittura.

x	$\sqrt{x}-1$	$x-1$	$(\sqrt{x}-1)/(x-1)$
2,000000000000000	0,414213562373095	1,000000000000000	0,414213562373095
1,500000000000000	0,224744871391589	0,500000000000000	0,449489742783178
1,400000000000000	0,183215956619923	0,400000000000000	0,458039891549808
1,300000000000000	0,140175425099138	0,300000000000000	0,467251416997127
1,200000000000000	0,095445115010332	0,200000000000000	0,477225575051661
1,100000000000000	0,048808848170152	0,100000000000000	0,488088481701516
1,050000000000000	0,024695076595960	0,050000000000000	0,493901531919198
1,040000000000000	0,019803902718557	0,040000000000000	0,495097567963925
1,030000000000000	0,014889156509222	0,030000000000000	0,496305216974065
1,020000000000000	0,009950493836208	0,020000000000000	0,497524691810391
1,010000000000000	0,004987562112089	0,010000000000000	0,498756211208895
1,005000000000000	0,002496882788171	0,005000000000000	0,499376557634223
1,004000000000000	0,001998003990028	0,004000000000000	0,499500997506952
1,003000000000000	0,001498876684342	0,003000000000000	0,499625561447503
1,002000000000000	0,000999500499376	0,002000000000000	0,499750249687958
1,001000000000000	0,000499875062461	0,001000000000000	0,499875062461019
1,000500000000000	0,000249968757810	0,000500000000000	0,499937515620330
1,000100000000000	0,000049998750062	0,000100000000000	0,499987500624021
1,000050000000000	0,000024999687508	0,000050000000000	0,499993750157135
1,000010000000000	0,000004999987500	0,000010000000000	0,499998749999897
1,000005000000000	0,000002499996875	0,000005000000000	0,499999375011051
1,000001000000000	0,000000499999875	0,000001000000000	0,499999875099910

Tabella 10.2 *Valori di x, $\sqrt{x}-1$, $x-1$, $(\sqrt{x}-1)/(x-1)x$, per x variabile da 2 a "quasi 1"*

Esempio. Il terzo esempio è relativo alla funzione

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^2}\,,$$

per la quale cerchiamo di capire, sempre usando il solito foglio di calcolo, che cosa succede quando x si avvicina a 0 (punto non compreso nel dominio naturale. Otteniamo la tabella 10.3.

Questa volta notiamo che, quanto più x è prossimo a 0, tanto più i valori della funzione crescono. Riservandoci una precisazione ulteriore, possiamo dire che se x tende a 0, $f(x)$ diventa enormemente grande, ovvero "tende a $+\infty$", in formule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=+\infty\,.$$

Il solito grafico conferma l'impressione numerica.

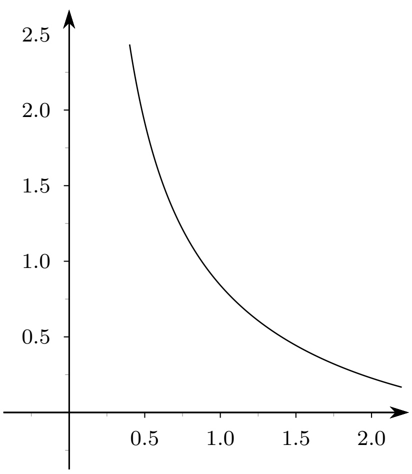


Figura 10.3 *Grafico della funzione $\sin x/x^2$*

x	$\sin x$	x^2	${}^{\sin x}/_{x^2}$
1,000000000000000	0,841470984807896	1,000000000000000	0,841470984807896
0,500000000000000	0,479425538604203	0,250000000000000	1,917702154416810
0,400000000000000	0,389418342308650	0,160000000000000	2,433864639429070
0,300000000000000	0,295520206661340	0,090000000000000	3,283557851792660
0,200000000000000	0,198669330795061	0,040000000000000	4,966733269876530
0,100000000000000	0,099833416646828	0,010000000000000	9,983341664682810
0,050000000000000	0,049979169270678	0,002500000000000	19,991667708271300
0,040000000000000	0,039989334186634	0,001600000000000	24,993333866646300
0,030000000000000	0,029995500202496	0,000900000000000	33,328333558328500
0,020000000000000	0,019998666693333	0,000400000000000	49,996666733332700
0,010000000000000	0,009999833334167	0,000100000000000	99,998333341666600
0,005000000000000	0,004999979166693	0,000025000000000	199,999166667708000
0,004000000000000	0,003999989333342	0,000016000000000	249,999333333867000
0,003000000000000	0,002999995500002	0,000009000000000	333,332833333558000
0,002000000000000	0,001999998666667	0,000004000000000	499,999666666733000
0,001000000000000	0,000999999833333	0,000001000000000	999,999833333342000
0,000500000000000	0,000499999979167	0,000000250000000	1999,999916666670000
0,000100000000000	0,000099999999833	0,000000010000000	9999,999983333340000
0,000050000000000	0,000049999999979	0,000000002500000	19999,999991666700000
0,000010000000000	0,000010000000000	0,000000000100000	99999,999998333300000
0,000005000000000	0,000005000000000	0,000000000025000	199999,999999167000000
0,000001000000000	0,000001000000000	0,000000000001000	999999,999999833000000

Tabella 10.3 *Valori di x, $\sin x$, x^2, ${}^{\sin x}/_{x^2}$, per x variabile da 1 a "quasi 0"*

Esempio. Concludiamo questa carrellata di numeri e grafici con la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,,$$

per la quale siamo ancora interessati a scoprire che cosa succede quando x si avvicina a 0 (punto non compreso nel dominio naturale). La relativa tabella è la 10.4.

Questa volta il foglio di calcolo è un po' più impreciso (sempre a causa di problemi di arrotondamento), ma, magari anche facendo uso del solito grafico, ci assumiamo la responsabilità di affermare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

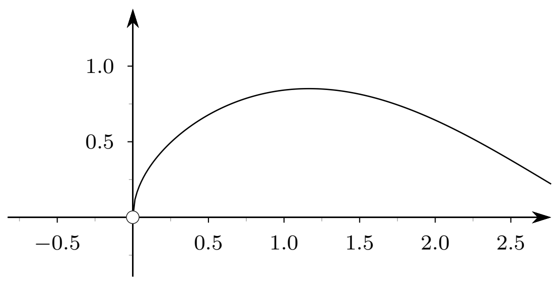


Figura 10.4 *Grafico della funzione $f(x) = {}^{\sin x}/_{\sqrt{x}}$*

È interessante osservare che le quattro situazioni che abbiamo esaminato negli esempi sono molto simili: in tutti i quattro casi abbiamo considerato rapporti di due quantità, variabili al variare di x, che per x tendente a un opportuno valore si presentavano sempre con l'aspetto di frazioni aventi numeratore e denominatore "*infinitamente piccolo*": eppure il risultato finale è stato completamente diverso nei quattro casi.

x	$\sin x$	$\sqrt{x}$	${}^{\sin x}/_{\sqrt{x}}$
$1,000000000000000$	$0,841470984807896$	$1,000000000000000$	$0,841470984807896$
$0,500000000000000$	$0,479425538604203$	$0,707106781186548$	$0,678010098842090$
$0,400000000000000$	$0,389418342308650$	$0,632455532033676$	$0,615724462171224$
$0,300000000000000$	$0,295520206661340$	$0,547722557505166$	$0,539543611290014$
$0,200000000000000$	$0,198669330795061$	$0,447213595499958$	$0,444238128702149$
$0,100000000000000$	$0,099833416646828$	$0,316227766016838$	$0,315700983200547$
$0,050000000000000$	$0,049979169270678$	$0,223606797749979$	$0,223513639896411$
$0,040000000000000$	$0,039989334186634$	$0,200000000000000$	$0,199946670933171$
$0,030000000000000$	$0,029995500202496$	$0,173205080756888$	$0,173179101163883$
$0,020000000000000$	$0,019998666693333$	$0,141421356237310$	$0,141411928335454$
$0,010000000000000$	$0,009999833334167$	$0,100000000000000$	$0,099998333341667$
$0,005000000000000$	$0,004999979166693$	$0,070710678118655$	$0,070710383491198$
$0,004000000000000$	$0,003999989333342$	$0,063245553203368$	$0,063245384548694$
$0,003000000000000$	$0,002999995500002$	$0,054772255750517$	$0,054772173592170$
$0,002000000000000$	$0,001999998666667$	$0,044721359549996$	$0,044721329735762$
$0,001000000000000$	$0,000999999833333$	$0,031622776601684$	$0,031622771331221$
$0,000500000000000$	$0,000499999979167$	$0,022360679774998$	$0,022360678843303$
$0,000100000000000$	$0,000099999999833$	$0,010000000000000$	$0,009999999983333$
$0,000050000000000$	$0,000049999999979$	$0,007071067811865$	$0,007071067808919$
$0,000010000000000$	$0,000010000000000$	$0,003162277660168$	$0,003162277660116$
$0,000005000000000$	$0,000005000000000$	$0,002236067977500$	$0,002236067977490$
$0,000001000000000$	$0,000001000000000$	$0,001000000000000$	$0,001000000000000$

Tabella 10.4 *Valori di* x, $\sin x$, $\sqrt{x}$, ${}^{\sin x}/_{\sqrt{x}}$, *per* x *variabile da* 1 *a "quasi* 0*"*

Purtroppo non è sempre possibile decidere il comportamento di una funzione in prossimità di un dato punto usando un foglio di calcolo (o simili tecniche) e, nemmeno, usando un grafico. Un esempio classico in tal senso è dato dalla funzione

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}\,.$$

La tabella 10.5, costruita al solito modo, questa volta non ci è di grande aiuto.

Né ci conforta molto l'esame del grafico, che abbiamo già visto nella figura 2.8 della pagina 14, e nelle due figure subito successive.

Abbiamo bisogno di una teoria e di tecniche di calcolo più raffinate per risolvere il problema che ha, come già accennato, grande importanza applicativa. Purtroppo le cose non sono molto semplici, e qui ci limiteremo solo agli aspetti essenziali.

10.2 La retta reale estesa

Per velocizzare la trattazione del problema del calcolo dei limiti e per semplificare molte scritture è utile *ampliare* l'insieme dei numeri reali, aggiungendo due ulteriori elementi che chiameremo, anche se in maniera impropria, ancora "punti". Attenzione però: non useremo *mai* per questi due elementi la dicitura "numero", in quanto, come vedremo, il loro comportamento nei confronti delle operazioni elementari è *alquanto strano*.

Definizione 10.1. *Chiameremo* retta reale estesa*, l'insieme*

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,,$$

cioè l'insieme dei numeri reali a cui siano stati aggiunti altri due elementi, o punti, detti rispettivamente $-$infinito e $+$infinito, per i quali stabiliremo le regole di seguito elencate per quanto riguarda l'ordine e le operazioni fondamentali.

x	$1/x$	$\sin 1/x$
$1,000000000000000$	$1,000000000000000$	$0,841470984807897$
$0,500000000000000$	$2,000000000000000$	$0,909297426825682$
$0,400000000000000$	$2,500000000000000$	$0,598472144103957$
$0,300000000000000$	$3,333333333333330$	$-0,190567962875485$
$0,200000000000000$	$5,000000000000000$	$-0,958924274663138$
$0,100000000000000$	$10,000000000000000$	$-0,544021110889370$
$0,050000000000000$	$20,000000000000000$	$0,912945250727628$
$0,040000000000000$	$25,000000000000000$	$-0,132351750097773$
$0,030000000000000$	$33,333333333333300$	$0,940529576628763$
$0,020000000000000$	$50,000000000000000$	$-0,262374853703929$
$0,010000000000000$	$100,000000000000000$	$-0,506365641109759$
$0,005000000000000$	$200,000000000000000$	$-0,873297297213995$
$0,004000000000000$	$250,000000000000000$	$-0,970528019541805$
$0,003000000000000$	$333,333333333333000$	$0,318846344358746$
$0,002000000000000$	$500,000000000000000$	$-0,467771805322476$
$0,001000000000000$	$1000,000000000000000$	$0,826879540532003$
$0,000500000000000$	$2000,000000000000000$	$0,930039504416137$
$0,000100000000000$	$10000,000000000000000$	$-0,305614388888252$
$0,000050000000000$	$20000,000000000000000$	$0,581984761994295$
$0,000010000000000$	$100000,000000000000000$	$0,035748797986561$
$0,000005000000000$	$200000,000000000000000$	$-0,071451895241553$
$0,000001000000000$	$1000000,000000000000000$	$-0,349993502171308$

Tabella 10.5 *Valori di x, $1/x$, $\sin 1/x$, per x variabile da 1 a "quasi 0"*

Nella retta reale estesa a volte (ma non sempre!!) potremo attribuire un segno anche allo zero, con delle regole che vedremo in seguito: se saremo interessati a questa scelta indicheremo con 0^+ uno "*zero positivo*", con 0^- uno "*zero negativo*".

Ordine nella retta reale estesa

Per ogni numero reale a, si pone, per definizione,

$$-\infty < a < +\infty\,,$$

ovvero $-\infty$ precede tutti i i numeri reali (è una specie di "primo elemento"), mentre $+\infty$ segue tutti i numeri reali (è una specie di "ultimo elemento").

Operazioni nella retta reale estesa

Le operazioni elementari in uso tra i numeri reali possono essere estese, entro certi limiti, ad operazioni coinvolgenti anche i nuovi simboli di $\pm\infty$, nel modo indicato qui di seguito. Segnaliamo che, scrivendo ∞, intendiamo riferirci indifferentemente al simbolo $+\infty$ o $-\infty$. Tutte le volte che serve ed è possibile, si deve inoltre applicare la usuale "regola dei segni" per quanto riguarda il prodotto e il quoziente.

1. Per ogni numero reale a, $a \pm (+\infty) = \pm\infty$.
2. Per ogni numero reale a, $a \pm (-\infty) = \mp\infty$.
3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
4. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
5. Per ogni numero reale a *diverso* da 0, $a \cdot (\infty) = \infty$ (con la regola dei segni).
6. $(\infty) \cdot (\infty) = \infty$ (con la regola dei segni).
7. Per ogni numero reale a, anche 0, $a/\infty = 0$.
8. Per ogni numero reale a *diverso* da 0, $a/0 = \infty$ (con la regola dei segni, se applicabile).
9. Per ogni numeri reale a (anche 0), $\infty/a = \infty$ (con la regola dei segni, se applicabile).

Osserviamo che *non* abbiamo definito le operazioni nei casi seguenti:

1. Somma di $(+\infty)$ e $(-\infty)$ (e analoghe che si ottengono usando le regole dei segni: diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $\infty - \infty$.

2. Prodotto tra 0 e ∞: diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $0 \cdot \infty$.
3. Quoziente tra 0 e 0: diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso $0/0$.
4. Quoziente tra ∞ e ∞: diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso ∞/∞.

Chiameremo queste situazioni *forme di indecisione* o anche (ma la nomenclatura ci pare oltremodo brutta e inadeguata) *forme indeterminate*[2].

Intorni dell'infinito

Anche per i due nuovi oggetti aggiunti alla retta reale si introduce il concetto di intorno. Precisamente si dice *intorno di* $+\infty$ un qualunque intervallo aperto superiormente illimitato: $I_{+\infty} =]a, +\infty[$, oppure $]-\infty, +\infty[$; si dice invece *intorno di* $-\infty$ un qualunque intervallo aperto inferiormente illimitato: $I_{+\infty} =]-\infty, a[$, oppure $]-\infty, +\infty[$.

10.3 La definizione di limite

Siamo ora pronti per dare una definizione il più possibile formale e rigorosa del concetto di limite per una funzione reale. Come al solito accompagneremo questa definizione con esempi grafici esplicativi. Segnaliamo subito una difficoltà nella definizione: gli esempi che abbiamo fornito implicavano un *movimento* della x verso un dato valore x_0; ebbene, un tale concetto non è formalizzabile in maniera chiara e univoca, e nella definizione che daremo ogni idea di movimento è sparita. È questo il risultato di una lunga discussione tra i matematici all'inizio dell'analisi, discussione che ha condotto alla definizione formale che segue.

Definizione 10.2. *Sia data una funzione f, di dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione per D (non essendo escluso che x_0 possa essere uno dei due simboli di infinito). Diremo che l (anche qui non essendo escluso che l possa essere uno dei due simboli di infinito) è il* limite *di $f(x)$ per x tendente a x_0, e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{10.1}$$

se, scelto un arbitrario intorno I_l di l, è possibile trovare in corrispondenza un opportuno intorno I_{x_0} di x_0, in modo tale che i valori della funzione calcolati in I_{x_0}, tranne *x_0 stesso, cadano in I_l.*

Detto in termini meno formali: vale la formula (10.1) se, considerato un segmento arbitrario contenente punti situati nei pressi di l, è possibile trovare un segmento che contenga il punto x_0, in modo tale che *tutte* le frecce che partono da questi punti cadano solo su punti tra quelli precedentemente scelti, con la clausola che non interessa sapere che cosa fa il punto x_0.

Esempio.

[2] Le definizioni che abbiamo dato relative alle operazioni in $\widetilde{\mathbb{R}}$ servono in realtà a calcolare i limiti: vedremo che solo quando si hanno situazioni del tipo delle quattro chiamate forme di indecisione, il calcolo è, in generale, complesso. Per questo sarebbe forse meglio chiamare queste situazioni "*forme difficili*", e non forme di indecisione, ma la tradizione ha il suo peso... In ogni caso è bene tenere presente fin da subito che *non c'è nulla di indeterminato*, solo che in questi casi è complicato decidere che cosa succede.

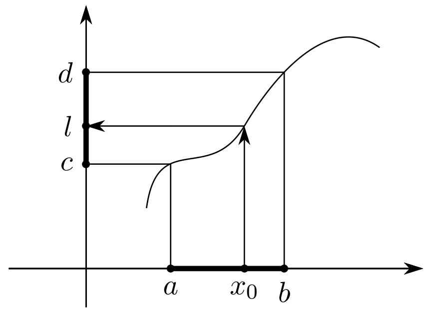


Figura 10.5 *Tutte le frecce che partono dal segmento* $]a, b[$ *cadono nel segmento* $]c, d[$

Esempio.

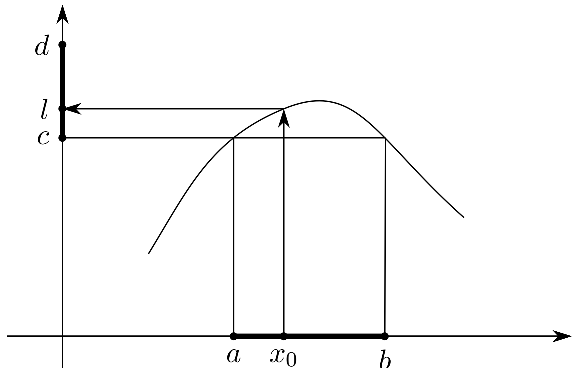


Figura 10.6 *Anche in questo caso le frecce che partono dal segmento* $]a, b[$ *cadono nel segmento* $]c, d[$

Esempio.

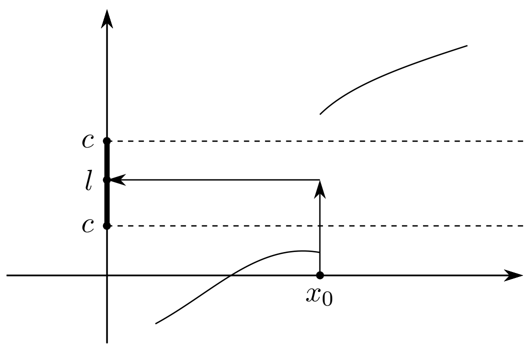


Figura 10.7 *In questo caso non è possibile trovare un segmento, circondante* x_0*, con le proprietà richieste*

Negli esempi relativi alle figure 10.5, 10.6 e 10.7, si è potuto verificare la validità della definizione di limite, usando i grafici delle funzioni. Tutto sarebbe ovviamente più complesso se i grafici non fossero disponibili, e nel seguito faremo qualche cenno sulle tecniche da usare, limitatamente ai casi di nostro interesse.

10.4 Tre teoremi fondamentali sui limiti

Enunciamo tre teoremi fondamentali sui limiti, di cui daremo solo una dimostrazione grafica: non è comunque difficile tradurre in un discorso formale e rigoroso quanto diremo.

Teorema 10.3 (Unicità del limite). *Se una funzione ha un limite l, per x tendente a x_0, tale limite è unico.*

Dimostrazione. Si supponga che ci siano due limiti diversi, l_1 e l_2 e si esamini la figura che segue.

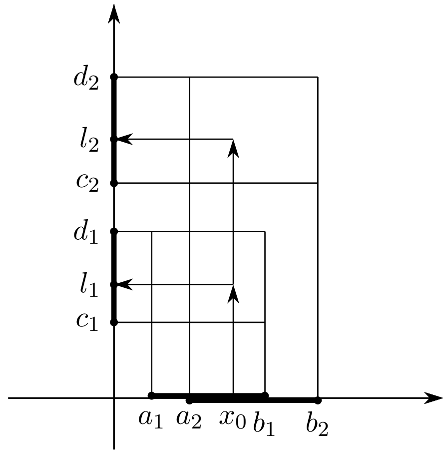


Figura 10.8 *Unicità del limite*

È chiaro che le frecce lanciate dai punti tra a_2 e b_1 dovrebbero cadere *contemporaneamente* in $]c_1, d_1[$ e $]c_2, d_2[$, cosa palesemente impossibile. □

Teorema 10.4 (Permanenza del segno). *Se una funzione ha un limite positivo, per x tendente a x_0, la funzione è positiva in un intorno del punto x_0. Discorso complementare se il limite è negativo.*

Dimostrazione. Supponiamo che il limite l sia positivo, ed esaminiamo la figura che segue, che non ha bisogno di commenti.

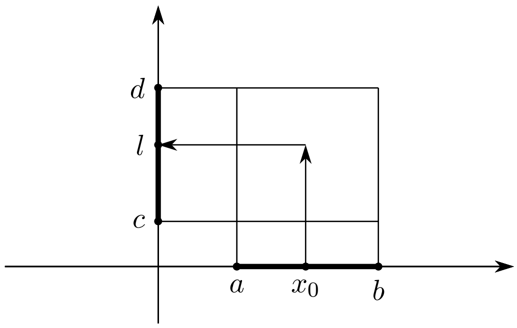


Figura 10.9 *Permanenza del segno*

□

Osserviamo esplicitamente che se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \,,$$

allora la funzione può essere positiva nei pressi di x_0, e allora diremo che il limite è "zero positivo", o 0^+, negativa nei pressi di x_0, e allora diremo che il limite è "zero negativo", o 0^-, o infine può cambiare di segno nei pressi di x_0 e allora diremo che il limite è 0, senza precisare “positivo” o “negativo”. I tre grafici della figura seguente illustrano tre situazioni possibili.

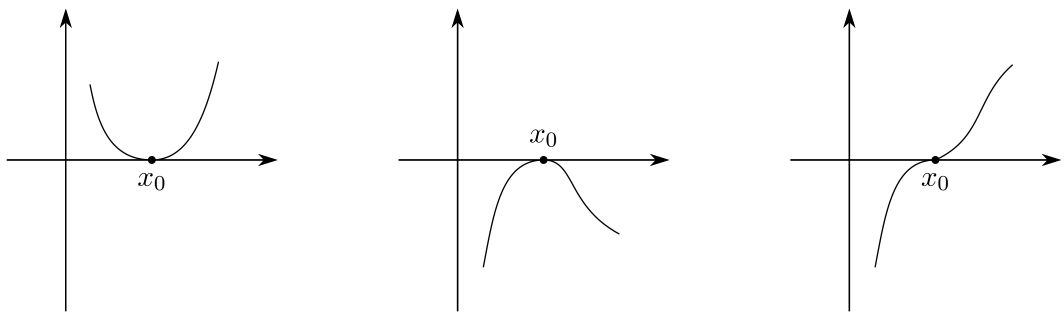


Figura 10.10 0^+, 0^-, 0 *“senza segno”*

Limite destro e limite sinistro

Molto spesso, nei problemi di limite, è utile limitarsi a considerare solo le x del dominio di una funzione che si trovano “a destra” di x_0, oppure “a sinistra”, di x_0. Parleremo allora di *limite destro* e *limite sinistro*, e scriveremo

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l\,.$$

Se riesaminiamo il terzo grafico della precedente figura 10.10 alla luce di questa definizione, potremo dire che la funzione ha limite 0^- a sinistra e 0^+ a destra. Purtroppo però, quando una funzione ha limite 0 “senza segno”, non è affatto detto che il limite sia 0^- a sinistra e 0^+ a destra o viceversa: le situazioni possono essere molto più complesse. Proponiamo solo un esempio grafico, senza commenti, relativo alla funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}\,.$$

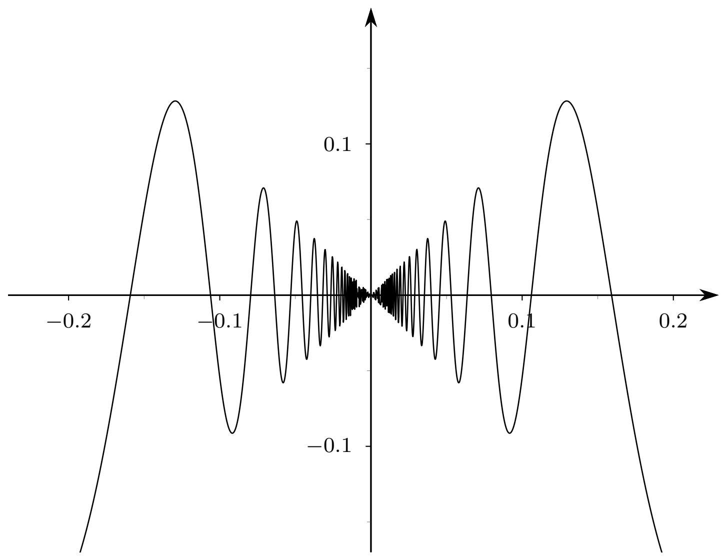


Figura 10.11 *La funzione* $x \sin \frac{1}{x}$

Teorema 10.5 (Del confronto o dei due carabinieri). *Se due funzioni f e g hanno lo stesso limite l per x tendente a x_0, anche una funzione h che sia compresa tra le due ha lo stesso limite.*

Dimostrazione. È sufficiente esaminare la figura che segue.

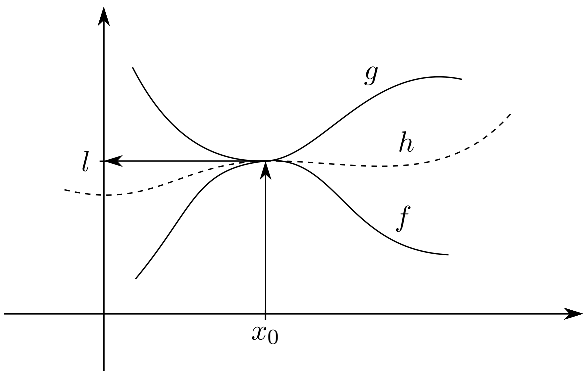


Figura 10.12 *Il teorema dei due carabinieri*

□

10.5 Funzioni continue

Definizione 10.6. *Sia data una funzione f, di dominio D, e sia x_0 un punto di accumulazione per D, appartenente a D. La funzione f si dice* continua *in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

È come dire che una funzione è continua se il calcolo del limite si può fare semplicemente sostituendo x_0 al posto di x nell'espressione della funzione: una bella facilitazione, se si riesce a scoprire a priori quali sono le funzioni continue!

Si dimostra, non senza qualche difficoltà, che tutte le funzioni elementari che abbiamo considerato sono continue in tutti i punti del loro dominio.

È parimenti possibile dimostrare che anche le altre funzioni elementari che non abbiamo considerato sono continue in tutti i punti del loro dominio: si tratta di tutte le funzioni polinomiali, razionali fratte, contenenti radicali, potenze con esponente di vario tipo, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, e quelle che si ottengono per somma, sottrazione, prodotto, quoziente e composizione di queste in tutti i modi possibili. Per ottenere funzioni non continue, al livello del nostro corso, bisogna ricorrere alle funzioni definite a pezzi, come la funzione, detta funzione segno, o signum, definita come segue:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ 1, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} , \tag{10.2}$$

il cui grafico è riportato nella figura che segue.

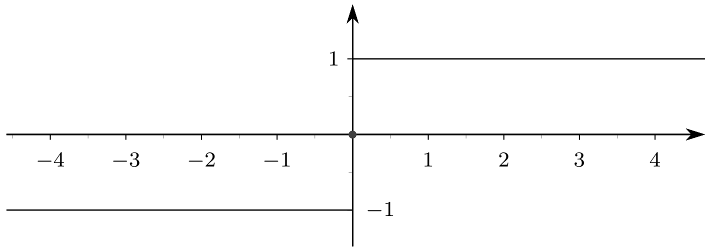


Figura 10.13 *La funzione segno*

Questa funzione non è continua nel punto 0 del suo dominio.

In primissima approssimazione si può dire che una funzione è continua se il suo grafico non presenta "strappi": l'affermazione andrebbe però precisata in dettaglio, ma ciò esula dagli scopi di questo corso.

10.6 Il calcolo dei limiti

Per il calcolo dei limiti delle funzioni continue, per x tendente a punti del dominio, non ci sono problemi, in quanto si può "eseguire una semplice sostituzione". Negli altri casi esistono numerose strategie e noi esamineremo in questo corso solo le più semplici.

Cominciamo con l'elencare alcuni risultati relativi alle funzioni elementari, nel caso di limiti per x tendente a punti non appartenenti al dominio; la quasi totalità di questi risultati sono intuitivi o di immediata verifica.

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty\,.$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad a>1 \\ 0, & \text{se} \quad 0<a<1 \end{cases}\,.$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad a>1 \\ +\infty, & \text{se} \quad 0<a<1 \end{cases}\,.$

   Poiché saremo interessati principalmente al caso che la base delle funzioni esponenziali sia il numero e, scriveremo brevemente questi risultati nel seguente modo:

   $$\mathrm{e}^{+\infty} = +\infty \quad , \quad \mathrm{e}^{-\infty} = 0\,.$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{se} \quad a>1 \\ -\infty, & \text{se} \quad 0<a<1 \end{cases}\,.$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{se} \quad a>1 \\ +\infty, & \text{se} \quad 0<a<1 \end{cases}\,.$

   Poiché saremo interessati principalmente al caso che la base delle funzioni logaritmo sia il numero e, scriveremo brevemente questi risultati nel seguente modo:

   $$\ln(+\infty) = +\infty \quad , \quad \ln(0^+) = -\infty\,.$$

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x \nexists.$
7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x \nexists.$

Successivamente riportiamo il risultato di alcuni teoremi che riguardano il calcolo di limiti importanti (*limiti notevoli*).

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (si tratta di un teorema che formalizza un risultato che avevamo già intravisto in uno degli esempi proposti all'inizio del capitolo).

2. $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$. A proposito di questo fondamentale limite si noti che esso si riferisce a una funzione esponenziale in cui sia la base che l'esponente sono variabili. Per trattare queste funzioni è, in generale, conveniente usare la seguente formula, conseguenza immediata della definizione di logaritmo:

$$\big(f(x)\big)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\,\ln f(x)}\,, \tag{10.3}$$

formula che permette di ottenere una funzione esponenziale vera e propria, cioè in cui solo l'esponente è variabile.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,.$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1\,.$

Successivamente segnaliamo l'uso delle regole di calcolo sulla retta reale estesa, regole di calcolo che sono state proprio definite nella previsione di un loro uso nel calcolo dei limiti: ognuna di quelle regole costituisce in realtà un apposito teorema sui limiti. Per esempio la regola

$$\forall a \in \mathbb{R},\ a + (+\infty) = +\infty$$

traduce in formule la tesi del seguente teorema: Date due funzioni f e g, tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\,,$$

si ha che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = +\infty\,.$$

Chiameremo teoremi sull'*algebra dei limiti* l'insieme dei teoremi espressi mediante le regole di calcolo sulla retta reale estesa: in sostanza queste regole esprimono il fatto che i limiti si comportano bene rispetto alle operazioni fondamentali, tranne qualche caso...

Naturalmente i casi più interessanti saranno proprio quelli in cui quelle regole di calcolo non sono direttamente applicabili: in quei casi occorrerà applicare opportune strategie, di cui esamineremo solo alcuni esempi semplici. Segnaliamo comunque nuovamente che il problema del calcolo dei limiti è in generale un problema molto complesso che spesso richiede lunghe e faticose elaborazioni (non alla portata del nostro corso).

10.7 Ordini di infinito

Uno dei problemi che restano sospesi nel calcolo dei limiti è il caso in cui si presenti la situazione (forma di indecisione) $\infty - \infty$. Per esempio, nel calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - x^2)$$

si ha proprio questo caso. Si può procedere nel seguente modo:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^2)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)=+\infty(1-0)=+\infty.$$

Questo risultato si può interpretare nel seguente modo: la funzione x^3 tende all'infinito più rapidamente della funzione x^2 (o anche è un infinito più forte di x^2, o ancora è un *infinito di ordine superiore* rispetto a x^2) e quindi, dovendo fare la differenza tra un infinito più forte e una più debole, quello più debole non conta, può essere trascurato.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-x^2)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$$

Anche se abbiamo espresso questo fatto con un linguaggio del tutto intuitivo, la cosa può essere resa rigorosa: gli infiniti più deboli *possono essere trascurati in una somma* (agli effetti del calcolo dei limiti, non in assoluto!).

Per poter applicare questo fatto occorre naturalmente avere una *scala* degli infiniti, in modo da sapere quali sono più forti e quali più deboli. Senza entrare nei dettagli, ai fini del nostro corso ci basterà sapere che, per $x\to+\infty$, i seguenti infiniti sono disposti in ordine crescente.

$$\ln x,\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt{x},\ x,\ x^2,\ x^3,\ \dots,\ 2^x,\ \mathrm{e}^x,\ 3^x,\ \dots,\ \mathrm{e}^{x^2},\ \mathrm{e}^{x^3},\ \dots \tag{10.4}$$

È altresì facile mostrare che, in una somma, si possono trascurare, rispetto agli infiniti, anche le costanti,le funzioni che tendono a zero o a un valore finito, le funzioni che non hanno limite, ma rimangono limitate, come le funzioni seno e coseno per $x\to+\infty$.

Un'ulteriore applicazione del concetto di ordine di infinito si ha nel calcolo di limiti in cui si giunge alla forma di indecisione ∞/∞. In questo caso

- se il numeratore è un infinito di ordine superiore, allora il rapporto tende all'infinito;
- se il numeratore è un infinito di ordine inferiore, allora il rapporto tende a zero.

Si potrebbero fare discorsi simili per le quantità che tendono a zero, in quanto anche $0/0$ è una forma di indecisione, ma la cosa ha meno interesse (ed è sensibilmente più complessa) per il nostro corso (ed è sensibilmente più complessa) e non ne parleremo.

Esempi.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+x-1}{3x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}\,.$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x-\ln x}{\mathrm{e}^{x^2}-x^{33}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{x^2}}=0.$

10.8 Qualche esempio di calcolo dei limiti

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x^2}\,.$$

Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{0^+}=1\cdot(+\infty)=+\infty\,.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x^2}\,.$$

Si ha

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{x}=1\cdot\frac{1}{0^-}=1\cdot(-\infty)=-\infty\,.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x}\,.$$

Si ha

$$\ln 1^+ = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty\,.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}\,.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0}\,,$$

per cui i calcoli sulla retta reale estesa non possono essere usati. Osserviamo però che

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)\,,$$

da cui

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3\,.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x}{(x-2)^2}\,.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1-x}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\,.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{(x-2)^2}\,.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\,.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x\,.$$

La situazione è leggermente diversa da quelle esaminate prima, in quanto si giunge alla forma di indecisione $0\cdot\infty$. Si può però scrivere il limite come segue

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Se ora si tiene conto che, per $x\to-\infty$, e^{-x} è esattamente come e^x per $x\to+\infty$, si conclude che il limite vale 0 (l'infinito del numeratore è più debole di quello del denominatore).

10.9 Esercizi

Esercizio 10.1. *Calcolare, se possibile, le seguenti espressioni sulla retta reale estesa.*

1. $-\infty + 3((-\infty)(-2) + 3 - (-1)(+\infty))$;
2. $-\infty - (-2)(3 + (+\infty)(-2)(-\infty))$;
3. $(-\infty)(-\infty) + 2(3(-\infty) - 2(-\infty))$;

4. $\dfrac{3(+\infty)-(-(+\infty)(-\infty)+3)}{1-(+\infty)-(+\infty+(-\infty)(+3))}$;

5. $\dfrac{-\infty(3+(+\infty-(-\infty)))}{1-(+\infty)(-\infty)(+3)}$;

6. $\dfrac{3(+\infty)-(3-(+\infty)(-\infty))}{1-(+\infty)-(+\infty+(-\infty)(+3))}$;

7. $\dfrac{2-(+\infty)(+\infty)(-\infty)+\infty}{(-2+(-\infty))(-\infty)(-3)}$.

Calcolare i limiti indicati.

Esercizio 10.2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,.$

Esercizio 10.3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+1}\,.$

Esercizio 10.4. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+2)\,.$

Esercizio 10.5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)\,.$

Esercizio 10.6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x+1}\,.$

Esercizio 10.7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x+1}\,.$

Esercizio 10.8. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^3+1}\,.$

Esercizio 10.9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{3x-2}\,.$

Esercizio 10.10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}\,.$

Esercizio 10.11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2^x\sqrt{x^2-4}\,.$

Esercizio 10.12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x\sqrt{4-x}\,.$

Esercizio 10.13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x-1}\,.$

Esercizio 10.14. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x-1}\,.$

Esercizio 10.15. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2^x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$

Esercizio 10.16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2^x-(x^3-x+1)\,.$

Esercizio 10.17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x^4-x^2+2}\,.$

Esercizio 10.18. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x)}{x^2-1}\,.$

Esercizio 10.19. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^3+1}$.

Esercizio 10.20. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2^{x-2}}{4-x^2}$.

Esercizio 10.21. $\lim_{x\to 2} \mathrm{e}^{2-x}$.

Esercizio 10.22. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2}+x+2$.

Esercizio 10.23. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x-1}$.

Esercizio 10.24. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x}}$.

Esercizio 10.25. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{\ln x}$.

Esercizio 10.26. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-2\ln x}{-\sin(2x)+x}$.

Esercizio 10.27. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\ln(x^3-3}{\mathrm{e}^{x}-\sin x+x^2}$.

Esercizio 10.28. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-\ln(x^3-1)+2}{\mathrm{e}^{x}+\sin^2 x+x^3}$.

Esercizio 10.29. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-x^3}{\mathrm{e}^{x}+x^3}$.

Esercizio 10.30. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-\ln(x^2)}{\mathrm{e}^{-x}+\sin(x^2)}$.

Esercizio 10.31. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-x^5}{\mathrm{e}^{-x}-\sin x+2}$.

Esercizio 10.32. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Esercizio 10.33. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x-1)}{\sqrt{x^3-1}}$.

Esercizio 10.34. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Esercizio 10.35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2)}{\ln x}$.

Esercizio 10.36. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$.

Esercizio 10.37. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}$.

Esercizio 10.38. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\left({}^1\!/x\right)}{x}$.

Esercizio 10.39. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-x}$.

Esercizio 10.40. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$.

Esercizio 10.41. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

Esercizio 10.42. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x}$.

11 Derivate per funzioni di una variabile

11.1 Tangenti a una circonferenza e tangenti a una curva

Prima di affrontare il problema della derivazione di una funzione, è opportuno richiamare il concetto di tangente a una circonferenza, evidenziandone i passi salienti. Ci sono sostanzialmente tre modi per definire la tangente a un circonferenza, di cui indicheremo con O il centro.

1ª *definizione* La tangente a una circonferenza in un suo punto P è la perpendicolare per P al raggio OP.

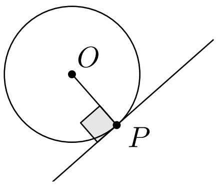


Figura 11.1 *Tangente a una circonferenza: la perpendicolare al raggio*

2ª *definizione* La tangente a una circonferenza in un punto P è l'unica retta per P avente in comune con la circonferenza solo il punto P.

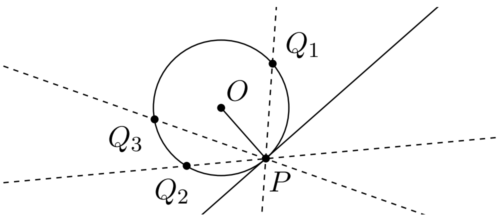


Figura 11.2 *Tangente a una circonferenza: l'unica retta avente un solo punto in comune con la circonferenza*

3ª *definizione* La tangente a una circonferenza in un suo punto P si ottiene da un "processo al limite": considerata la secante per P e un altro punto Q, se si fa tendere Q a P, la "posizione limite" è quella della tangente; si usa anche dire che la tangente è una "secante passante per due punti coincidenti", ma l'espressione, almeno enunciata così brutalmente, non ha senso, perché due punti coincidenti sono un unico punto e di rette per un punto ce ne sono infinite.

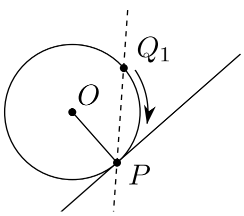


Figura 11.3 *Tangente a una circonferenza: la posizione limite della secante*

Ci possiamo ora porre il problema: è possibile estendere le definizioni precedenti a una curva generica che non sia una circonferenza? Sicuramente la prima definizione non può essere usata in generale, perché una curva generica non ha un centro e un raggio; purtroppo nemmeno la seconda definizione può essere usata. Se si esamina il grafico che segue, la retta t ha, intuitivamente, il diritto di essere chiamata tangente alla curva (grafico del seno) nel punto P, ma essa ha ben più di un punto in comune con la curva.

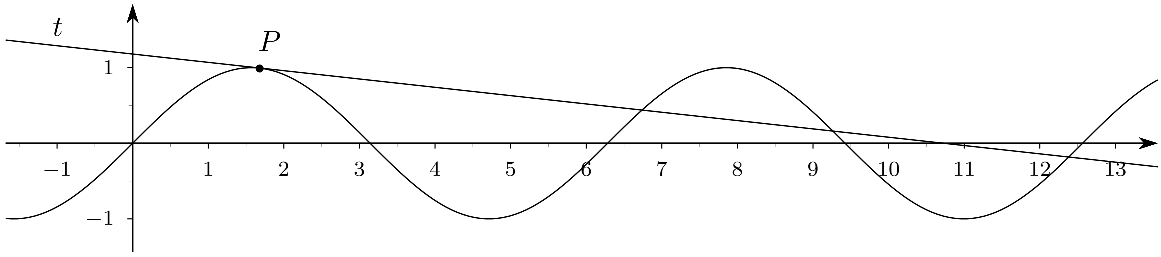


Figura 11.4 *Tangente alla funzione seno in un punto P*

La definizione che può invece essere estesa al caso generale è la terza e questa generalizzazione conduce al concetto di derivata.

11.2 Derivata e tangente al grafico di una funzione

Sia data, nel piano cartesiano, una curva di equazione $y = f(x)$ (cioè il grafico di una funzione reale di variabile reale). Su questa curva fissiamo un punto $P(x_P, y_P) = (x_P, f(x_P))$. Il problema di cui vogliamo occuparci è il seguente: è possibile dare una definizione formalmente ineccepibile di tangente alla curva, sulla falsariga di quanto fatto nel caso della circonferenza (3ª definizione), e, in caso di risposta affermativa, è possibile costruire un algoritmo generale per trovare l'equazione di questa retta tangente (anzi, ci basterà il coefficiente angolare, perchè ovviamente la tangente, se esiste, passerà per P).

Ricordiamo che, se si hanno due punti $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$, aventi diversa ascissa, cioè non appartenenti a una retta verticale, la retta per i due punti ha coefficiente angolare

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

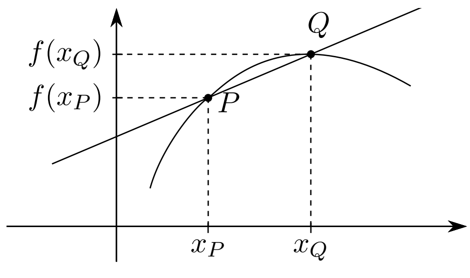


Figura 11.5 *Secante a una curva per due punti*

Se ora consideriamo una funzione di equazione $y = f(x)$ e un punto $P(x_P, f(x_P))$, per trovare la tangente in P possiamo procedere prendendo un secondo punto $Q(x_Q, f(x_Q))$ sul grafico e tracciando la retta per P e Q, detta *retta secante*, la quale avrà coefficiente angolare

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\,. \tag{11.1}$$

Definizione 11.1. *Il rapporto* $\Delta f/\Delta x$*, definito nella formula* (11.1) *si chiama* rapporto incrementale *della funzione* f *relativo al punto* x_P *e all'incremento* $h = x_Q - x_P = \Delta x$*.*

Se ora prendiamo il punto Q "sempre più vicino a P", la secante si avvicina sempre più a quella che, intuitivamente, ci pare la miglior candidata a essere definita retta *tangente*.

In generale indicheremo con x_0, o genericamente con x, l'ascissa del punto P e con $x_0 + h$ l'ascissa del punto Q. Il rapporto incrementale si scriverà allora

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,. \tag{11.2}$$

Definizione 11.2. *Data una funzione di equazione* $y = f(x)$*, definita in tutto un intorno* I_{x_0} *di un punto* x_0 *del dominio, si dice* derivata prima *della funzione* f *nel punto* x_0*, e si indica con*

$$f'(x_0)\,, \quad \textit{oppure} \; \mathrm{D}f(x_0)\,,$$

il limite, se esiste ed è finito*, del rapporto incrementale, al tendere di* Q *a* P

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,. \tag{11.3}$$

In questo caso (cioè se il limite (11.3) esiste finito*), la funzione si dice* derivabile *in* x_0*.*

Esempio. Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$, nel punto di ascissa 1. Per il coefficiente angolare si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{1+h} - \mathrm{e}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^1\mathrm{e}^h - \mathrm{e}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}\,\mathrm{e}^h - \mathrm{e}}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}\,\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}\,.$$

Se teniamo conto che la retta deve passare per $P(1, \mathrm{e})$, otteniamo

$$y - \mathrm{e} = \mathrm{e}(x - 1) \Rightarrow y = \mathrm{e}\,x\,.$$

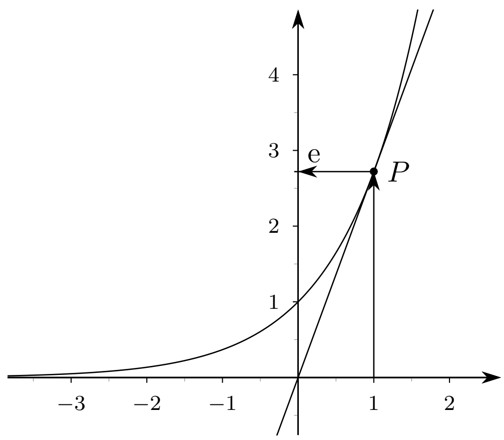


Figura 11.6 *Tangente alla funzione* e^x *nel punto di ascissa* 1

In generale non è indispensabile impostare il procedimento di calcolo del limite sulla base di un punto x_0 fissato: è possibile ricavare il coefficiente angolare della retta tangente a una curva di equazione $y = f(x)$ in un punto di ascissa x_0 qualsiasi. Così facendo si otterrà una espressione dipendente da x_0, e non più un singolo valore numerico. Questa espressione si chiama la *funzione derivata prima*, o semplicemente *funzione derivata* o a volte addirittura solo *derivata*. In generale, se non c'è possibilità di equivoco, in questi casi si scrive semplicemente x al posto di x_0.

Definizione 11.3. *Data una funzione f, definita in un intervallo I, si dice* funzione derivata prima *di f la funzione f' espressa da*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,, \tag{11.4}$$

nei punti di ascissa $x \in I$ per i quali tale limite esiste finito.

Esempio. Riprendiamo in esame la funzione esponenziale dell'esempio precedente, e calcoliamo la derivata in un punto x generico:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - e^x}{h} = e^x \cdot 1 = e^x\,.$$

Naturalmente se al posto di x mettiamo il numero 1, come nell'esempio precedente, otteniamo nuovamente il numero e.

Esempio. Calcolare la derivata di $f(x) = x^3$. Si ha

$$D(x^3) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x_2 + 3xh + h^2 = 3x^2\,.$$

Ribadiamo che questo risultato significa che

in corrispondenza all'ascissa	il grafico di $f(x) = x^3$ ammette retta tangente con coefficiente angolare
...	...
$x = -2$	$m = f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$
$x = -1$	$m = f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$
$x = 0$	$m = f'(0) = 3(0)^2 = 0$
$x = 1$	$m = f'(12) = 3(1)^2 = 3$
$x = 2$	$m = f'(2) = 3(2)^2 = 12$
$x = 3$	$m = f'(3) = 3(3)^2 = 27$
...	...

Anche per le derivate, trattandosi di un procedimento di limite, si potranno considerare separatamente il limite destro e il limite sinistro: si parlerà in questo caso di *derivata destra* e *derivata sinistra*.

Esempio. Sia data la funzione $f(x) = |x|$ e vediamo cosa succede per $x = 0$, separando il caso in cui per l'incremento h si ha $h < 0$ ($h \to 0^-$), da quello in cui si ha $h > 0$ ($h \to 0^+$):

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1\,,$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1\,.$$

Questo risultato ha una evidente interpretazione grafica: la tangente sulla sinistra di 0 ha coefficiente angolare -1, sulla destra 1:

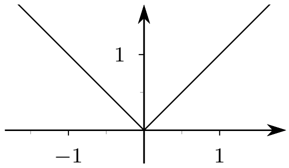


Figura 11.7 *La funzione valore assoluto*

In situazioni come quella appena vista si parla di *punto angoloso*: la derivata destra e quella sinistra sono entrambe finite, ma diverse.

La derivabilità di una funzione in un punto è legata alla continuità. Si dimostra infatti il seguente teorema:

Teorema 11.4. *Se una funzione è derivabile in un punto x_0 è anche continua in x_0.*

Non è vero il viceversa di questo teorema: una funzione può essere continua senza essere derivabile, come dimostra l'esempio della funzione valore assoluto.

Esempio. Nella definizione di derivata abbiamo chiesto che il limite del rapporto incrementale fosse finito: ci sono diversi motivi per fare questo (e la maggior parte di questi esulano dagli scopi di questo corso). Segnaliamo solo che si può presentare il caso che la tangente al grafico di una funzione può benissimo essere una retta verticale e, si sa, le rette verticali hanno la cattiva abitudine di non avere un coefficiente angolare. Come esempio consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e calcoliamo il limite del rapporto incrementale nell'origine.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h^3}} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

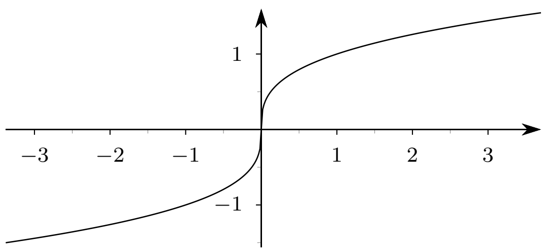


Figura 11.8 *La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$*

Nella tabella 11.1 sono proposte, senza dimostrazione, le regole di derivazione più importanti, riguardanti la somma, il prodotto, ecc. di funzioni derivabili.

Funzione	***Derivata***
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\dfrac{1}{f(x)}$	$-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tabella 11.1 *Regole di derivazione*

È opportuno evidenziare in dettaglio l'uso dell'ultima formula della tabella 11.1, che si riferisce alla regola di derivazione della composta di due funzioni. Come al solito ragioniamo su un esempio. Abbiamo già provato, in un esempio nella pagina 108 e nell'esempio successivo, che la derivata di $f(x) = \mathrm{e}^x$ è $f'(x) = \mathrm{e}^x$, e che la derivata di $g(x) = x^3$ è $g'(x) = 3x^2$. Se ora consideriamo la composta delle due funzioni

$$h(x) = f(g(x)) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{x^3},$$

la derivata sarà

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \mathrm{e}^{g(x)} \cdot g'(x) = \mathrm{e}^{x^3} 3x^2 = 3x^2 \mathrm{e}^{x^3}.$$

Nella tabella 11.2 proponiamo le regole per derivare le funzioni di uso più comune, ancora senza dimostrazione.

Funzione	***Derivata***
k	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ x \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	nx^{n-1}
$x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$	ax^{a-1}
a^x	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
$\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x} \cdot \log_a \mathrm{e}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f^a(x)$	$nf^{a-1}(x) \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}(\ln a) f'(x)$
$\mathrm{e}^{f(x)}$	$\mathrm{e}^{f(x)} f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)} \log_a \mathrm{e}$
$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

Funzione	***Derivata***
$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\operatorname{tg} f(x)$	$\big(1+\operatorname{tg}^2 f(x)\big)f'(x) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$	$\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$

Tabella 11.2 *Derivate delle funzioni più comuni*

Si noti che la regola di derivazione delle potenze è sempre la stessa, quello che cambia è il dominio della funzione potenza. La regola che riguarda il caso in cui l'esponente sia un numero reale qualunque va bene anche per il caso dei radicali, e qui bisogna tenere conto che se l'indice è pari, la x deve essere maggiore di 0, se l'indice è dispari, la x può essere anche minore di 0. Esattamente come succede nel caso della radice cubica, se $x = 0$ le funzioni radice non risultano derivabili(1). Riportiamo in dettaglio le formule nei due casi che più ci interesseranno, cioè quello della radice quadrata e della radice cubica.

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Esempi.

1. Calcolare la derivata di
$$\sin(x^2+x)\,.$$
Si ha
$$\big(\sin(x^2+x)\big)' = (2x+1)\cos(x^2+x)\,.$$

2. Calcolare la derivata di
$$(x^2+5)^{27}\,.$$
Si ha
$$\big((x^2+5)^{27}\big)' = 27(x^2+5)^{26}(2x) = 54x(x^2+5)^{26}\,.$$

3. Calcolare la derivata di
$$\frac{x^2}{x^3+x^2-1}\,.$$
Si ha
$$\left(\frac{x^2}{x^3+x^2-1}\right)' = \frac{2x(x^3+x^2-1) - x^2(3x^2+2x)}{(x^3+x^2-1)^2} = \dots$$

4. Calcolare la derivata di
$$\ln(\sin x^2)\,.$$
Si ha
$$\big(\ln(\sin x^2)\big)' = \frac{1}{\sin x^2}\,(\cos x^2)\,2x\,.$$
Si noti, in questo esempio, l'applicazione ripetuta della regola di derivazione delle funzioni composte.

[1] Si può osservare che il caso delle potenze è abbastanza complesso: prestare la massima attenzione!

11.3 Derivate successive

Poiché la funzione derivata prima è a sua volta una funzione, ci si può chiedere se essa sia derivabile oppure no. Nei casi delle funzioni elementari che a noi interessano la risposta è affermativa e conduce al concetto di derivata seconda, terza, ecc., indicate con i simboli

$$f''(x)\ \Big(\mathrm{D}^2(f(x))\Big),\quad f'''(x)\ \Big(\mathrm{D}^3(f(x))\Big),\ f^{\mathrm{iv}}(x)\ \Big(\mathrm{D}^4(f(x))\Big),\ f^{(n)}(x)\ \Big(\mathrm{D}^{(n)}(f(x))\Big)$$

Esempi.

1. Calcolare la derivata 3ª di $f(x)=\mathrm{e}^x$. Si ha, facilmente, $f'''(x)=\mathrm{e}^x$.
2. Calcolare le derivate prima, seconda, ecc., $(n+1)$-esima di $f(x)=x^n$. Si ha

$$f'(x)=nx^{n-1},\ f''(x)=n(n-1)x^{n-2},\ f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$
$$\dots,\ f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots 1=n!,\ f^{n+1}(x)=0\,.$$

11.4 Polinomi di Taylor

Le funzioni polinomiali sono facilmente calcolabili in tutti i punti del loro dominio, in quanto coinvolgono solo operazioni elementari (somma e prodotto). Il calcolo esplicito delle altre funzioni è di solito impossibile "in termini esatti" e si ricorre ad opportune approssimazioni. Basta pensare, ad esempio, alla funzione $f(x)=\sqrt[4]{x}$: mentre è immediato che $\sqrt[4]{16}=32$, è lecito chiedersi come si possa calcolare $\sqrt[4]{17}$, ovvero qual è l'algoritmo che una calcolatrice (o un computer) usa per fornire un risultato del tipo

$$\sqrt[4]{17}\simeq 2.030543185\dots$$

Stesso discorso per la quasi totalità delle altre funzioni, come seno, coseno, esponenziale, ecc.

Ci sono numerosi metodi per approssimare, con il dovuto grado di accuratezza, queste funzioni. Ci occuperemo qui dei *Polinomi di Taylor* che, anche se non costituiscono il metodo in assoluto più efficente, è quello più immediato da trattare, almeno per le funzioni che ci interessano. Inoltre i polinomi di Taylor sono teoricamente importanti, perché è proprio il loro uso che rende possibile la dimostrazione di un gran numero dei risultati dell'analisi, risultati che noi abbiamo dato senza giustificazione.

Definizione 11.5. *Data una funzione $f(x)$, definita in un intervallo e derivabile n volte in un punto x_0 dell'intervallo, si chiama* Polinomio di Taylor di ordine n della funzione f, relativo al punto[2] x_0*, e si indica con $T_{n,x_0}(x)$, il seguente polinomio*

$$T_{n,x_0}(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{11.5}$$

Il polinomio $T_{n,x_0}(x)$ ha le seguenti proprietà:

1. ha, in x_0, lo stesso valore della funzione: $T_{n,x_0}(x_0)=f(x_0)$;
2. ha, in x_0, la stessa derivata prima della funzione: $T'_{n,x_0}(x_0)=f'(x_0)$;
3. ha, in x_0, la stessa derivata seconda della funzione: $T''_{n,x_0}(x_0)=f''(x_0)$;
4. $\dots$;
5. ha, in x_0, la stessa derivata n-esima della funzione: $T^{(n)}_{n,x_0}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$;
6. è, *in un intorno di x_0*, il miglior polinomio di grado n approssimante $f(x)$.

[2] Su alcuni testi si usa il termine *Polinomio di Taylor* quando si considera un punto x_0 qualunque, *Polinomio di MacLaurin* quando il punto x_0 coincide con lo zero. I nomi sono legati ai matematici inglesi Brook Taylor (1685 – 1731) e Colin Maclaurin (1698 – 1746) che li introdussero. Noi useremo solo il primo nome.

Attenzione: le proprietà $1 \dots 5$ elencate sopra valgono *solo ed esclusivamente* nel punto x_0, non negli altri punti (ma se può succedere per certe funzioni che l'uguaglianza sia valida anche fuori dal punto x_0); l'ultima proprietà è valida in un intorno del punto x_0 e, purtroppo, non si può stabilire a priori quanto grande sia questo intorno. Di solito all'aumentare dell'ordine l'approssimazione migliora sempre di più, ma questo non succede sempre: ci sono addirittura degli esempi in cui all'aumentare del grado l'approssimazione peggiora, altre situazioni in cui i polinomi di Taylor forniscono un'approssimazione che non ha alcun interesse applicativo.

Si noti che,

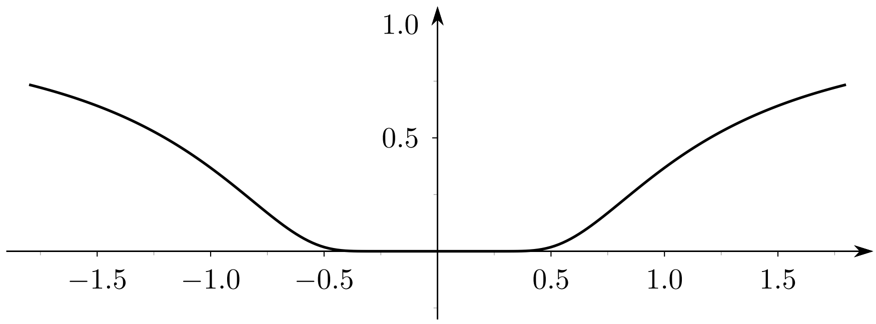
1. se $n = 0$, il polinomio è di grado zero (cioè è una costante) e il suo grafico è la retta orizzontale passante per $\big(x_0, f(x_0)\big)$;
2. se $n = 1$, il polinomio è di grado 1 e il suo grafico è quello della retta tangente al grafico della funzione nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$;
3. se $n = 2$, il polinomio è di grado 2 e il suo grafico è quello della parabola con asse verticale tangente al grafico della funzione nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Il primo problema che si presenta nella scrittura di un efficiente polinomio di Taylor è quello di scegliere opportunamente il punto x_0: occorre infatti che in x_0 siano calcolabili facilmente sia la funzione che le sue derivate. Molto spesso, in particolare nei casi di nostro interesse, questo avviene per il punto 0.

Esempio. Cominciamo con il proporre un esempio in cui le cose non vanno molto bene. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} .$$

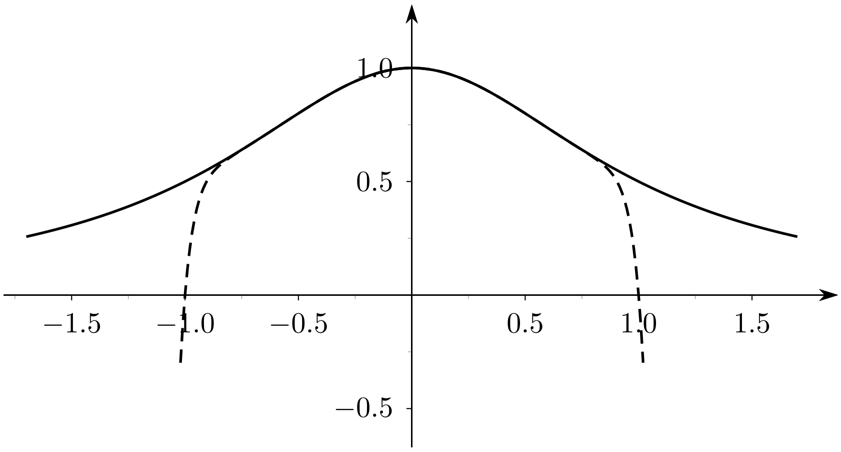
Si può provare (con un po' di pazienza!) che la funzione è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e che tutte le derivate, di qualsiasi ordine, sono nulle nell'origine. Se ne deduce che il polinomio di Taylor di ordine qualsiasi, di punto iniziale 0, è sempre il polinomio identicamente nullo ed è evidente che il polinomio identicamente nullo *non* costituisce una buona approssimazione "globale" della funzione. Il grafico che segue mostra solo che l'approssimazione è "ad occhio" accettabile nei pressi dell'origine (il polinomio di Taylor non è rappresentato in quanto coincide con l'asse x), ma ovviamente approssimare questa funzione, anche in un intorno piccolo dell'origine, con zero, è di poca utilità pratica.



Esempio. Come secondo esempio "patologico" proponiamo una situazione in cui all'aumentare del grado l'intorno in cui l'approssimazione vale non aumenta, se non in maniera insignificante. Il grafico che segue si riferisce alla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

(con linea continua) e al suo polinomio di Taylor (in tratteggio) di ordine 22 nell'origine.



Per quanto si aumenti l'ordine, il polinomio non riesce a fornire un'approssimazione accettabile fuori dall'intervallo $[-1, 1]$. Come utile esercizio si può provare che il polinomio di Taylor di ordine 8 e di punto iniziale 0 della funzione appena considerata è

$$T_{8,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \,.$$

Naturalmente dobbiamo fornire anche esempi in cui le cose vanno per il verso giusto: lo facciamo negli esempi che seguono, relativi alla funzione e^x e alla funzione $\sin(x)$: con tratto continuo la funzione, in tratteggio i vari polinomi di Taylor.

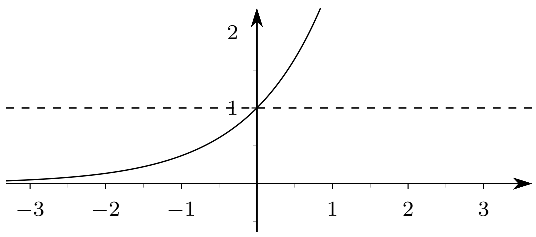


Figura 11.9 e^x *e* $T_{0,0}(x)$

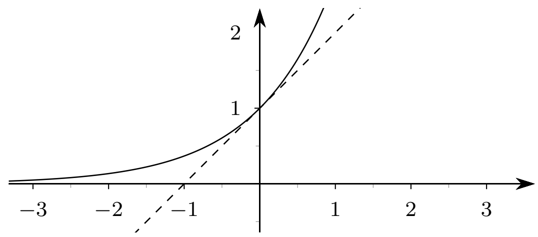


Figura 11.10 e^x *e* $T_{1,0}(x)$

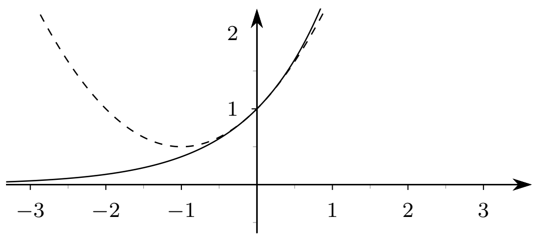


Figura 11.11 e^x *e* $T_{2,0}(x)$

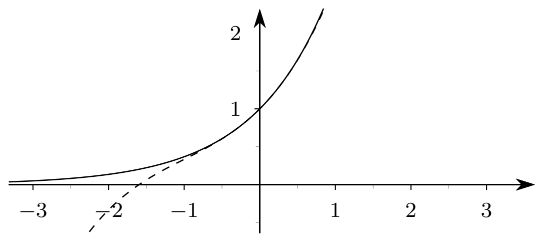


Figura 11.12 e^x *e* $T_{3,0}(x)$

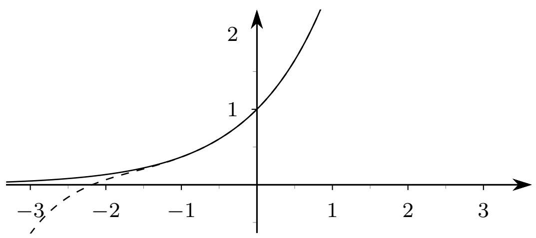


Figura 11.13 e^x *e* $T_{5,0}(x)$

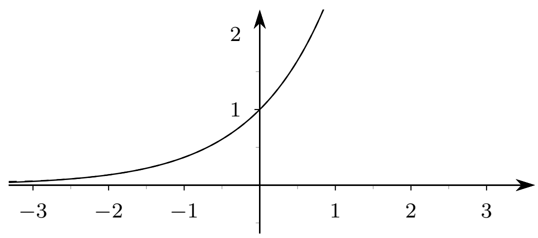


Figura 11.14 e^x *e* $T_{10,0}(x)$

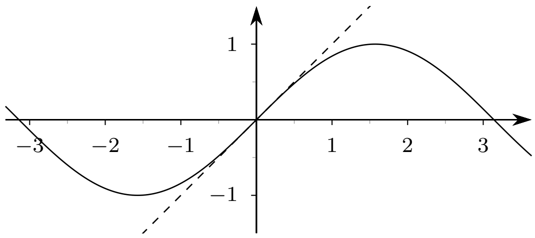


Figura 11.15 $\sin x$ e $T_{1,0}(x)$

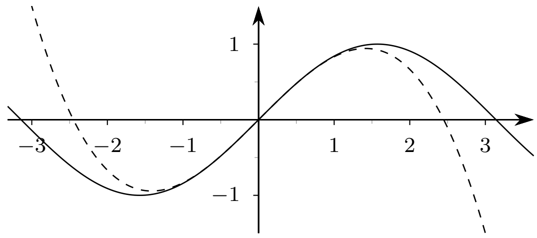


Figura 11.16 $\sin x$ e $T_{3,0}(x)$

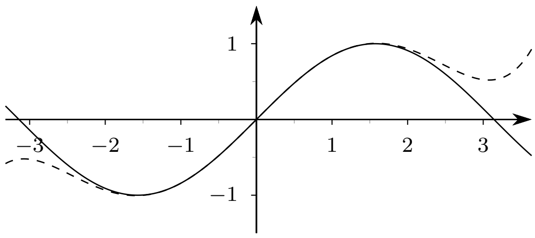


Figura 11.17 $\sin x$ e $T_{5,0}(x)$

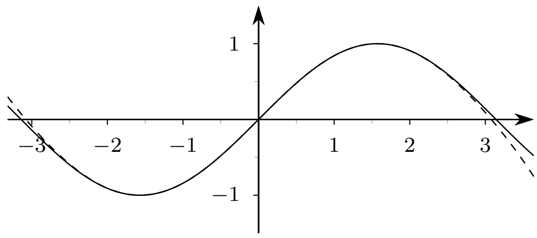


Figura 11.18 $\sin x$ e $T_{7,0}(x)$

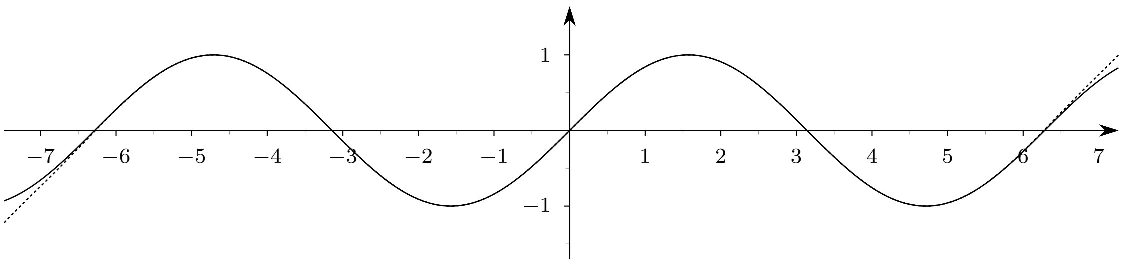


Figura 11.19 $\sin x$ e $T_{17,0}(x)$

Per concludere ritorniamo brevemente al problema che avevamo proposto all'inizio di questo paragrafo, e cioè il calcolo della radice quarta di 17. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$ e le sue prime quattro derivate, che calcoliamo nel punto $x_0 = 16$, che vogliamo usare come punto iniziale (o punto base) per la nostra formula di Taylor di ordine 4. Si ha quanto segue.

1. $f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow \quad f(16) = 2.$
2. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \quad \Rightarrow \quad f'(16) = \dfrac{1}{32}.$
3. $f''(x) = -\dfrac{3}{16\sqrt[4]{x^7}} \quad \Rightarrow \quad f''(16) = -\dfrac{3}{2048}.$
4. $f'''(x) = \dfrac{21}{64\sqrt[4]{x^{11}}} \quad \Rightarrow \quad f'''(16) = \dfrac{21}{131\,072}.$
5. $f^{(4)}(x) = -\dfrac{231}{256\sqrt[4]{x^{15}}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(16) = -\dfrac{231}{8\,388\,608}.$

Si noti che abbiamo scelto come punto base 16 perché è "vicino" a 17, e perché tutte le derivate sono calcolabili esattamente in 16. Con questi valori possiamo scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4, relativo al punto base 16:

$$T_{4,16}(x) = 2 + \frac{1}{32}(x - 16 + x) - \frac{3}{4096}(x-16)^2 + \frac{7}{262144}(x-16)^3 - \frac{77}{67108864}(x-16)^4$$

Si trova, naturalmente, $T_{4,16}(16)$=2, e poi, ed è questo che ci interessava,

$$T_{4,16}(17) \simeq 2.030543134\,,$$

risultato che coincide fino alla sesta cifra dopo la virgola con quello già scritto precedentemente: se avessimo preso un polinomio di grado più elevato, avremmo avuto un'approssimazione ancora migliore (anche se non è banale valutare quale sia il grado di approssimazione).

È molto importante osservare che questa approssimazione funziona bene "vicino a 16": se per esempio la usiamo per calcolare $\sqrt[4]{1}$, che vale ovviamente 1, otteniamo $\sqrt[4]{1} \simeq 1.218246266$, risultato chiaramente inaccettabile. Il tutto è confermato dal grafico della funzione $\sqrt[4]{x}$ e di $T_{4,16}(x)$: i due grafici sono quasi coincidenti nei pressi di 16, sono invece sensibilmente diversi nei pressi di 1.

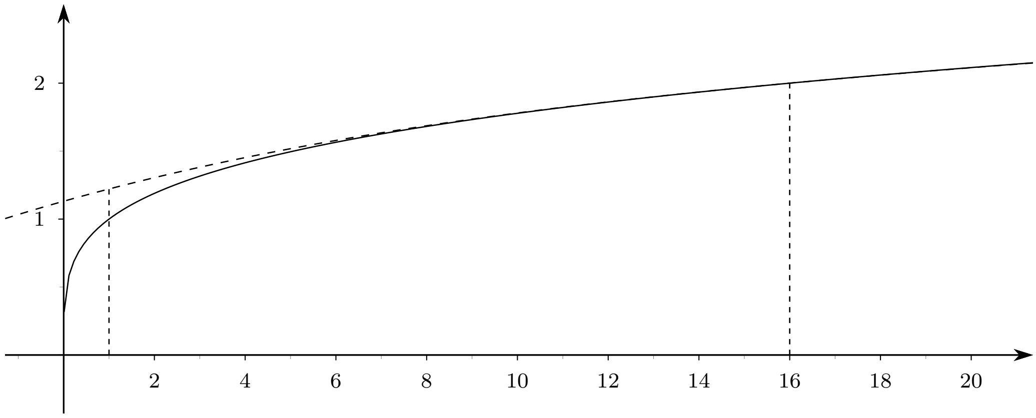


Figura 11.20 $\sqrt[4]{x}$ *e* $T_{4,16}(x)$

Lasciamo ai volenterosi di verificare che, per la stessa funzione,

$$T_{4,1}(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2 + \frac{7}{128}(x-1)^3 - \frac{77}{2048}(x-1)^4\,,$$

il cui grafico è rappresentato nella figura 11.21

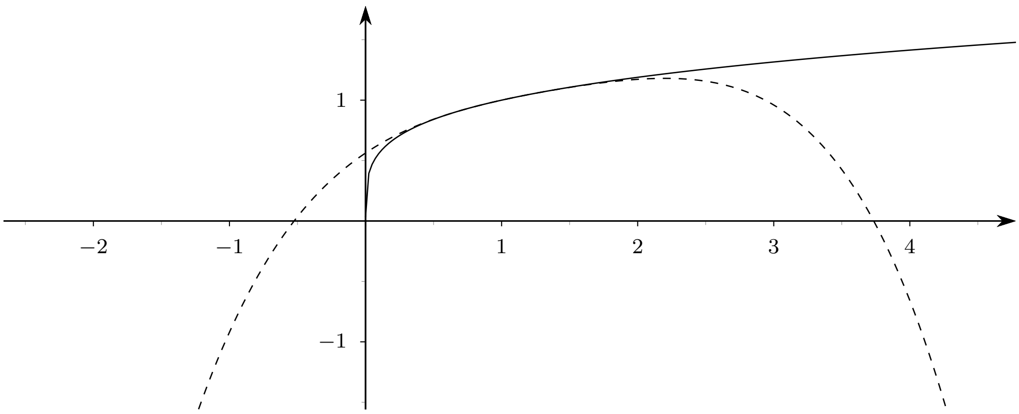


Figura 11.21 $\sqrt[4]{x}$ *e* $T_{4,1}(x)$

Ovviamente questa approssimazione funzione molto meglio della precedente vicino a 1, ma molto peggio vicino a 16; addirittura se la usassimo per calcolare $\sqrt[4]{16}$ otterremmo

$$\sqrt[4]{16} \simeq -1735.15478515625\colon \quad \text{un vero disastro!}$$

11.5 Esercizi

Esercizio 11.1. *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni.*

1. $\sqrt{x} + 2x^5$;
2. $x^3 - 3x^2 - 2$;
3. $\ln x - x^4 + 4x^2 - x$;
4. $\mathrm{e}^x - 2 - x^6$;
5. $\mathrm{e}^x \cdot x^5$;
6. $-\sqrt{x}\big(x^3 - x^2 + x\big)$;
7. $\mathrm{e}^x \ln x$;
8. $\ln(x)\mathrm{e}^x\big(x^2 + x + 1)$;
9. $\dfrac{x-1}{x+3}$;
10. $\dfrac{x - x^2}{\ln x + x}$;
11. $\dfrac{x}{2^x + \sqrt{x}}$.

Esercizio 11.2. *Calcolare le derivate prime e seconde delle seguenti funzioni. Attenzione: in alcuni casi compaiono diverse lettere nelle funzioni qui di seguito; solo una però (quella esplicitamente indicata) è la variabile, le altre sono semplicemente dei parametri che vanno dunque trattati come costanti.*

1. $f(x) = \sqrt{1-4x} + 2x^5$;
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$;
3. $f(x) = \ln(x^4 + 4x^2 - x)$;
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x-2} - x^6$;
5. $f(x) = \mathrm{e}^{5x}\, x^5$;
6. $f(x) = -\sqrt{x^3 - x^2 + x}$;
7. $f(x) = \mathrm{e}^{x \ln(2x)}$;
8. $f(x) = \ln\Big(\mathrm{e}^3 x\big(x^2 + x + 1\big)\Big)$;
9. $f(x) = x^2 k + y \ln(x^2 - hx)$;
10. $f(x) = \mathrm{e}^{hx-k}$;

11. $f(y) = ky^3 + 2y^2 - hy$;
12. $f(y) = \sin(ky^2)$;
13. $f(x) = \sin(kx^2 - yx)$;
14. $f(y) = xy - x^2y^2$;
15. $f(y) = y\cos(ky) + xy$;
16. $f(z) = xyz^2$;
17. $f(z) = xz^3 + yz^2$;
18. $f(y) = x^3y - z^4 \ln\big(y^3 + k\big)$;
19. $f(x) = \mathrm{e}^{yx} + zx$.

Esercizio 11.3. *Per le seguenti funzioni determinare i polinomi di Taylor indicati.*

1. $f(x) = x^2\,; \quad T_{2,0}(x),\ T_{3,0}(x),\ T_{2,1}(x)$.
2. $f(x) = \ln x\,; \quad T_{2,1}(x),\ T_{3,1}(x),\ T_{2,\mathrm{e}^2}(x)$.
3. $f(x) = 2^x\,; \quad T_{3,0}(x),\ T_{3,1}(x)$.
4. $f(x) = x^2 + x^4 - 1\,; \quad T_{3,0}(x),\ T_{4,0}(x)$.

Esercizio 11.4. *Per le seguenti funzioni determinare i polinomi di Taylor indicati. Valutare se sarebbe stato possibile migliorare la scelta del punto base rispetto a quello indicato.*

1. $f(x) = \ln x\,; \quad T_{2,\mathrm{e}}(x)$.
2. $f(x) = \ln(x^2 + x)\,; \quad T_{3,1}(x)$.
3. $f(x) = x\mathrm{e}^x\,; \quad T_{1,e}(x)$.
4. $f(x) = x + \mathrm{e}^x\,; \quad T_{2,0}(x)$.
5. $f(x) = \sin x\,; \quad T_{3,1}(x)$.
6. $f(x) = \sin(x^2 + x)\,; \quad T_{2,0}(x)$.
7. $f(x) = x^2 + x\,; \quad T_{3,e}(x)$.
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}\,; \quad T_{2,0}(x)$.

12 Grafici di funzioni di una variabile

L'introduzione del concetto di derivata si rivela un importante successo per risolvere il problema di studiare le proprietà delle funzioni, fino a giungere al tracciamento di un grafico significativo. La parte dell'analisi che studia le proprietà delle funzioni che si possono ricavare sulla base delle loro derivate si chiama *calcolo differenziale*. Tale importante settore della matematica si basa su alcuni teoremi classici, di alcuni dei quali (quelli più importanti ai nostri fini) ci limiteremo a fornire gli enunciati e una giustificazione grafica. Si tratta dei cosiddetti *teoremi fondamentali del calcolo differenziale*: i teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Conseguenza di questi teoremi è la famosa *regola di l'Hôpital* per il calcolo di limiti in forma indeterminata.

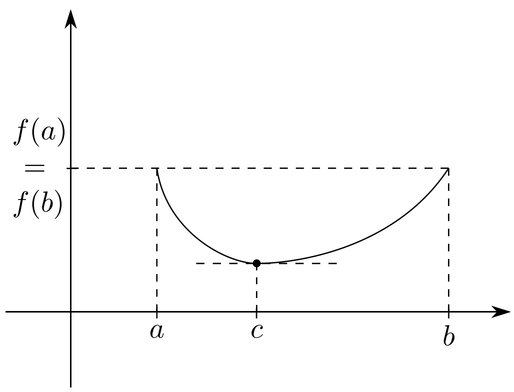
12.1 I teoremi fondamentali del calcolo differenziale

Teorema 12.1 (Teorema di Rolle)**.** *Sia f una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ e avente le seguenti proprietà:*

1. *f è continua in $[a, b]$ (compresi gli estremi!);*
2. *f è derivabile almeno in $]a, b[$ (potrebbe non essere derivabile negli estremi, per esempio potrebbe avere derivata infinita negli estremi);*
3. *$f(a) = f(b)$ (le "quote" iniziale e finale del grafico sono identiche).*

Allora esiste almeno un punto c interno *ad $[a, b]$ dove la derivata prima della funzione si annulla.*

Le figure che seguono danno una giustificazione grafica di questo risultato, se si tiene conto che avere derivata nulla significa avere tangente orizzontale. Il punto (o i punti di cui parla il teorema si possono chiamare "*punti di Rolle*")



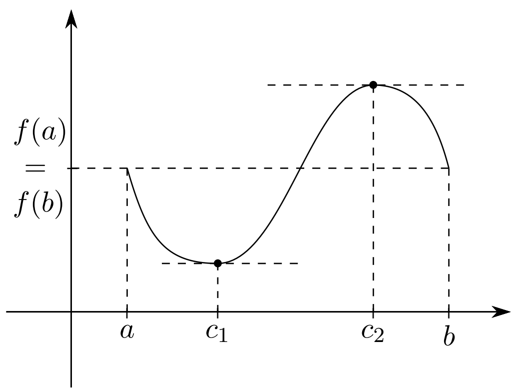


Figura 12.1 *Esempi di funzioni con uno e due "punti di Rolle"*

Approfittiamo di questo teorema per fare delle osservazioni su che cosa significhi *condizione sufficiente*. Le tre condizioni presenti nell'enunciato di questo teorema sono delle condizioni sufficienti per la validità dello stesso. Infatti se anche una o più di queste condizioni manca, non si può concludere con la tesi, come dimostrano i tre grafici che seguono: nel primo manca solo l'ipotesi di continuità in tutto $[a, b]$, nel secondo manca solo l'ipotesi di derivabilità all'interno di $[a, b]$, nel terzo manca solo l'ipotesi che le quote agli estremi siano uguali. In tutti e tre i casi non esiste alcun punto di Rolle.

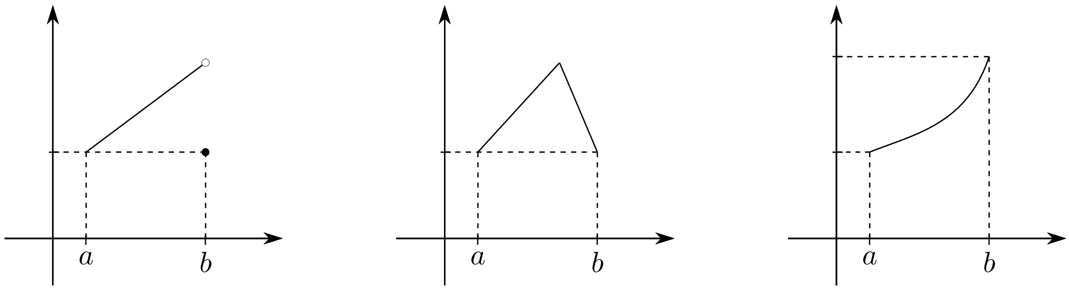


Figura 12.2 *Tre esempi di non applicabilità del Teorema di Rolle*

Tutto questo non significa affatto che se mancano una o più delle tre condizioni presenti nell'enunciato del teorema non esiste alcun punto di Rolle, come mostra il seguente grafico, in cui mancano addirittura tutte e tre le condizioni, ma dove esistono addirittura due punti in cui il grafico ha tangente orizzontale.

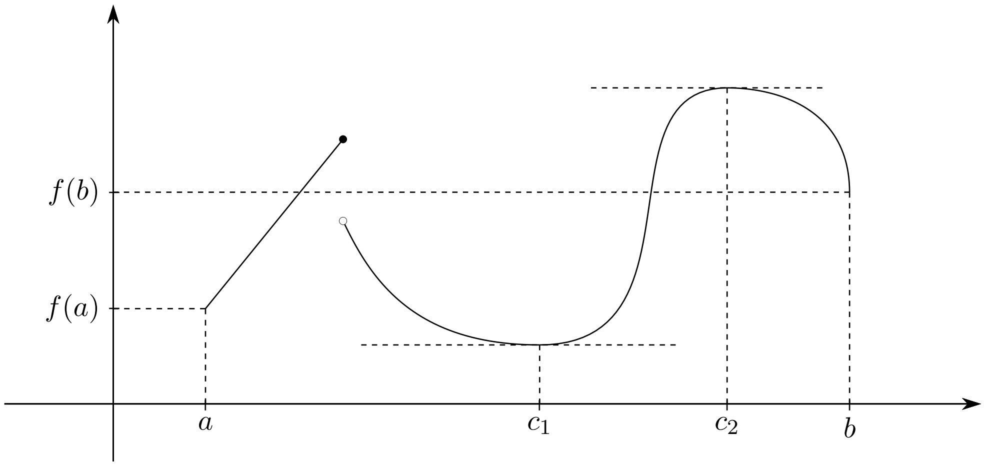


Figura 12.3 *Un esempio in cui esistono* punti di Rolle, nonostante le ipotesi non siano verificate

Il motivo di questo comportamento è da ricercarsi nel fatto che le condizioni per la validità del Teorema di Rolle *non sono necessarie*: anche se mancano, la tesi può essere ugualmente vera.

Esempio. Se una funzione soddisfa le ipotesi del teorema, almeno un punto di Rolle esiste sicuramente. Per trovarlo analiticamente basterà risolvere l'equazione, nell'incognita c, $f'(c) = 0$.

Consideriamo la funzione, avente dominio l'intervallo $[0, 1]$,

$$f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 1\,.$$

Essa soddisfa chiaramente le ipotesi del teorema di Rolle, per cui deve esistere almeno un punto c, *interno* al dominio, dove $f'(c) = 0$. Per trovarlo basterà risolvere l'equazione

$$15c^2 - 10c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \vee c = \frac{2}{3}\,.$$

Solo il punto $c = 2/3$ va bene, perchè l'altro è situato proprio sulla frontiera del dominio.

Teorema 12.2 (Teorema di Lagrange)**.** *Sia f una funzione definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ e avente le seguenti proprietà:*

1. *f è continua in $[a, b]$ (compresi gli estremi!);*
2. *f è derivabile almeno in $]a, b[$ (potrebbe non essere derivabile negli estremi, per esempio potrebbe avere derivata infinita negli estremi).*

Allora esiste almeno un punto c interno *ad $[a, b]$ dove per la derivata prima della funzione si ha*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Siccome il numero $(f(b) - f(a))/(b - a)$ è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, mentre $f'(c)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico in un punto interno c, il teorema precedente si può interpretare geometricamente dicendo che esiste un punto interno al dominio dove la tangente è parallela alla secante passante per gli estremi. Si può vedere il grafico che segue per rendersi ancora meglio conto del senso di questa interpretazione.

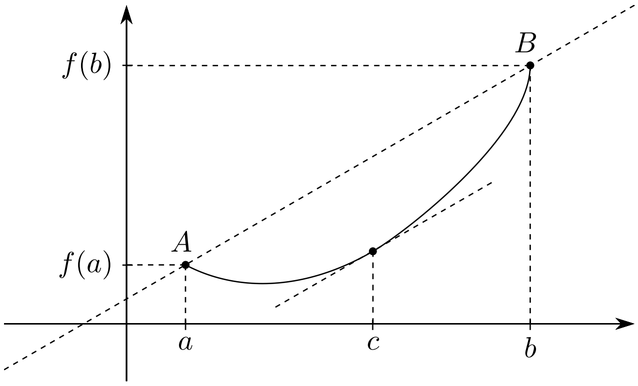


Figura 12.4 *Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange*

Esempio. Verifichiamo che la funzione $f(x) = x^2 + x$ verifica, nell'intervallo $[-1, 2]$, il Teorema di Lagrange e determiniamo il, oppure i, "punti di Lagrange".

La verifica delle ipotesi è immediata. Troviamo i punti di Lagrange. Si ha

$$f'(c) = 2c + 1\,;$$

mentre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(4 + 2) - (1 - 1)}{3} = 2.$$

Deve dunque essere

$$2c + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}\,,$$

che è interno all'intervallo del dominio. Si veda la figura seguente, dove abbiamo usato diverse unità di misura sui due assi.

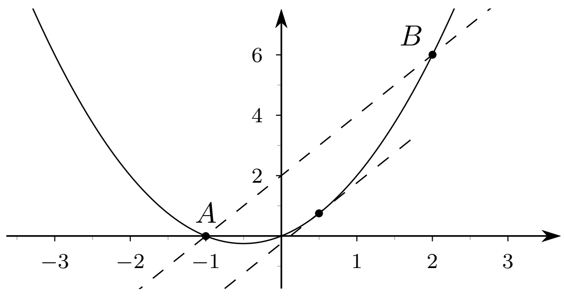


Figura 12.5 *Un esempio di applicazione del Teorema di Lagrange*

Per le applicazioni sono importantissimi i seguenti tre corollari del teorema di Lagrange.

Primo corollario Se f è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ e ha derivata > 0 in $]a, b[$, allora f è *crescente* in $[a, b]$; se ha derivata < 0 è invece *decrescente*. Per dimostrarlo basta osservare che se prendo due punti x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)\,,$$

il contrario se la derivata è negativa.

Secondo corollario Se f è una funzione definita e continua in un intervallo $[a, b]$ e ha derivata $= 0$ in $]a, b[$, è costante in $[a, b]$. Per dimostrarlo basta prendere un punto x qualunque di $[a, b]$ e osservare che si ha

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(a)\,,$$

ovvero che $f(x)$ si trova sempre alla stessa quota di $f(a)$.

Terzo corollario Se f e g sono due funzioni definite e continue in un intervallo $[a, b]$ e con la stessa derivata in $]a, b[$, allora la funzione $f - g$ è costante in $[a, b]$. Per dimostrarlo basta osservare che $f - g$ ha derivata nulla in $]a, b[$.

Teorema 12.3 (Teorema di l'Hôpital)**.** *Siano date due funzioni f e g definite e continue in un intorno di un punto c (eventualmente anche $\pm\infty$), derivabili almeno nei punti diversi da c, con $g'(x)$ sempre diversa da zero. Sia inoltre*

1. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0\,,$

oppure

2. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ *(con qualunque segno).*

Allora per calcolare il

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

che si presenta nella forma indeterminata $0/0$ oppure ∞/∞, si può provare a calcolare il

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Se quest'ultimo limite esiste (finito o no), esiste anche quello del rapporto delle due funzioni e i due limiti sono identici.

Esempio. Il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty/+\infty$. Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = +\infty$$

e quindi anche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty\,.$$

Si usa abbreviare questo procedimento nel modo seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = +\infty\,.$$

A questo punto si può "cancellare la (H) sopra l'uguale" e concludere che il limite cercato vale $+\infty$.

La regola di l'Hôpital si può applicare anche più volte in successione.

Esempio.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty\,.$$

Esempio.
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{6}\,\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}\,.$$

La regola di l'Hôpital non sempre funziona in maniera così semplice, come prova l'esempio che segue.

Esempio.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{e^x}\overset{(H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{e^x}\overset{(H)}{=}$$

ed è chiaro che proseguendo in questo modo non si ottiene nulla. Se però si osserva che
$$\frac{e^{2x}}{e^x}=e^{2x-x}=e^x\,,$$

si conclude subito che...

Tuttavia non insistiamo oltre su questo tipo di difficoltà.

12.2 Massimi e minimi per una funzione

Abbiamo già dato la definizione di massimo e minimo relativo per una funzione (vedi le definizioni 9.20 e 9.21 del capitolo 9). La richiamiamo qui adattandola specificamente al caso che ci interessa di funzioni di una variabile.

Definizione 12.4. *Sia data una funzione f, definita in un insieme D. Un punto $x_0\in D$ si dice* punto di massimo relativo *se esiste un intorno di x_0 tale che per tutti i punti dell'intorno si abbia che*
$$f(x)\le f(x_0)\,;$$
$x_0\in D$ si dice invece punto di minimo relativo *se esiste un intorno di x_0 tale che per tutti i punti dell'intorno si abbia che*
$$f(x)\ge f(x_0)\,.$$
Se le disuguaglianze valgono in senso stretto (senza gli uguali), allora i punti si chiamano di massimo o minimo relativo proprio.

Il valore $f(x_0)$ si dice un (valore) massimo *o* minimo relativo *per la funzione.*

Se le disuguaglianze considerate valgono in tutto il dominio, si parla di punto di massimo, o minimo, assoluto *e di (valore) massimo o minimo* assoluto

La ricerca dei massimi e minimi relativi o assoluti per una funzione riveste grande importanza nelle applicazioni. Siamo particolarmente interessati a questa ricerca nel caso di funzioni derivabili, definite in un intervallo I. In questo caso valgono i seguenti risultati, che sono sostanzialmente delle conseguenze dei teoremi fondamentali che abbiamo considerato.

1. Se un punto x_0 è, per una funzione f, di massimo o minimo relativo *interno* ad I, allora $f'(x_0)=0$.
2. Se una funzione è crescente a sinistra di x_0 e decrescente a destra di x_0, x_0 è di massimo relativo.

3. Se una funzione è decrescente a sinistra di x_0 e crescente a destra di x_0, x_0 è di minimo relativo.

L'esperienza ci aiuterà a trattare anche qualche caso più complesso di funzioni che non siano derivabili e/o continue in qualche punto. Segnaliamo comunque che in casi come questi possono anche presentarsi situazioni poco intuitive, come per esempio che una funzione sia crescente sia a sinistra che a destra di un punto e che in quel punto ci sia un minimo, o un massimo. Si vedano gli esempi grafici che seguono.

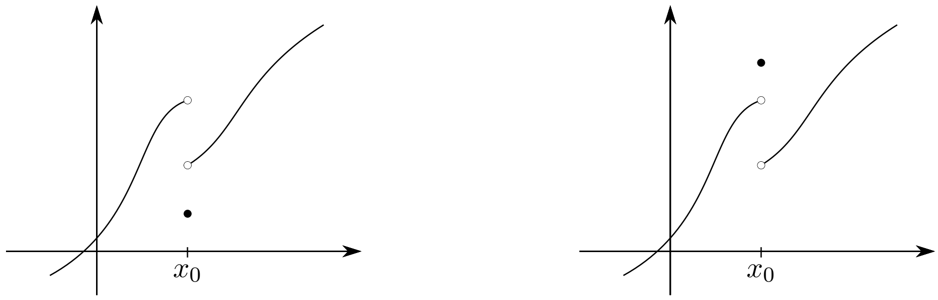


Figura 12.6 *Funzioni crescenti a sinistra e a destra di un punto, con minimo o massimo nel punto*

Sulla scorta dei due esempi proposti, il lettore è invitato provare a costruire graficamente altre situazioni "patologiche".

In situazioni standard potremo procedere come nell'esempio che segue.

Esempio. Per la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ si ha $f'(x) = 3x^2 - 6x$, da cui $f'(x) > 0$ se $x < 0$ oppure $x > 2$, $f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$, $f'(x) = 0$ se $x = 0$ oppure $x = 2$. Riporteremo questi risultati in un grafico come il seguente.

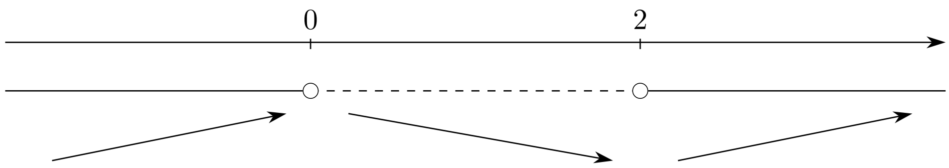


Figura 12.7 *Crescenza e decrescenza di una funzione*

Se teniamo conto che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f(2) = -4\,,$$

possiamo ben renderci conto dell'andamento grafico della funzione stessa:

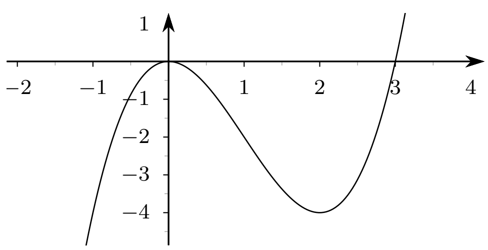


Figura 12.8 *Grafico della funzione* $f(x) = x^3 - 3x^2$

Un risultato di grande importanza per la ricerca dei massimi e minimi assoluti è costituito dal seguente teorema.

Teorema 12.5 (Teorema di Weierstrass)**.** *Se $f(x)$ è una funzione definita e* continua *in un insieme chiuso e limitato, allora il massimo assoluto e il minimo assoluto esistono sicuramente.*

Questo teorema è importante perché se siamo sicuri che il massimo e minimo ci sono, gli sforzi per trovarli saranno sicuramente giustificati.

12.3 Funzioni convesse e concave

Definizione 12.6. *Una funzione f si dice* convessa *in un intervallo I se presi comunque due punti x_1 e x_2 di I e considerato il segmento di estremi $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$, la parte del grafico di f coorrispondente all'intervallo $[x_1, x_2]$ sta tutta al di sotto di questo segmento.*

Definizione 12.7. *Una funzione f si dice* concava *in un intervallo I se presi comunque due punti x_1 e x_2 di I e considerato il segmento di estremi $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$, la parte del grafico di f coorrispondente all'intervallo $[x_1, x_2]$ sta tutta al di sopra di questo segmento.*

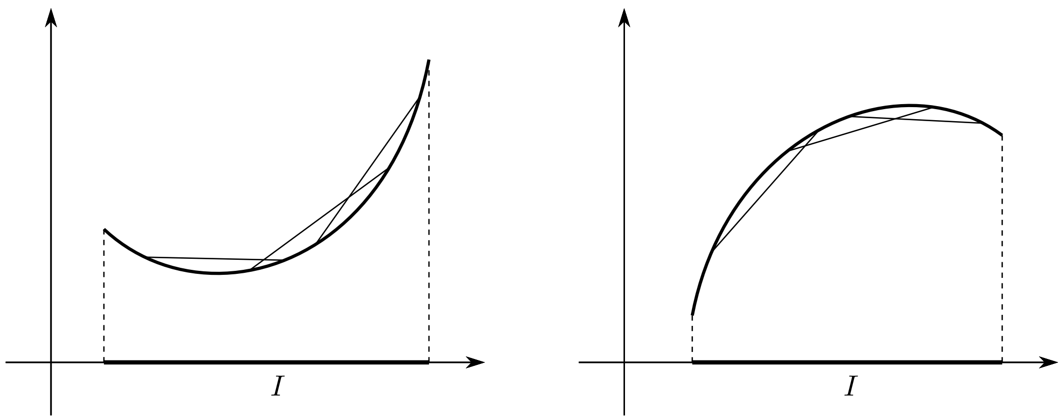


Figura 12.9 *Funzioni convesse e concave in un intervallo*

Per le funzioni derivabili due volte è possibile decidere se sono convesse o concave: si prova infatti che se una funzione ha $f''(x) > 0$ in un intervallo I, allora è convessa in I, se invece ha $f''(x) < 0$ in I, allora è concava in I.

Definizione 12.8. *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I e x_0 un punto di I. Se esistono due intervalli del tipo $[x_1, x_0$ e del tipo $[x_0, x_2]$ tali che la funzione sia convessa nel primo e concava nel secondo, oppure concava nel primo e convessa nel secondo, allora il punto x_0 si dice* punto di flesso *o punto di inflessione per il grafico di f. La tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ si dice* tangente inflessionale.

È (abbastanza) evidente che se una funzione è derivabile due volte, la sua derivata seconda vale 0 in un punto di flesso.

La determinazione degli intervalli in cui una funzione è convessa oppure concava, e dei punti di flesso, migliora sensibilmente le informazioni sull'andamento grafico di una funzione, come mostra l'esempio che segue.

Esempio. Utilizzando le nozioni fin qui apprese, determiniamo i massimi, i minimi, i flessi e gli intervalli di crescenza, decrescenza, concavità, convessità della funzione

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}, .$$

Vogliamo inoltre tracciare un abbozzo del grafico, tenendo anche conto delle ulteriori informazioni che possiamo ricavare dal calcolo di opportuni limiti, e magari determinando esplicitamente alcuni punti significativi per i quali il grafico deve passare.

Cominciamo con il calcolare le derivate prima e seconda di f.

$$f'(x) = \frac{1\cdot \mathrm{e}^x - x\cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\cancel{\mathrm{e}^x}(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x}{\mathrm{e}^x}\,;$$
$$f''(x) = \frac{-1\cdot \mathrm{e}^x - (1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\cancel{\mathrm{e}^x}(x-2)}{(\mathrm{e}^x)^{\cancel{2}}} = \frac{x-2}{\mathrm{e}^x}\,.$$

Se teniamo conto che e^x è una quantità sempre positiva, possiamo facilmente concludere che la derivata prima è positiva (funzione crescente) per $x<1$, negativa (funzione decrescente) per $x>1$, nulla (tangente orizzontale) per $x=1$, dove avrà un punto di massimo (relativo) in quanto è prima crescente e poi decrescente (naturalmente la cosa è vera perchè la funzione non presenta "strappi" nel suo grafico!); per la derivata seconda si ha invece che è positiva (funzione convessa) per $x>2$, negativa (funzione concava) per $x<2$, nulla per $x=2$, dove ha un punto di flesso in quanto a sinistra di 2 è concava, a destra è convessa. L'ordinata corrispondente all'ascissa 2 è $2/\mathrm{e}^2 \simeq 0.27$, mentre la derivata per $x=2$ vale $-1/\mathrm{e}^2 \simeq -0.14$: questo ci consente di scrivere subito l'equazione della tangente inflessionale,

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)\,, \qquad \text{ovvero} \qquad y - \frac{2}{\mathrm{e}^2} = \frac{-1}{\mathrm{e}^2}\,(x-2)$$

Per raffinare ulteriormente le informazioni a nostra disposizione relative al grafico di f calcoliamo anche i limiti per x tendente a $-\infty$ e a $+\infty$ per sapere "da dove parte" e "dove arriva" il grafico stesso.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad \text{(Ricordare il grafico di } \mathrm{e}^x\text{!!);}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Di solito è anche utile sapere se il grafico "sta sopra" oppure "sta sotto" all'asse x. Per fare questo basta controllare dove $f(x)$ è positiva e dove è negativa. In questo caso la cosa è immediata: $f(x)$ sta sopra all'asse x per $x>0$, sta sotto all'asse x per $x<0$, taglia l'asse delle x per $x=0$.

Conviene riportare tutti questi risultati in un diagramma che ci consentirà di tracciare facilmente un grafico significativo della funzione stessa. Nella pratica è conveniente costruire questo diagramma un po' alla volta, man mano che si ottengono i vari risultati.

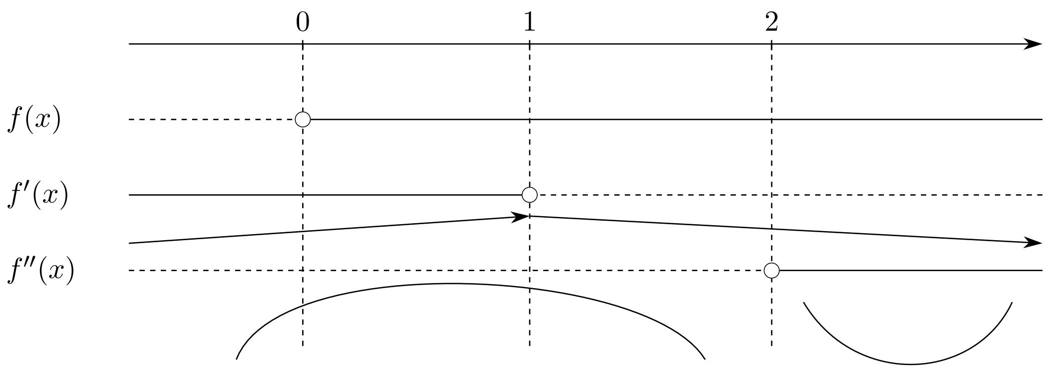


Figura 12.10 *Diagramma preparatorio allo studio della funzione* $f(x) = x/\mathrm{e}^x$

Per tracciare un grafico il più corretto possibile ci serve ancora trovare l'ordinata del punto di massimo (massimo relativo ma anche assoluto in quanto la funzione non supera mai questo valore):

$$f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0.37\,.$$

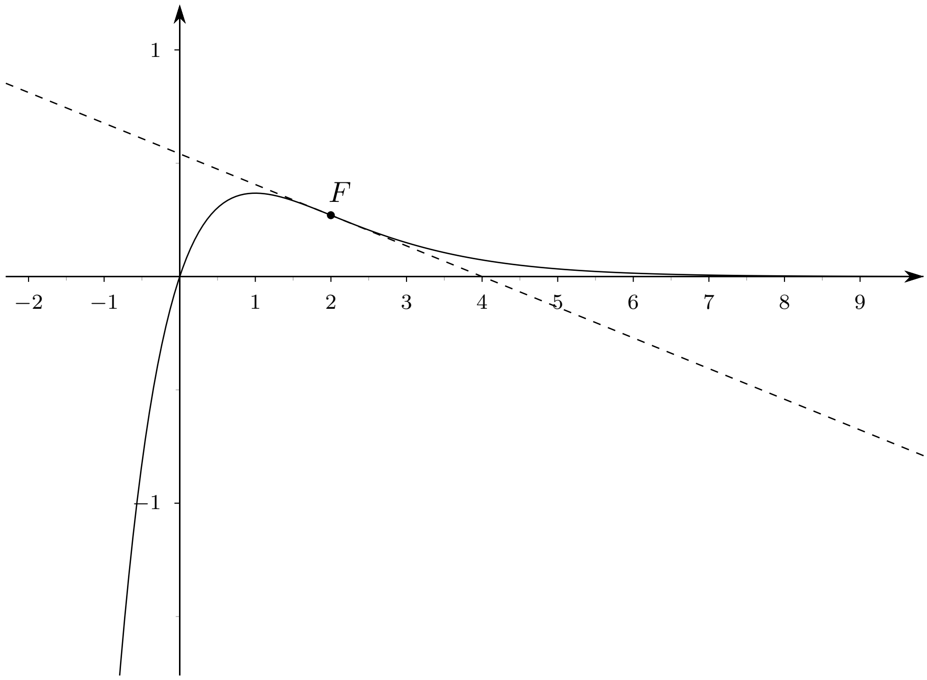


Figura 12.11 *Grafico di $f(x) = x/\mathrm{e}^x$ (Attenzione: unità di misura diverse sui due assi!)*

Da quanto detto sul significato della derivata seconda si può concludere che se in un punto x_0 la derivata prima di una funzione si annulla e se in quel punto la derivata seconda è positiva, allora il punto è di minimo relativo, se invece la derivata seconda è negativa, allora il punto è di massimo relativo.

12.4 Asintoti al grafico di una funzione

L'ultimo raffinamento che ci interesserà relativamente alla rappresentazione grafica di una funzione è quello della ricerca di particolari rette, dette *asintoti*, a cui il grafico stesso "si avvicina indefinitamente". Ci sono tre tipi possibili di asintoti: verticali, orizzontali e obliqui.

1. Una retta verticale (cioè del tipo $x = a$, con a numero reale) è un *asintoto verticale* per una funzione se

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty\,,$$

dove non ha importanza il segno di infinito.

2. Una retta orizzontale (cioè del tipo $y = b$, con b numero reale) è un *asintoto orizzontale* per una funzione se

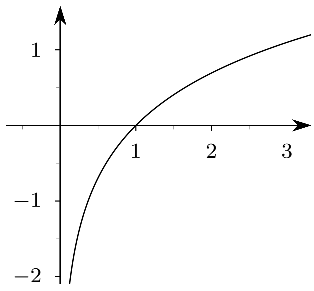
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \vee \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b\,.$$

3. Una retta obliqua (cioè del tipo $y = mx + q$, con $m \neq 0$) è un *asintoto obliquo* per una funzione se

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \quad \vee \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0\,.$$

Esempio. La retta $x = 0$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x) = \ln x$, infatti si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty\,.$$

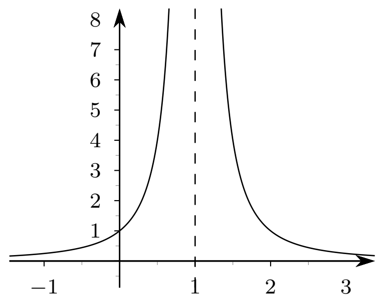


Esempio. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x) = {}^1\!/_{(x-1)^2}$, infatti si ha

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty\,.$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per la stessa funzione, infatti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0\,.$$

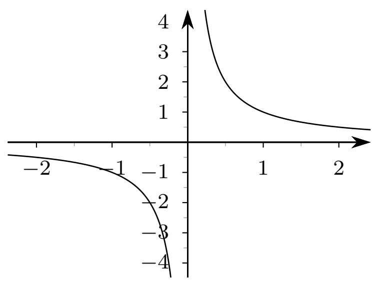


Esempio. La retta $x = 0$ è un asintoto verticale per la funzione $f(x) = {}^1\!/_x$, infatti si ha

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \wedge \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

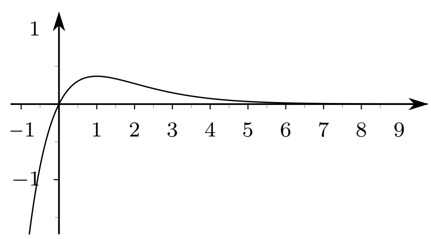
La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per la stessa funzione, infatti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$



Esempio. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione $f(x) = {}^x\!/_{\mathrm{e}^x}$, infatti si ha

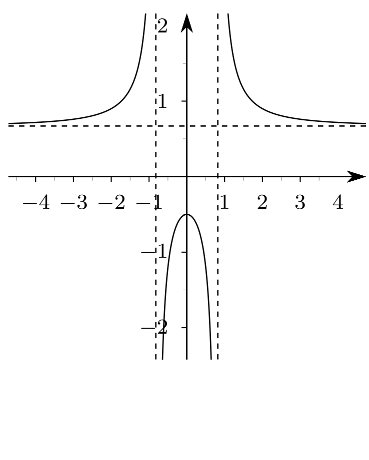
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0\,.$$



Esempio. La retta $y = {}^2\!/_3$ è asintoto orizzontale per la funzione $f(x) = {}^{(2x^2+1)}\!/_{(3x^2-2)}$, infatti si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-2} = \frac{2}{3}\,.$$

Le rette $x = \pm\sqrt{{}^2\!/_3}$ sono asintoti verticali per la stessa funzione, infatti...

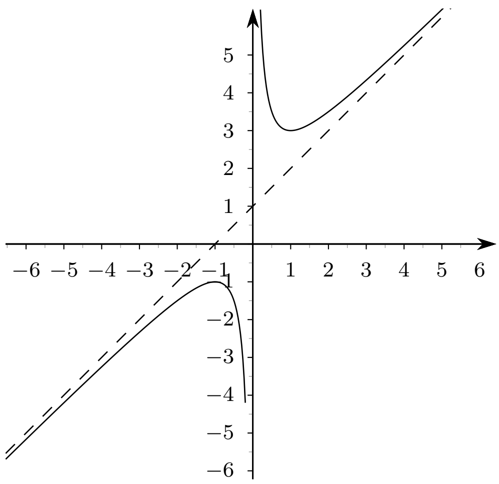


Esempio. La retta $x = 0$ è asintoto verticale per la funzione $f(x) = {(x^2+x+1)}/{x}$, infatti si ha

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2+x+1}{x} = \pm\infty\,.$$

La retta $y = x+1$ è asintoto obliquo per la stessa funzione, infatti si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{(x^2+x+1)}{x} - (x+1)\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$



Metodi pratici per la ricerca degli asintoti

Asintoti verticali Nei casi che ci interesseranno gli asintoti verticali si possono trovare (ma bisogna provare!) in presenza di funzioni fratte nei punti in cui si annulla il denominatore (punti che vanno esclusi dal dominio naturale), oppure in presenza di funzioni logaritmiche in punti in cui l'argomento del logaritmo si annulla.

Asintoti orizzontali Per ricercare questi asintoti basta fare i limiti per $x \to \pm\infty$ (di solito separatamente a $+\infty$ e a $-\infty$: se uno almeno di questi limiti è finito e vale b, allora $y = b$ è asintoto orizzontale.

Asintoti obliqui Si procede secondo il seguente schema:

1. Si calcola il limite, per $x \to +\infty$: se il limite è finito si ha un asintoto orizzontale e il gioco finisce; se il limite non c'è, il gioco finisce ugualmente.
2. Se il precedente limite è infinito si calcola il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\ :$$
se questo limite è 0, infinito, o non esiste, tutto finisce.
3. Se il limite precedente è finito e diverso da zero, e lo indichiamo con m, si calcola il limite
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]\ :$$
se questo limite è infinito o non esiste, tutto finisce. Se invece esso è finito (anche zero), e lo indichiamo con q, allora la retta
$$y = mx + q$$
è un asintoto obliquo.
4. Si ripete il tutto per $x \to -\infty$.

Esempio. Nella funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$$

il denominatore si annulla per $x = 0$ e per $x = 1$. Si ha poi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x} = 2\,,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \pm\infty\,.$$

Dunque solo $x = 0$ è asintoto verticale.

Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-x} = 1\,,$$

dunque $y = 1$ è asintoto orizzontale.

Esempio. Nella funzione

$$f(x) = \ln(x+2)$$

il dominio naturale è $x > -2$, e l'argomento del logaritmo si annulla per $x = -2$. Poiché si ha

$$\lim_{x\to -2^+} \ln(x+2) = -\infty,$$

la retta $x = -2$ è asintoto verticale. Si ha poi

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x+2) = +\infty\,;$$

dunque non ci sono asintoti orizzontali. Calcoliamo allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x+2}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0\,,$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.

Esempio. Nella funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

il dominio naturale è $x \neq 1$. Poiché si ha

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2+1}{x-1} = \pm\infty\,,$$

la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \pm\infty\,,$$

per cui non ci sono asintoti orizzontali. Calcoliamo allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{x^2+1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \dots = 1\ (= m)$$

Possiamo procedere con il calcolo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+1}{x-1} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \dots = 1\,,$$

dunque la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo (e la cosa funziona sia a $+\infty$ che a $-\infty$).

Il lettore è invitato a controllare questi risultati usando, per esempio, Geogebra.

12.5 Conclusioni sul tracciamento del grafico di una funzione

Data una funzione f, per tracciarne il grafico si procede con il seguente schema.

1. Si determina il dominio naturale.
2. Si verifica quando la funzione è positiva,e quando è negativa e quando si annulla.
3. Si determinano tutti gli eventuali asintoti.
4. Si calcola la derivata prima e se ne deducono gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e, di conseguenza, i massimi e minimi.
5. Si calcola la derivata seconda e se ne deducono gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa e, di conseguenza, i flessi.
6. Si calcola esplicitamente il valore della funzione in qualche punto notevole.
7. Si riportano i risultati su un grafico che deve esplicitare tutti i risultati trovati.

Esempio. Vogliamo tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,.$$

1. Il dominio naturale della funzione è $x \neq 1$.
2. La funzione è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$, non si annulla mai.
3. Si ha
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty\,,$$
dunque $x = 0$ è asintoto verticale. Si ha poi
$$\lim \lim_{x\to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0\,,$$
dunque $y = 0$ è un asintoto orizzontale (valido solo a $-\infty$). Invece
$$\lim \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{(H)}{=} \lim \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = +\infty\,,$$
dunque dobbiamo calcolare anche il limite di ${f(x)}/{x}$:
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty\,,$$
dunque non ci sono asintoti obliqui.
4. La derivata prima della funzione è
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}\,,$$
che è positiva per $x > 1$, negativa per $x < 1$, si annulla per $x = 1$. Dunque…
5. La derivata seconda della funzione è
$$f''(x) = \cdots = \frac{\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}\,,$$
che è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e non si annulla mai. Dunque…
6. Il valore della funzione nel punto di minimo relativo $x = 1$ è $f(1) = \mathrm{e}$.
7. Il grafico della funzione è allora il seguente.

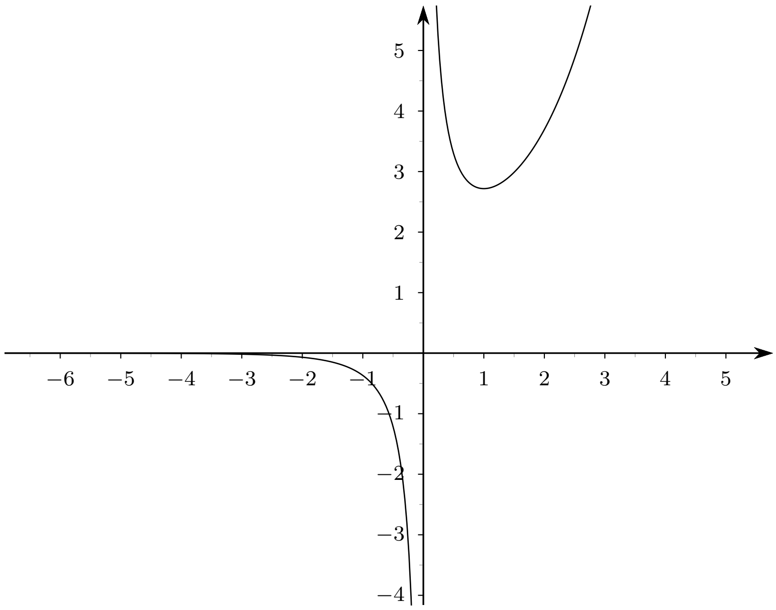


Figura 12.12 *Grafico della funzione* $f(x) = {}^{\mathrm{e}^x}\!/_x$

12.6 Esercizi

Esercizio 12.1. *Si considerino i limiti seguenti; si verifichi se si può applicare la regola di l'Hôpital e, in caso affermativo, si calcoli il limite.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3+3}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^3-1}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin^2(x-1)}{x^3-1}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\cos(x^2-4)}{x^3-8}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x^2-4)}{x^3-8}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{\mathrm{e}^{x^2-4}-1}{x^3-8}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2-4}-1}{x^3-8}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x x^2}{\sin x}$;
9. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\sin x}$;
10. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x}{\sin x}$;
11. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$;

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$;
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x}$

Esercizio 12.2. *Studiare le seguenti funzioni.*

1. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$;
2. $f(x) = \sqrt{x} - \ln\sqrt{x}$;
3. $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$;
4. $f(x) = x^4 - x^3$;
5. $f(x) = x^3 + x^4$;
6. $f(x) = x^6 - x^4$;
7. $f(x) = x^4 - 1$;
8. $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Esercizio 12.3. *Studiare le seguenti funzioni ristrette all'intervallo I indicato, calcolando, in particolare, il massimo e minimo assoluti, se esistono.*

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $I = [0, 1]$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $I = [-3, 0]$;
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $I = [-3, -1]$;
4. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $I = [-3, 3]$;
5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $I = [3, 4]$;
6. $f(x) = x + \sqrt{x-1}$, $I = [0, 4]$;
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$, $I = [-3, 3]$;
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $I = [-3.3]$;
9. $f(x) = x^3 + x$, $I = [-10, 0]$;
10. $f(x) = x^3 - x^2$, $I = [-1, 10]$;
11. $f(x) = \ln(x^3 + x^2)$, $I = [0, 10]$;
12. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $I = [-10, 10]$;
13. $f(x) = x^3 + x^2$, $I = [0, 3]$;
14. $f(x) = x^5 + x$, $I = [0, 1]$.

Esercizio 12.4. *Studiare le seguenti funzioni, tralasciando lo studio della derivata seconda se troppo complesso.*

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$;
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$;
5. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$;
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right)$;
7. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$;
8. $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}$;
9. $f(x) = \mathrm{e}^{1-x^2}$;
10. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;
11. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Esercizio 12.5. *Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni usando solo $f' = 0$ e $f'' > 0$ oppure $f'' < 0$.*

1. $f(x) = \ln(2x^2 - x)$;
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x}(x^2 + x)$;
3. $f(x) = x^3 - x^4$;
4. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$.

Esercizio 12.6. *Usando il metodo indicato nell'esercizio 12.5, dire se i punti indicati sono di massimo o minimo relativo per le funzioni seguenti.*

1. $f(x) = x\ln(x^2 - 4x^3)\,;\, x = 0,\ x = 2$;
2. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 3x^3}\,;\, x = 0,\ x = 1$;
3. $f(x) = \mathrm{e}^{4x^3 - 3x^4}\,;\, x = 0,\ x = -1,\ x = 1$;
4. $f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x} - 2x^2\ln x\,;\, x = 0,\ x = 3$.

Esercizio 12.7. *Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, valutando in particolare la continuità e la derivabilità.*

1. $f(x) = \begin{cases} x, & \textit{se} \quad x \le 0 \\ -2x, & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases}$;
2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{se} \quad x \le 0 \\ -x^3, & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases}$;
3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \textit{se} \quad x \le 0 \\ -x^2, & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases}$;
4. $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \textit{se} \quad x \le -1 \\ \ln(x - 2), & \textit{se} \quad x > -1 \end{cases}$;
5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \textit{se} \quad x < 1 \\ \sqrt[3]{x} + 1, & \textit{se} \quad x \ge 1 \end{cases}$;
6. $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} + 1, & \textit{se} \quad x < -1 \\ -\ln(x + 2), & \textit{se} \quad x \ge -1 \end{cases}$;

7. $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \le 1/2 \\ x^2 + 1/2, & se \quad x > 1/2 \end{cases}$;

8. $f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad x \le 1 \\ (2/3)\, x^3, & se \quad x > 1 \end{cases}$;

9. $f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x}, & se \quad x \le 1 \\ x^2, & se \quad x > 1 \end{cases}$;

10. $f(x) = \begin{cases} 3^x, & se \quad x \le 2 \\ \ln(x^2+1), & se \quad x > 2 \end{cases}$;

11. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & se \quad x < 1 \\ 3\sqrt[3]{x}, & se \quad x \ge 1 \end{cases}$.

13 Integrali per funzioni di una variabile

13.1 Introduzione

Il calcolo integrale (per le funzioni reali di variabile reale), si occupa della risoluzione di due problemi, apparentemente indipendenti:

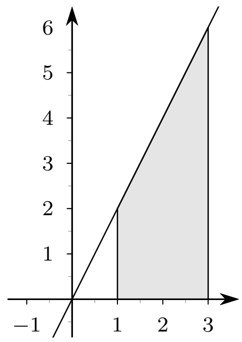
1. il calcolo dell'area di parti di piano qualsiasi (non solo dunque di poligoni o figure riconducibili a parti di cerchio);
2. la ricerca di funzioni che hanno una derivata assegnata.

Per quanto attiene ai contenuti di questo corso il primo problema sarà limitato al caso di figure piane "racchiuse" tra il grafico di funzioni di una variabile, che saranno sempre almeno continue; anche per il secondo problema ci limiteremo solo a trattare alcune situazioni molto semplici.

Il *Teorema fondamentale del calcolo integrale* stabilirà un legame molto stretto tra i due problemi indicati, almeno nei casi di funzioni continue a cui siamo interessati.

Come è ormai abitudine, prima di entrare nel vivo del discorso proponiamo alcuni esempi esplicativi.

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = 2x$, ristretta all'intervallo $[1, 3]$, il cui grafico è rappresentato nella figura qui a lato, e proponiamoci di calcolare l'area della regione evidenziata (compresa tra il grafico della funzione f, l'asse delle ascisse, e le due rette verticali $x = 1$ e $x = 3$).



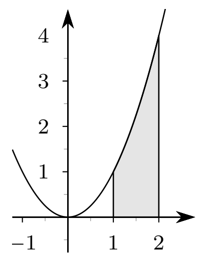
La regione evidenziata è un trapezio rettangolo, di base minore lunga 2, base maggiore lunga 6 e altezza lunga 2: l'area misurerà dunque 8.

È molto facile anche trovare una funzione che abbia f come derivata: si tratta, per esempio, della funzione $g(x) = x^2$.

La cosa interessante, e sarà proprio questo il contenuto del già citato Teorema fondamentale, è che l'area della regione evidenziata si può calcolare a partire dalla funzione g, facendo semplicemente $g(3) - g(1)$:

$$\mathit{Area} = 8 = 3^2 - 1^2 = g(3) - g(1)\,.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$, ristretta all'intervallo $[1, 2]$, il cui grafico è rappresentato nella figura qui a lato, e proponiamoci di calcolare l'area della regione evidenziata (compresa tra il grafico della funzione f, l'asse delle ascisse, e le due rette verticali $x = 1$ e $x = 2$).



La regione evidenziata non è più un trapezio rettangolo come nel caso precedente, anche se è molto simile a un trapezio rettangolo, con il lato obliquo sostituito da un arco di parabola: chiameremo questa regione un *trapezoide*. Il calcolo dell'area non sarà più elementare come prima, anche se Archimede già nel terzo secolo avanti Cristo era in grado di calcolarla, ottenendo il valore $^7/_3$.

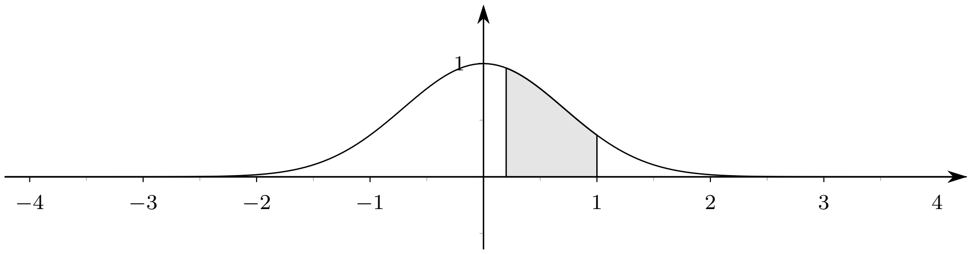
Anche questa volta è molto facile trovare una funzione che abbia f come derivata: si tratta, per esempio, della funzione $g(x) = {}^{x^3}/_3$.

Ancora una volta la cosa interessante è che il valore dell'area si può calcolare direttamente usando la funzione g e calcolando $g(2) - g(1)$:

$$\mathit{Area} = \frac{7}{3} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = g(2) - g(1)\,.$$

Purtroppo le cose non sono sempre così semplici, nemmeno per i software di calcolo simbolico. In genere questi software sono facilmente in grado di trovare valori approssimati, con il voluto grado di approssimazione, di aree del tipo che stiamo considerando. Il problema di trovare una funzione cha abbia una derivata assegnata è invece estremamente difficile, anche se è noto che esso ha, teoricamente, sempre soluzione nel caso che la funzione assegnata sia continua.

È interessante eseguire una prova specifica, con due software molto diffusi (Geogebra e Mathematica), su una funzione di grande importanza applicativa come la funzione di Gauss $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, per esempio sia calcolando l'area evidenziata nella figura seguente ($0.2 < x < 1$) che cercando una funzione che abbia f come derivata.



Il problema del calcolo (approssimato a 10 cifre decimali) dell'area è quasi immediato con entrambi i software: 0.5494591019.

Il problema del calcolo di una funzione g che abbia f come derivata è estremamente più complesso, tanto che il primo dei due software citati (Geogebra) non fornisce alcuna risposta (g "non definito") mentre il secondo (Mathematica) fornisce una risposta che a questo livello del corso non è interpretabile semplicemente:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}\,(x)\,.$$

In ogni caso, anche se in quest'ultimo caso non abbiamo la possibilità di una verifica diretta, esiste sempre lo stesso legame tra l'area cercata e la funzione g (supposto che si sia in grado di calcolarla!).

13.2 Primitive per una funzione reale di variabile reale

Cominciamo a trattare con un po' più di dettaglio il problema del calcolo di una funzione avente assegnata derivata. Già sappiamo, in base a uno dei corollari del teorema di Lagrange, che se due funzioni definite su un intervallo I hanno la stessa derivata, allora esse differiscono per una costante. Se cerchiamo, per esempio, una funzione che abbia x^2 come derivata, oltre a $x^3/3$ andranno anche bene tutte le funzioni del tipo $x^3/3 + c$, essendo c una costante arbitraria. Viceversa se ci viene chiesto di trovare *tutte* le funzioni che abbiano x^2 come derivata, sulla base dello stesso corollario potremo concludere che esse sono tutte e sole le funzioni

$$\frac{x^3}{3} + c\,.$$

La cosa è vera in generale: se è data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo I (e che per noi sarà sempre continua in tutto l'intervallo), e se $g(x)$ è una funzione tale che

$$g'(x) = f(x),\ \forall x \in I,$$

allora tutte e sole le funzioni che hanno $f(x)$ come derivata sono date dalla formula

$$g(x) + c,$$

essendo c una costante arbitraria. Ci sono problemi per le funzioni che non siano definite su un intervallo, ma il loro esame esula dagli scopi di questo corso: trattando di questo tipo di problemi supporremo sempre che il dominio delle funzioni sia un intervallo; se così non fosse "restringeremo" il dominio a un intervallo.

Definizione 13.1. *Data una funzione f, definita in un intervallo I, chiameremo* primitiva *di f ogni funzione F definita e derivabile nello stesso intervallo e tale che*

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I\,.$$

L'insieme di tutte *le primitive di una funzione f, in un intervallo I, si denota con il simbolo*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

che si legge Integrale (indefinito) di $f(x)$ in $\mathrm{d}x$.

La definizione data implica che, se $F(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$, nell'intervallo I, il simbolo di integrale indefinito ha la seguente interpretazione:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{\ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\ \}\ .$$

Basterà dunque riuscire a trovare una sola primitiva di una funzione f per trovarle tutte (sempre nell'ipotesi, che non ripeteremo più, che il dominio sia un intervallo.

Si può dimostrare che tutte le funzioni continue in I hanno sempre primitive, ma, come mostra l'esempio della funzione di Gauss, la loro effettiva determinazione è in genere un problema arduo e, di solito, non risolubile con metodi elementari. Noi ci occuperemo della risoluzione di questo problema solo in casi molto semplici, segnalando che tutti i software di calcolo simbolico sono in grado di trovare primitive anche di funzioni complesse (ma non di tutte. . .).

Una prima osservazione che possiamo fare relativamente al calcolo di primitive è legata alle note proprietà delle derivate:

$$\big(kf(x)\big)' = kf'(x) \quad \text{e} \quad \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)\,,$$

da cui si ricava subito che

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Queste formule si leggono a parole, rispettivamente, nel seguente modo: *le costanti possono essere "portate fuori" dal segno di integrale* e *l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali*. Esse si chiamano, brevemente, proprietà di linearità dell'integrale.

Purtroppo l'analogia con le derivate si ferma qui: non esiste, per esempio, alcuna formula generale per calcolare integrali di prodotti o di quozienti di funzioni che si sappiano integrare, e neppure per calcolare l'integrale della composta di due funzioni che si sappiano integrare.

Per il caso dell'integrale di un prodotto di due funzioni vale la cosiddetta *formula di integrazione per parti*, utile in molte situazioni ma non sempre risolutiva. Supponiamo di dover calcolare l'integrale del prodotto di due funzioni

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e supponiamo di conoscere una qualunque primitiva di una delle due, per esempio di $f(x)$, primitiva che possiamo chiamare $F(x)$. Allora vale la seguente formula

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)g(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{13.1}$$

che si può leggere come segue: *l'integrale del prodotto di due funzioni è uguale a una primitiva della prima per la seconda, meno l'integrale del prodotto tra la primitiva della prima e la derivata della seconda.* Come si vede, non serve saper trovare l'integrale di entrambe, solo di una delle due, successivamente il problema è rinviato alla ricerca di un nuovo integrale (quello del prodotto tra la primitiva di una funzione e la derivata dell'altra): se questo integrale "residuo" è più facile di quello iniziale il metodo funziona, altrimenti no.

Una seconda strategia di calcolo si basa sulla lettura della tabella delle derivate "da destra a sinistra". Si costruisce in questo modo una nuova tabella, detta *Tabella delle primitive fondamentali*. Nella tabella 13.1 riportiamo le situazioni più comuni, unitamente a qualche altro caso di interesse applicativo.

Funzione	***Primitive***
k	$kx+c$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$x^{-1}=\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
e^x	e^x+c
$\ln x$	$x\ln x-x+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\big(f(x)\big)^\alpha f'(x),\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{\big(f(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\big(f(x)\big)^{-1}f'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert+c$
$f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$	$\mathrm{e}^{f(x)}+c$
$f'(x)\sin f(x)$	$-\cos f(x)$
$f'(x)\cos f(x)$	$\sin f(x)$

Tabella 13.1 *Alcune primitive fondamentali*

Si noti, in particolare, che le potenze hanno un comportamento completamente diverso a seconda che l'esponente sia -1 o un numero reale diverso da -1.

Anche utilizzando le proprietà di linearità, la regola di integrazione per parti, e la tabella 13.1 non si riesce ad andare molto lontano nel calcolo; in ogni caso le situazioni di nostro interesse potranno essere risolte con queste poche regole.

Proponiamo di seguito qualche semplice esempio.

Esempi.

1. $\displaystyle\int x^2+\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\cos x+c\,.$
2. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\frac{x^{-1}}{-1}+c=\ln|x|-\frac{1}{x}+c\,.$
3. $\displaystyle\int 2\sin(2x)\,\mathrm{d}x=\int(2x)'\sin(2x)\,\mathrm{d}x=-\cos(2x)+c\,.$
4. $\displaystyle\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\int(x^2)'\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}+c\,.$
5. $\displaystyle\int\left(3x^4-2x^3+x-1\right)\mathrm{d}x=3\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x+c=\frac{3x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}-x+c\,.$
6. $\displaystyle\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\ln\left|x^2+1\right|+c=\ln(x^2+1)+c\,.$
7. $\displaystyle\int\sqrt[7]{x^5}\,\mathrm{d}x=\int x^{5/7}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{5/7+1}}{5/7+1}+c=\frac{7}{12}\,x^{12/7}+c=\frac{7}{12}\,\sqrt[7]{x^{12}}+c\,.$
8. $\displaystyle\int x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\cdot x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cdot x-\int\mathrm{e}^x\cdot 1\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cdot x-\mathrm{e}^x+c\,.$ Qui abbiamo applicato la formula di integrazione per parti. Si noti che eravamo in grado sia di calcolare la primitiva di e^x che quella di x. Se avessimo scelto questa seconda strategia avremmo ottenuto

$$\int x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,,$$

e quat'ultimo integrale sarebbe stato più complesso del primo, per cui il metodo non avrebbe portato ad alcun risultato.

13.3 Area di un trapezoide

Consideriamo una funzione f, definita e continua in un intervallo $[a,b]$ e *sempre positiva* in tutto l'intervallo. Siamo interessati a calcolare l'area della regione racchiusa tra il grafico della funzione f, l'asse della x, e le due rette verticali $x=a$ e $x=b$, regione che chiameremo, come già anticipato, un *trapezoide*.

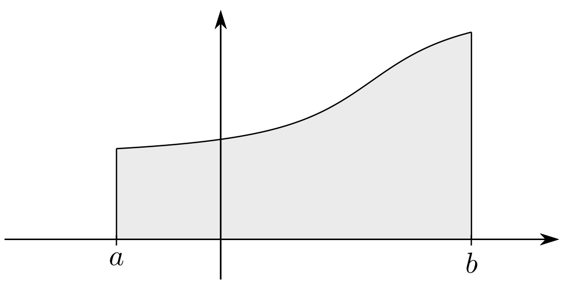


Figura 13.1 *Trapezoide relativo a una funzione positiva (e continua)*

Per valutare quest'area l'idea è quella di approssimarla, mediante dei "*plurirettangoli*", inscritti e circoscritti, ottenuti suddividendo l'intervallo $[a,b]$ in un certo numero di parti (uguali per semplicità) e procedendo come le figure 13.2 (relativa a un plurirettangolo inscritto) e 13.3 (relativa a un plurirettangolo circoscritto) indicano chiaramente.

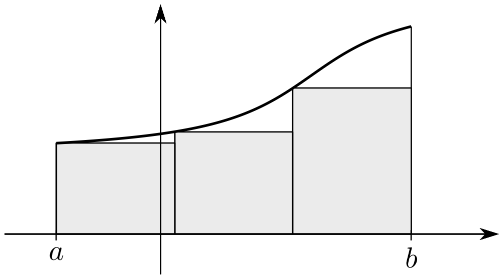


Figura 13.2 *Plurirettangolo inscritto*

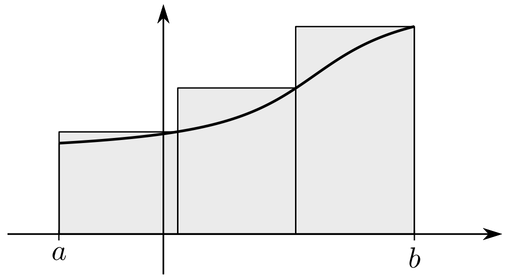


Figura 13.3 *Plurirettangolo circoscritto*

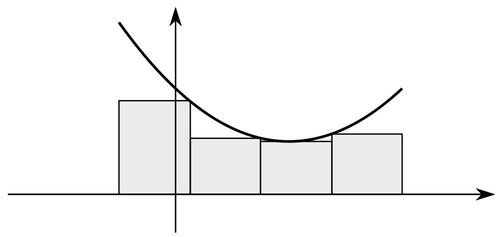
Si tratta di una generalizzazione del procedimento usato per "quadrare il cerchio", mediante una successione di poligoni inscritti e circoscritti. Anche in questo caso si dimostra (almeno nel caso delle funzioni continue che a noi interessano) che, se il numero di suddivisioni tende all'infinito (e quindi la loro ampiezza tende a zero), le aree dei due plurirettangoli inscritto e circoscritto tendono a un valore comune che si chiama *area del trapezoide* e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

che si legge: *Integrale (definito) della funzione f tra a e b.*

L'origine di questo simbolo è legata alle considerazioni intuitive che seguono. L'area del trapezoide considerato si ottiene come somma delle aree di tanti rettangoli, che hanno come base la misura di $[a, b]$ divisa per il numero di suddivisioni, e come altezza il valore della funzione calcolato in un punto opportuno appartenente a ciascun intervallo della suddivisione. La misura della base si indicherà dunque con Δx (differenza tra l'ascissa dell'estremo destro e dell'estremo sinistro di ogni intervallo), mentre l'altezza sarà $f(x)$.

Nell'esempio proposto prima il punto in cui calcolare $f(x)$ è sempre o l'estremo sinistro o quello destro di ciascun intervallo della suddivisione, ma potrebbe anche essere un punto interno, come mostra la figura qui a lato, relativa a un plurirettangolo inscritto, in cui è stata considerata una suddivisione di $[a, b]$ in 4 parti.



L'area di un plurirettangolo inscritto o circoscritto sarà dunque esprimibile con una formula del tipo

$$\sum f(x)\Delta x\,,$$

dove la somma si intende estesa a tutti gli intervallini. Al tendere all'infinito del numero di suddivisioni, l'ampiezza di ciascuna tenderà a zero e viene indicata con $\mathrm{d}x$; il simbolo di sommatoria viene deformato in una s allungata: $\int$, per cui si ottiene proprio il simbolo già proposto.

13.4 Integrale definito

Se la funzione f anzichè essere sempre positiva fosse sempre negativa nell'intervallo $[a, b]$, la somma

$$\sum f(x)\Delta x\,, \tag{13.2}$$

avrebbe ancora senso, sarebbe negativa e corrisponderebbe all'opposto dell'area del plurirettangolo costruito con la stessa tecnica usata per le funzioni positive. Si vedano le figure seguenti.

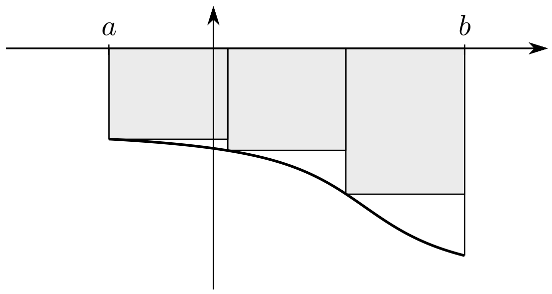


Figura 13.4 *Plurirettangolo inscritto*

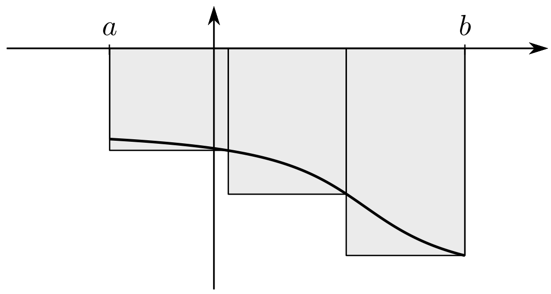


Figura 13.5 *Plurirettangolo circoscritto*

È abbastanza evidente che si potrà ancora parlare di trapezoide e che il limite di una somma del tipo 13.2, al tendere all'infinito del numero di suddivisioni, sarà questa volta l'opposto dell'area del trapezoide: questo limite si indicherà ancora con lo stesso simbolo di prima

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e si userà la stessa nomenclatura.

Se una funzione è in parte positiva e in parte negativa la somma 13.2 avrà alcuni addendi positivi e alcuni negativi e il limite sarà chiaramente la differenza tra le aree di tutte le regioni soprastanti l'asse delle x e di tutte le regioni sottostanti l'asse stessa. In un caso come questo l'integrale potrebbe anche venire nullo, come dimostra chiaramente il caso della funzione seno , considerata nell'intervallo $[0, 2\pi]$, in cui, per questioni di simmetria, la parte soprastante l'asse x e quella sottostante sono chiaramente identiche.

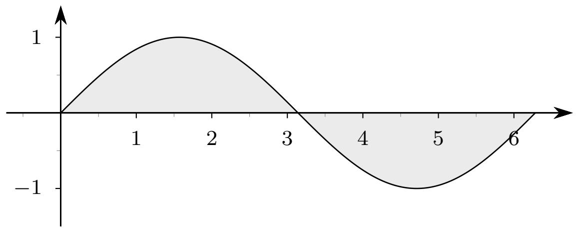


Figura 13.6 *Trapezoide relativo alla funzione* $\sin x$*, in* $[0, 2\pi]$

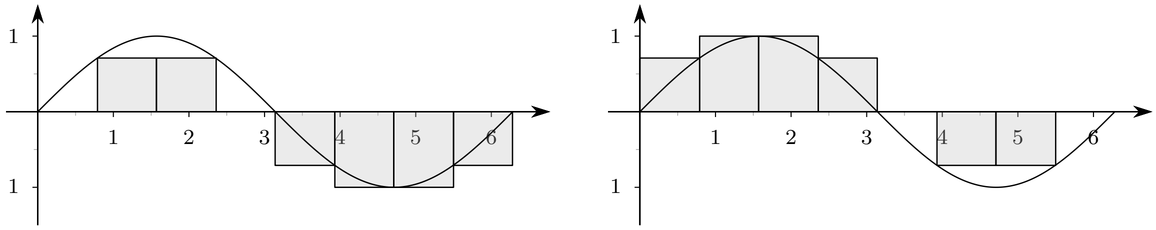


Figura 13.7 *Plurirettangoli relativi alla funzione* $\sin x$ *in* $[0, 2\pi]$*, con* 8 *suddivisioni*

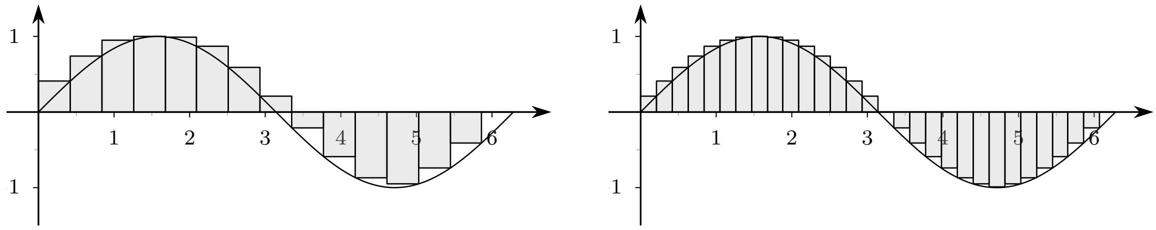


Figura 13.8 *Plurirettangoli relativi alla funzione* $\sin x$ *in* $[0, 2\pi]$, *con* 15 *e* 30 *suddivisioni*

C'è da fare un'osservazione abbastanza importante: tutto il processo di costruzione dei plurirettangoli ha senso solo perché le funzioni in esame sono limitate. La cosa è ovvia perché noi ci siamo limitati alle funzioni continue, ma se si vuole estendere il concetto a funzioni non continue bisogna prestare attenzione a questo fatto.

Siamo ora pronti per dare una definizione formalmente corretta del concetto di integrale definito.

Definizione 13.2. *Sia data una funzione* f *definita e continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$. *Si consideri una suddivisione dell'intervallo* $[a, b]$ *in* n *parti uguali, ciascuna dunque di misura* $\delta_i = (b-a)/n$ *e si prenda, in ciascun sottointervallo, il massimo* M_i *e il minimo* m_i *della funzione. Le somme*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \delta_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_i$$

si chiamano, rispettivamente, Somma integrale inferiore *e* Somma integrale superiore *relative alla funzione* f, *all'intervallo* $[a, b]$ *e alla sua suddivisione in* n *parti.*

Si dimostra che, per le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato, le somme inferiori e superiori, al tendere di n all'infinito, tendono a un comune valore, che si chiama *Integrale definito di* $f(x)$ *tra* a *e* b e si indica con

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \, .$$

Nel caso di funzioni positive l'integrale ha il significato di area del trapezoide individuato dalla funzione f sull'intervallo $[a, b]$, nel caso di funzioni negative ha il significato di opposto dell'area del trapezoide.

I numeri a e b si chiamano *estremi di integrazione*, la funzione f si chiama *funzione integranda.* È chiaro da quanto detto che, nel simbolo di integrale il nome della variabile non ha alcun interesse, tanto che alcuni lo omettono completamente; anche il dx serve soltanto a ricordare il processo di limite attraverso cui si è giunti alla definizione, e anche questo viene omesso da qualcuno. Si possono cioè considerare equivalenti i simboli seguenti:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \, , \quad \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \, , \quad \int_a^b f\, \mathrm{d}x \, , \quad \int_a^b f \, .$$

È altresì evidente che il numero a deve essere strettamente minore del numero b. Nelle applicazioni ha interesse considerare anche integrali tra c e d, con $c \geq d$. Per questo si pone, per definizione

$$\int_c^c f(x)\, \mathrm{d}x = 0 \, ,$$

e, se $c > d$,

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Con queste definizioni il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ha senso qualunque sia l'ordine dei numeri a e b (naturalmente purché la funzione sia definita e continua in $[a, b]$ oppure $[b, a]$).

Una prima proprietà che si può dimostrare, molto utile nelle applicazioni, è quella relativa all'additività rispetto all'intervallo di integrazione.

Teorema 13.3. *Se a, b, c sono tre reali qualsiasi, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La verifica grafica di questo teorema è ovvia per funzioni positive, nel caso che $a < c < b$, come mostra la figura che segue: il primo integrale è l'area del trapezoide totale, gli altri due le aree dei trapezoidi indicati con 1 e 2, ed è chiaro che l'area totale è la somma delle altre due. In ogni caso, facendo riferimento a opportuni grafici, non è difficile rendersi conto del perché la proprietà valga anche in casi più generali.

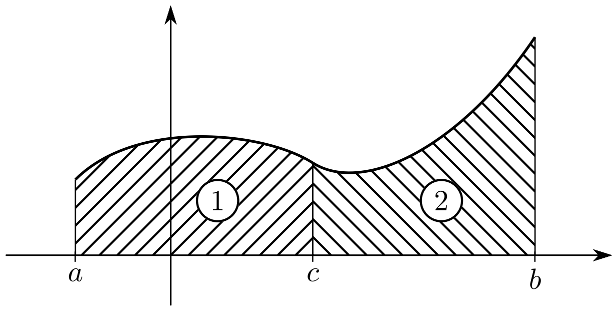


Figura 13.9 *Additività rispetto all'intervallo di integrazione*

Un importante risultato che si può dedurre come conseguenza delle definizioni che abbiamo dato è il metodo per il calcolo dell'area di una regione piana compresa tra i grafici di due funzioni, ed eventualmente due rette verticali, come nella figura che segue.

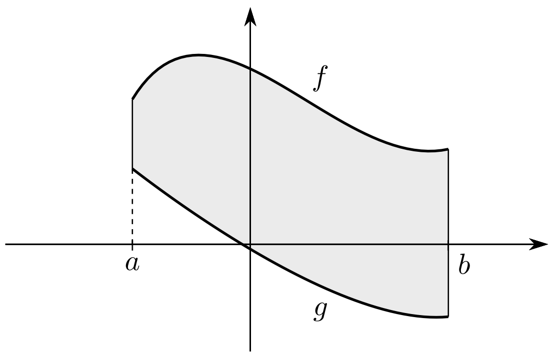


Figura 13.10 *Regione piana compresa tra i grafici di due funzioni*

L'area della regione in questione è *sempre* data dall'integrale, tra a e b ($a < b$), della differenza fra la funzione "più alta" e quella "più bassa"; nell'esempio della figura 13.10 si ha:

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Può succedere che i due grafici si intersechino, come nella figura che segue.

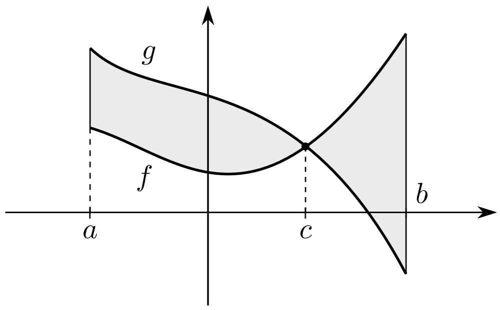


Figura 13.11 *Regione piana compresa tra i grafici di due funzioni*

In questo caso occorrerà spezzare il calcolo in due parti:

$$\mathit{Area} = \int_a^c \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_c^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

13.5 Il calcolo degli integrali definiti

Il calcolo effettivo degli integrali definiti usando la definizione è possibile solo in casi molto semplici e a prezzo di calcoli abbastanza complessi. Per fortuna viene in nostro aiuto il già citato teorema fondamentale del calcolo integrale che generalizza una proprietà che abbiamo già visto nei primi esempi di questo capitolo.

Teorema 13.4 (Teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia data una funzione f definita e continua in un intervallo I. Sia inoltre F una primitiva di f in I. Se a e b sono due punti qualunque di I, si ha*

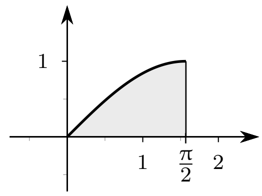
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

E' chiaro il motivo per cui questo teorema si chiama *fondamentale*: in sostanza esso riconduce il calcolo dell'area di una regione piana (abbastanza) arbitraria a quello della ricerca di una primitiva, ricerca comunque non facile in generale, ma fattibile "a mano" in casi anche complessi.

La formula precedente si usa scrivere, tradizionalmente, nel modo seguente:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b\,.$$

Esempio. Calcolare l'area racchiusa tra il grafico della funzione $\sin x$, l'asse delle x, e le rette $x = 0$ e $x = \pi/2$.



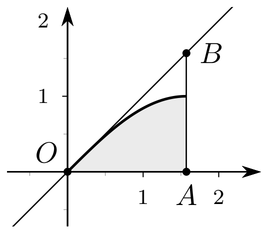
L'area richiesta è quella di un normale trapezoide, per cui si dovrà calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx\,.$$

Poiché come è noto, una primitiva di $\sin x$ è $-\cos x$, applicando il teorema fondamentale si troverà subito

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1\,.$$

Si può fare un controllo "visivo" della bontà di questo risultato nel seguente modo. La funzione $\sin x$ ha come derivata $\cos x$, per cui, nell'origine, la tangente ha coefficiente angolare $\cos 0 = 1$ e conseguentemente equazione $y = x$ (la bisettrice del primo e terzo quadrante). Dunque l'area del trapezoide dovrà essere un po' più piccola di quella del triangolo OAB della figura a lato. L'area del triangolo è



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} \simeq 1.2337\,,$$

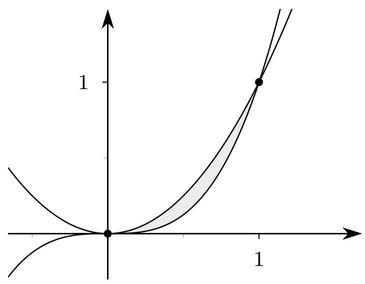
per cui tutto torna. A voler essere sofisticati si poteva anche tracciare la tangente al grafico nel punto $C = (\pi/2, 0)$, determinarne l'intersezione D con la bisettrice e calcolare l'area del triangolo BCD, che va sottratta all'area di OAB per avere una stima più precisa dell'area cercata. Lasciamo al lettore questo (facile!) calcolo che fornisce il seguente risultato

$$\mathit{Area}(BCD) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 \simeq 0.1629$$

Una migliore approssimazione dell'area del trapezoide sarà allora $1.2337 - 0.1629 = 1.0708$, che si avvicina sensibilmente al valore 1 trovato con l'integrale, confermando la bontà del risultato.

Esempio. Calcolare l'area della regione limitata racchiusa tra i grafici di x^2 e x^3 e appartenente al primo quadrante.

La figura qui a lato mostra che nella regione limitata di piano considerata si ha $0 \le x \le 1$, e che in questo tratto la funzione che sta più in alto è x^2, quella che sta più in basso è x^3. L'area richiesta sarà dunque



$$\int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx\,.$$

Poiché

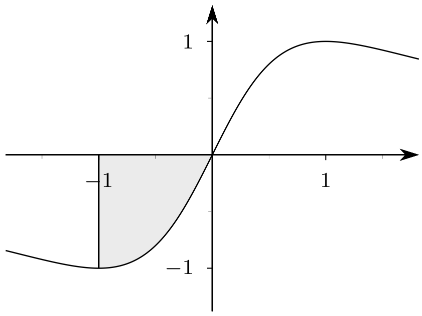
$$\int (x^2 - x^3) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c\,,$$

si avrà

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{4}\right) = \frac{1}{12}\,.$$

Esempio. Calcolare l'area della parte di piano cartesiano individuato dalle condizioni.

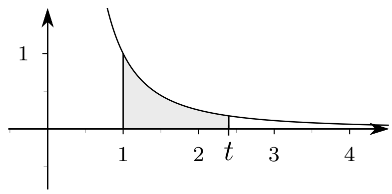
$$\begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{2x}{x^2+1} \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$



Basta osservare che, essendo la funzione sempre negativa nel tratto in questione, il trapezoide sta sotto l'asse delle ascisse, per cui la sua area sarà data da

$$-\int_{-1}^{0} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{-1} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x^2+1)\right]_0^{-1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \simeq 0.69315\,.$$

Esempio. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = 1/x^2$, l'asse delle x, la retta $x = 1$ e la retta $x = t$, essendo t un numero reale strettamente maggiore di 1. Calcolare poi il limite di quest'area quanto $t \to +\infty$. Che interpretazione geometrica si può dare di questo risultato? Si tratta di un risultato intuitivamente evidente o "difficile da digerire"?



Con il teorema fondamentale il calcolo dell'area (si tratta di un normale trapezoide) è molto semplice:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^t x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \frac{-1}{t} + 1\,.$$

Anche il limite per $t \to +\infty$ è immediato e fornisce come risultato il numero 1. Sulla base di quanto finora detto si può interpretare questo numero come l'*area* della regione illimitata di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle x e la retta $x = 1$. La cosa sorprendente è che quest'area risulta finita, pur riferendosi a una regione illimitata: questo fatto dà un chiaro significato geometrico al fatto che, da un certo punto in poi il grafico di $f(x) = 1/x^2$ è "talmente attaccato" all'asse x, da non lasciare praticamente scampo alcuno.

Se si ripete tutto il calcolo con la funzione $g(x) = 1/x$ al posto di $f(x)$ si ottiene:

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln|x|\right]_1^t = \ln|t| - \ln 1 = \ln t\,.$$

Adesso il limite per $t \to +\infty$ fornisce come risultato $+\infty$, e questa volta si può dire che la funzione $g(x) = 1/x$ è molto più "lontana" dall'asse x di quanto non sia la funzione $f(x) = 1/x^2$. La figura che segue illustra chiaramente questa situazione.

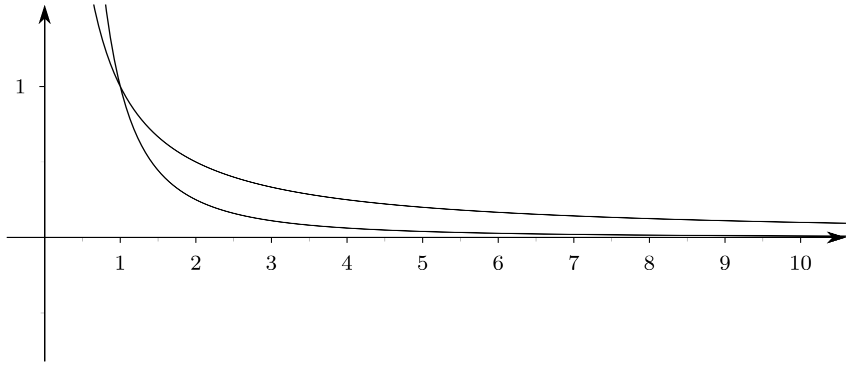


Figura 13.12 *Confronto fra i grafici di* $g(x) = 1/x$ *e* $f(x) = 1/x^2$

13.6 Integrali impropri

L'ultimo esempio del paragrafo precedente ci porta a considerare il problema di calcolare l'area di regioni illimitate del piano cartesiano. Per quanto ci riguarda saremo interessati a seguenti due tipi di problemi.

1. Calcolare l'area di regioni piane comprese tra l'asse delle ascisse e il grafico di una funzione avente un asintoto verticale in uno dei due estremi del suo intervallo di definizione; la funzione sarà naturalmente continua in $]a, b]$, oppure in $[a, b[$, a seconda che l'asintoto verticale sia sull'estremo sinistro o destro. Per esempio saremo interessati al problema di valutare l'area della regione compresa il grafico della funzione $f(x) = 1/x^2$ e l'asse delle x nell'intervallo $]0, 1]$, che è l'esempio trattato precedentemente.
2. Calcolare l'area di regioni piane comprese tra il grafico di una funzione continua e l'asse delle x, in un intervallo del tipo $[a, +\infty[$, oppure $]-\infty, a]$.

In questi casi si parla di *integrali impropri*, e la tecnica è la stessa già applicata nell'esempio precedentemente considerato.

Per il primo caso supponiamo che l'asintoto verticale sia nell'estremo sinistro dell'intervallo di definizione della funzione. Allora si definisce:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13.3}$$

Se invece l'asintoto si trova nell'estremo destro avremo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13.4}$$

Per il secondo caso scriveremo (e i simboli sono ormai ovvi)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{13.5}$$

Come mostra il già citato esempio queste aree possono essere finite o infinite.

13.7 Esercizi

Esercizio 13.1. *Calcolare i seguenti integrali indefiniti.*

1. $\displaystyle\int (x - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\,;$

2. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x}\,\mathrm{d}x\,;$

3. $\displaystyle\int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x\,;$

4. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x}-\mathrm{e}^{3x}+1\right)\mathrm{d}x\,;$

5. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{2x+1}\,\mathrm{d}x\,;$

6. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{3x^2}\,\mathrm{d}x\,;$

7. $\displaystyle\int 3x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\,;$

8. $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\,;$

9. $\displaystyle\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x\,;$

10. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x}\,\mathrm{d}x\,;$

11. $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x\,;$

12. $\displaystyle\int 2x-3\sin(2x)\,\mathrm{d}x\,;$

13. $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x}-3x+2x^2\right)\mathrm{d}x\,;$

14. $\displaystyle\int x^3\cos x\,\mathrm{d}x\,.$

Esercizio 13.2. *Determinare le somme integrali inferiori e superiori per le funzioni indicate, nell'intervallo a fianco segnato, e con il numero n di suddivisioni assegnato.*

1. $f(x)=x^2-1$, *su* $[-3,1]$, *con* $n=4$;
2. $f(x)=-x^3-2$, *su* $[-5,3]$, *con* $n=2$;
3. $f(x)=\sqrt{-x}$, *su* $[-4,-3]$, *con* $n=2$;
4. $f(x)=\ln(x-1)$, *su* $[2,4]$, *con* $n=3$;
5. $f(x)=2^{x-1}$, *su* $[-5,1]$, *con* $n=3$;
6. $f(x)=x^2-1$, *su* $[0,2]$, *con* $n=2$.

Esercizio 13.3. *Calcolare i seguenti integrali definiti.*

1. $\displaystyle\int_0^2 (2x-3)\,\mathrm{d}x;$
2. $\displaystyle\int_1^3 (2\ln x-3x)\,\mathrm{d}x;$
3. $\displaystyle\int_0^1 2\frac{x}{x-2}\,\mathrm{d}x;$
4. $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+x^4)\,\mathrm{d}x.$

Esercizio 13.4. *Per ciascuna delle funzioni seguenti, definite a pezzi, calcolare gli integrali indicati.*

1. $f(x) = \begin{cases} x, & \textit{se} \quad x \leq 0 \\ -2x-1, & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases}, \quad \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ } e \int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x;$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & \textit{se} \quad x \leq 0 \\ -x^3, & \textit{se} \quad x > 0 \end{cases}, \quad \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}-2x, & \textit{se} \quad x \leq 1 \\ -x^2, & \textit{se} \quad x > 1 \end{cases}, \quad \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x;$

4. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & \textit{se} \quad x \leq 1 \\ \ln x, & \textit{se} \quad x > 1 \end{cases}, \quad \int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x;$

5. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \textit{se} \quad x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x}, & \textit{se} \quad x > 1 \end{cases}, \quad \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x;$

6. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}+1, & \textit{se} \quad x < -2 \\ -\ln(-x)+2x, & \textit{se} \quad x \geq -2 \end{cases}, \quad \int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Esercizio 13.5. *Dire se esistono, ed eventualmente calcolarli, i seguenti integrali impropri.*

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} (2x-3)\,\mathrm{d}x;$

2. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{2+x}{x+1}\,\mathrm{d}x;$

3. $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x+1}{x-3}\,\mathrm{d}x;$

4. $\displaystyle\int_4^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x;$

5. $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x;$

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

14 Funzioni di due variabili

Abbiamo già parlato brevemente di funzioni di due variabili nel paragrafo 2.6 del capitolo 2. Ora torniamo sull'argomento per una trattazione più dettagliata, cominciando con una introduzione *visuale* al problema.

14.1 Introduzione illustrata

Richiamiamo alcuni concetti fondamentali relativi alla rappresentazione delle funzioni di una variabile, fissando l'attenzione su quanto sarà utile per affrontare con sicurezza il caso di due variabili. Se consideriamo la funzione che ad ogni numero reale x fa corrispondere la sua metà, possiamo costruire una *tabella a doppia entrata* in cui su una colonna mettiamo il valore di x (variabile indipendente) e sull'altra il corrispondente valore di $y = f(x)$ (variabile dipendente). Naturalmente potremo scrivere esplicitamente la tabella solo in corrispondenza a un numero finito di valori di x, per esempio per alcuni valori presi sui numeri naturali, come nella tabella 2.1 della pagina 11, tabella che qui riportiamo per comodità.

x	$x/2$
1	$1/2$
2	1
3	$3/2$
4	2
5	$5/2$

Tabella 14.1 *Rappresentazione "tabulare" di una funzione di una variabile*

I dati di questa tabella possono essere riportati in un grafico cartesiano, come nella figura 2.4 della pagina 13; riportiamo qui anche questa figura per comodità.

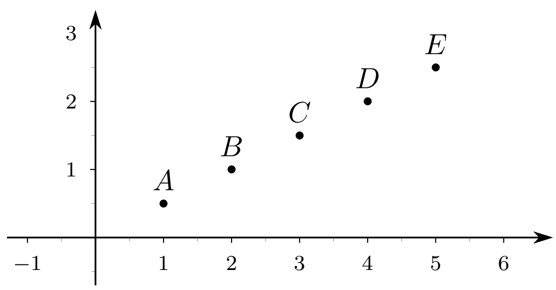


Figura 14.1 *Grafico cartesiano relativo alla tabella 14.1*

Come già accennato, questo grafico può essere desunto *compattando* un grafico "a frecce": da ogni punto x dell'asse delle ascisse facciamo partire una freccia verticale fino alla "quota" $f(x)$, cioè fino al punto $\big(x, f(x)\big)$; a partire da questa quota la freccia "piega" orizzontalmente fino a incontrare l'asse delle y esattamente in corrispondenza del valore $f(x)$, come nella figura seguente (già considerata nella pagina 13).

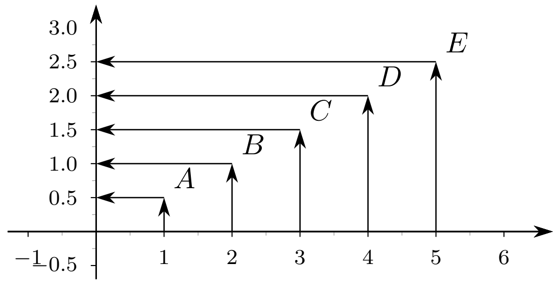


Figura 14.2 *Grafico cartesiano con frecce, relativo alla tabella 14.1*

Se si riportano nel grafico della figura 14.1 anche i punti corrispondenti ai valori di x che non compaiono nella tabella, si ottiene il risultato visualizzato nella figura seguente: i punti rappresentativi non si dispongono casualmente nel piano, ma su una linea, in questo caso su una linea retta, in casi più generali su una linea più complessa, come abbiamo già avuto modo di constatare.

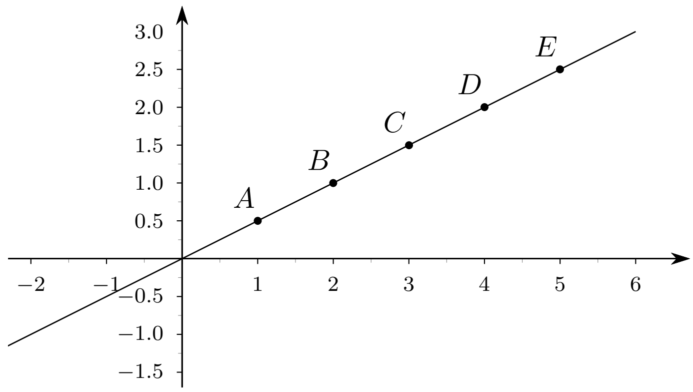


Figura 14.3 *Grafico della funzione $y = x/2$, comprendente i punti della figura 14.1*

Se consideriamo ora una funzione di due variabili, per esempio $f(x, y) = x + y$, potremo ancora costruire una tabella come la 14.1, ma dovremo utilizzare *tre* colonne: *due* per le variabili indipendenti e *una* per la variabile dipendente. Naturalmente anche qui la tabella potrà essere effettivamente costruita solo per alcune coppie di valori (x, y).

x	y	$x + y$
1	0	1
0	1	1
1	1	2
1	−1	0
...	...	...

Tabella 14.2 *Rappresentazione "tabulare" di una funzione di due variabili*

Quello che si ottiene è un insieme di *terne* di numeri e, come sappiamo, le terne di numeri possono essere rappresentate nello spazio dove si sia introdotto un sistema di 3 assi cartesiani ortogonali, $Oxyz$, come evidenziato nel paragrafo 4.1 del capitolo 4 (vedi la pagina 25).

Scegliamo, come è tradizione, di rappresentare le coppie (x, y) che stanno nel dominio di f sul piano Oxy. Da ciascuno di questi punti facciamo partire una freccia verticale fino alla "quota" $f(x, y)$, cioè fino al punto $\big(x, y, f(x, y)\big)$; a partire da questa quota la freccia "piega" orizzontalmente fino a incontrare l'asse z in corrispondenza al valore $f(x, y)$, come mostra la figura seguente per un singolo punto (x, y) del dominio.

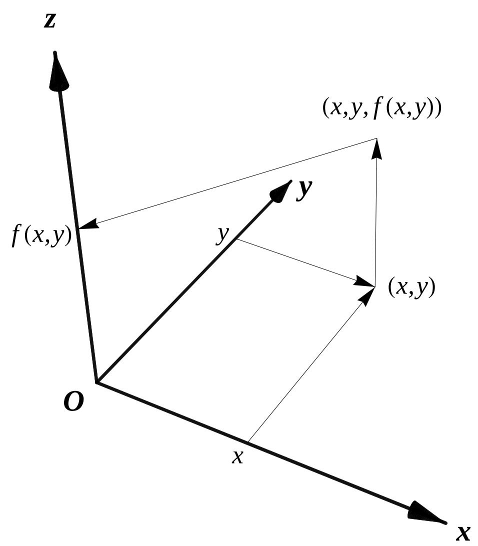


Figura 14.4 *Procedimento per tracciare il grafico di una funzione di due variabili*

Naturalmente, come già per le funzioni di una variabile, scegliamo alcuni punti nel dominio, per esempio quelli individuati da una griglia tracciata nel piano Oxy, e da ognuno innalziamo la freccia fino alla quota $f(x, y)$: ne viene un boschetto di frecce, come nella figura che segue.

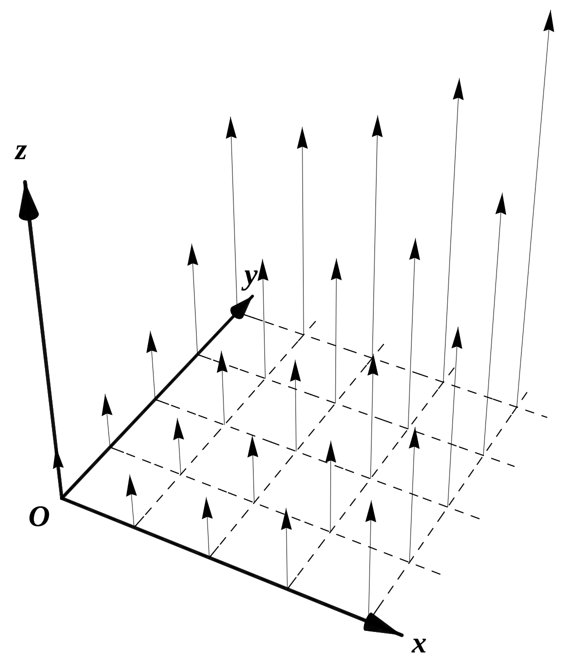


Figura 14.5 *Un "boschetto" di frecce*

Nei casi che interesseranno le punte delle frecce, cioè i punti di coordinate $\big(x, y, f(x, y)\big)$, non si distribuiscono a casaccio nello spazio, ma su una superficie, che possiamo evidenziare per esempio con una "piastrellatura".

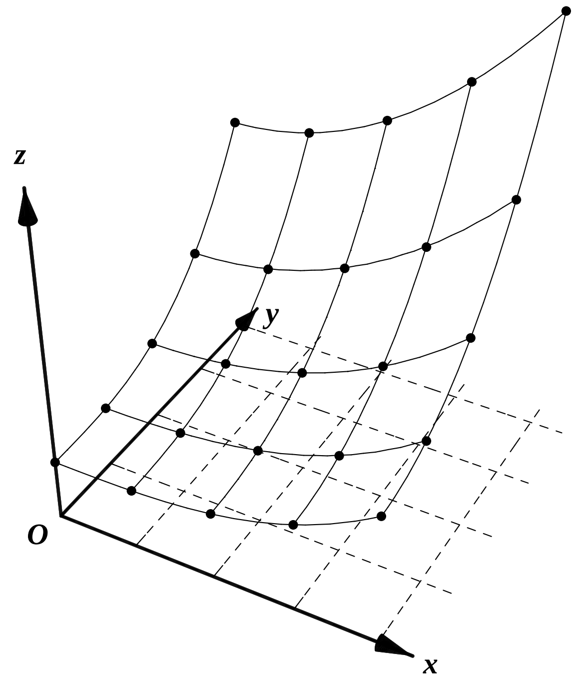


Figura 14.6 *Una superficie-grafico*

Per rendere più significativo il grafico si possono introdurre anche colorazioni come nella figura che segue.

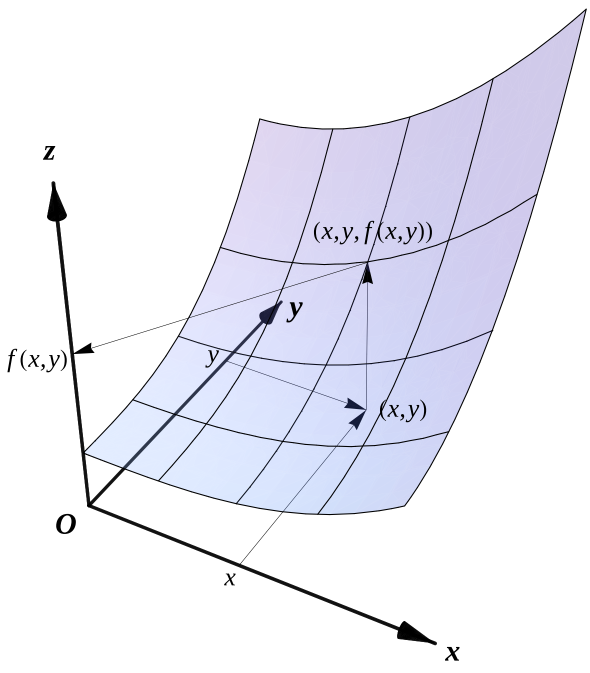


Figura 14.7 *Uso di colorazioni per le superfici-grafico*

Non tutte le caratteristiche che si evidenziano nel grafico delle funzioni di una variabile potranno essere trasferite ai grafici di funzioni di due variabili; per esempio non avrà alcun senso parlare di *crescenza* o *decrescenza*, mentre potremo ancora considerare (e la cosa sarà per noi della massima importanza) i concetti di di massimo e minimo (relativo o assoluto). Come suggerisce la figura 9.6 della pagina 83, potremo usare l'appellativo *monte* e *cima* per riferirci ai massimi, l'appellativo *valle* e *fondovalle* per riferirci ai minimi. La figura che segue mostra, come ulteriore esempio, una situazione in cui sono presenti due monti e una valle. In questa figura non sono tracciati gli assi, per non complicare il grafico: è una scelta che si fa normalmente nei grafici tridimensionali, dove si racchiude la parte di superficie che interessa in un "box", riportando sugli spigoli i valori delle variabili sui tre assi.

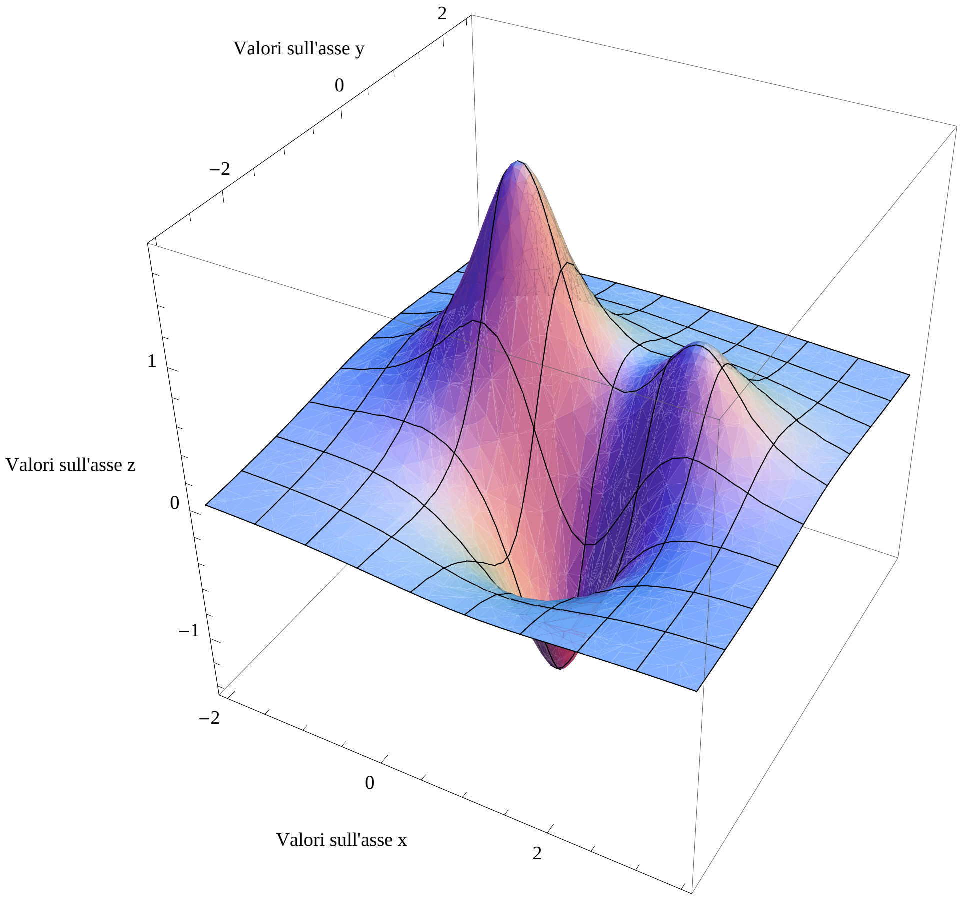


Figura 14.8 *Una funzione con due "monti" e una "valle"*

A volte, invece di tracciare sulla superficie una piastrellatura che riproduca la griglia del piano Oxy, conviene tracciare altre linee. Una delle scelte più comuni è quella delle *linee di livello*, o linee di quota: si tratta di evidenziare sulla superficie tutti i punti che si trovano a una determinata quota, punti che nelle situazioni comuni si distribuiscono su una linea che si può pensare ottenuta intersecando la superficie con un piano orizzontale (parallelo al piano Oxy). La figura 14.9 mostra alcune di queste linee per la stessa superficie della figura 14.8.

La considerazione delle linee di livello consente di costruire un rappresentazione grafica "bidimensionale" della stessa superficie: sarà sufficiente "raccogliere" tutte queste linee sul piano Oxy e magari usare colori via via più chiari per indicare le cime e via via più scuri per indicare le valli. Si tratta della convenzione che viene normalmente adottata nelle carte geografiche. Si può vedere questa rappresentazione per la stessa superficie della figura 14.8 nella figura 14.10.

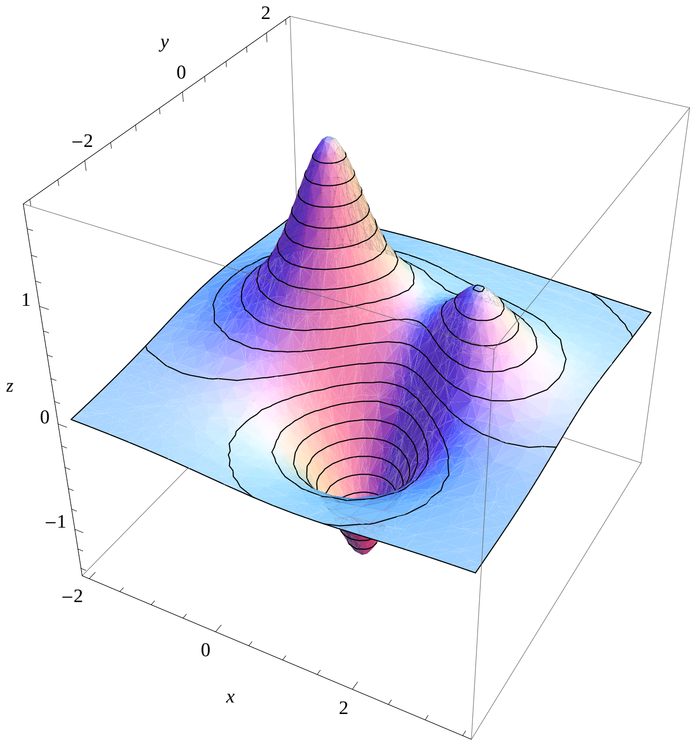


Figura 14.9 *Linee di livello*

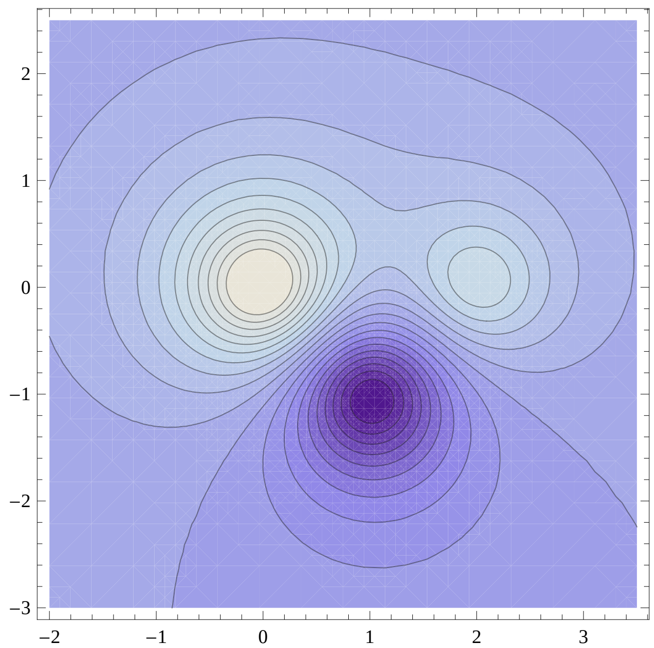


Figura 14.10 *Linee di livello raccolte sul piano Oxy*

La figura 14.11 mostra come si ottiene una delle linee di livello mediante intersezione della superficie con un piano orizzontale.

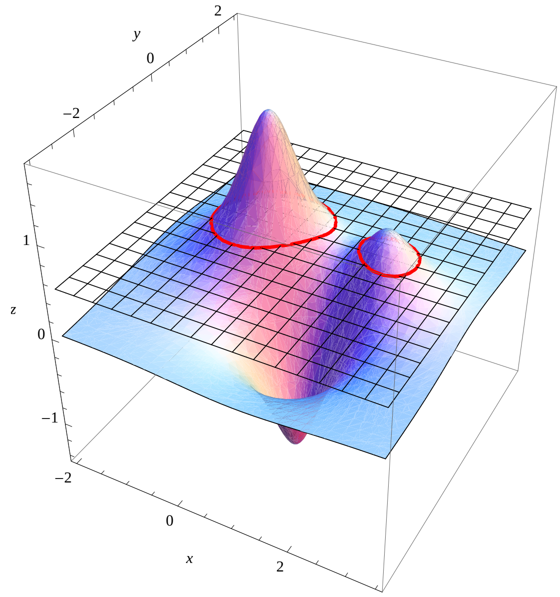


Figura 14.11 *Sezione di una superficie con un piano orizzontale*

Ritornando alla piastrellatura della figura 14.8, possiamo osservare che le linee della piastrellatura non sono altro che le intersezioni della superficie con piani verticali paralleli o al piano Oxz o al piano Oyz.

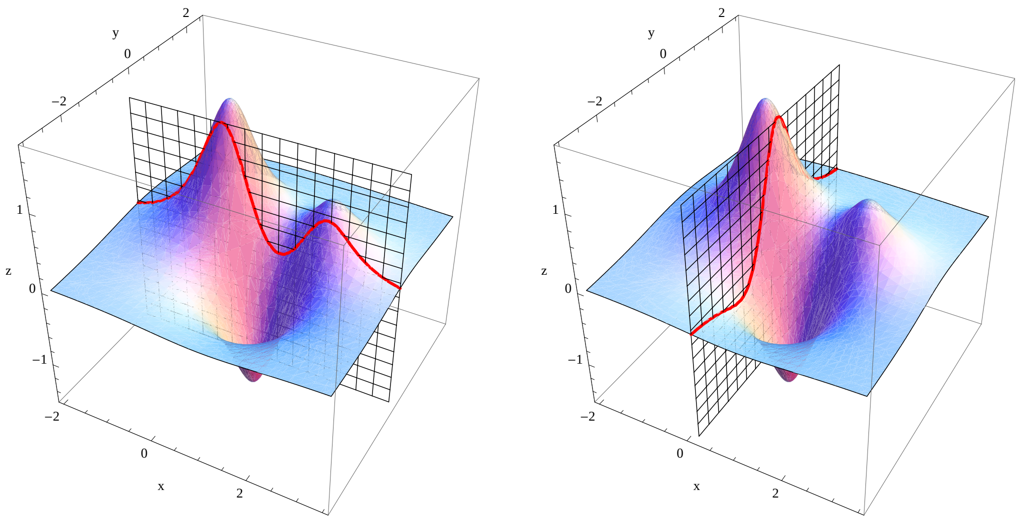


Figura 14.12 *Sezione di una superficie con piani verticali paralleli a Oxz e a Oyz*

Nel seguito saremo interessati a considerare anche questo tipo di sezioni.

Osserviamo anche esplicitamente che i massimi e minimi per funzioni di due variabili godono di proprietà grafiche simili a quelle delle funzioni di una variabile: per le funzioni di una variabile (opportunamente regolari e in particolare senza spigoli) nei massimi e minimi interni al dominio la retta tangente al grafico risultava orizzontale, ovvero parallela all'asse x; per le funzioni di due variabili (sempre opportunamente regolari) nei massimi e minimi interni al dominio sarà il piano tangente ad essere orizzontale, cioè parallelo al piano Oxy. Le immagini della figura 14.13 mostrano i piani tangenti in corrispondenza di un massimo e di un minimo; la prima immagine mostra la superficie vista dall'alto, la seconda vista dal basso, per evidenziare meglio i piani tangenti.

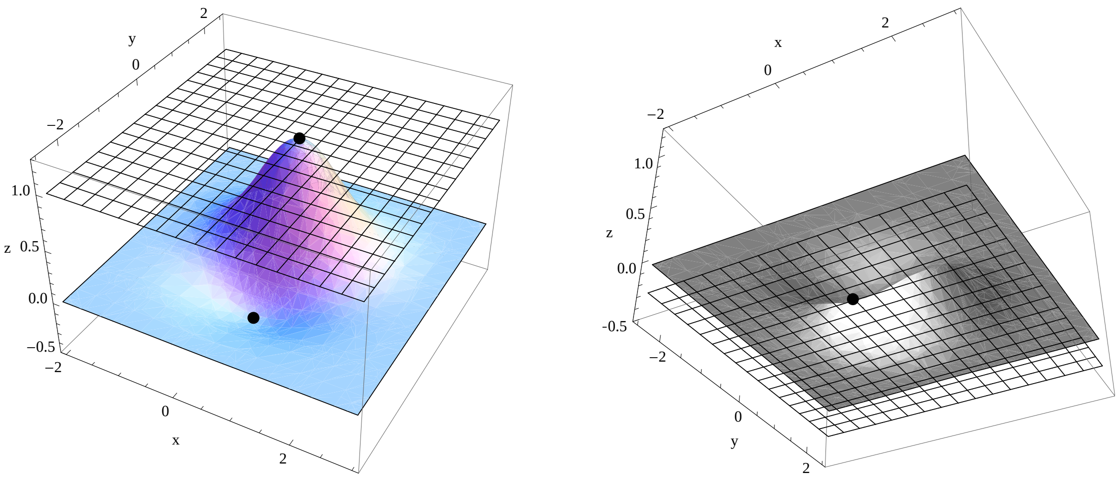


Figura 14.13 *Piani tangenti in un punto di massimo e in un punto di minimo*

Trattando le funzioni di una variabile, oltre ai massimi e minimi, abbiamo considerato anche i flessi a tangente orizzontale (come caso particolare di quelli a tangente obliqua). Non esiste nulla di simile per le funzioni di due variabili, nella quali però compare un fenomeno completamente nuovo: i *punti di sella*, dove, come vedremo, la situazione è decisamente più complessa che non con i flessi in una variabile.

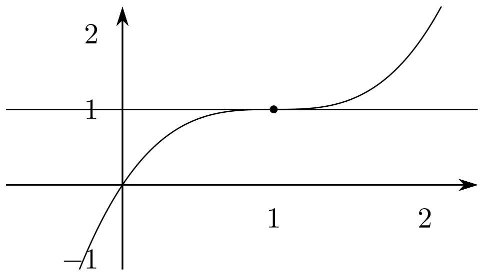


Figura 14.14 *Un flesso a tangente orizzontale*

Per le funzioni di una variabile l'idea fondamentale (per funzioni regolari) è che un punto di flesso (in particolare a tangente orizzontale) è un punto dove si ha un cambio di concavità. Completamente diversa la situazione per funzioni di due variabili: si definisce punto di sella un punto in cui il piano tangente è orizzontale e in cui vale la seguente proprietà: se passiamo per il punto in certe direzioni il punto si presenta come un massimo, mentre in certe direzioni si presenta come un minimo.

Geograficamente un punto di sella corrisponde a un valico di montagna: per chi lo attraversa il valico è il punto più alto, per chi invece segue il crinale da una cima all'altra è il punto più basso.

Il nome *punto di sella* ricorda proprio la sella di un cavallo: il punto in cui il cavaliere è seduto è un massimo nella direzione destra-sinistra, è un minimo nella direzione avanti-dietro. Osserviamo anche che se su una normale sella di cavallo dovesse sedersi una scimmia, essa avrebbe difficoltà a sistemare la coda; esistono anche situazioni in cui la superficie ha un punto in cui potrebbe sedersi una scimmia, facendo posto sia alle gambe che alla coda (anche se non si conoscono cavalli su cui fissarla!), e si potrebbe parlare in questo caso di *selle di scimmia*. La figura 14.15 mostra una sella nel senso ordinario del termine, con evidenziate due direzioni lungo le quali sulla superficie si ha un massimo e un minimo rispettivamente. La figura 14.16 mostra invece un punto a “sella di scimmia” su una superficie, e qui non si hanno direzioni lungo le quali si ha un massimo e direzioni lungo le quali si ha un minimo: dal punto di vista formale la situazione è ancora più complessa.

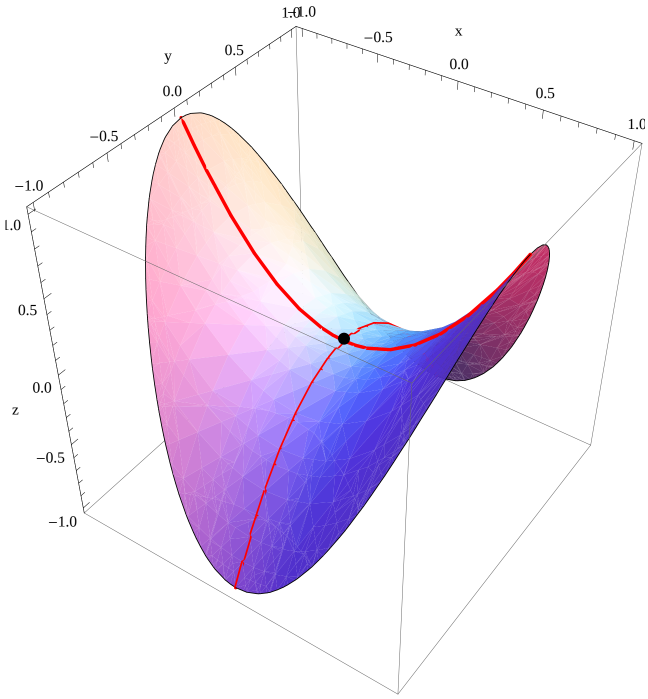


Figura 14.15 *Una “sella di cavallo”*

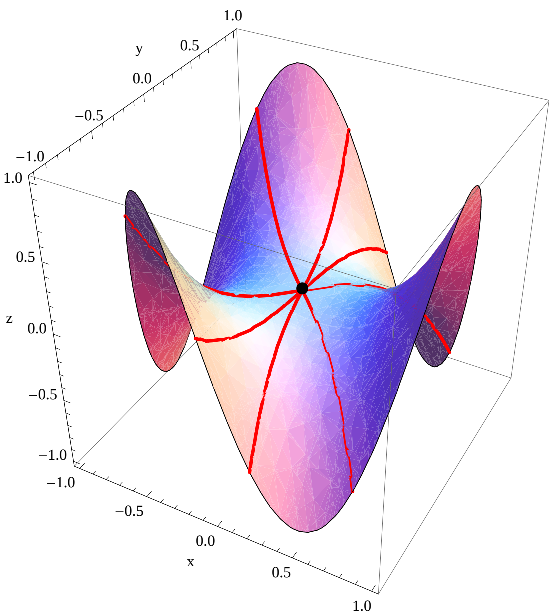


Figura 14.16 *Una “sella di scimmia”*

14.2 Qualche esempio significativo

Proponiamo alcuni esempi di grafici di funzioni di due variabili, che ci saranno utili nel seguito. Le figure rappresentano le superfici sia utilizzando una piastrellatura che curve di livello.

1. Piano $z = 2x + 3y$, o anche $2x + 3y - z = 0$.

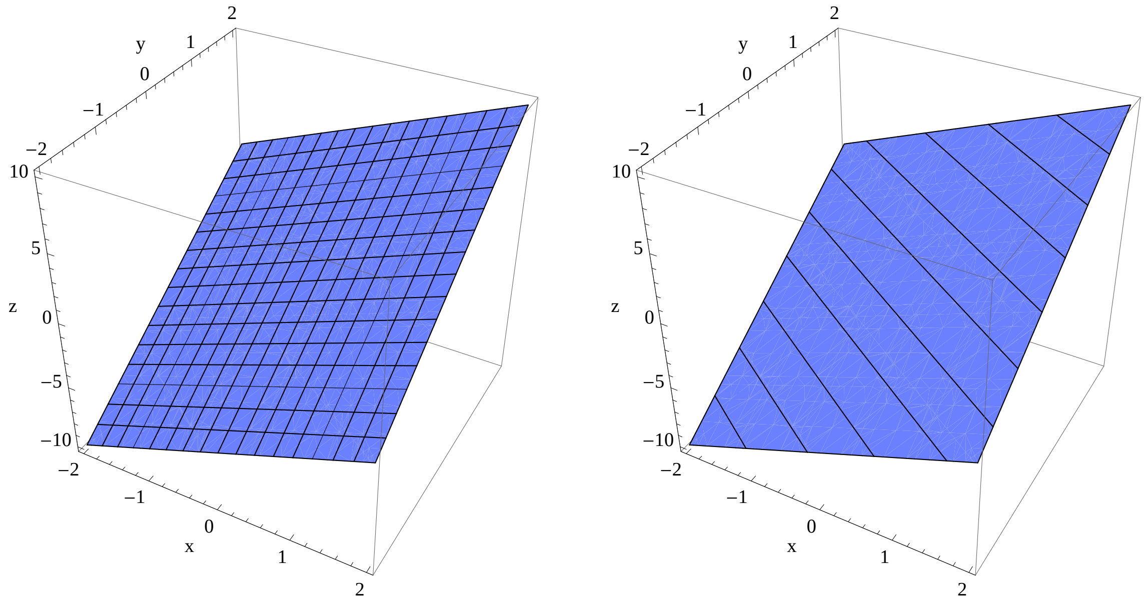


Figura 14.17 *Piano* $z = 2x + 3y$

2. Paraboloide $z = x^2 + y^2$. Si tratta della superficie ottenuta per rotazione della parabola $z = x^2$, attorno all'asse z. Le sue curve di livello sono circonferenze con centro sull'asse z.

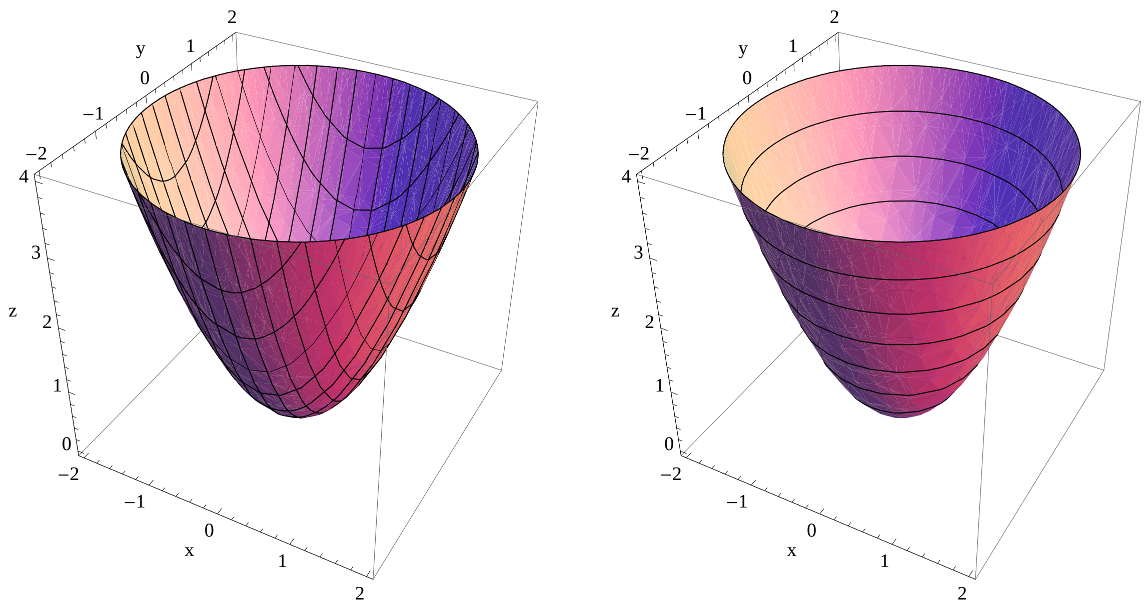


Figura 14.18 *Paraboloide* $z = x^2 + y^2$

3. Paraboloide a sezione ellittica: $z = 3x^2 + y^2$. Superficie simile a quella della figura 14.18, ma con curve di livello a sezione ellittica con centro sull'asse z.

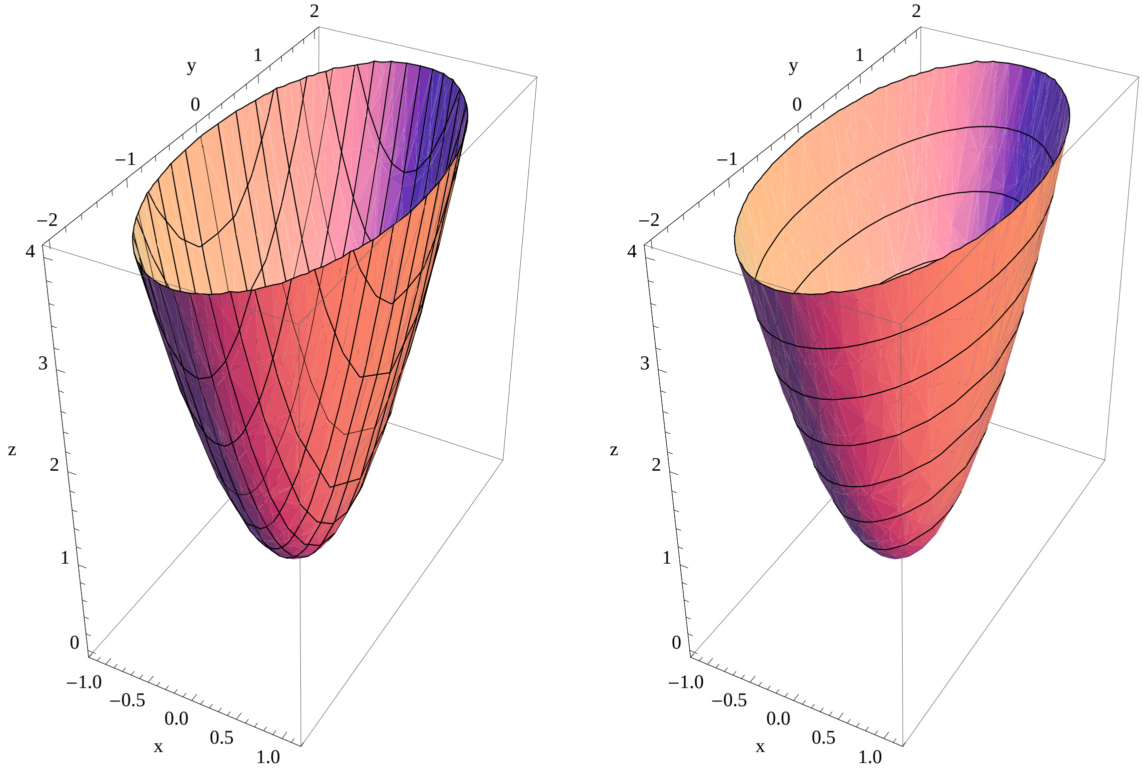


Figura 14.19 *Paraboloide a sezione ellittica:* $z = 3x^2 + y^2$

4. La sella $z = x^2 - y^2$.

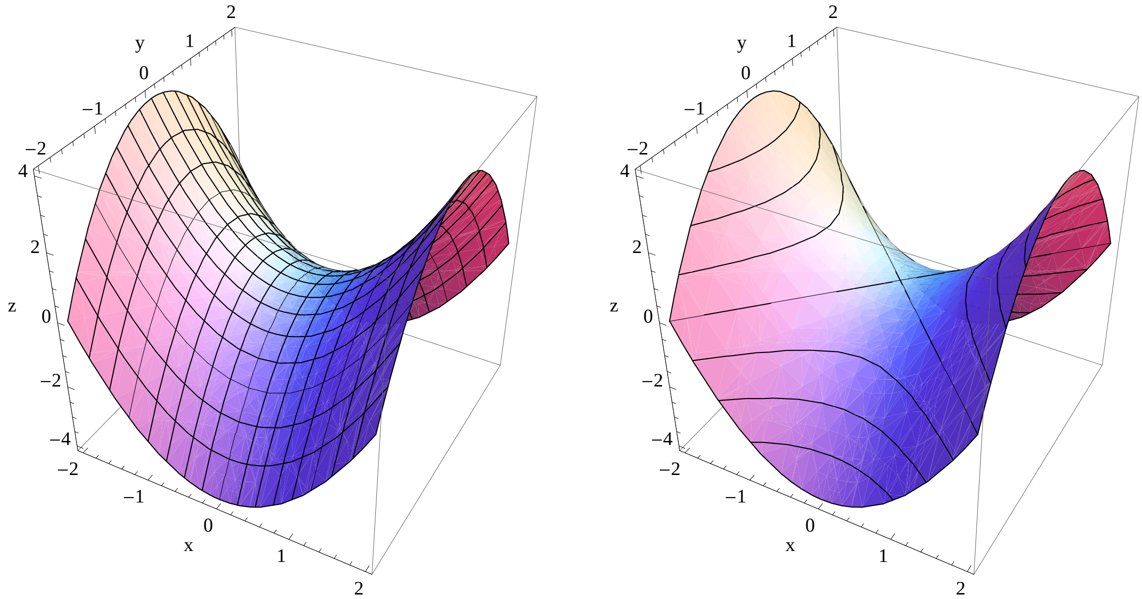


Figura 14.20 *La sella* $z = x^2 - y^2$

5. La superficie $z = x^2$. Si tratta della superficie ottenuta traslando la parabola $z = x^2$ lungo l'asse delle x.

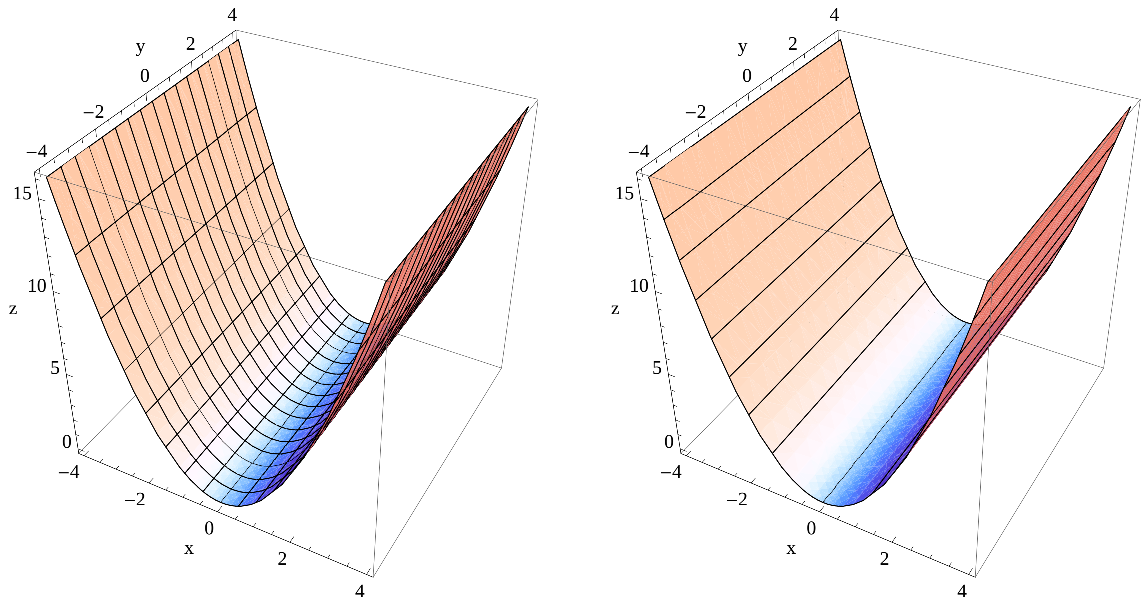


Figura 14.21 *La superficie* $z = x^2$

6. La superficie $z = e^{x^2+y^2}$. Molto simile a un paraboloide, ma si osservi la grande differenza di unità di misura tra gli assi x e y da un lato e l'asse z dall'altro. Si noti anche che, in questo caso, il vertice si trova a quota 1 sull'asse z, mentre nel paraboloide si trova sull'origine.

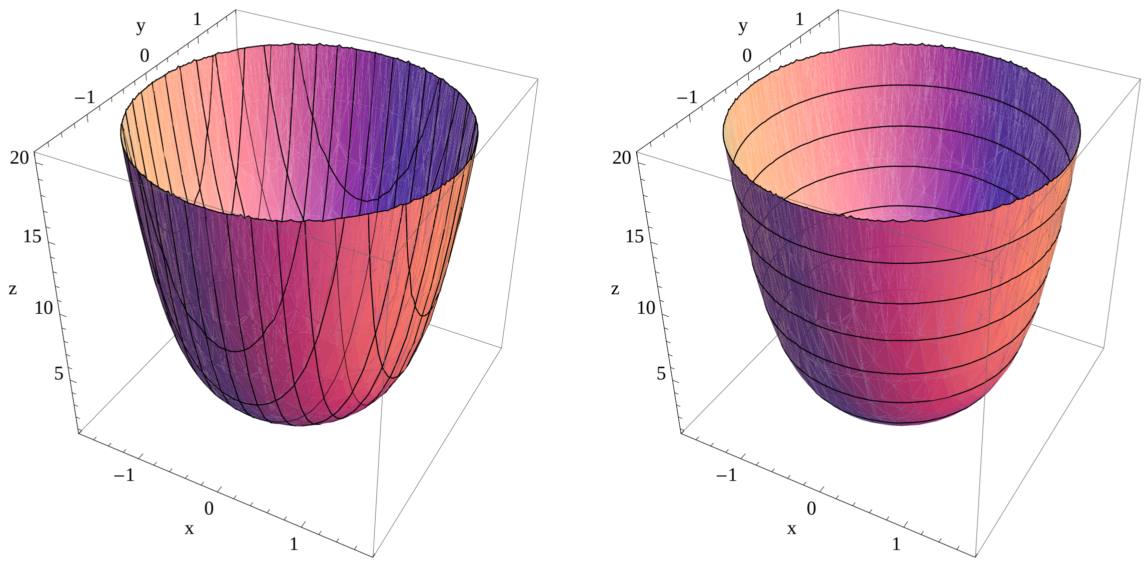


Figura 14.22 *La superficie* $z = e^{x^2+y^2}$

14.3 Cenno su limiti e continuità

La definizione di limite che abbiamo dato per funzioni di una variabile (vedi la definizione 10.2 nella pagina 93) può essere estesa quasi con le stesse parole anche al caso di funzioni due variabili, in quanto basata solo sul concetto di intorno che abbiamo introdotto nella pagina 75 (definizione 9.8) anche per punti del piano. Unica differenza importante è che nel piano non si possono introdurre i concetti di $+\infty$ e $-\infty$: si può parlare solo genericamente di punti all'∞ (senza segno), e si può chiamare *intorno di* ∞ *nel piano* l'esterno di un qualunque disco centrato sull'origine. Con questa precisazione si può ripetere quasi pari pari la definizione 10.2.

Definizione 14.1 (Limite in due variabili)**.** *Sia data una funzione* $f(x, y)$*, di dominio* D*, e sia* (x_0, y_0) *un punto di accumulazione per* D *(non essendo escluso che* (x_0, y_0) *possa essere l'infinito). Diremo che* l *(non essendo escluso che* l *possa essere uno dei due simboli di infinito*[1]*) è il* limite *di* $f(x, y)$ *per* (x, y) *tendente a* (x_0, y_0)*, e scriveremo*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \tag{14.1}$$

se, scelto un arbitrario intorno I_l *di* l*, è possibile trovare in corrispondenza un opportuno intorno* $I_{(x_0,y_0)}$ *di* (x_0, y_0)*, in modo tale che i valori della funzione calcolati in* $I_{(x_0,y_0)}$*,* tranne (x_0, y_0) *stesso, cadano in* I_l*.*

Valgono tutti i teoremi sui limiti, opportunamente adattati e in particolare le regole di calcolo sulla retta reale estesa (ricordiamo che le funzioni di due variabili hanno dominio in $\mathbb{R}^2$, ma codominio in $\mathbb{R}$, esattamente come le funzioni di una variabile).

Si può anche introdurre il concetto di funzione continua con una definizione sostanzialmente identica a quella data per le funzioni di una variabile (definizione 10.6 nella pagina 97).

Definizione 14.2 (Continuità in due variabili)**.** *Sia data una funzione* $f(x, y)$*, di dominio* D*, e sia* (x_0, y_0) *un punto di accumulazione per* D*,* appartenente a D*. La funzione* f *si dice* continua *in* (x_0, y_0) *se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)\,.$$

Anche qui è come dire che una funzione è continua se il calcolo del limite si può fare semplicemente sostituendo (x_0, y_0) al posto di (x, y) nell'espressione della funzione: una bella facilitazione, se si riesce a scoprire a priori quali sono le funzioni continue! E anche qui si può dimostrare che tutte le funzioni costruite con *tecniche elementari* sono continue in tutti i punti del loro dominio.

Purtroppo al di fuori delle funzioni continue il calcolo dei limiti per funzioni di due variabili è estremamente complesso e non alla portata di questo corso, per cui non ce ne occuperemo.

14.4 Piani nello spazio

Ricordiamo che una retta non verticale nel piano ha equazione $y = mx + q$, dove q rappresenta l'ordinata (o quota) all'origine mentre m dà la pendenza o inclinazione della retta rispetto all'asse delle x. Una retta verticale (parallela all'asse y) ha invece equazione $x = k$. Le rette orizzontali hanno equazioni del tipo $y = k$, e quindi hanno $m = 0$, cioè pendenza nulla, come è evidente. Per rendersi conto di questi fatti basta pensare che i punti appartenenti a rette verticali hanno tutti la stessa ascissa, mentre quelli appartenenti a rette orizzontali hanno tutti la stessa ordinata. Per memorizzare rapidamente queste proprietà si può osservare che nelle rette parallele all'asse x *manca la* x, in quelle parallele all'asse y *manca la* y.

[1] Il valore l del limite appartiene alla retta reale estesa, in quanto la funzione f ha come codominio $\mathbb{R}$.

Passando allo spazio possiamo cominciare a considerare le equazioni di piani paralleli a uno dei piani coordinati, ottenendo $x = k$ per i piani (verticali) paralleli al piano Oyz, $y = k$ per i piani (verticali) paralleli al piano Oxz e infine $z = k$ per i piani (orizzontali), paralleli al piano Oxy. Anche qui per rendersi conto di questi fatti basta tenere conto che se un piano è parallelo, per esempio, al piano Oxz, tutti i suoi punti hanno la stessa y; analogamente per gli altri casi. La figura 14.23 illustra queste tre situazioni. Ancora una volta per memorizzare rapidamente queste proprietà si può osservare che nei piani paralleli al piano Oxy *mancano la* x *e la* y, nei piani paralleli al piano Oxz *mancano la* x *e la* z, nei piani paralleli al piano Oyz *mancano la* y *e la* z.

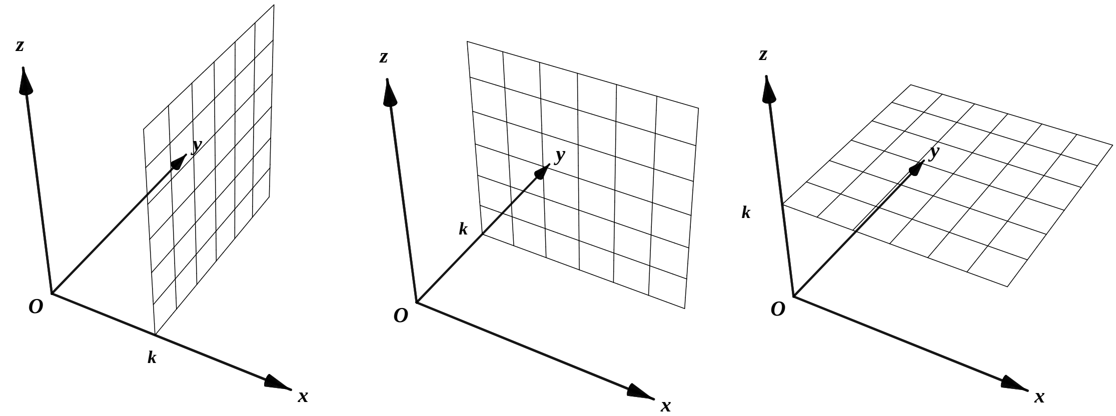


Figura 14.23 *Piani $x = k$, $y = k$, $z = k$, rispettivamente*

Passando ora a considerare piani non verticali, per ottenerne l'equazione possiamo considerare la generalizzazione dell'equazione di una retta non verticale; se teniamo conto che ora la variabile dipendente, cioè la quota, si indica abitualmente con z, otterremo una equazione del tipo

$$z = mx + ny + q\,, \tag{14.2}$$

dove q rappresenta la quota la z all'origine. Per il significato di m ed n possiamo ragionare come segue (questo tipo di ragionamento ci sarà utile anche nel seguito). Se consideriamo un piano del tipo $z = mx+ny+q$ e lo intersechiamo con il piano $y = 0$ (cioé con il piano Oxz), otteniamo una retta del piano Oxz, di equazione $z = mx + q$. Dunque m rappresenta l'inclinazione di questa retta rispetto all'asse x. Analogamente si prova che n rappresenta l'inclinazione, rispetto all'asse y, della retta ottenuta intersecando $z = mx + ny + q$ con il piano $x = 0$.

Nelle due immagini della figura 14.24 è rappresentata questa situazione per il piano di equazione $z = x/2 + y + 1/2$.

14.5 Linee di livello e intersezioni con piani verticali

Definizione 14.3 (Linea di livello)**.** *Data un funzione $f(x, y)$ una* linea di livello k*, che possiamo indicare con l_k, è l'insieme ottenuto come soluzione del sistema*

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = k \end{cases}, \tag{14.3}$$

ovvero è l'insieme (di solito una linea nel senso intuitivo del termine) intersezione tra la superficie grafico della funzione e il piano orizzontale a quota k. Questa linea (essendo un'equazione in due variabili) va rappresentata sul piano Oxy (piano base), ma può anche essere tracciata direttamente sopra la superficie grafico della funzione.

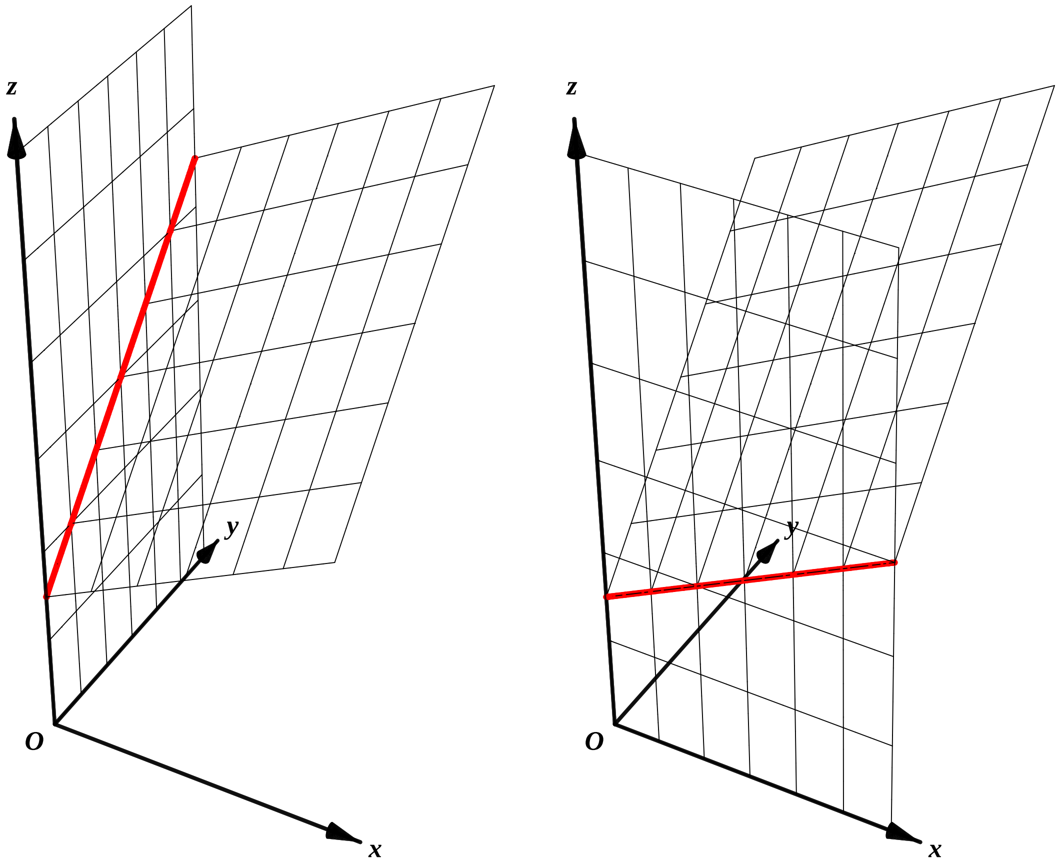


Figura 14.24 *Il piano di equazione $z = x/2 + y + 1/2$ e le due rette sezione con i piani coordinati verticali*

Esempi.

– Data $f(x, y) = x^2 - y^2$, la linea di livello k è $x^2 - y^2 = k$: se $k \neq 0$ si tratta di una iperbole, se $k = 0$, delle due rette $x = \pm y$. Tre di queste linee sono rappresentate nella figura 14.25.

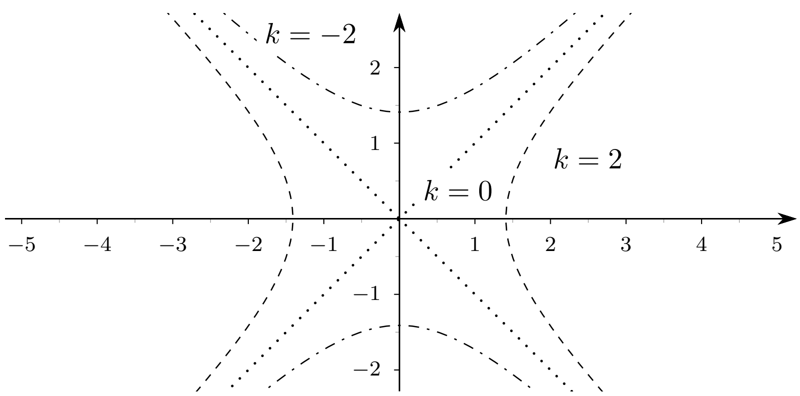


Figura 14.25 *Tre linee di livello per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$*

– Data $f(x, y) = x - y^2$, la linea di livello 1 è la parabola della figura 14.26

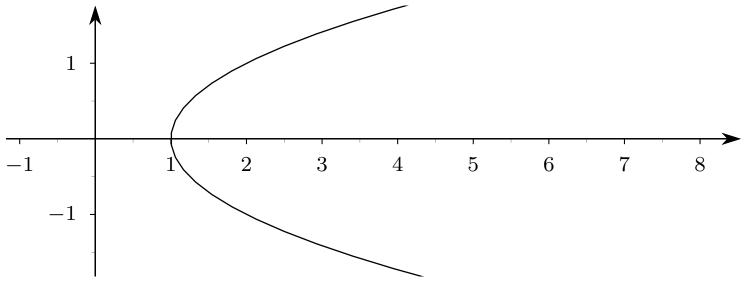


Figura 14.26 *Linea di livello* 1 *per la funzione* $f(x, y) = x - y^2$

Come vedremo, molto utili per studiare le proprietà delle funzioni di due variabili sono le linee intersezione della superfice-grafico della funzione con piani verticali paralleli ai piani coordinati, cioè del tipo $x = k$ e $y = k$. Queste linee si ottengono risolvendo uno dei seguenti due sistemi:

$$\left\{\begin{array}{l} z = f(x, y) \\ y = k \end{array}\right., \Rightarrow z = f(x, k) \qquad \left\{\begin{array}{l} z = f(x, y) \\ x = k \end{array}\right., \Rightarrow z = f(k, y). \tag{14.4}$$

Come è evidente nel primo caso si ottiene una funzione della variabile indipendente x, il cui grafico si potrà rappresentare in un piano Oxz, nel secondo caso si ottiene una funzione della variabile indipendente y, il cui grafico si potrà rappresentare in un piano Oyz. Naturalmente si potrà sempre immaginare queste curve anche tracciate direttamente sul grafico della funzione.

Esempio. Sia data la funzione $f(x, y) = x^3 - 4xy^2$, il cui grafico è rappresentato nella figura 14.27 (anche se in questo contesto il grafico è poco interessante).

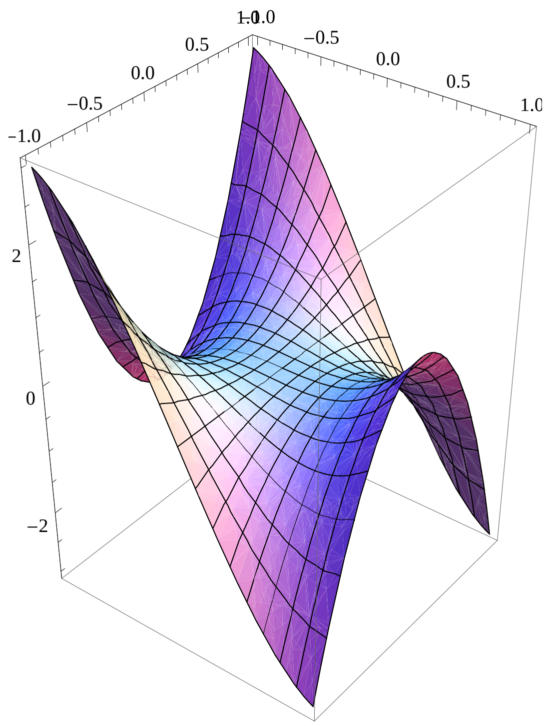


Figura 14.27 *Grafico della funzione* $f(x, y) = x^3 - 4xy^2$

L'intersezione con il piano $x = 1/2$ conduce alla funzione (della sola variabile y!) $z = 1/8 - 2y^2$, il cui grafico è (come è ben noto) una parabola (nel piano Oyz). L'intersezione con il piano $y = 1/2$ conduce alla funzione (della sola variabile x!) $z = x^3 - x$, il cui grafico (nel piano Oxz)

possiamo tracciare con le note regole per studiare le funzioni di una variabile. Questi due grafici sono riportati nella figura 14.28.

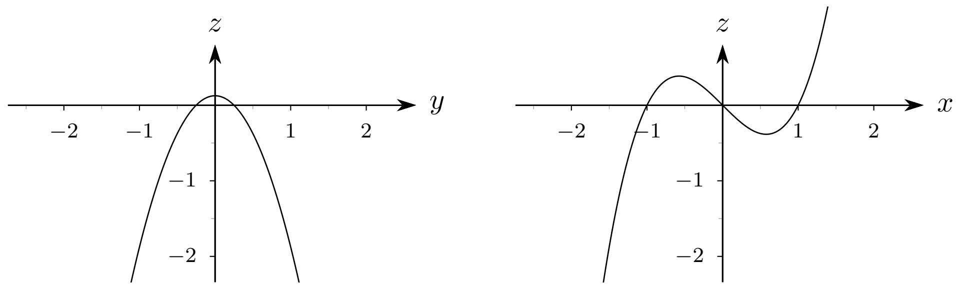


Figura 14.28 *Intersezioni della superficie* $z = x^3 - 4xy^2$ *con i piani* $x = 1/2$ *e* $y = 1/2$

La figura 14.29 mostra i piani sezionanti e le due curve direttamente sulla superficie.

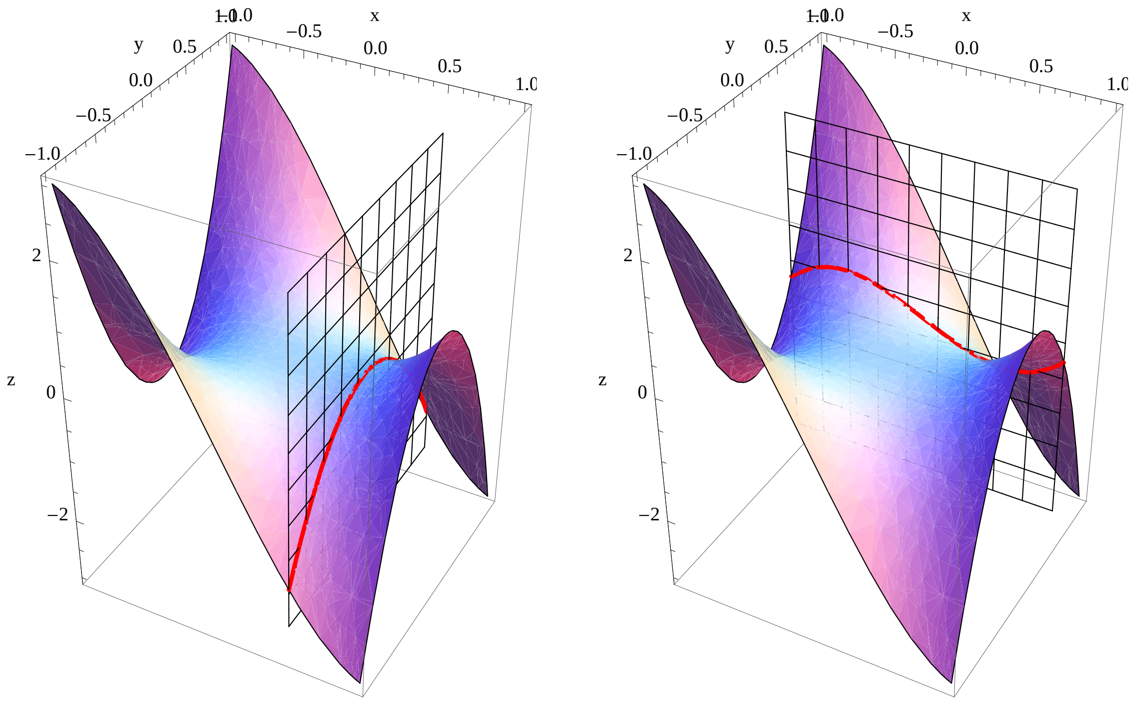


Figura 14.29 *Le intersezioni della figura 14.28, tracciate sulla superficie*

Le due funzioni ottenute per intersezione sono, come già notato, funzioni di una sola variabile e possono essere derivate, una o più volte, per valutare quando sono crescenti, decrescenti, concave, convesse, per trovare le rette tangenti, le eventuali formule di Taylor, ecc. Come vedremo queste derivate hanno interesse non solo per le curve intersezione, ma anche per la funzione di due variabili nel suo complesso.

14.6 Derivate parziali

Definizione 14.4 (Derivate parziali)**.** *Data una funzione* $z = f(x, y)$ *e un punto* (x_0, y_0) *interno al suo dominio, possiamo considerare la funzione, della variabile* x, $z = f(x, y_0) = g(x)$, *ottenuta fissando* y *al valore* y_0 *e lasciando variare* x, *ovvero la funzione che si ottiene intersecando la* *superficie $z = f(x, y)$ con il piano verticale $y = y_0$. Possiamo ora considerare il*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \tag{14.5}$$

ovvero il limite del rapporto incrementale della funzione $z = g(x)$. Se questo esiste ed è finito, esso si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione f, nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$f'_x(x_0, y_0). \tag{14.6}$$

In maniera perfettamente analoga, possiamo considerare la funzione, della variabile y, $z = f(x_0, y) = h(y)$, ottenuta fissando x al valore x_0 e lasciando variare y, ovvero la funzione che si ottiene intersecando la superficie $z = f(x, y)$ con il piano verticale $x = x_0$. Possiamo ora considerare il

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \tag{14.7}$$

ovvero il limite del rapporto incrementale della funzione $z = h(y)$. Se questo esiste ed è finito, esso si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione f, nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$f'_y(x_0, y_0). \tag{14.8}$$

In pratica il calcolo delle due derivate parziali in un punto generico $x, y)$ interno al dominio si fa pensando la funzione $f(x, y)$ come funzione di una sola delle due variabili e trattando l'altra come un parametro costante.

Esempi.

- Da $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3xy^2$, si ottiene $f'_x(x, y) = 2x + 4y + 3y^2$, $f'_y(x, y) = 4x + 6xy$.
- Da $f(x, y) = \sin(x + x^2y)$, si ottiene $f'_x(x, y) = (1 + 2xy)\cos(x + x^2y)$, $f'_y(x, y) = x^2 \cos(x + x^2y)$.
- Da $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$, si ottiene $f'_x(x, y) = 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $f'_y(x, y) = 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

Come mostrano gli esempi proposti, le derivate parziali, calcolate in un generico punto, sono esse stesse funzioni di due variabili, e quindi posso riapplicare ad esse ancora la derivazione, ottenendo le derivate seconde; precisamente avendo ottenuto da *una* funzione *due* derivate parziali prime, da ciascuna otterrò *due* derivate parziali, per un totale di *quattro* derivate parziali seconde della funzione originaria:

- f''_{xx} sarà la derivata prima rispetto a x della f'_x;
- f''_{yy} sarà la derivata prima rispetto a y della f'_y;
- f''_{xy} sarà la derivata prima rispetto a y della f'_x;
- f''_{yx} sarà la derivata prima rispetto a x della f'_y.

Le prime due si chiamano *derivate parziali seconde pure*[2], le ultime due si chiamano *derivate parziali seconde miste*.

Esempio. Da $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3xy^2$, si ottiene, come già visto, $f'_x(x, y) = 2x + 4y + 3y^2$, $f'_y(x, y) = 4x + 6xy$ e, successivamente, $f''_{xx}(x, y) = 2$, $f''_{yy}(x, y) = 6x$, $f''_{xy}(x, y) = 4 + 6y$, $f''_{yx}(x, y) = 4 + 6y$.

[2]Spesso l'appellativo "pure" si tralascia

Si potrebbe naturalmente ottenendo le derivate terze, e così via, ma non saremo interessati al loro uso. Osserviamo invece che, nell'esempio precedente, $f''_{xy}(x, y) = 4+6y = f''_{yx}(x, y)$. La cosa, anche se a prima vista sorprendente, non è casuale. Vale infatti il seguente notevole teorema.

Teorema 14.5 (Teorema di Schwartz)**.** *Se le derivate seconde miste sono continue, allora esse sono uguali.*

Nei casi che ci interessano le cose andranno sempre nel senso previsto da questo teorema, ovvero le derivate seconde miste saranno sempre uguali.

Come abbiamo già avuto modo di constatare, la derivata prima per funzioni di una variabile permette il calcolo della pendenza della retta tangente al grafico della funzione e quindi la determinazione dell'equazione di questa tangente. Per le funzioni di due variabili le derivate parziali, in base a quanto abbiamo detto, serviranno a determinare le equazioni delle rette tangenti alle curve intersezione tra la superficie e il piano verticale parallelo al piano Oxz oppure Oyz. Esse però servono anche a determinare (almeno per funzioni abbastanza regolari) l'equazione del *piano tangente* alla superficie grafico della funzione di due variabili. Precisamente, data una funzione di due variabili $z = f(x, y)$ e un punto (x_0, y_0) del suo dominio, dove la funzione ammette derivate parziali prime *continue* (come succederà sempre nei nostri casi), l'equazione del piano tangente alla superficie grafico della funzione nel punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$ sarà:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\,. \tag{14.9}$$

Esempio. Riprendendo la funzione $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3xy^2$ già trattata prima e considerato il punto $(1, -1)$, si ha $f(1, -1) = 0$, $f'_x(1, -1) = 1$, $f'_y(1, -1) = -2$, dunque l'equazione del piano tangente è

$$z = 0 + 1(x - 1) - 2(y + 1) \;\Rightarrow\; z = x - 2y - 3\,. \tag{14.10}$$

Esempio. Procedendo come nell'esempio precedente è facile provare che l'equazione del piano tangente al grafico di $z = -x^2 - y^2$, in corrispondenza al punto $(1, -1)$ è: $z = -2x + 2y + 2$. La situazione è rappresentata nella figura 14.30, dove sono rappresentate anche le due curve sezione.

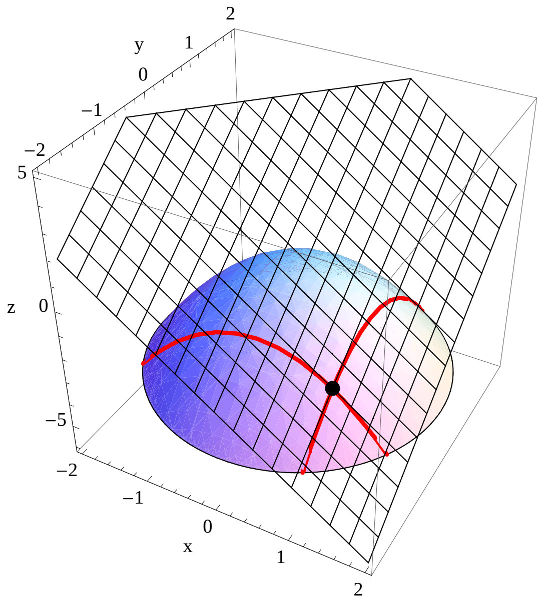


Figura 14.30 *Superficie $z = -x^2 - y^2$ e piano tangente in* $(1, -1)$

14.7 Ottimizzazione libera

I problemi principali a cui saremo interessati relativamente alle funzioni di due variabili sono i problemi di *ottimizzazione*, libera e vincolata, ovvero il problema della ricerca dei massimi e minimi nei punti interni al dominio della funzione, nei punti del bordo del dominio o, eventualmente, su un sottoinsieme del dominio. Nei casi che ci interessano questi problemi sono risolubili con lo studio delle derivate prime e seconde della funzione e, eventualmente di una nuova funzione (la funzione *Lagrangiana*) costruita a partire dalla funzione stessa in modo da tenere conto di eventuali ulteriori condizioni (vincoli).

Abbiamo già proposto grafici relativi a funzioni di due variabili in cui erano evidenziati massimi ("cime di monti") e minimi ("fondovalle"): per esempio le figure 9.6 (nella pagina 83), 14.8 (nella pagina 157) e 14.13 (nella pagina 160). Particolarmente significativa l'illustrazione 14.13 (nella pagina 160), in cui si evidenzia che il piano tangente alla superficie nei punti di massimo o di minimo (interni al dominio) è *orizzontale*, ovvero del tipo $z = k$. Si tratta di una situazione identica al caso delle funzioni di una variabile, dove, nei punti di massimo e minimo (interni al dominio) era la retta tangente ad essere orizzontale.

Se si tiene conto dell'equazione del piano tangente che abbiamo scritto nell'equazione (14.10), possiamo concludere che, in corrispondenza a un punto di massimo o minimo interno al dominio *entrambe* le derivate parziali saranno nulle, in perfetta analogia con il caso di una variabile dove si aveva l'annullamento della derivata prima.

Purtroppo (ancora come nel caso di funzioni di una variabile) l'annullarsi delle derivate *non garantisce* l'esistenza di un massimo o un minimo. Basta pensare ai punti di sella o alle selle di scimmia (vedi le figure 14.15 e 14.16).

Riproponiamo qui di seguito, per comodità, le stesse due figure con l'aggiunta del piano tangente.

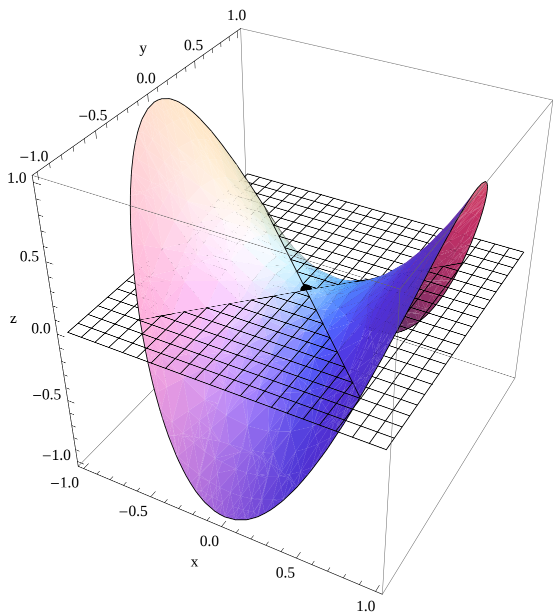


Figura 14.31 *Una "sella di cavallo" e il piano tangente*

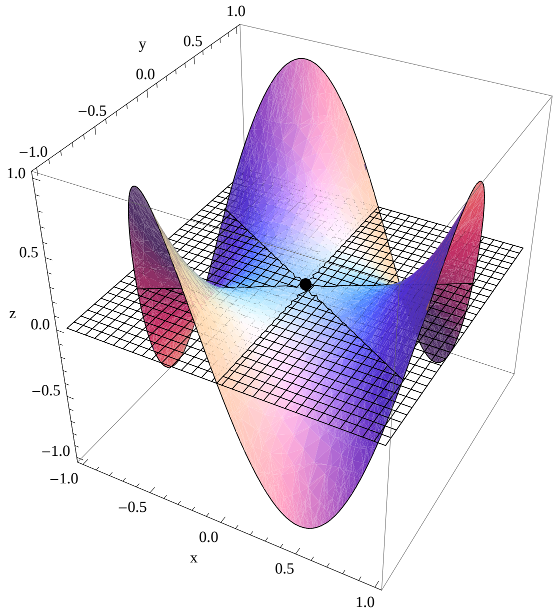


Figura 14.32 *Una "sella di scimmia" e il piano tangente*

La figura 14.32 mostra che la superficie ha un andamento "sfarfallante" rispetto al piano tangente nel punto dove esso risulta orizzontale. La situazione può essere anche più complessa, in quanto lo "sfarfallio" può essere ancora più accentuato, come mostra la figura 14.33.

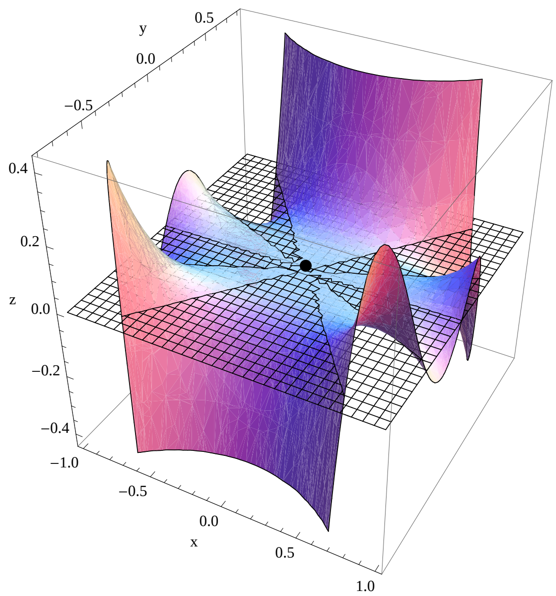


Figura 14.33 *Superficie con pronunciato "sfarfallio" rispetto al piano tangente orizzontale*

Quanto abbiamo detto si può riassumere nel seguente teorema.

Teorema 14.6 (Condizione necessaria per i massimi e minimi in due variabili)**.** *Se una funzione $f(x,y)$ dotata di derivate parziali ha, in corrispondenza a un punto (x_0,y_0)* interno *al dominio, un massimo o un minimo, allora necessariamente le derivate sono* contemporaneamente *nulle in (x_0,y_0).*

Un punto (interno al dominio) in cui le derivate parziali siano contemporaneamente nulle (senza che necessariamente sia un punto di minimo o di massimo) si chiama un *punto stazionario*, a volte anche *punto critico* per $f(x, y)$. Il teorema precedente si può allora riformulare dicendo che: condizione necessaria perché un punto (x_0, y_0) interno al dominio sia di massimo o di minimo per una funzione derivabile, è che esso sia un punto stazionario. La condizione *non* è in genere sufficiente.

Nel caso di una variabile per valutare se un punto (in cui la derivata prima si annulla) è di massimo di minimo (o di flesso), si può procedere a studiare la crescenza e decrescenza tramite il segno della derivata prima. Nulla di simile per le funzioni di due variabili, dove i concetti di funzione crescente e decrescente *non hanno alcun senso*. Per risolvere il problema ci viene in aiuto il teorema che segue, che dà una condizione *sufficiente* perché un punto stazionario sia di massimo o di minimo.

Teorema 14.7. *Sia data una funzione $f(x, y)$ dotata almeno di derivate seconde. Se (x_0, y_0) è un punto stazionario per f (interno al dominio), si calcolano, in (x_0, y_0), le quattro*(3) *derivate seconde e si costruisce la seguente tabella (matrice), detta* matrice hessiana*,*

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{14.11}$$

Successivamente si calcola il seguente numero, detto determinante hessiano *o semplicemente* hessiano*, e indicato $H_f(x_0, y_0)$, o semplicemente con $H(x_0, y_0)$,*

$$f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - \Big(f''_{xy}(x_0, y_0)\Big)^2, \tag{14.12}$$

ottenuto facendo la differenza dei "prodotti in croce" degli elementi della precedente matrice. Ebbene:

- *Se $H(x_0, y_0) < 0$, allora il punto (x_0, y_0) è un* punto di sella.
- *Se $H(x_0, y_0) > 0$, allora si guarda uno dei due termini sulla diagonale principale della matrice (cioè $f''_{xx}(x_0, y_0)$ o $f''_{yy}(x_0, y_0)$):*
  - *se esso è > 0 il punto è di* minimo *(relativo);*
  - *se esso è < 0 il punto è di* massimo *(relativo).*
- *Se $H(x_0, y_0) = 0$, allora* nulla si può concludere*: può succedere di tutto*(4).

Si tenga ben presente che se $H(x_0, y_0) > 0$, allora $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - \Big(f''_{xy}(x_0, y_0)\Big)^2 > 0$, da cui $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > \Big(f''_{xy}(x_0, y_0)\Big)^2 \geq 0$, per cui le due derivate seconde pure *devono* avere lo stesso segno e non possono annullarsi: è per questo che è indifferente considerare una o l'altra.

Esempio. Trovare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = 2\ln(x^2 + y^2 + 2) - xy$ e classificarli, usando la matrice hessiana.

Il primo passo consiste nel calcolare le derivate parziali prime e nel cercare i punti dove esse si annullano contemporaneamente (tecnicamente è questa la parte difficile perché si tratta di risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, in genere non banale). Si ottiene:

$$\begin{cases} f'_x = \dfrac{4x}{x^2 + y^2 + 2} - y = 0 \\ f'_y = \dfrac{4x}{x^2 + y^2 + 2} - x = 0 \end{cases}.$$

(3) In realtà ne bastano tre perché, nei casi che ci interessano, le due miste sono uguali.
(4) E occorrerebbe un'indagine approfondita che di solito esula dagli scopi di questo corso.

Questo sistema è abbastanza bruttino, ma con un po' di pazienza si riesce a trovare che le sue soluzioni sono $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$. Si hanno tre punti critici.

Si calcolano ora le derivate seconde e si scrivono le tre matrici hessiane, ottenendo, rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nel primo punto si ha $H = 3 > 0$ e i termini sulla diagonale maggiore sono positivi: si tratta di un minimo relativo. Negli altri due punti si ha $H = -2 < 0$, quindi sono due punti di sella[(5)].

14.8 Ottimizzazione vincolata

Supponiamo ora di dover trovare i massimi e minimi non sui punti interni all'intero dominio, ma

1. sui punti interni a una parte del dominio;
2. oppure sul bordo del dominio;
3. oppure sulla restrizione della funzione a una curva tracciata all'interno del dominio[(6)].

Il primo dei casi elencati è semplice: si trovano i massimi e minimi sull'interno di *tutto* il dominio e poi si controlla se questi punti sono anche interni alla parte considerata. Il secondo dei casi è praticamente identico al terzo: nei casi che ci interessano il bordo del dominio è una curva. Pertanto il problema che rimane aperto è: come fare a trovare i massimi e minimi di una funzione di due variabili, se la consideriamo ristretta a una curva? È più propriamente in questo caso che parleremo di *massimi o minimi vincolati*. Per capire la difficoltà del problema utilizziamo, come al solito, un esempio grafico.

Riesaminiamo la figura 14.8 della pagina 157. Come già a suo tempo osservato, questa immagine evidenzia, per la funzione, la presenza di due massimi (relativi) e di un minimo (relativo), riferiti però all'intera superficie.

Supponiamo ora di voler considerare la restrizione della funzione all'insieme del piano Oxy individuato dall'equazione $(x-1)^2+y^2 = 1$, cioè alla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. In sostanza si tratta di questo: invece di considerare tutti i punti della superficie, consideriamo solo quelli relativi ai punti di questa circonferenza. Detto in altri termini: consideriamo la superficie cilindrica verticale ottenuta a partire da questa circonferenza e consideriamone l'intersezione con la superficie; si otterrà una curva dello spazio (almeno nei casi che ci interessano). Ebbene siamo interessati ai massimi e minimi che si ottengono se ci muoviamo *solo* su questa curva: è come dire che dobbiamo trovare i punti più alti e più bassi su una strada tracciata sulla superficie, la quale superficie comprende diverse montagne e vallate.

La figura 14.34 visualizza questa situazione. La figura 14.35, in cui è tracciata solo la strada, evidenzia ancora meglio il problema e ne palesa tutte le difficoltà: è chiaro che non potremo parlare di derivate parziali, di piano tangente, o cose simili. Un massimo e/o minimo su questa curva potrà non avere nulla a che fare con i massimi e/o minimi sull'intera superficie.

Ebbene, è interessante che, nonostante le evidenti difficoltà, la determinazione di questi massimi e minimi può essere effettuata in una maniera molto simile a quanto fatto per i massimi e minimi liberi, seppure, naturalmente, con un opportuno adattamento.

[5] Attenzione: è casuale che i termini sulla diagonale principale siano uguali, mentre è naturale che lo siano quelli sulla diagonale secondaria (Teorema di Schwartz); è altresì casuale che la seconda e terza matrice hessiana siano uguali.

[6] Ci sono anche alcune altre situazioni, ma ci limiteremo a trattare queste tre

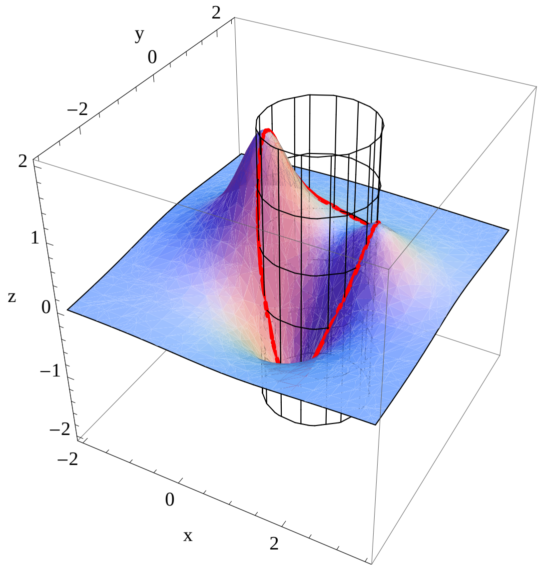


Figura 14.34 *Un problema di ottimizzazione vincolata*

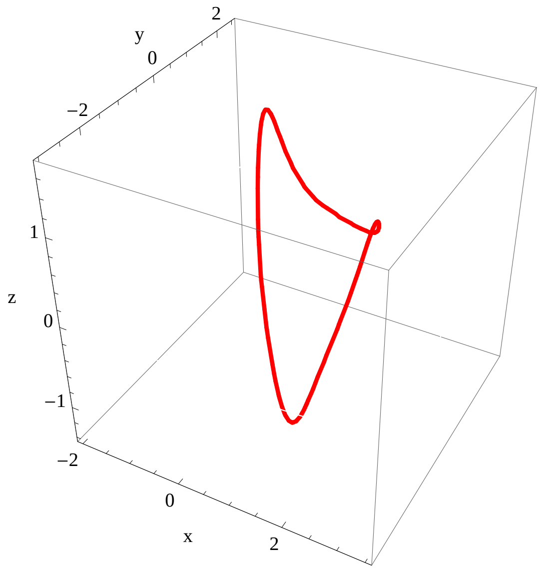


Figura 14.35 *Particolare di un problema di ottimizzazione vincolata*

Possiamo precisare il problema nel seguente modo (limitandoci, come al solito, ai casi di nostro interesse).

Sia data una funzione $f(x, y)$ definita in un dominio D, e si consideri una curva $\mathcal{C}$ tracciata nel dominio (potrebbe essere semplicemente il bordo del dominio). Questa curva, che sarà detta *vincolo* avrà generalmente una equazione del tipo $g(x, y) = 0$[(7)]. Allora:

1. se da $g(x, y) = 0$ si può esplicitare o la x o la y, la si sostituisce nella funzione f che diventa di una variabile, e si procede appunto come per le funzioni di una variabile;
2. se questo non è possibile (o è troppo complesso), si usa il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, di cui parleremo tra poco.

Esempio. Se $z = f(x, y) = x^2 - 2y^2$ e il vincolo è $x - y + 1 = 0$, dal vincolo si ricava $y = x + 1$, che si sostituisce nella $f(x, y)$, ottenendo la funzione $z = -x^2 - 4x - 2$, da cui si vede subito che

[7] Attenzione: ridurre sempre il vincolo alla forma indicata, ovvero $g(x, y) = 0$.

si ha un massimo per $x = -2$, massimo che vale 2; naturalmente la y del massimo si ricaverà dal vincolo, ottenendo $y = -1$. La situazione è illustrata nella figura 14.36.

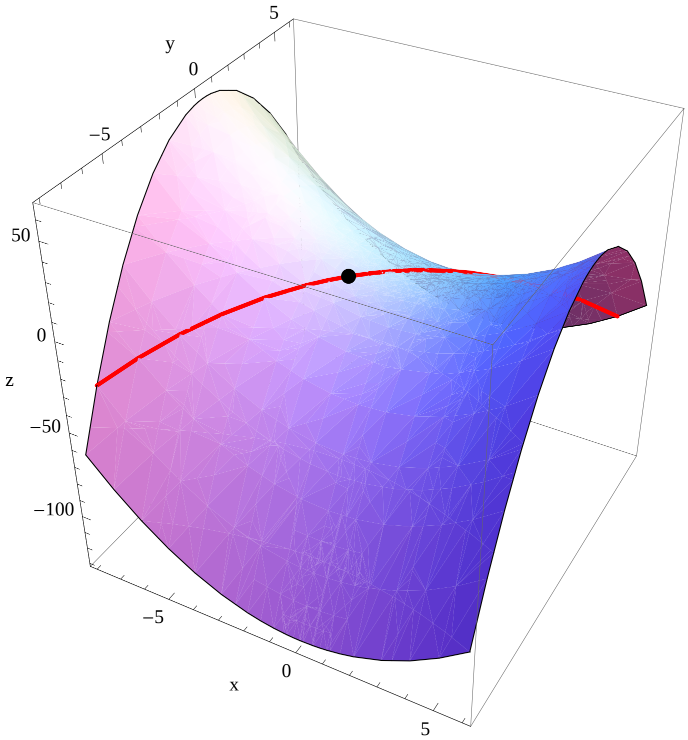


Figura 14.36 *Un massimo vincolato, con vincolo esplicitabile*

E veniamo ora al metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*, da applicare quando non si può esplicitare alcuna variabile[8].

Si procede nel seguente modo:

1. si costruisce la funzione lagrangiana (funzione di tre variabili)[9]: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$;
2. si calcolano le derivate parziali rispetto alle tre variabili: L'_x, L'_y, L'_λ;
3. si risolve il sistema
$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} ;$$
4. se ci sono punti di massimo o minimo vincolato questi si trovano tra le coppie (x, y) estratte dalle terne (x, y, λ) che risolvono il sistema. Si noti come la situazione sia simile a quella dei massimi e minimi liberi: le coppie (x, y) estratte dalle terne (x, y, λ) che risolvono il sistema *non* è detto che siano punti di massimo o minimo vincolato, però gli eventuali punti di massimo o minimo vincolato vanno ricercati *solo* fra queste coppie (che in sostanza sono i punti stazionari della funzione lagrangiana. Si dice che i punti stazionari della lagrangiana sono gli unici "candidati" ad essere di massimo o minimo.

Nelle situazioni pratiche succede sempre che il vincolo è un insieme chiuso e limitato e la funzione è sufficientemente regolare, per cui (in base al teorema di Weierstrass, valido anche in

[8] In realtà anche quando non si può esplicitare alcuna variabile si potrebbe evitare, almeno in certi casi, il metodo dei moltiplicatori, ma questo richiede lo studio della teoria delle curve, cosa che esula dal nostro programma.

[9] Alcuni testi prendono come funzione lagrangiana la $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$: non cambia assolutamente nulla, in quanto basta sostituire λ con $-\lambda$ per passare dall'una all'altra.

due variabili) il massimo e minimo assoluto esistono sicuramente. Basterà allora trovare tutti i possibili candidati (che nei casi di nostro interesse sono in numero finito) usando il metodo di Lagrange e calcolare poi la funzione in tutti questi punti: il valore più alto corrisponderà al massimo, il più basso al minimo.

Esempio. Trovare il massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = x+y$ sotto la condizione $x^2+y^2 = 1$.
Posto $L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, si ha

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x \\ L'_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Uguagliando a zero le tre derivate parziali e risolvendo il sistema ottenuto, si trova:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)..$$

Estraendo[10] da queste terne le coppie dei valori (x,y) si trovano i seguenti due punti:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)..$$

Poiché

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

se ne conclude che $\sqrt{2}$ è il massimo assoluto, mentre $-\sqrt{2}$ è il minimo assoluto. La figura 14.37 illustra la situazione.

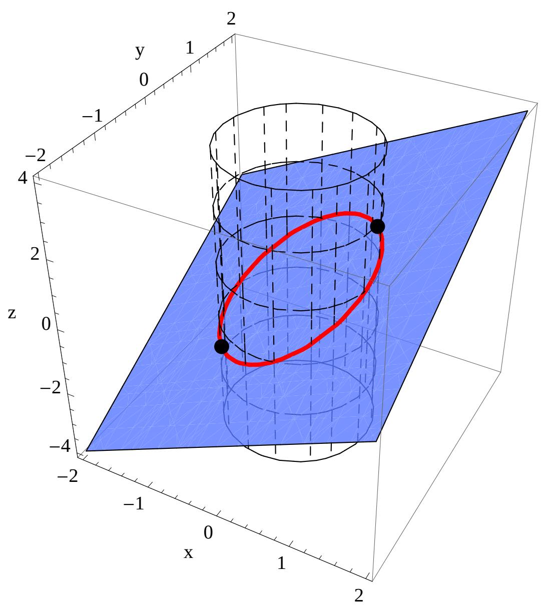


Figura 14.37 *Ottimizzazione vincolata, con il metodo dei moltiplicatori*

Esempio. Trovare il massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = xy$ sotto la condizione $x^2 + y^2 = 1$.

[10]Si noti che, in realtà, il valore di λ non ha interesse in questa questione, bisogna però che un valore di λ esista.

Posto $L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, calcolando le tre derivate parziali e uguagliandole a zero, si trova il seguente sistema:

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases},$$

che ha come soluzioni

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ C = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Poiché

$$f(A) = f(B) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(C) = f(D) = -\frac{1}{2},$$

se ne deduce che il massimo vale $1/2$, mentre il minimo vale $-1/2$. La figura 14.38 illustra la situazione.

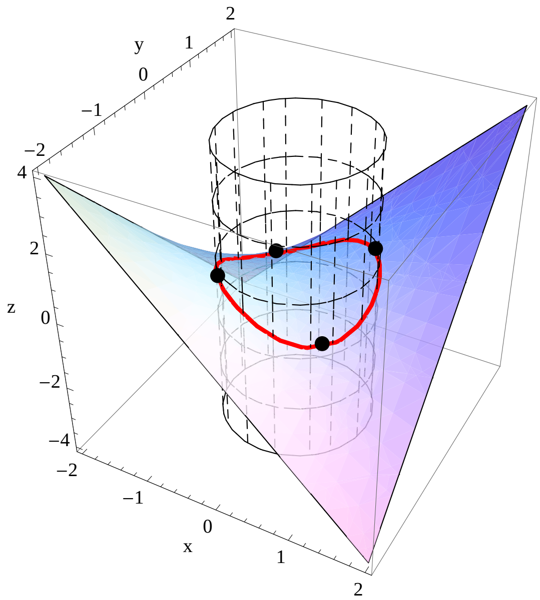


Figura 14.38 *Ancora una ottimizzazione vincolata, con il metodo dei moltiplicatori*

Esempio. Una ditta ha a disposizione 90€ per acquistare x oggetti di tipo A al prezzo di 3€ l'uno e y oggetti di tipo B al prezzo di 5€ l'uno. Per avere la massima utilità il prodotto xy[11] deve essere massimo. Quante macchine di ogni tipo deve acquistare?

Si deve massimizzare la funzione $f(x, y) = xy$ sottoposta al vincolo $3x + 5y = 90$. Procedendo come sopra si trova che l'unico punto stazionario della funzione Lagrangiana è $(15, 9, -3)$, cioè l'unico punto candidato ad essere di massimo (o minimo) vincolato è $(15, 9)$. In corrispondenza di questo punto la funzione di utilità vale 135. Purtroppo il fatto che il vincolo sia una retta del piano, cioè un insieme non limitato, non ci permette di concludere agevolmente come negli esempi precedenti. Per il momento ci limitiamo ad usare il grafico della figura 14.39. Torneremo successivamente su questo punto.

[11] La funzione è detta proprio funzione di utilità.

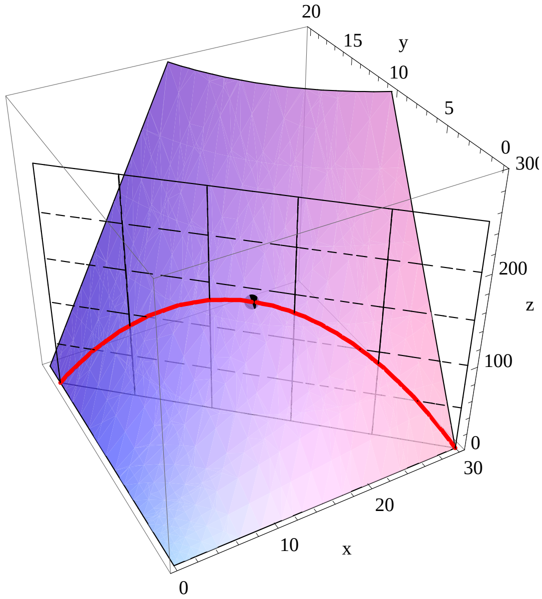


Figura 14.39 *Una ottimizzazione vincolata in un problema di economia*

Esiste una condizione sufficiente per i massimi e minimi vincolati e di questa faremo ora un breve cenno.

Sia data la funzione $z = f(x, y)$, opportunamente regolare, e il vincolo $g(x, y) = 0$, anch'esso opportunamente regolare. Consideriamo nuovamente la funzione lagrangiana $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ e supponiamo di averne determinato un punto stazionario (x_0, y_0, λ_0). In questo punto calcoliamo le derivate prime della funzione vincolo e le derivate seconde della funzione lagrangiana. Consideriamo poi la seguente matrice, detta *matrice hessiana orlata*:

$$\begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & f''_{xx} + \lambda g''_{xx} & f''_{xy} + \lambda g''_{xy} \\ g'_y & f''_{yx} + \lambda g''_{yx} & f''_{yy} + \lambda g''_{yy} \end{pmatrix} . \tag{14.13}$$

Il determinante[12] di questa matrice è detto *hessiano orlato*. Se l'hessiano orlato è maggiore di zero, il punto (x_0, y_0) è di massimo per la funzione sul vincolo, se l'hessiano orlato è minore di zero il punto (x_0, y_0) è di minimo.

Nell'esempio precedente di massimo e minimo di un problema economico, l'hessiano orlato è

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 30 > 0 ,$$

da cui si conferma che il punto è di massimo, come già dedotto per via grafica.

[12] Il determinante di una matrice a 3 righe e 3 colonne come questa si fa con la regola di Sarrus, evidenziata nei passaggi seguenti.

$$\text{Dato} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \text{ costruisci} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} .$$

Successivamente calcola la somma dei prodotti sulle tre diagonali principali (dall'alto a sinistra al basso a destra) e delle tre diagonali secondarie (dall'alto a destra al basso a sinistra). Il determinante è la differenza di questi due numeri, ovvero

$$(aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + crg).$$

14.9 Esercizi

Esercizio 14.1. *Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni.*

1. $f(x, y) = x^2y^2$.
2. $f(x, y) = xy - xy^2$.
3. $f(x, y) = e^x y$.
4. $f(x, y) = e^{xy}xy$.
5. $f(x, y) = y \ln x$.
6. $f(x, y) = \ln(xy$.
7. $f(x, y) = \dfrac{\ln x}{y}$.
8. $f(x, y) = e^{x+xy^2}$.

Esercizio 14.2. *Per le funzioni di seguito elencate dire se i punti indicati sono di massimo, minimo o sella (liberi); se possibile determinare se esistono altri punti di massimo, minimo, sella.*

1. $f(x, y) = x^2y$, $P(0, 0)$, $Q(0, 1)$.
2. $f(x, y) = xy - x^2y^2$, $P(0, 0)$, $Q(1, 1)$, $R(1, -1)$.
3. $f(x, y) = x \ln y$, $P(1, -1)$, $Q(0, 1)$.
4. $f(x, y) = x^2e^y$, $P(0, 0)$.
5. $f(x, y) = xye^{x+y}$, $P(1, 0)$, $Q(-1, 1)$, $R(1, -1)$.
6. $f(x, y) = x^2e^{3y-x}$, $P(1, 0)$, $Q(0, 0)$.
7. $f(x, y) = e^{xy}$, $P(0, 0)$.
8. $f(x, y) = \ln(xy + 1)$, $P(0, 0)$, $Q(2, 0)$.
9. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 2$, $P(0, 0)$.
10. $f(x, y) = e^{xy-x}$, $P(0, 1)$.
11. $f(x, y) = x^2 - e^{y^2}$, $P(0, 0)$.
12. $f(x, y) = 2x^2 - y$, $P(1, 1)$.
13. $f(x, y) = x^2y^3$, $P(-1, 1)$, $Q(0, 0)$.
14. $f(x, y) = \ln x - y^2$, $P(1, -1)$.
15. $f(x, y) = e^{xy} - y$, $P(1, 0)$, $Q(0, 1)$.
16. $f(x, y) = e^{xy} - y^2$, $P(0, 0)$.
17. $f(x, y) = e^{xy} - xy$, $P(0, 1)$, $Q(1, 0)$, $R(1, 1)$.
18. $f(x, y) = x^3y - xy^3$, $P(\sqrt{2}, 1)$.
19. $f(x, y) = x^2y - 2xy + xy^2$, $P(0, 2)$, $Q(2, 0)$.

Esercizio 14.3. *Nei seguenti problemi di massimo e minimo vincolato, dove $f(x,y)$ è la funzione da studiare e il vincolo è indicato a fianco, scrivere la funzione lagrangiana e calcolare le sue derivate prime.*

1. $f(x,y) = x + y + 1$, $x^2 - y^3 = 0$.
2. $f(x,y) = x^2 - xy^3$, $xy - x^2y^2 = 0$.
3. $f(x,y) = \sqrt{x-y}$, $x - y + x^2 + y^2 = 2$.
4. $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y+2}$, $\sqrt{x - y + xy} = 1$.
5. $f(x,y) = \ln(x-y)$, $x^2 - y^2 = 3$.

Esercizio 14.4. *Delle seguenti funzioni determinare se i punti indicati sono candidati ad essere di massimo o minimo vincolato sul vincolo indicato. Se possibile dire se si tratta di massimo o minimo e determinare il massimo e minimo assoluti.*

1. $f(x,y) = x + y + 1$ *sul vincolo* $x^2 + y^2 = 2$; $P(0,1)$, $Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
2. $f(x,y) = x + y + 1$ *sul vincolo* $xy - 1 = 0$; $P(1,1)$, $Q(-1,-1)$.
3. $f(x,y) = x^2$ *sul vincolo* $x - 2y - 2 = 0$; $P(0,1)$, $Q(0,0)$.
4. $f(x,y) = x^2$ *sul vincolo* $x^2 + y^2 = 4$; $P(0,2)$, $Q(-2,0)$.
5. $f(x,y) = x^2$ *sul vincolo* $xy - x^2y^2 = 0$; $P(0,0)$, $Q(-1,0)$.
6. $f(x,y) = xy$ *sul vincolo* $x^2 + y^2 = 4$; $P(0,0)$, $Q(1,0)$, $R(-1,0)$.
7. $f(x,y) = x + y$ *sul vincolo* $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $P(1,1)$, $Q\big((\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}, (\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}\big)$.
8. $f(x,y) = x$ *sul vincolo* $x^2 - y^2 = 1$; $P(1,1)$, $Q(1,0)$, $R(-1,0)$.
9. $f(x,y) = x^2 + y^2$ *sul vincolo* $x^2 - y^2 = 1$; $P(1,1)$, $Q(1,0)$, $R(-1,0)$, $S(2,\sqrt{3})$.
10. $f(x,y) = x^2 - y^2$ *sul vincolo* $x^2 + y^2 = 1$; $P(0,0)$, $Q(1,0)$, $R(0,1)$.
11. $f(x,y) = x^2 - y^2$ *sul vincolo* $x^2 - y^2 = 1$; $P(0,0)$, $Q(1,0)$, $R(0,1)$.

Esercizio 14.5. *Come per l'esercizio 14.4; se il vincolo è esplicitabile utilizzare anche il relativo metodo per la ricerca dei massimi e minimi vincolati.*

1. $f(x,y) = x + y + 1$ *sul vincolo* $x^2 - y + 3 = 0$; $P(0,0)$, $Q(1,-2)$.
2. $f(x,y) = x^2 - y$ *sul vincolo* $x^3 - y = 0$; $P(0,0)$.
3. $f(x,y) = x - y^2$ *sul vincolo* $x - y^4 - 1 = 0$; $P(0,0)$.
4. $f(x,y) = x^2$ *sul vincolo* $y - x^2 = 0$; $P(0,0)$, $Q(1,1)$.
5. $f(x,y) = xy$ *sul vincolo* $x^2 - y^2 = 4$; $P(-2,0)$, $Q(2,0)$, $R)0,2)$.
6. $f(x,y) = x^2 - y^2$ *sul vincolo* $x^2 - y^2 = 4$; $P(-2,0)$, $Q(2,0)$, $R)0,2)$.
7. $f(x,y) = x^2 + y^2$ *sul vincolo* $y - x - 2 = 0$; $P(0,0)$.
8. $f(x,y) = x^3 - y^2$ *sul vincolo* $x^3 - y^3 = 0$; $P(0,0)$, $Q(1,1)$, $R(-1,-1)$.

Notazioni utilizzate

Le notazioni utilizzate in questo testo sono quelle di default nel sistema tipografico $\LaTeX\,2_\varepsilon$, notazioni che, nella maggior parte dei casi, concordano con quelle previste dalla normativa ISO $31-11$.

Segnaliamo inoltre che, nella numerazione dei teoremi, definizioni, osservazioni, ecc., abbiamo scelto di usare una numerazione progressiva per capitolo. Altri testi usano invece numerazioni progressive separatamente per i teoremi, le definizioni, ecc. Si tratta naturalmente solo di una questione di gusto personale.

La scrittura di un testo contenente molta matematica è sempre un'impresa ardua e che richiede molto tempo e fatica. Un aiuto indispensabile è fornito da un sistema di composizione come quello che abbiamo adottato (e che costituisce ormai lo standard de facto per i testi scientifici). Per chi fosse interessato a conoscere $\LaTeX\,2_\varepsilon$ segnaliamo che si tratta di un sistema di composizione tipografica di livello professionale e assolutamente gratuito. Tutte le informazioni utili si possono trovare sul sito ufficiale della comunità degli sviluppatori, `http://www.ctan.org/`e, in lignua italiana, sul sito degli Utilizzatori italiani di $\TeX$ e $\LaTeX$, `http://www.guit.sssup.it/`. Alcuni manuali introduttivi e consigli per iniziare si trovano anche sul sito personale del docente, `http://www.batmath.it`.

Elenco delle notazioni

$\neg$	"non" (negazione logica).
$\vee$	"vel", o, oppure (disgiunzione logica).
$\wedge$	"et", e, e contemporaneamente (congiunzione logica).
$\Rightarrow$	"implica", se ... allora ... (implicazione logica).
$\Leftrightarrow$	"se e solo se" (equivalenza logica).
$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{\, 0,\, 1,\, 2,\, \dots,\, n,\, \dots \,\}$.
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\, \dots,\, -2,\, -1,\, 0,\, 1,\, 2,\, \dots \,\}$.
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N},\, n \neq 0 \,\}$.
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi.
$\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$	Numeri naturali, interi, razionali, reali, maggiori di 0.
$A,\, B,\, \dots$	Notazione per gli insiemi.
$A \subseteq B$	A è un sottoinsieme di B.
$A \subset B$	A è un sottoinsieme proprio di B.
$B \supseteq A$	B è un soprainsieme di A.
$B \supset A$	B è un soprainsieme proprio di A.
$A \setminus B$	Differenza tra gli insiemi A e B.
$[a, b]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$.
$]a, b[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\}$.
$]a, b]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\}$.
$[a, b[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\}$.
$[a, +\infty[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \,\}$.
$]a, +\infty[$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > a \,\}$.
$]-\infty, a]$	$\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \,\}$.

Continua nella pagina successiva

Segue dalla pagina precedente

$]-\infty, a[$	$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$.
$f\colon D \to C\,,\ x \mapsto f(x)$	Notazione per le funzioni.
$\exp(x) = \mathrm{e}^x$	Notazione per la funzione esponenziale di base e.
$\ln(x)$	Logaritmo in base e di x.
$\log(x)$	Logaritmo in base 10 di x.

Osservazioni

- Per alcuni autori $\mathbb{N} = \{ 1, 2, \dots, n, \dots \}$, cioè l'insieme dei naturali non comprende lo zero.
- L'insieme dei numeri razionali è in realtà l'insieme delle frazioni, come più sopra definito, ma con una opportuna relazione che renda identiche due frazioni equivalenti. Inoltre nulla cambierebbe se si prendessero frazioni in cui anche il denominatore possa essere intero (naturalmente diverso da 0).
- La notazione utilizzata in questi appunti per gli insiemi non è l'unica possibile. Altri usano per esempio lettere maiuscole in grassetto: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ... e questa scelta ha qualche indubbio vantaggio, in quanto anche i punti dello spazio sono abitualmente indicati con le lettere maiuscole corsive, con possibilità di confusione. In ogni caso tutto dovrebbe essere chiaro dal contesto.
- Molti usano $\subset$ per indicare i sottoinsiemi (propri o no) e $\subsetneq$, o $\subsetneqq$ per indicare i sottoinsiemi propri. Analoga osservazione per i soprainsiemi.
- Per indicare la differenza di due insiemi molti usano il simbolo $A - B$.
- Per quanto riguarda le notazioni sui logaritmi è da segnalare che la convenzione da noi scelta è quella in uso nella maggior parte dei software di calcolo e, quasi sempre, anche nelle calcolatrici tascabili. Altri adottano la notazione $\log(x)$ per indicare il logaritmo in base e e la notazione $\operatorname{Log}(x)$ o esplicitamente $\log_{10}(x)$ per indicare il logaritmo in base 10 del numero x.

Alfabeto greco

Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	α	A	nu (ni)	ν	N
beta	β	B	csi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	ro	ϱ	R
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	ϑ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	I	fi	φ	Φ
cappa	κ	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu (mi)	μ	M	omega	ω	Ω

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph $\aleph$

Indice analitico