Cenno alle serie di Fourier

Luciano Battaia

27 settembre 2010

Queste pagine contengono solo un'introduzione informale e senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità alle serie di Fourier. In particolare non sono proposte dimostrazioni dei teoremi enunciati.

Indice

1 Alcuni richiami di Algebra lineare

Se nello spazio $\mathcal{V}$ dei vettori geometrici introduciamo una base ortonormale qualunque $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei vettori e l'insieme delle terne di numeri reali, $\mathbb{R}^3$: se

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3\,, \tag{1}$$

si può identificare $\vec{u}$ con (u_1, u_2, u_3) :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)\,. \tag{2}$$

In questo modo le operazioni lineari sui vettori si "traducono" in operazioni sulle terne: alla somma di due vettori corrisponde la somma termine a termine delle terne corrispondenti, ecc. Qui ci interessa il fatto che anche il prodotto scalare tra vettori può essere eseguito usando le terne rappresentative: se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, si ha

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_iv_i\,, \tag{3}$$

e

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,. \tag{4}$$

Le componenti di un vettore $\vec{u}$ rispetto alla terna ortonormale $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ si possono trovare con il prodotto scalare

$$u_1 = \vec{u}\cdot\vec{e}_1\,,\quad u_2 = \vec{u}\cdot\vec{e}_2\,,\quad u_3 = \vec{u}\cdot\vec{e}_3\,. \tag{5}$$

Se la terna fosse solo ortogonale, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, si potrebbe passare a una terna ortonormale dividendo ciascuno dei suoi elementi per la lunghezza, e si avrebbe

$$u_1 = \vec{u}\cdot\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{1}{\|\vec{a}_1\|}\,\vec{u}\cdot\vec{a}_1\,,\quad u_2 = \vec{u}\cdot\frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|} = \frac{1}{\|\vec{a}_2\|}\,\vec{u}\cdot\vec{a}_2\,,\quad u_3 = \vec{u}\cdot\frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{1}{\|\vec{a}_3\|}\,\vec{u}\cdot\vec{a}_3\,. \tag{6}$$

Dalle (6) e (1) si deduce che il vettore $\vec{u}$ si può scrivere rispetto alla terna ortogonale come segue:

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|}\frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|}\frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|^2}\,\vec{a}_1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|^2}\,\vec{a}_2 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|^2}\,\vec{a}_3 \tag{7}$$

Ricordiamo infine che due vettori non nulli sono ortogonali se e solo il loro prodotto scalare è nullo.

2 Relazioni di ortogonalità e base in $\mathbb{R}^{]-\pi,\pi]}$

Consideriamo l'insieme, $\mathcal{B}$, delle funzioni

$$x \mapsto \cos nx \qquad x \mapsto \sin nx,\quad n = 0,\, 1,\, 2\ldots\,, \tag{8}$$

Osserviamo esplicitamente che per $n = 0$ si ha $\cos nx \equiv 1$ e $\sin nx \equiv 0$.

Una qualunque combinazione lineare di funzioni di $\mathcal{B}$ produce una funzione periodica di periodo 2π. La teoria delle serie di Fourier si occupa sostanzialmente del problema inverso: data una funzione periodica di periodo 2π, ci si chiede se essa può essere espressa come combinazione lineare di funzioni di $\mathcal{B}$. La risposta, come vedremo, è sostanzialmente affermativa per una vasta classe di funzioni, pur di sostituire le combinazioni lineari "ordinarie", cioè costituite da un numero finito di addendi, con combinazioni lineari "infinite", cioè costituite da serie di funzioni.

Per arrivare a questo risultato servono alcune definizioni e osservazioni preliminari.

Lemma 1 (Relazioni di ortogonalità)**.** *Se m ed n sono due naturali qualunque, si ha*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } m = n = 0 \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}\,, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{se } m = n = 0 \\ \pi, & \text{se } m = n \neq 0 \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}\,, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{11}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è un semplice (ma utile!) esercizio sugli integrali. Facciamo esplicitamente tutti i calcoli per la terza delle (9). Si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(mx-nx)+\cos(mx+nx)\big)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\big)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\int_{-\pi}^{\pi}(m-n)\big(\cos(m-n)x\,\mathrm{d}x + \\ &\qquad + \frac{1}{2(m+n)}\int_{-\pi}^{\pi}(m+n)\big(\cos(m+n)x\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\Big[\sin(m-n)x\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)}\Big[\sin(m+n)x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

□

Queste relazioni si chiamano relazioni di ortogonalità perché, in analogia con la formula (2), possiamo pensare a una funzione $u\colon]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ come a un vettore "infinito-dimensionale", le cui "componenti" sono i valori di $u(x)$ al variare di x in $]-\pi,\pi]$:

$$u \in \mathbb{R}^{]-\pi,\pi]}, \quad u = \big(u(x)\big)_{x\in[0,2\pi]}, \tag{12}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{R}^{]\pi,\pi]}$ l'insieme delle funzioni da $]-\pi,\pi]$ in $\mathbb{R}$. In analogia alla formula (3), se le funzioni sono opportunamente regolari, potremo pensare alle formule (9), (10) e (11) come a prodotti scalari[1] tra queste funzioni, e leggere le formule stesse dicendo che

- $\cos 0x = 1$ ha norma $\sqrt{2\pi}$;
- $\cos mx$ e $\sin mx$ hanno norma $\sqrt{\pi}$ se $m > 0$;
- $\cos mx$ e $\cos nx$, oppure $\sin mx$ e $\sin nx$, sono ortogonali tra di loro se $m \neq n$;
- $\cos mx$ e $\sin nx$ son ortogonali tra di loro.

Sempre in analogia con quanto succede negli spazi vettoriali, possiamo chiederci se le funzioni di $\mathcal{B}$ costituiscono una "base" per lo spazio $\mathbb{R}^{]-\pi,\pi]}$, o magari per un suo sottospazio opportuno, cioè se è possibile scrivere una generica funzione f di $\mathbb{R}^{]-\pi,\pi]}$ come combinazione lineare, magari infinita (serie) di funzioni appartenenti a $\mathcal{B}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big), \tag{13}$$

dove, secondo tradizione, abbiamo indicato con $a_0/2$ anziché con a_0 il coefficiente di $\cos 0x$ (il coefficiente di $\sin 0x$ non ha interesse perché $\sin 0x = 0$), e dove il valore di N potrà

[1] Ciò significa che il prodotto scalare di due funzioni f, g è definito da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

anche estendersi fino all'infinito (naturalmente dopo aver precisato che tipo di convergenza richiediamo per la serie).

Se l'analogia funziona, sarebbe piacevole che i coefficienti a_n e b_n che compaiono nella formula (13) fossero dedotti in modo analogo a quanto succede con gli spazi vettoriali ordinari, cioè con formule simili alle (7), ovvero

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{14}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\,, \tag{15}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

ove, naturalmente, occorrerà che gli integrali esistano.

Osservazione 2. Poiché le funzioni di $\mathcal{B}$ sono periodiche di periodo 2π, è chiaro che, anziché considerare l'intervallo $]-\pi,\pi]$, avremmo potuto considerare un qualunque intervallo di ampiezza 2π. Ed è anche chiaro che nulla cambierebbe nei valori degli integrali che compaiono nelle formule (14), (15), (16).

È poi evidente che se l'uguaglianza espressa dalla formula (13) vale nell'intervallo $]-\pi,\pi]$, la funzione f potrà essere pensata definita su tutto $\mathbb{R}$, estendendola per periodicità.

Esempio. Prima ancora di entrare nei dettagli, proponiamo un esempio grafico. Data la funzione $f(x) = x$, ristretta all'intervallo $]-\pi,\pi[$ e poi prolungata a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità e defininendola in maniera arbitraria sui punti rimanenti[(2)], confrontiamone il grafico con quello ottenuto mediante una combinazione lineare del tipo (13), con coefficienti dati dalle formule (14), (15) e (16), prendendo diversi valori di N.

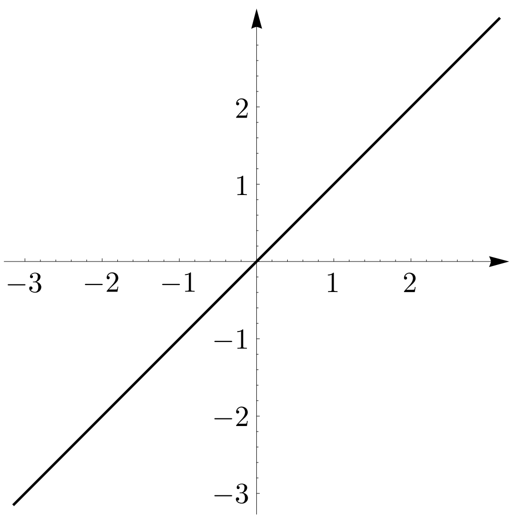
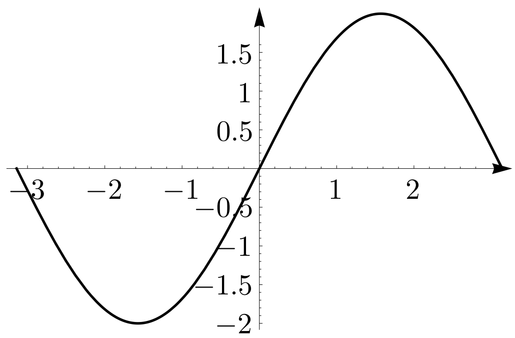
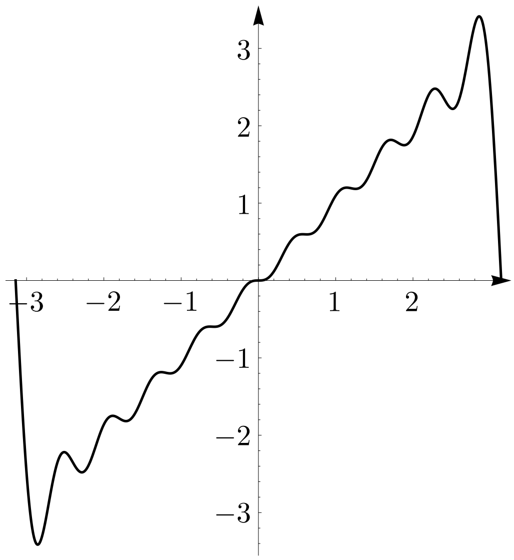


Grafico di $f(x) = x$, in $]-\pi,\pi[$.

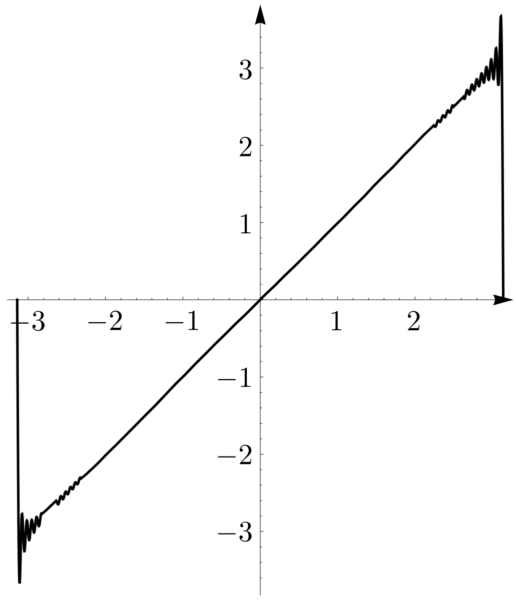


Combinazione lineare con $N = 1$.

[2]In base al teorema di convergenza puntuale, comunque la definiamo sui punti del tipo $\pi + 2k\pi$, in quei punti lo sviluppo convergerà a zero, come si può ben vedere dai grafici che seguono.



Combinazione lineare con $N = 10$.



Combinazione lineare con $N = 100$.

Come si constata immediatamente, all'aumentare di N, la combinazione lineare si avvicina sempre di più al grafico della funzione f, e si tenga presente che l'esempio proposto è abbastanza complesso, in quanto il grafico di f, nel tratto considerato, è un segmento, e non è assolutamente prevedibile che esso possa essere ottenuto come combinazione lineare di funzioni seno e coseno.

3 Sviluppo di Fourier

Definizione 3. *Siano dati un intervallo chiuso I (limitato o illimitato) e una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si dirà che la funzione f è*

- assolutamente integrabile *su I se*

$$\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty\,;$$

- generalmente continua *su I se*
  - *quando I è limitato, è continua in I tranne che su un numero finito di punti, e in ciascuno di questi punti ha sia il limite sinistro che quello destro e questi sono finiti,*
  - *quando I è illimitato, vale la proprietà precedente su ogni sottointervallo limitato di I;*
- regolare a tratti *su I se sia f che la sua derivata prima sono generalmente continue su I.*

Si noti che una funzione regolare a tratti, nei punti dove eventualmente non è derivabile può avere solo punti angolosi e non cuspidi. Notiamo anche che una funzione generalmente continua in un intervallo limitato è sempre assolutamente integrabile.

Definizione 4. *I coefficienti introdotti nelle formule (14), (15) e (16), per le funzioni f assolutamente integrabili in $]-\pi,\pi[$, si chiamano* coefficienti di Fourier *della funzione f.*

Definizione 5. *Se f è una funzione generalmente continua in I, si chiama* funzione normalizzata *la funzione*

$$f^*(x) = \frac{1}{2}\big[f(x^-) + f(x^+)\big]\,, \tag{17}$$

dove

$$f(x^-) = \lim_{t\to x^-} f(t)\,, \quad e \quad f(x^+) = \lim_{t\to x^+} f(t)\,. \tag{18}$$

È chiaro che, nei punti ove f è continua, $f^*(x) = f(x)$.

Siamo ora pronti a enunciare il teorema fondamentale sulle serie di Fourier.

Teorema 6 (Convergenza puntuale della serie di Fourier)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e regolare a tratti. Allora la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)\,, \tag{19}$$

dove i coefficienti a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier della funzione f, converge puntualmente alla funzione normalizzata f^* per ogni x. Lo sviluppo (19) si chiama sviluppo di Fourier della funzione f

Si noti come le condizioni per la sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione f siano molto meno restrittive che non quelle richieste per lo sviluppo in serie di Taylor. Segnaliamo che l'enunciato che abbiamo qui proposto è una forma semplificata, comunque sufficiente per questa sommaria e brevissima introduzione.

In realtà le cose vanno ancora meglio di quanto previsto dal teorema di convergenza puntuale, nel senso che la serie è addirittura uniformemente convergente sugli intervalli ove f è continua e questo apre la strada ai problemi della derivazione e integrazione termine a termine, problemi di cui comunque qui non ci vogliamo occupare.

4 Periodo arbitrario

Tutta la teoria esposta si mantiene valida anche per funzioni periodiche di periodo 2τ arbitrario, purché sempre regolari a tratti. Basterà, per questo, solo sostituire le funzioni della base $\mathcal{B}$ con le

$$\cos n\,\frac{\pi x}{\tau}\,, \quad \text{e} \quad \sin n\,\frac{\pi x}{\tau}. \tag{20}$$

Lo sviluppo si scriverà:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos n\,\frac{\pi x}{\tau} + b_n \sin n\,\frac{\pi x}{\tau}\big)\,, \tag{21}$$

I coefficienti di Fourier si modificheranno come segue.

$$a_0 = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{22}$$

$$a_n = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\cos n\,\frac{\pi x}{\tau}\,\mathrm{d}x\,, \tag{23}$$

$$b_n = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\sin n\,\frac{\pi x}{\tau}\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

5 Forma complessa

Come utile esercizio di applicazione delle formule di Eulero, ricaviamo la forma complessa dello sviluppo di Fourier di una funzione, anche in considerazione del fatto che in molti software di calcolo simbolico la formula è proprio proposta in questa forma.

Ricordando le formule di Eulero

$$\mathrm{e}^{iz} = \cos z + i\sin z\,,\quad \mathrm{e}^{-iz} = \cos z - i\sin z\,,\quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\,,\quad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2i}\,,$$

la formula (19) può essere riscritta come segue.

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2} + b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2i}\right) = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2} - \mathrm{i}b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2}\right) = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right) = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{a_{-n}+\mathrm{i}b_{-n}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,.
\end{aligned}$$

Si ha poi, sempre utilizzando le formule di Eulero e le proprietà di simmetria delle funzioni seno e coseno,

$$\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - \mathrm{i}\sin nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{-n}+\mathrm{i}b_{-n}}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(\cos(-nx) + \mathrm{i}\sin(-nx)\big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(\cos(nx) - \mathrm{i}\sin(nx)\big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\,;
\end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Se ne deduce che lo sviluppo di Fourier può essere scritto nella forma compatta

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,, \tag{25}$$

con i coefficienti dati dalle formule

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\,. \tag{26}$$

Anche nel caso di periodo 2τ qualunque si ottiene, in modo perfettamente analogo,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\,\frac{\pi x}{\tau}}\,, \tag{27}$$

con i coefficienti dati dalle formule

$$c_n = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\,\frac{\pi x}{\tau}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{28}$$

6 Qualche esercizio

Esercizio 1. *Sviluppare in serie di Fourier la funzione definita su* $]-\pi,\pi[$ *da*

$$f\colon\,]-\pi,\pi[\,\to \mathbb{R}\,,\quad f(x) = x^2 + x\,,$$

e poi prolungata per periodicità nel modo già visto.

Calcolare esplicitamente lo sviluppo e la sua somma per $x = \pm\pi$*.*

Risoluzione. Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \cdots = \frac{2\pi^3}{3}\,,$$

da cui

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Si ha poi

$$\int (x^2 + x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int \cos(nx)(x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(nx)\cdot x^2\,\mathrm{d}x + \int \cos(nx)\cdot x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sin(nx)}{n}\,x^2 - \int \frac{\sin(nx)}{n}\,2x\,\mathrm{d}x + \frac{\sin(nx)}{n}\,x - \int \frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sin(nx)}{n}\,x^2 - \frac{2}{n}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\,x - \int \frac{-\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) + \frac{\sin(nx)}{n}\,x - \left(\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{\sin(nx)}{n}\, x^2 + \frac{2\cos(nx)}{n^2}\, x - \frac{2\sin(nx)}{n^3} + \frac{\sin(nx)}{n}\, x + \frac{\cos(nx)}{n^2}\,.$$

Ne segue

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^2+x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{4}{n^2}\,\cos(n\pi)\,.$$

Procedendo in maniera assolutamente analoga si trova

$$b_n = (-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}\,.$$

Lo sviluppo richiesto è dunque

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\,\cos(n\pi)\cos(nx) + (-1)^{n-1}\,\frac{2}{n}\,\sin(nx)\right)\,.$$

Sulla base del teorema di convergenza puntuale possiamo concludere che questo sviluppo converge a $f(x)$ per ogni $x \in]-\pi,\pi[$, mentre per $x = \pm\pi$ esso converge a

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = \frac{\big(\pi+\pi^2\big) + \big(-\pi+(-\pi)^2\big)}{2} = \pi^2\,.$$

Si ha dunque, sostituendo per esempio π nello sviluppo precedentemente trovato,

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{4}{1^2}\cos\pi\cos\pi + \frac{4}{2^2}\cos 2\pi\cos 2\pi + \frac{4}{3^2}\cos 3\pi\cos 3\pi + \cdots = \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right)\,.\end{aligned}$$

Se ne può trarre il seguente interessante risultato:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

□

Possiamo effettuare un confronto tra il grafico della funzione dell'esempio considerato e lo sviluppo di Fourier che abbiamo scritto, considerandone le approssimazioni ottenute troncando lo stesso sviluppo a diversi valori di n.

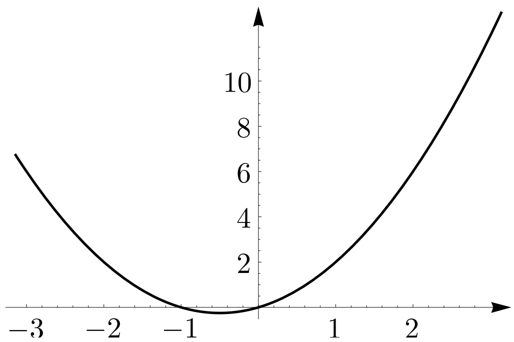
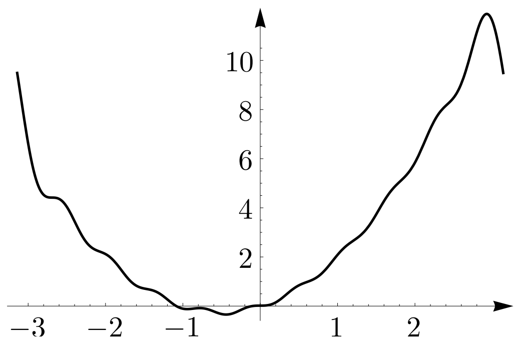
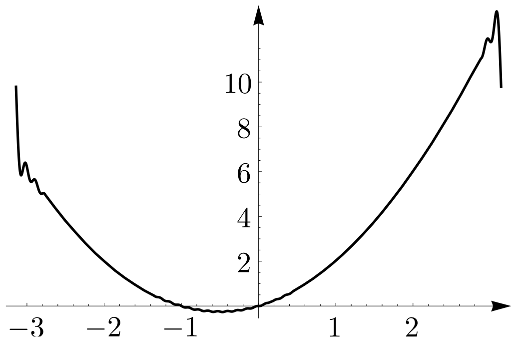


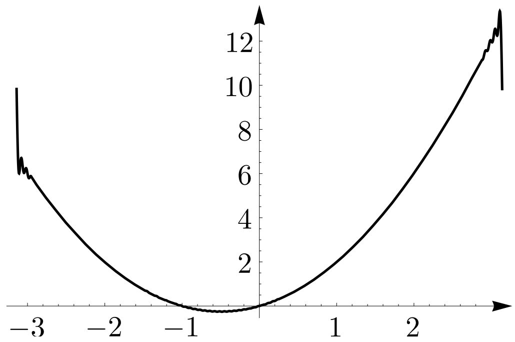
Grafico di $f(x) = x^2 + x$, in $]-\pi,\pi]$.



Approssimazione con $n = 10$.



Approssimazione con $n = 50$.



Approssimazione con $n = 100$.

Si noti come l'approssimazione migliori sensibilmente al crescere di n e come, in corrispondenza dei valori di x uguale a $\pm\pi$ il valore di x sia prossimo a π^2 in tutte le approssimazioni.

Esercizio 2. *Calcolare lo sviluppo di Fourier della funzione definita su* $[-\pi, \pi]$ *da*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \textit{se } x \in]-\pi, 0[\\ 0, & \textit{se } x \in \{\, 0, -\pi, \pi \,\} \\ 1, & \textit{se } x \in]0, \pi[\end{cases}$$

e poi prolungata nel modo solito a una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

Valutare tale sviluppo per $x = \pi/2$.

Risoluzione. Si noti come la funzione sia stata definita in modo tale che lo sviluppo di Fourier (in base al teorema di convergenza puntuale) converga proprio a f anche nei punti di discontinuità.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier è molto semplice, tenendo anche conto del fatto che, essendo f dispari, tutti gli a_n saranno nulli. Si ottiene, tenendo anche conto del fatto che $f(x)\sin(nx)$ è una funzione pari,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big).$$

Si vede subito che restano solo i termini dispari, con valore $4/n\pi$, in quanto i pari si annullano. Lo sviluppo si può scrivere:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Ponendo $x = \pi/2$ e tenendo conto che $f(\pi/2) = 1$, si trova facilmente

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

□

Anche in questo caso proponiamo alcuni grafici esemplificativi.

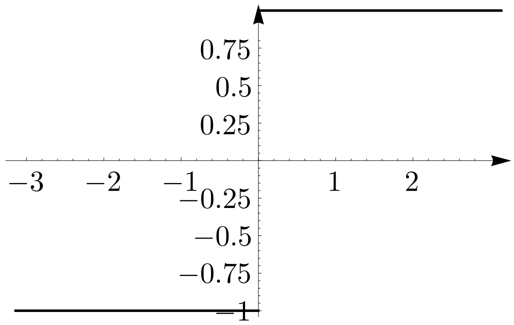
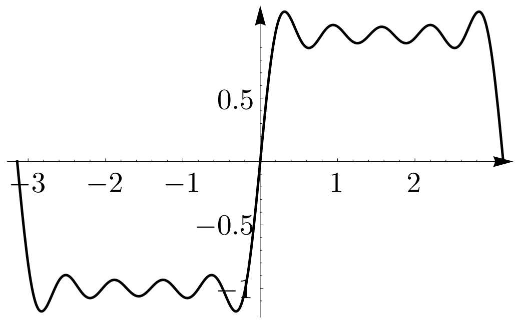
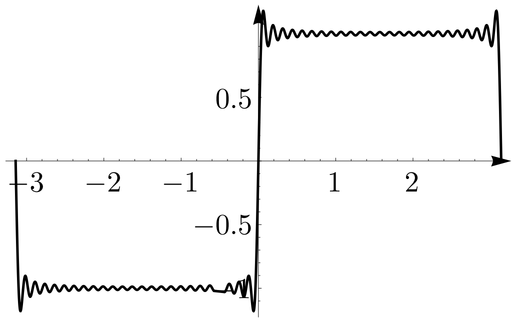


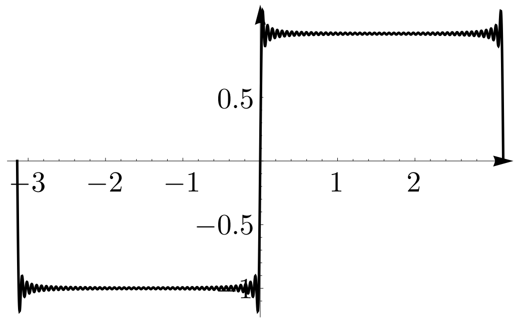
Grafico di $f(x)$, in $]-\pi,\pi]$.



Approssimazione con $n = 10$.



Approssimazione con $n = 50$.



Approssimazione con $n = 100$.

Si verifichino, ancora una volta, le proprietà degli sviluppi di Fourier in corrispondenza delle discontinuità a salto della funzione data.

Esercizio 3. *Stesso problema dei precedenti con la funzione definita, in* $]-\pi,\pi]$, *da* $f(x)=x^2$. *Valutare lo sviluppo per* $x=0$.

Risoluzione. Lasciamo questo esercizio al lettore, proponendo solo il risultato della valutazione per $x=0$ e i soliti grafici.

I calcoli sono ormai standard e non presentano alcuna difficoltà.

Si ottiene:

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

□

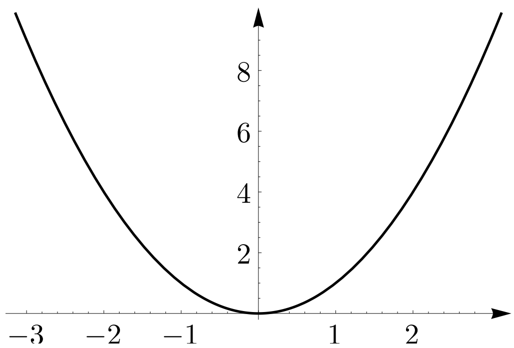
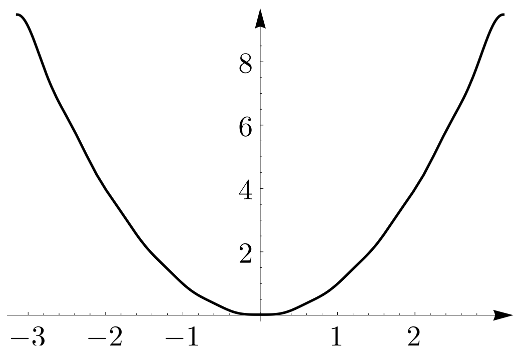
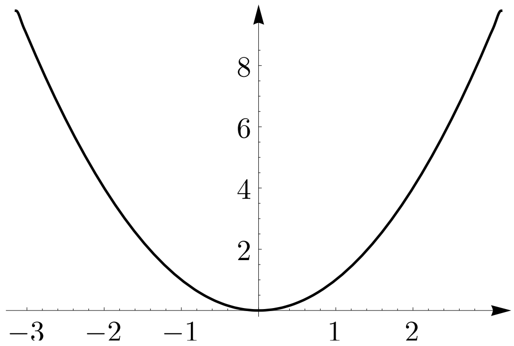


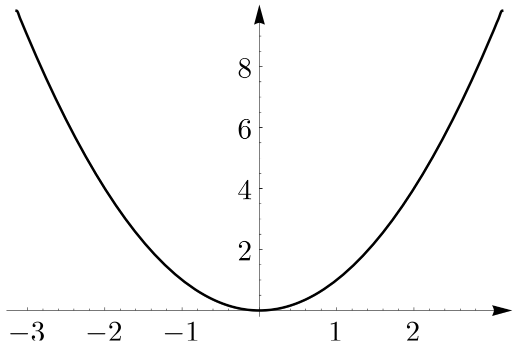
Grafico di $f(x) = x^2$, in $]-\pi,\pi]$.



Approssimazione con $n = 10$.



Approssimazione con $n = 50$.



Approssimazione con $n = 100$.

Si noti come in questo caso la continuità della funzione su tutto $\mathbb{R}$ faccia si che lo sviluppo costituisca rapidamente una buona approssimazione "globale" della funzione.

Esercizio 4. *Esercizi proposti senza alcun commento.*
Si trovino gli sviluppi di $|x|$ *e* $|\sin x|$*, sempre ristrette all'intervallo* $]-\pi, \pi[$.

Osservazione 7. Si noti come gli "sviluppi troncati" di Fourier costituiscano una buona approssimazione di una funzione, periodica e regolare a tratti, in tutto $\mathbb{R}$, eccetto i punti di discontinuità a salto eventuali. Questo comportamento è diverso da quello dei polinomi di Taylor dove l'approssimazione era buona in un intorno del punto iniziale, di ampiezza non prevedibile a priori.