

Luciano Battaia<sup>(\*)</sup>

8 novembre 2010

Scopo di questo articolo è di trattare il concetto di funzione implicita, con particolare riguardo ai casi di curve nel piano, e di curve e superfici nello spazio. Non sono proposte le dimostrazioni di tutti i teoremi presentati, dimostrazioni che si possono trovare nei testi di analisi. L'idea base è quella di mostrare come in realtà tutto il procedimento previsto dal teorema di Dini non sia altro che una generalizzazione di tecniche e algoritmi di uso continuo nello studio delle proprietà geometriche e analitiche del piano e dello spazio. Affronteremo il problema per approssimazioni successive, partendo dal caso più semplice. Conclude l'articolo una introduzione al problema dei massimi e minimi vincolati. La lettura di queste pagine richiede la conoscenza di tutti i concetti fondamentali del calcolo differenziale in più variabili reali.

## Indice

Premessa . . . . .	1
Introduzione . . . . .	2
1 Qualche richiamo sulle notazioni . . . . .	5
2 Curve di $\mathbb{R}^n$ e superfici di $\mathbb{R}^3$ . . . . .	6
3 Curve piane in forma implicita . . . . .	9
4 Superfici dello spazio in forma implicita . . . . .	15
5 Curve dello spazio in forma implicita . . . . .	20
6 Il caso generale . . . . .	23
7 Massimi e minimi vincolati per campi scalari . . . . .	25
8 Osservazioni conclusive sulla ricerca dei punti di estremo . . . . .	31
9 Un esercizio per concludere . . . . .	32

## Premessa

Come già segnalato, gli argomenti trattati in questo articolo sono, nella sostanza, una generalizzazione di concetti ampiamente usati, anche a livello elementare, nella geometria analitica del piano e dello spazio e nello studio dell'analisi delle funzioni reali di una o due variabili reali.

---

<sup>\*</sup><http://www.batmath.it>

Gli algoritmi di calcolo coinvolti, semplici nella sostanza, sono invece abbastanza complessi nella loro implementazione pratica: molte delle formule che compaiono nelle pagine successive sono lunghe e laboriose da scrivere e peggio ancora da usare. Tuttavia un efficiente uso, tra l'altro, delle tecniche dell'algebra lineare riduce le cose da memorizzare a un insieme abbastanza ristretto. È con questo spirito che bisogna affrontare un argomento come quello qui proposto, per evitare di lasciarsi prendere (inutilmente) dal panico.

## Introduzione

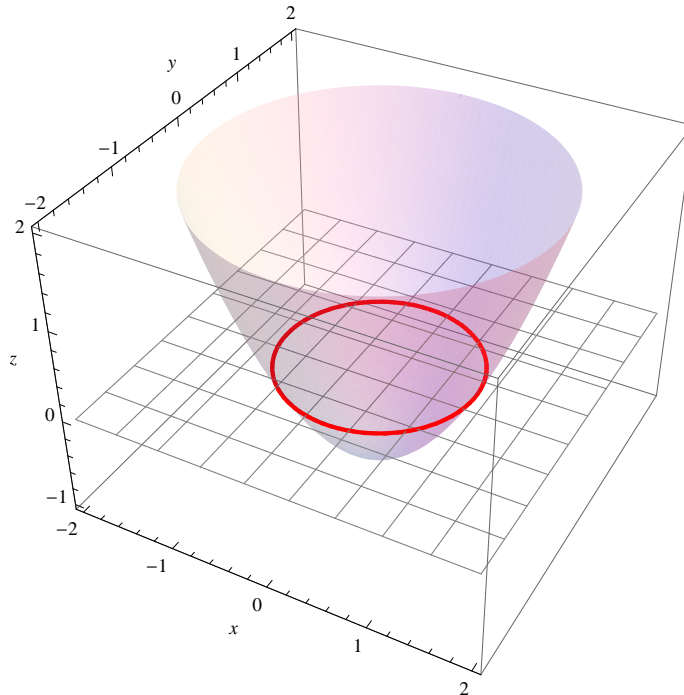
Consideriamo l'equazione seguente in due incognite (reali)

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

È ben noto che l'insieme delle sue soluzioni (il *luogo* delle soluzioni) è costituito, in un piano cartesiano  $Oxy$ , dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, cioè da una "curva" nel senso intuitivo del termine. Se consideriamo la funzione

$$(2) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

possiamo pensare detto luogo come la curva di livello zero della funzione  $f$ . La figura 1 illustra questa situazione.



**Figura 1** La circonferenza  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  come linea di livello 0.

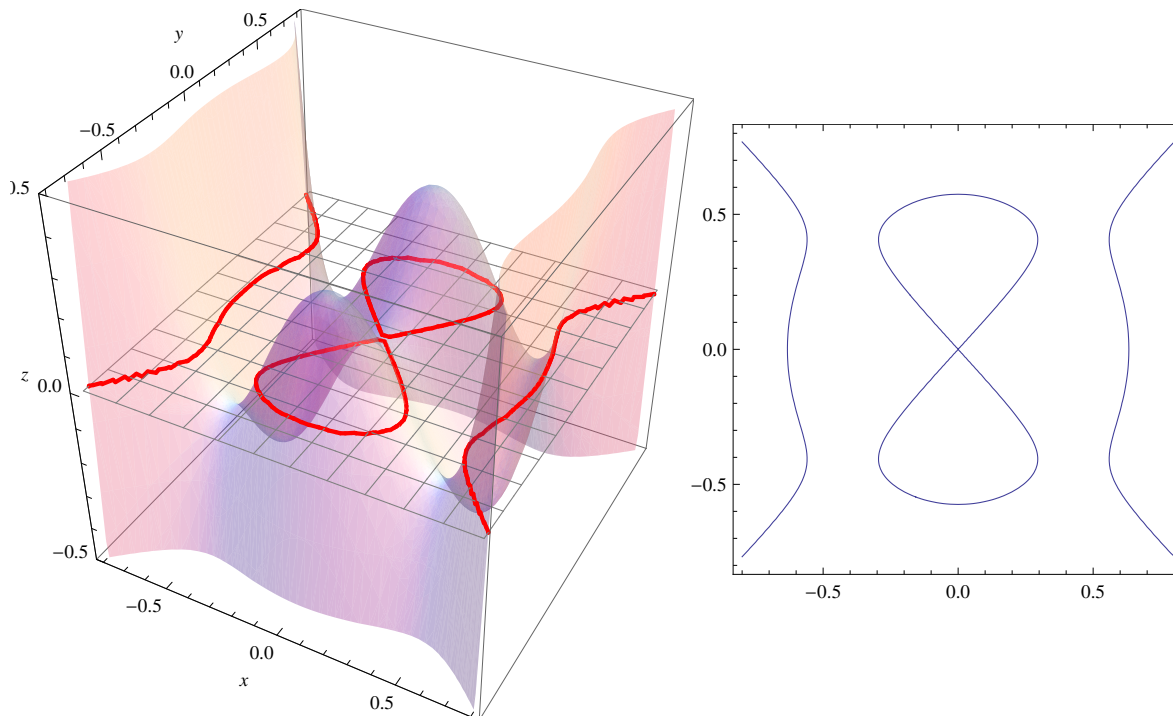
Il problema che vogliamo trattare qui è una generalizzazione di questo fatto: data una funzione arbitraria di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ , quali sono le caratteristiche del suo insieme di livello 0? E anche, più in generale, come è fatto un suo insieme di livello qualunque?

Il problema è molto complesso per una funzione arbitraria. Se infatti  $E$  è un *qualunque* sottoinsieme del piano, possiamo costruire una funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nel seguente modo:

$$(3) \quad f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in E \\ 1, & \text{se } (x, y) \notin E \end{cases}.$$

L'insieme di livello 0 di questa funzione è proprio l'insieme  $E$  arbitrariamente scelto, e quindi può essere molto diverso da quello che, a livello intuitivo, noi chiamiamo curva. Una delle cose che ci proponiamo di fare è di dare condizioni sulla funzione  $f$  perché non si verifichino situazioni "patologiche" per il suo insieme di livello zero.

Giova comunque osservare che, anche per funzioni abbastanza semplici, l'insieme di livello 0 può avere una struttura piuttosto complessa, come mostra la figura 2.



**Figura 2** La superficie  $f(x, y) = 10x^4 - 4x^2 - 10y^4 + 3/10 y^2$  e la sua curva di livello 0

Riprendendo in esame l'equazione (1), possiamo pensare di *esplicitare* una delle due variabili, esprimendola in funzione dell'altra. Possiamo, per esempio, scrivere

$$(4) \quad y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Se consideriamo ora le due funzioni di una variabile, di dominio  $[-1, 1]$ ,

$$(5) \quad f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

possiamo pensare lo stesso luogo come unione dei grafici delle due funzioni, e dire che l'equazione (1) definisce *implicitamente* due funzioni della variabile  $x$ . Purtroppo è possibile pensare lo stesso luogo come unione di grafici di funzioni della variabile  $x$  in infiniti altri modi. Uno di questi è il seguente:

$$(6) \quad \begin{aligned} g_1(x) &= \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \\ g_2(x) &= \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{se } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{se } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}. \end{aligned}$$

Anche queste due funzioni sono a pieno titolo definite implicitamente dall'equazione (1), pur essendo diverse dalle  $f_1$  e  $f_2$  sopra considerate. Se però richiediamo che le funzioni definite implicitamente

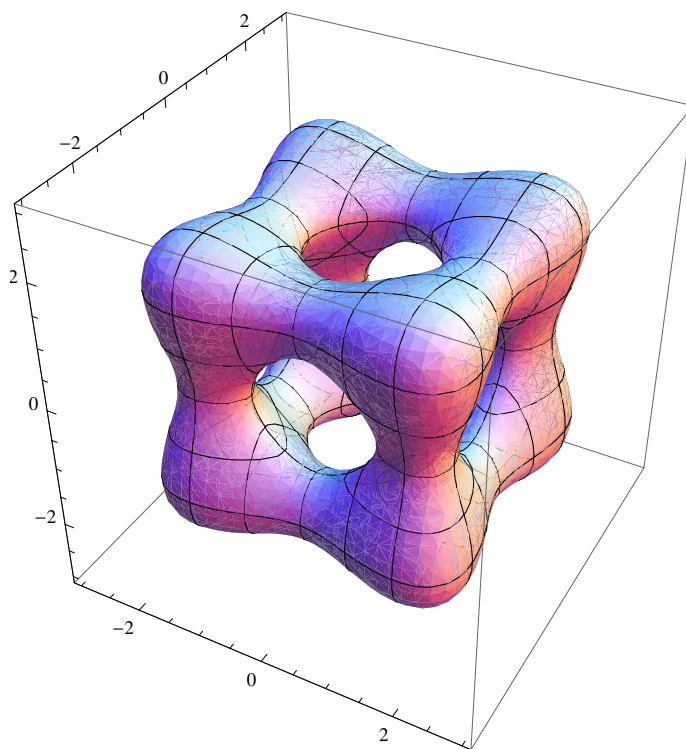
dall'equazione (1) siano continue, ecco allora che la scelta si restringe di molto, e le funzioni date dalle formule (6) devono essere scartate.

Usando un linguaggio preso dalla meccanica razionale (senza naturalmente voler entrare troppo nei dettagli), potremmo dire che se abbiamo un punto libero di muoversi in un piano, esso ha “due gradi di libertà”: la sua  $x$  e la sua  $y$  possono variare liberamente e indipendentemente, e inoltre il punto potrà raggiungere qualunque posizione nel piano. Se invece imponiamo alle coordinate  $x$  e  $y$  del punto di soddisfare una equazione del tipo  $f(x, y) = 0$ , non tutte le posizioni saranno raggiungibili e, inoltre, fissato un valore ammissibile per una delle due coordinate, l'altra sarà determinata (anche se non univocamente): si dice che il punto è sottoposto ad un *vincolo*. Sotto opportune ipotesi di regolarità per la funzione  $f$  il punto potrà muoversi solo su una curva e avrà, come si usa dire, “un solo grado di libertà”.

Passando da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$  potremo considerare equazioni del tipo

$$(7) \quad f(x, y, z) = 0,$$

cioè insiemi di livello 0 per funzioni di tre variabili e chiederci come essi sono fatti; alternativamente potremo chiederci se è possibile esplicitare una delle tre variabili in funzione delle altre due, ottenendo così funzioni, che si chiameranno ancora definite implicitamente, di due variabili, con le stesse difficoltà menzionate per il caso precedente. In questa situazione non sarà possibile avere una rappresentazione grafica “ordinaria” della funzione  $f$ ; sarà invece possibile rappresentare l'insieme di livello 0 di  $f$ , cioè il luogo dei punti soluzione di un'equazione del tipo (7). Anche per semplici funzioni polinomiali, questo insieme può essere molto complesso, come mostra la figura 3.

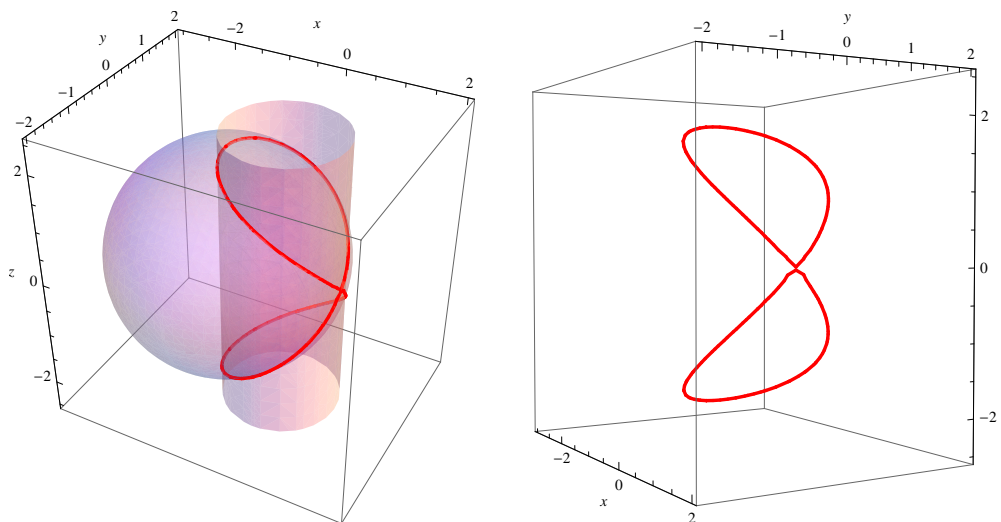


**Figura 3** L'insieme di livello 0 della funzione  $f(x, y, z) = x^4 - 5x^2 + y^4 - 5y^2 + z^4 - 5z^2 + 10$

Nel caso di  $\mathbb{R}^3$  la situazione è ancora più articolata: potremo anche considerare un sistema di due equazioni del tipo (7):

$$(8) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

cioè intersezioni degli insiemi di livello zero di due funzioni di tre variabili; anche qui, alternativamente, avendo due equazioni anziché una, potremo chiederci se è possibile esplicitare due delle tre variabili in funzione della terza, ottenendo così due funzioni di una sola variabile. La figura 4 mostra l'intersezione tra le superfici di livello 0 delle due funzioni  $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$  e  $f_2(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ .



**Figura 4** Intersezione tra gli insiemi di livello 0 di due funzioni di tre variabili

Dal punto di vista della meccanica razionale potremo considerare un punto che, originariamente libero di muoversi nello spazio (cioè dotato di “tre gradi di libertà”), viene sottoposto a uno o due vincoli che ne limitano il movimento, riducendo i suoi gradi di libertà a due o addirittura a uno.

## 1 Qualche richiamo sulle notazioni

Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  sarà sempre pensato dotato del prodotto scalare canonico e della norma dedotta da questo prodotto scalare. Indicheremo inoltre con

$$(9) \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  e con  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  il generico punto di  $\mathbb{R}^n$ ; molto spesso ometteremo l'evidenziazione del simbolo di trasposto sui vettori, soprattutto quando ciò apparirà chiaro dal contesto, scrivendo semplicemente  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Potremo anche indicare il generico punto di  $\mathbb{R}^n$  con  $P$ , anziché con  $\vec{x}$ . Nel caso di  $\mathbb{R}^3$ , la base canonica potrà essere anche indicata, secondo tradizione, con  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Se

$$(10) \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

è una funzione che ammette tutte le derivate parziali in un punto  $x_0$ , indichiamo con

$$(11) \quad J_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix},$$

la matrice jacobiana (che è una matrice  $m \times n$ ) di  $f$ , in  $\vec{x}_0$ . Ricordiamo che se la funzione è differenziabile in  $\vec{x}_0$  si ha

$$(12) \quad f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + J_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \omega(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

con  $\omega$  soddisfacente la seguente condizione

$$(13) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\omega(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Nel caso particolare (e particolarmente importante!) in cui  $m = 1$ , la funzione  $f$  ha una sola componente<sup>(1)</sup> ed è detta un *campo scalare*. In questo caso al posto della matrice jacobiana (che è una matrice ad una sola riga e  $n$  colonne), si preferisce considerare il vettore gradiente (che è una matrice a  $n$  righe e una sola colonna)

$$(14) \quad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

e scrivere la (12) nel modo seguente

$$(15) \quad f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \omega(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Naturalmente nulla cambia nella sostanza, però il vettore  $\nabla f(\vec{x}_0)$  ha un notevole significato geometrico in parte già noto e su cui ritorneremo.

Segnaliamo infine che una funzione di  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^m$  (“curva” di  $\mathbb{R}^m$ ), di solito indicata con  $\gamma$ , è costituita da  $m$  funzioni di una sola variabile:  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$  e le derivate utilizzate per costruire la relativa matrice jacobiana (matrice a una sola colonna) sono tutte derivate ordinarie di funzioni di una sola variabile, tant’è che, di solito, si scrive  $\gamma'(x)$ , al posto di  $J_\gamma(x)$ .

## 2 Curve di $\mathbb{R}^n$ e superfici di $\mathbb{R}^3$

Sia per le curve di  $\mathbb{R}^n$ , che per le superfici di  $\mathbb{R}^3$ , ci limiteremo solo ai concetti essenziali utili per la trattazione oggetto di questo articolo, più che altro con lo scopo di fissare le notazioni.

Nel seguito del paragrafo  $I$  indicherà un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione, e poniamo  $\Gamma = \gamma(I)$ . La coppia  $(\gamma, \Gamma)$  si chiama una *curva* di  $\mathbb{R}^n$ . Abitualmente la funzione  $\gamma$  si chiama una *rappresentazione parametrica* o una *parametrizzazione* della curva, mentre l’insieme immagine  $\Gamma$  si chiama *sostegno* della curva. Potremmo dire che una curva è una coppia costituita da un sostegno (un sottoinsieme) di  $\mathbb{R}^n$  e un modo di parametrizzarlo.

In realtà l’assegnazione del sostegno non è indispensabile, in quanto si può ricavare come insieme immagine della funzione  $\gamma$ . Potremo dunque riferire il termine curva anche alla sola funzione  $\gamma$ , senza dover precisare il sostegno. Si tenga invece sempre ben presente che non è sufficiente assegnare il sostegno per poter parlare di curva (e la cosa è quasi evidente: ci possono essere infinite funzioni di  $I$  in  $\mathbb{R}^n$  che hanno un determinato sostegno).

<sup>1</sup>Per esempio è molto importante ricordare che solo per funzioni di questo tipo si può parlare di massimi e minimi.

La curva si dice *semplice* se la corrispondenza tra i valori di  $I$  e di  $\Gamma$  è biunivoca, con la possibile eccezione per gli estremi di  $I = [a, b]$ , dove può succedere che  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ; in quest'ultimo caso la curva si dice *semplice e chiusa*.

Una curva si dice *di classe  $C^k$*  ( $k \geq 0$ ) se tale è la funzione  $\gamma$ . La curva si dice poi *regolare* se la matrice jacobiana di  $\gamma$  ha rango 1 (quindi massimo): è come dire che la  $n$ -upla delle derivate (ordinarie in quanto funzioni di una sola variabile) di *gamma* è non identicamente nulla, almeno nei punti interni ad  $I$ .

Il vettore

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix}$$

è detto *vettore tangente* alla curva regolare  $\gamma$  e il suo versore *versore tangente*. La retta per un punto  $P_0 = \gamma(t_0)$  e di vettore direttore  $\gamma'(t_0)$  è detta *retta tangente* alla curva regolare  $\gamma$  e semplice nel punto  $P_0$ .

In molte applicazioni ha interesse il seguente problema: dato un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  (in particolare del piano o dello spazio), che possa essere pensato come una curva in senso “geometrico” (anche se non vogliamo entrare nei dettagli di che cosa significhi questa affermazione), trovare una funzione  $\gamma$  che lo parametrizzi. È chiaro che il problema, anche per insiemi molto semplici come per esempio una retta del piano, può avere infinite soluzioni. Analizziamo per esempio le seguenti due curve, definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

$$(16) \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -4 + 3t \\ 3 + 4t \\ -3 + 3t \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 3t \sin t - 4 \\ 4t \sin t + 3 \\ 3t \sin t - 3 \end{pmatrix}.$$

E' facile provare che esse hanno per sostegno la stessa retta dello spazio, passante per  $(-4, 3, -3)$  e di vettore direttore  $\vec{v}_r = (3, 4, 3)$ . La prima delle due però rappresenta una curva semplice, la seconda no: il punto  $(-4, 3, -3)$ , per esempio, viene raggiunto infinite volte, in corrispondenza ai valori  $t = k\pi$  del parametro. Dal punto di vista fisico si può dire che le due funzioni  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  rappresentano il moto di due punti che hanno traiettorie entrambe sulla stessa retta dello spazio, ma che vengono percorse in modo completamente diverso: uno è un moto sempre nello stesso verso e con velocità costante, l'altro un moto oscillante e con velocità continuamente variabile.

Tuttavia quando si ha un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  con le proprietà assegnate e si vuole cercarne una parametrizzazione, di solito si cerca una sorta di “parametrizzazione standard” o naturale, che sia, tra l'altro, semplice (con la possibile eccezione di un punto per le curve chiuse), e regolare. Un caso frequentissimo è quello delle curve grafico di funzioni reali di una variabile reale, definite in un intervallo  $I$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . In questo caso la parametrizzazione che si assume “di default” è la seguente:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Un altro caso è quello delle curve (di solito del piano o dello spazio) definite in forma implicita: di questo parleremo nei prossimi paragrafi.

Passiamo ora a trattare le superfici dello spazio. Come vedremo, si tratta, nella sostanza, di una estensione del concetto di curva che abbiamo appena introdotto.

Nel seguito del paragrafo  $K$  rappresenterà la chiusura di un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$ , insieme che chiameremo un *dominio*.

Sia  $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione, e poniamo  $\Sigma = \sigma(K)$ . La coppia  $(\sigma, \Sigma)$  si chiama una superficie dello spazio. Abituamente la funzione  $\sigma$  si chiama una *rappresentazione parametrica* o una *parametrizzazione* della superficie, mentre l'insieme immagine  $\Sigma$  si chiama *sostegno* della superficie.

Potremmo dire che una superficie è una coppia costituita da un sostegno (un sottoinsieme) di  $\mathbb{R}^3$  e un modo di parametrizzarlo.

In realtà l'assegnazione del sostegno non è indispensabile, in quanto si può ricavare come insieme immagine della funzione  $\sigma$ . Potremo dunque riferire il termine superficie anche alla sola funzione  $\sigma$ , senza dover precisare il sostegno. Si tenga invece sempre ben presente che non è sufficiente assegnare il sostegno per poter parlare di superficie (e la cosa è quasi evidente: ci possono essere infinite funzioni di  $K$  in  $\mathbb{R}^3$  che hanno un determinato sostegno).

La superficie si dice *semplice* se la corrispondenza tra i valori di  $K$  e di  $\Sigma$  è biunivoca, con la possibile eccezione per punti di cui almeno uno appartenga alla frontiera di  $K$ .

Una superficie si dice *di classe  $C^k$*  ( $k \geq 0$ ) se tale è la funzione<sup>(2)</sup>  $\sigma$ . La superficie si dice poi *regolare* se la matrice jacobiana

$$(17) \quad J_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

di  $\sigma$  ha rango 2 (quindi massimo).

Fissato  $(u_0, v_0)$  interno a  $K$ , le due curve  $\sigma(u, v_0)$  e  $\sigma(u_0, v)$ , ottenute fissando il valore di uno dei due parametri, si chiamano *linee coordinate* su  $\Sigma$ , passanti per  $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ . Si tratta, ovviamente, di linee tracciate sul sostegno della superficie, che possono essere usate come sistema di coordinate curvilinee sulla stessa.

I due vettori tangenti alle due linee coordinate in  $(u_0, v_0)$  sono ovviamente i vettori colonna della matrice jacobiana 17, calcolati in  $(u_0, v_0)$ : essi individuano, assieme al punto  $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ , il piano tangente alla superficie, mediante le sue equazioni parametriche. Indicheremo questi due vettori con  $\sigma_u(u_0, v_0)$  e  $\sigma_v(u_0, v_0)$ , il pedice stando a ricordare che il primo è ottenuto facendo le derivate rispetto a  $u$ , il secondo rispetto a  $v$ , delle tre funzioni componenti la  $\sigma$ .

Il vettore

$$(18) \quad \sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0)$$

è certamente non nullo e, sulla base delle proprietà del prodotto vettoriale, lo chiameremo *vettore normale* alla superficie. Anche questo vettore, assieme al punto  $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$  individua il piano tangente alla superficie (questa volta mediante la sua equazione cartesiana).

Anche in questo caso si ha spesso nelle applicazioni il problema di “parametrizzare” un dato sostegno: le difficoltà sono quelle già elencate per le curve (anzi sono molte di più!). Tuttavia, nel caso di grafici di funzioni  $f$  di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ , considereremo la seguente parametrizzazione come canonica:

$$(19) \quad \sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}.$$

Le superfici definite in forma implicita costituiranno oggetto dei prossimi paragrafi.

Prima di chiudere questo brevissimo riepilogo introduttivo ai concetti di curva in  $\mathbb{R}^n$  e di superficie in  $\mathbb{R}^3$  segnaliamo che, abitualmente, per le funzioni  $\gamma$  e  $\sigma$  si usano notazioni come le seguenti

$$(20) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases},$$

<sup>2</sup>Si tenga presente che ora le funzioni componenti sigma (sempre tre perché abbiamo considerato superfici di  $\mathbb{R}^3$ ) sono funzioni di due variabili, e quindi dovremo considerarne le derivate parziali.



rispettivamente per le curve del piano, per le curve dello spazio e per le superfici dello spazio. Queste notazioni, seppure possano creare confusione per l'identificazione tra il nome delle funzioni componenti e quelli delle variabili dipendenti, sono molto utili ed usate specialmente nelle applicazioni.

### 3 Curve piane in forma implicita

#### 3.1 Due esempi elementari

Consideriamo un'equazione lineare in due incognite

$$(21) \quad ax + by + c = 0, \quad \text{con } a, b \text{ e } c \text{ numeri reali qualunque,}$$

che sappiamo rappresentare una retta del piano cartesiano se  $a^2 + b^2 \neq 0$ , cioè se  $a$  e  $b$  non sono contemporaneamente nulli.

La (21) può essere vista come l'insieme (in questo caso proprio una linea nel senso ordinario del termine) di livello 0 della funzione<sup>(3)</sup>

$$(22) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = ax + by + c.$$

È immediato che si ha, per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(23) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b,$$

cioè che il gradiente di  $f$  in qualunque punto  $(x, y)$  del piano vale sempre<sup>(4)</sup>  $(a, b)$ . Dunque la condizione affinché la (21) rappresenti una retta si può anche scrivere

$$(24) \quad \nabla f(x, y) \neq \vec{0}.$$

Come ben sappiamo, se  $a \neq 0$  dalla (21) si può ricavare la  $x$  come funzione della  $y$  (ovvero *esplicitare* la  $x$ ):

$$(25) \quad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a} = h(y);$$

se invece  $b \neq 0$  sempre dalla (21) si può ricavare la  $y$  come funzione della  $x$  (ovvero *esplicitare* la  $y$ ):

$$(26) \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = g(x).$$

Detto in altri termini: se il gradiente di  $f$  è diverso da zero (non occorre qui precisare in quale punto in quanto il gradiente è costante), la retta può essere vista o come il grafico di una funzione della sola variabile  $x$  o come il grafico di una funzione della sola variabile  $y$ : precisamente se la derivata parziale rispetto a una delle due variabili è diversa da zero, allora si può vedere la retta come grafico di una funzione dell'altra variabile.

Detto ancora in altri termini, la retta si può vedere come il sostegno di una curva piana di uno dei due tipi seguenti (curve in forma cartesiana):

$$(27) \quad \gamma_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(y) = \begin{pmatrix} h(y) \\ y \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>Questa funzione ha come grafico un piano non verticale, cioè non parallelo all'asse delle  $z$ , nello spazio cartesiano  $Oxyz$ .

<sup>4</sup>Si ricordi che il vettore  $\vec{n} = (a, b)$  è perpendicolare alla retta di equazione (21) e si noti che allora tale proprietà è goduta anche dal gradiente di  $f$ : torneremo su questo fatto in seguito.

Come già osservato nel caso della circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , anche ora si potrebbe vedere la retta in numerosi altri modi (magari come unione di grafici di diverse funzioni), ma quello appena segnalato interessa in modo particolare, perché è, in un certo senso, un modo *naturale* di trattare la questione: le funzioni  $g$ , oppure  $h$ , ricavate dall'equazione (21) sono continue, anzi addirittura derivabili e, in un certo senso, sono le "più naturali".

Si può riassumere quanto detto nei seguenti termini.

Data la funzione di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = ax + by + c$ , se, per esempio, la derivata

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

è diversa da zero (cioè se  $b \neq 0$ ), allora si può esprimere la  $y$  come funzione derivabile di  $x$ ,  $y = g(x)$ , in modo che

$$(28) \quad f(x, g(x))$$

sia identicamente nulla su tutto  $\mathbb{R}$ . La funzione  $g$  costruita con questa tecnica si dice *funzione implicitamente definita* dall'equazione (21). Discorso simmetrico se invece è diversa da zero l'altra derivata parziale.

Se passiamo a considerare un'equazione come la

$$(29) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

e la funzione di due variabili il cui insieme di livello 0, diciamolo  $\mathcal{L}$  è dato dalle soluzioni dell'equazione (29), le cose si complicano un po', come abbiamo già visto sopra, e dovremo fare qualche adattamento. Supponiamo, tanto per fissare le idee, di voler *esplicitare* la  $y$ . Per questo calcoliamo, in analogia a quanto fatto nel caso della retta, la derivata di  $f$  rispetto a  $y$ , che ora non sarà più costante, ma dipenderà dal punto  $(x, y)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Questa derivata è diversa da zero in tutti i punti dove la  $y$  è diversa da zero. Tenendo conto di come è fatto il luogo  $\mathcal{L}$  (la circonferenza di centro l'origine e raggio 1), si tratterà dei punti diversi da  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ . Fissiamo allora un punto, per esempio  $(0, 1)$ , sul luogo  $\mathcal{L}$ , dove la derivata rispetto a  $y$  di  $f$  è diversa da zero. Tenendo conto delle osservazioni fatte nell'introduzione, potremo concludere che dall'equazione (29) si potrà ricavare *una sola* funzione  $g$  della variabile  $x$ , definita in  $[-1, 1]$ , ivi *continua* e addirittura *derivabile* in  $] - 1, 1[$ , il cui grafico *giaccia interamente* sul luogo  $\mathcal{L}$ , cioè tale che

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in [-1, 1],$$

con la *ulteriore condizione* che  $g(0) = 1$ , cioè che il grafico passi per il punto  $(0, 1)$  prima scelto. Si tratta precisamente della funzione

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

L'ultima condizione indicata è particolarmente importante perché, in sua mancanza, ci sarebbero due funzioni che soddisfano agli altri requisiti, precisamente  $g$  e  $-g$ .

Si noti, per concludere la trattazione di questi esempi elementari, che se avessimo scelto il punto  $(1, 0)$  nel quale la derivata di  $f$  rispetto a  $y$  si annulla, *non* sarebbe stato possibile ricavare la  $y$  come funzione della  $x$  dall'equazione (29): basta tenere conto di come è fatto il luogo  $\mathcal{L}$ . Si sarebbe però potuto procedere a ricavare la  $x$  come funzione della  $y$ , con considerazioni analoghe a quelle appena fatte.

### 3.2 Il teorema di Dini per le curve del piano

Passando ora ad una generica funzione  $f(x, y)$ , di cui vogliamo analizzare la curva di livello 0, dovremo fare ulteriori adattamenti, tra cui segnaliamo fin da subito i due seguenti, riservandoci di tornare di nuovo sull'argomento:

- non sarà in generale possibile trovare un'espressione analitica in termini di funzioni elementari per una funzione eventualmente definita implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y) = 0$ , nemmeno se la funzione  $f$  stessa è espressa in termini di funzioni elementari;
- non sarà in generale nemmeno possibile precisare il dominio di una funzione eventualmente definita implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y) = 0$ : saremo costretti ad accontentarci di un intorno (di cui non si potrà a priori stabilire l'ampiezza) di un opportuno punto.

Nonostante queste difficoltà, che sembrerebbero rendere addirittura inutile la trattazione che stiamo per fare, vedremo che sarà invece, in genere, possibile scrivere il polinomio di Taylor, di opportuno punto iniziale, della funzione eventualmente definita implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y) = 0$ : questo basta in molte circostanze per risolvere i problemi che si presentano.

Veniamo ora ad enunciare il teorema fondamentale, dovuto a Ulisse Dini, enunciato che daremo in una forma dettagliata per evidenziare i fatti importanti, anche se si potrebbe darne un enunciato più compatto. Nell'enunciato di questo teorema si ritroverà la generalizzazione di quanto sopra detto nei due casi particolari trattati.

**Teorema 1** (della funzione implicita, o di Dini, per le curve del piano). *Sia  $A$  un aperto non vuoto di  $\mathbb{R}^2$ , e  $f$  una funzione di  $A$  in  $\mathbb{R}$ , di classe  $C^1$ . Sia poi  $(x_0, y_0)$  un punto di  $A$  ove  $f(x_0, y_0) = 0$ , cioè un punto dell'insieme di livello 0 della funzione  $f$ . Se*

$$(30) \quad \nabla f(x_0, y_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con, per esempio,

$$(31) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $I$  di  $x_0$  e una funzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

1.  $(x, \varphi(x)) \in A, \forall x \in I$ ;
2.  $\varphi(x_0) = y_0$ ;
3.  $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in I$ ;
4.  $\varphi$  è di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. in un intorno di  $(x_0, y_0)$  l'insieme di livello 0 della funzione  $f$  coincide con il grafico della funzione  $\varphi$ .

Se, invece,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $I$  di  $y_0$  e una funzione  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

1.  $(\psi(y), y) \in A, \forall y \in I$ ;
2.  $\psi(y_0) = x_0$ ;
3.  $f(\psi(y), y) = 0, \forall y \in I$ ;
4.  $\psi$  è di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. in un intorno di  $(x_0, y_0)$  l'insieme di livello 0 della funzione  $f$  coincide con il grafico della funzione  $\psi$ .

Notiamo anche, in analogia a quanto già osservato sopra, che le due condizioni n.3 dell'enunciato si possono riscrivere affermando che esiste una funzione

$$(32) \quad \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad \text{oppure } \gamma(y) = \begin{pmatrix} \psi(y) \\ y \end{pmatrix}$$

tale che

$$(33) \quad f \circ \gamma(x) = 0, \quad \forall x \in I, \quad \text{oppure } f \circ \gamma(y) = 0, \quad \forall y \in I.$$

Il calcolo esplicito della derivata della funzione  $\varphi$  oppure della  $\psi$ , derivata certo esistente in base al teorema enunciato, si può fare applicando la regola sulla derivazione della funzione composta alla  $f \circ \gamma$ , che, essendo identicamente nulla in  $I$ , avrà anche derivata identicamente nulla in  $I$ . Si ha infatti, nel primo caso,

$$(34) \quad J_{f \circ \gamma}(x) = J_f(\gamma(x))J_\gamma(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(x))\varphi'(x),$$

ove possiamo notare che la matrice Jacobiana di  $f \circ \gamma$  ha una sola riga e una sola colonna (cioè è una derivata ordinaria di funzione di una variabile), in accordo con il fatto che  $f \circ \gamma$  è proprio una funzione di una sola variabile.

Uguagliando a zero e tenendo conto che la derivata parziale di  $f$  rispetto a  $y$  è diversa da zero in  $(x_0, y_0)$  e quindi, per la sua supposta continuità, anche in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , si ottiene

$$(35) \quad \varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(x))}.$$

Questa formula non fornisce grandi informazioni, in quanto l'espressione esplicita di  $\gamma(x)$  (o meglio della sua seconda componente  $\varphi(x)$ ) non è nota. Se però vogliamo calcolare questa derivata in  $x_0$ , allora non ci sono problemi, in quanto sappiamo che  $\gamma(x_0) = (x_0, y_0)$ , per cui otteniamo

$$(36) \quad \varphi'(x_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Se la  $f$  è di classe  $C^2$ , si può procedere alla derivazione della (35) e quindi si può trovare anche la  $\varphi''(x)$ , con le stesse problematiche già segnalate per  $\varphi'(x)$ ; anche in questo caso sarà però possibile calcolare  $\varphi''(x_0)$ ; se la funzione  $f$  è di classe  $C^n$  si potrà procedere con questo ragionamento fino ad ottenere la derivata  $n$ -esima di  $\varphi$ : tutto questo ci consente di ottenere il polinomio approssimante di Taylor della funzione  $\varphi$ , fino all'ordine  $n$ .

### 3.3 Curve di livello

Il teorema della funzione implicita ci permette in sostanza di concludere che l'insieme di livello 0 di una funzione reale di due variabili reali di classe  $C^1$ , nell'intorno di ogni punto in cui ha gradiente non nullo, è costituito dal sostegno di una curva regolare semplice (data dal grafico di una funzione di una delle due variabili): se ogni punto dell'insieme di livello 0 gode di questa proprietà, allora questo insieme di livello sarà costituito dall'unione di sostegni di curve regolari e semplici. Si parla in questo caso di *curva di livello*. Naturalmente non è affatto escluso che questo insieme di livello sia il sostegno anche di altre curve, non ottenute utilizzando il teorema di Dini. Per esempio, per

la funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , più volte considerata, è evidente che il suo insieme di livello 0 è anche il sostegno della curva regolare semplice e chiusa

$$\gamma(t): \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Questa osservazione è particolarmente importante in molte questioni, tra cui, per esempio, il calcolo dei massimi e minimi vincolati, come vedremo.

Supponiamo ora di voler considerare, per una funzione  $f$  reale di due variabili reali, un qualunque insieme di livello, cioè l'insieme dei punti  $(x, y)$  tali che  $f(x, y) = c$ , ove  $c$  è un valore appartenente all'immagine di  $f$ : parleremo ovviamente di "insieme di livello  $c$ ". Possiamo considerare la funzione

$$(37) \quad g(x, y) = f(x, y) - c,$$

anch'essa di classe  $C^1$ , e con lo stesso gradiente di  $f$ . Dunque ripetendo quanto detto sopra, possiamo concludere che qualunque insieme di livello per una funzione  $f$ , se costituito da punti ove il gradiente di  $f$  è non nullo, è l'unione di sostegni di curve regolari e semplici. Come prima, non è affatto escluso che questo insieme di livello sia anche il sostegno di altre curve, non ottenute utilizzando il teorema di Dini. In ogni caso si avrà, indicata genericamente con

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

la curva,

$$(38) \quad f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) = c.$$

Per derivazione della (38) si ottiene, calcolando le derivate nel punto  $(t_0)$  e  $\gamma(t_0)$ ,

$$(39) \quad J_{f \circ \gamma}(t_0) = 0 = J_f(\gamma(t_0))J_\gamma(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

La (39) dimostra la seguente importante proprietà delle curve di livello.

**Teorema 2.** *In un punto regolare<sup>(5)</sup> su una curva di livello di una funzione  $f$  reale di due variabili reali, di classe  $C^1$ , il gradiente della funzione è ortogonale alla curva di livello.*

È anche molto utile, ai fini di valutare il comportamento dei campi scalari in due variabili, tenere conto della seguente proprietà del gradiente.

Come è noto, per una funzione differenziabile (e una funzione di classe  $C^1$  è sicuramente differenziabile), si ha, per ogni versore  $\vec{v}$ ,

$$(40) \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v}.$$

Dunque, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$(41) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) \right| = |\nabla f(P_0) \cdot \vec{v}| \leq \|\nabla f(P_0)\| \|\vec{v}\| = \|\nabla f(P_0)\|,$$

ovvero

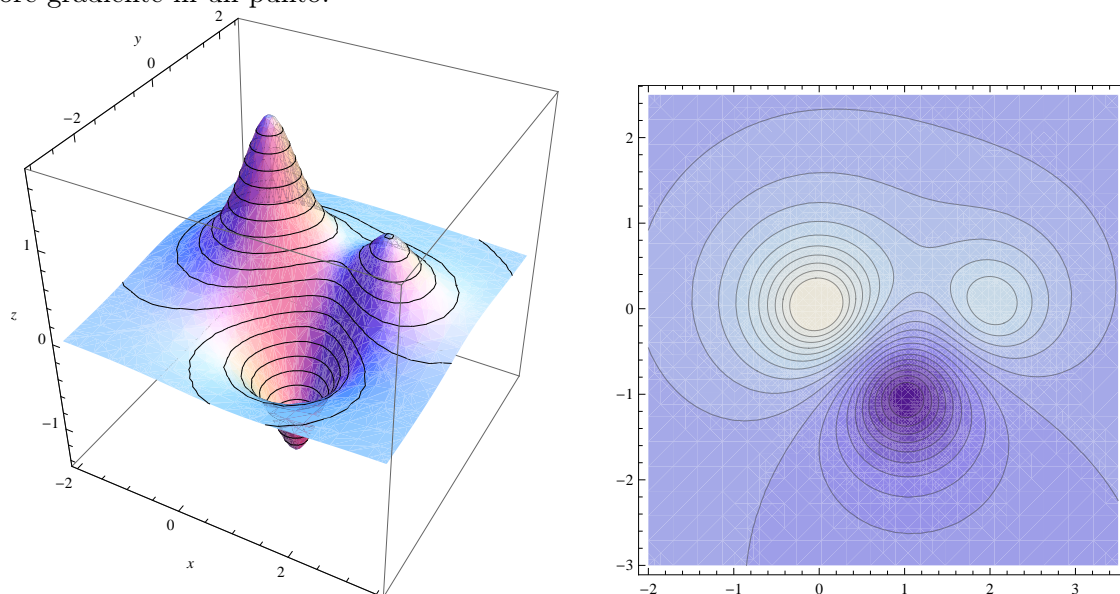
$$(42) \quad -\|\nabla f(P_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) \leq \|\nabla f(P_0)\|.$$

<sup>5</sup>Punto regolare significa punto in cui il gradiente è non nullo.

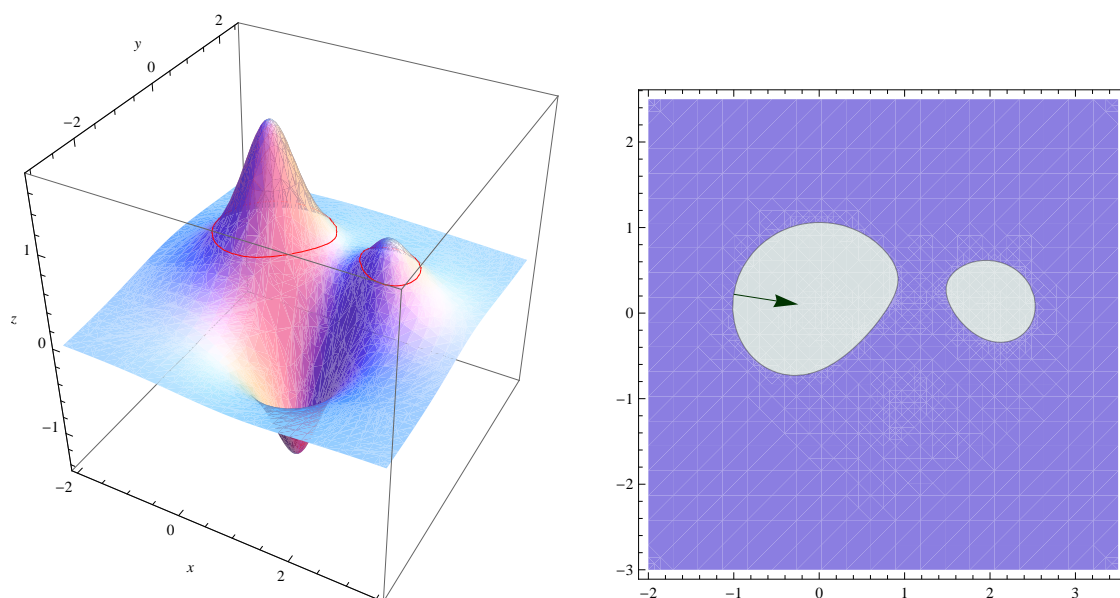
La formula si può leggere dicendo che in un punto  $P_0$  a gradiente non nullo, la massima crescita di una funzione, a partire da  $P_0$ , avviene nella direzione del gradiente, la massima decrescita nella direzione opposta al gradiente.

Tutte queste caratteristiche giustificano l'importanza del concetto di vettore gradiente introdotto per i campi scalari, in aggiunta al concetto di matrice jacobiana.

La figura 5 mostra una superficie con alcune curve di livello, disegnate sulla superficie nella figura di sinistra, proiettate sul piano  $Oxy$  nella figura di destra. La figura 6 mostra, per la stessa superficie, una particolare curva di livello, evidenziando, nella sua proiezione sul piano  $Oxy$ , il vettore gradiente in un punto.



**Figura 5** Superfici e curve di livello



**Figura 6** Curve di livello e gradiente

## 4 Superfici dello spazio in forma implicita

La trattazione contenuta in questo paragrafo è semplicemente un'estensione di quanto detto nel paragrafo precedente, con il passaggio da due a tre variabili: il lettore attento potrà notare che gran parte dei contenuti sono costruiti con un "copia e incolla", sottoposto a limitate modifiche, rispetto al paragrafo precedente.

### 4.1 Un esempio elementare

Consideriamo un'equazione lineare in tre incognite

$$(43) \quad ax + by + cz + d = 0, \quad \text{con } a, b, c \text{ e } d \text{ numeri reali qualunque,}$$

che sappiamo rappresentare un piano dello spazio cartesiano se  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , cioè se  $a, b$  e  $c$  non sono contemporaneamente nulli.

La (43) può essere vista come l'insieme (in questo caso una superficie nel senso ordinario del termine) di livello 0 della funzione<sup>(6)</sup>

$$(44) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = ax + by + cz + d.$$

È immediato che si ha, per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$(45) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = c,$$

cioè che il gradiente di  $f$  in qualunque punto  $(x, y, z)$  dello spazio vale sempre<sup>(7)</sup>  $(a, b, c)$ . Dunque la condizione affinché la (43) rappresenti un piano si può anche scrivere

$$(46) \quad \nabla f(x, y, z) \neq \vec{0}.$$

Come ben sappiamo, se  $a \neq 0$  dalla (43) si può ricavare la  $x$  come funzione della  $y$  e della  $z$  (ovvero *esplicitare* la  $x$ ):

$$(47) \quad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} = h(y, z);$$

se invece  $b \neq 0$  sempre dalla (43) si può ricavare la  $y$  come funzione della  $x$  e della  $z$  (ovvero *esplicitare* la  $y$ ):

$$(48) \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z - \frac{d}{b} = g(x, z);$$

se infine  $c \neq 0$  sempre dalla (43) si può ricavare la  $z$  come funzione della  $x$  e della  $y$  (ovvero *esplicitare* la  $z$ ):

$$(49) \quad z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c} = k(x, y);$$

Detto in altri termini: se il gradiente di  $f$  è diverso da zero (non occorre qui precisare in quale punto in quanto il gradiente è costante), il piano può essere visto o come il grafico di una funzione delle due variabili  $y$  e  $z$  o come il grafico di una funzione delle due variabili  $x$  e  $z$  o, infine, ome il

<sup>6</sup>Questa funzione, come tutte le funzioni di tre variabili, non può essere rappresentata in un grafico cartesiano, in quanto sarebbe necessario un sistema con quattro assi mutuamente ortogonali.

<sup>7</sup>Si ricordi che il vettore  $\vec{n} = (a, b, c)$  è perpendicolare al piano di equazione (43) e si noti che allora tale proprietà è goduta anche dal gradiente di  $f$ : torneremo su questo fatto in seguito.

grafico di una funzione delle due variabili  $x$  e  $y$ : precisamente se la derivata parziale rispetto a una delle tre variabili è diversa da zero, allora si può vedere il piano come grafico di una funzione delle altre due variabili.

Detto ancora in altri termini, il piano si può vedere come il sostegno di una superficie dello spazio di uno dei tre tipi seguenti (superfici in forma cartesiana):

$$(50) \quad \sigma_1(y, z) = \begin{pmatrix} k(y, z) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \sigma_2(x, z) = \begin{pmatrix} x \\ g(x, z) \\ z \end{pmatrix}, \quad \sigma_3(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ k(x, y) \end{pmatrix}.$$

Come già nel caso della retta nel piano, anche ora si potrebbe vedere il piano in numerosi altri modi (magari come unione di grafici di diverse funzioni), ma quello appena segnalato interessa in modo particolare, perché è, in un certo senso, un modo *naturale* di trattare la questione: le funzioni  $g$ ,  $h$ , oppure  $k$  ricavate dall'equazione (43) sono continue, anzi addirittura derivabili.

Si può riassumere quanto detto nei seguenti termini.

Data la funzione di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ , se, per esempio, la derivata

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$

è diversa da zero (cioè se  $c \neq 0$ ), allora si può esprimere la  $z$  come funzione derivabile di  $x$  e  $y$   $z = k(x, y)$ , in modo che

$$(51) \quad f(x, y, k(x, y))$$

sia identicamente nulla su tutto  $\mathbb{R}^2$ . La funzione  $k$  costruita con questa tecnica si dice *funzione implicitamente definita* dall'equazione (43). Discorsi simmetrici se invece sono diverse da zero l'una o l'altra delle due derivate parziali restanti.

## 4.2 Il teorema di Dini per le superfici dello spazio

Passando ora ad una generica funzione  $f(x, y, z)$ , di cui vogliamo analizzare la superficie di livello 0, dovremo fare ulteriori adattamenti, esattamente come nel caso delle curve del piano; segnaliamo, anche se si tratta sostanzialmente di una semplice ripetizione di quanto già detto, i due seguenti adattamenti, riservandoci di tornare di nuovo sull'argomento:

- non sarà in generale possibile trovare un'espressione analitica in termini di funzioni elementari per una funzione eventualmente definita implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = 0$ , nemmeno se la funzione  $f$  stessa è espressa in termini di funzioni elementari;
- non sarà in generale nemmeno possibile precisare il dominio di una funzione eventualmente definita implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = 0$ : saremo costretti ad accontentarci di un intorno, bidimensionale questa volta, e di cui non si potrà a priori stabilire l'ampiezza, di un opportuno punto.

Nonostante queste difficoltà, che sembrerebbero rendere addirittura inutile la trattazione che stiamo per fare, vedremo che sarà invece, in genere, possibile calcolare tutte le derivate che serviranno e scrivere il polinomio di Taylor, di opportuno punto iniziale, della funzione eventualmente definita implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = 0$ : questo basta in molte circostanze per risolvere i problemi che si presentano.

Enunciamo ora il teorema fondamentale, che non è altro che una estensione del contenuto del teorema 1, anche ora scrivendolo in forma molto dettagliata.



**Teorema 3** (della funzione implicita, o di Dini, per le superfici dello spazio). *Sia  $A$  un aperto non vuoto di  $\mathbb{R}^3$ , e  $f$  una funzione di  $A$  in  $\mathbb{R}$ , di classe  $C^1$ . Sia poi  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $A$  ove  $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ , cioè un punto dell'insieme di livello 0 della funzione  $f$ . Se*

$$(52) \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con, per esempio,

$$(53) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $I$  di  $(x_0, y_0)$  e una funzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

1.  $(x, y, \varphi(x, y)) \in A, \forall (x, y) \in I$ ;
2.  $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ ;
3.  $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in I$ ;
4.  $\varphi$  è di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  l'insieme di livello 0 della funzione  $f$  coincide con il grafico della funzione  $\varphi$ .

Se, invece,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $I$  di  $(y_0, z_0)$  e una funzione  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

1.  $(\psi(y, z), y, z) \in A, \forall (y, z) \in I$ ;
2.  $\psi(y_0, z_0) = x_0$ ;
3.  $f(\psi(y, z), y, z) = 0, \forall (y, z) \in I$ ;
4.  $\psi$  è di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  l'insieme di livello 0 della funzione  $f$  coincide con il grafico della funzione  $\psi$ .

Se, infine,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $I$  di  $(x_0, z_0)$  e una funzione  $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

1.  $(x, \xi(x, z), z) \in A, \forall (x, z) \in I$ ;
2.  $\xi(x_0, z_0) = y_0$ ;
3.  $f(x, \xi(x, z), z) = 0, \forall (x, z) \in I$ ;
4.  $\xi$  è di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  l'insieme di livello 0 della funzione  $f$  coincide con il grafico della funzione  $\xi$ .

Notiamo anche, in analogia a quanto già fatto nel caso piano e a quanto sopra osservato, che la prima delle condizioni n.3 dell'enunciato si può riscrivere affermando che esiste una funzione

$$(54) \quad \sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}$$

tale che

$$(55) \quad f \circ \sigma(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in I.$$

Analogo discorso per le altre due condizioni n.3 dello stesso enunciato.

Il calcolo esplicito delle derivate parziali della funzione  $\varphi$  (e analogo discorso per gli altri casi), derivate certo esistenti (e anzi addirittura continue) in base al teorema enunciato, si può fare applicando la regola sulla derivazione della funzione composta alla  $f \circ \sigma$ , che, essendo identicamente nulla in  $I$ , avrà anche derivate identicamente nulle in  $I$ , ovvero matrice jacobiana<sup>(8)</sup> (di 1 riga e 2 colonne, in quanto funzione di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ ) identicamente nulla.

$$\begin{aligned} J_{f \circ \sigma}(x, y) &= (0 \ 0) = J_f(\sigma(x, y)) J_\sigma(x, y) = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(x, y)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(x, y)) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(x, y)) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right). \end{aligned}$$

Da qui si trova facilmente

$$(56) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(x, y))} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

e

$$(57) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(x, y))} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Si possono a questo punto ripetere le osservazioni già fatte nel caso di curve del piano: queste formule in realtà non forniscono grandi informazioni, perché l'espressione esplicita di  $\sigma$  (o meglio della sua terza componente  $\varphi(x, y)$ ) non è nota. Se però si calcolano queste derivate in  $(x_0, y_0)$ , allora non ci sono problemi, in quanto sappiamo che  $\sigma(x_0, y_0) = (x_0, y_0, z_0)$ , per cui otteniamo

$$(58) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

### 4.3 Superfici di livello

Il teorema della funzione implicita ci permette in sostanza di concludere che l'insieme di livello 0 di una funzione reale di tre variabili reali di classe  $C^1$ , nell'intorno di ogni punto in cui ha gradiente non nullo, è costituito dal sostegno di una superficie regolare semplice (data dal grafico di una funzione di due delle tre variabili): se ogni punto dell'insieme di livello 0 gode di questa proprietà, allora questo insieme di livello sarà costituito dall'unione di sostegni di superfici regolari e semplici. Si parla in questo caso di *superficie di livello*. Naturalmente non è affatto escluso che questo insieme di livello sia il sostegno anche di altre curve, non ottenute utilizzando il teorema di Dini, esattamente come succedeva per il caso delle curve di livello: si pensi per esempio ad una funzione del tipo  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , le cui superfici di livello  $c$  (con  $c > 1$ ) sono sfere con centro nell'origine, che possono essere pensate come sostegno di superfici per esempio in forma polare.

<sup>8</sup>Come già osservato si preferisce in questo tipo di funzioni usare il gradiente, ma per applicare in maniera semplice il teorema sulla derivazione delle funzioni composte, conviene scrivere la matrice jacobiana.

Questa osservazione è particolarmente importante in molte questioni, tra cui, per esempio, il calcolo dei massimi e minimi vincolati, come vedremo.

Supponiamo ora di voler considerare, per una funzione  $f$  reale di tre variabili reali, un qualunque insieme di livello, cioè l'insieme dei punti  $(x, y, z)$  tali che  $f(x, y, z) = c$ , ove  $c$  è un valore appartenente all'immagine di  $f$ : parleremo ovviamente di "insieme di livello  $c$ ". Possiamo considerare la funzione

$$(59) \quad g(x, y, z) = f(x, y, z) - c,$$

anch'essa di classe  $C^1$ , e con lo stesso gradiente di  $f$ . Dunque ripetendo quanto detto sopra, possiamo concludere che qualunque insieme di livello per una funzione  $f$ , se costituito da punti ove il gradiente di  $f$  è non nullo, è l'unione di sostegni di superfici regolari e semplici. Come prima, non è affatto escluso che questo insieme di livello sia anche il sostegno di altre superfici, non ottenute utilizzando il teorema di Dini. In ogni caso si avrà, indicata genericamente con

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ \xi(u, v) \end{pmatrix}$$

la superficie,

$$(60) \quad f \circ \sigma(u, v) = f(\sigma(u, v)) = c.$$

Per derivazione della (60) si ottiene, calcolando le derivate nel punto  $(u_0, v_0)$  e  $\sigma(u_0, v_0)$ ,

(61)

$$\begin{aligned} J_{f \circ \sigma}(u_0, v_0) &= (0, 0) = J_f(\sigma(u_0, v_0)) J_\sigma(u_0, v_0) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(u_0, v_0)) & \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(u_0, v_0)) & \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(u_0, v_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \xi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \xi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se uguagliamo ora a zero, separatamente, le due colonne della matrice jacobiana del prodotto indicato nella formula (61) otteniamo

$$(62) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(u_0, v_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(u_0, v_0)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(u_0, v_0)) \frac{\partial \xi}{\partial u}(u_0, v_0) = 0;$$

e

$$(63) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(u_0, v_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(u_0, v_0)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\sigma(u_0, v_0)) \frac{\partial \xi}{\partial v}(u_0, v_0) = 0.$$

Le (62) e (63) dimostrano, rispettivamente, che il gradiente di  $f$  è perpendicolare alla linea coordinata  $u$  e alla linea coordinata  $v$  tracciate sulla superficie di livello, dal che si conclude la seguente importante proprietà delle superfici di livello, analoga alla proprietà già segnalata per le curve di livello di una funzione reale di due variabili reali.

**Teorema 4.** *In un punto regolare su una superficie di livello di una funzione  $f$  reale di tre variabili reali, di classe  $C^1$ , il gradiente della funzione è ortogonale alla superficie di livello.*

## 5 Curve dello spazio in forma implicita

La trattazione contenuta in questo paragrafo è conseguenza di quanto detto nel paragrafo precedente: ora si considererà un sistema di due equazioni in tre incognite, anziché una sola equazione. Vedremo come si devono adattare i risultati già ottenuti per trattare questo nuovo caso.

### 5.1 Un esempio elementare

Consideriamo un sistema di due equazioni lineari in tre incognite

$$(64) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{con } a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \text{ numeri reali qualunque,}$$

sistema che sappiamo rappresentare una retta dello spazio cartesiano se e solo se

$$(65) \quad \text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2,$$

cioè se e solo se le due equazioni del sistema (64) rappresentano effettivamente due piani, e se essi non sono paralleli.

La retta sarà ora l'intersezione delle superfici di livello 0 delle due funzioni

$$(66) \quad \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ f_2(x, y, z) &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \end{aligned}$$

ovvero il luogo dei punti dello spazio ove per la funzione

$$(67) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f = (f_1, f_2)$$

si ha<sup>(9)</sup>

$$(68) \quad f(x, y, z) = (0, 0).$$

La condizione (66) si può scrivere, usando la funzione  $f$ , e ripetendo gli stessi calcoli già fatti nel caso delle superfici in forma implicita,

$$(69) \quad \text{rg}(J_f) = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = 2,$$

ove non occorrerà precisare il punto in cui la matrice jacobiana è calcolata, essendo essa costante in  $\mathbb{R}^3$ .

Il fatto che il rango della matrice (66), oppure della matrice (69), sia 2, significa che uno dei suoi tre minori di ordine 2 è non nullo. Se, per esempio, si ha

$$(70) \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

allora, riscritto il sistema (64) nella forma

$$(71) \quad \begin{cases} b_1y + c_1z = -d_1 - a_1x \\ b_2y + c_2z = -d_2 - a_2x \end{cases},$$

<sup>9</sup>Insieme che, naturalmente, potremmo anche scrivere come  $f^{-1}(\{(0, 0)\})$ .

e applicata la regola di Cramer, si possono ricavare la  $y$  e la  $z$  in funzione di  $x$ :

$$(72) \quad y = g(x), \quad z = h(x).$$

Detto in altri termini, la retta può essere vista come il sostegno di una curva semplice e regolare dello spazio:

$$(73) \quad \gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

Discorsi analoghi se invece è diverso da zero uno degli altri due minori della matrice (66).

Si può riassumere quanto detto nei seguenti termini.

Data la funzione<sup>(10)</sup>  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z + d_1, a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = (f_1, f_2)$ , se, per esempio, si ha

$$(74) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0,$$

allora si possono esprimere la  $y$  e la  $z$  come funzioni (derivabili) di  $x$ ,  $y = g(x)$  e  $z = h(x)$ , in modo che

$$(75) \quad f(x, g(x), h(x)) = (0, 0)$$

su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Le funzioni  $g$  e  $h$  si dicono *implicitamente definite* dal sistema di equazioni (64). Discorsi analoghi se è diverso da zero uno degli altri due minori della matrice jacobiana di  $f$ .

## 5.2 Il teorema di Dini per le curve dello spazio

Passando ora ad una generica funzione  $f = (f_1, f_2): A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , di cui vogliamo analizzare l'insieme dei punti ove  $f(x, y, z) = (0, 0)$ , dovremo fare ulteriori adattamenti, esattamente come nei due casi già trattati. Anche se si tratta di una ripetizione di osservazioni già ampiamente discusse, preferiamo ripetere qui i due più rilevanti, per la loro importanza.

- non sarà in generale possibile trovare un'espressione analitica in termini di funzioni elementari per le due funzioni di una variabile eventualmente definite implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = (0, 0)$ , nemmeno se la funzione  $f$  stessa è espressa in termini di funzioni elementari;
- non sarà in generale nemmeno possibile precisare il dominio delle due funzioni di una variabile eventualmente definite implicitamente da un'equazione del tipo  $f(x, y, z) = (0, 0)$ : saremo costretti ad accontentarci di un intorno (di cui non si potrà a priori stabilire l'ampiezza) di un opportuno punto.

Enunciamo ora il teorema fondamentale, che non è altro che una estensione del contenuto dei teoremi già visti nei casi precedenti, questa volta limitandoci a considerare in dettaglio solo uno dei casi possibili.

<sup>10</sup>Trattandosi di una funzione a valori in  $\mathbb{R}^2$ , l'output della funzione è un vettore e quindi si dovrebbe scrivere, più propriamente,

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Tuttavia scriveremo sempre, invece,  $f = (f_1, f_2)$ , senza l'indicazione esplicita del simbolo di trasposto.

**Teorema 5** (della funzione implicita, o di Dini, per le curve dello spazio). *Sia  $A$  un aperto non vuoto di  $\mathbb{R}^3$ , e  $f = (f_1, f_2)$  una funzione di  $A$  in  $\mathbb{R}^2$ , di classe  $C^1$ . Sia poi  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un punto di  $A$  ove  $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$ , cioè un punto appartenente all'intersezione degli insiemi di livello 0 delle due funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$ . Se*

$$(76) \quad \text{rg}(J_f)(P_0) = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(P_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix} = 2,$$

con, per esempio,

$$(77) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0,$$

allora esistono un intorno  $I$  di  $x_0$  e due funzioni  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che:

1.  $(x, \varphi(x), \psi(x)) \in A, \forall x \in I$ ;
2.  $\varphi(x_0) = y_0 \wedge \psi(x_0) = z_0$ ;
3.  $f(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0, \forall x \in I$ ;
4.  $\varphi$  e  $\psi$  sono di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. detta  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione  $g = (\varphi, \psi)$ , in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  l'insieme dei punti ove per la funzione  $f$  si ha  $f(x, y, z) = (0, 0)$  coincide con il grafico della funzione  $g$ .

Notiamo anche, in analogia a quanto già fatto nei due casi precedenti, che la condizione n.3 dell'enunciato si può riscrivere affermando che esiste una funzione

$$(78) \quad \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$$

tale che

$$(79) \quad f \circ \gamma(x) = (0, 0), \quad \forall x \in I.$$

Il calcolo esplicito della derivata delle due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$ , derivata certo esistente (e anzi addirittura continua) in base al teorema enunciato, si può fare applicando la regola sulla derivazione della funzione composta alla  $f \circ \gamma$ , che dovrà avere matrice jacobiana identicamente nulla in  $I$ .

$$\begin{aligned} J_{f \circ \gamma}(x) &= J_f(\gamma(x)) J_\gamma(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\gamma(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\gamma(x)) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\gamma(x))\varphi'(x) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\gamma(x))\psi'(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma(x)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\gamma(x))\varphi'(x) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma(x))\psi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ottiene dunque il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\gamma(x)) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\gamma(x))\varphi'(x) + \frac{\partial f_1}{\partial z}(\gamma(x))\psi'(x) = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma(x)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\gamma(x))\varphi'(x) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma(x))\psi'(x) = 0 \end{cases},$$

che risolto con la regola di Cramer fornisce

$$(80) \quad \varphi'(x) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\gamma(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\gamma(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma(x)) \end{vmatrix}} \quad \psi'(x) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial x}(\gamma(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(\gamma(x)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\gamma(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(\gamma(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma(x)) \end{vmatrix}}.$$

Come già osservato nei casi precedenti, le formule (80) forniscono effettivamente i valori delle due derivate solo in corrispondenza di  $x_0$ , in quanto, in generale, non sono note le espressioni analitiche di  $\varphi$  e  $\psi$ , ovvero della seconda e terza componente di  $\gamma$ .

È appena il caso di segnalare che se è diverso da zero uno degli altri due minori della matrice (76), allora si potranno esprimere  $x$  e  $z$  in funzione di  $y$ , oppure  $x$  e  $y$  in funzione di  $z$ , a seconda dei casi, ma nulla cambia nella sostanza.

## 6 Il caso generale

Prima di passare al caso generale riepiloghiamo i tre casi trattati, dando loro una forma che sia facilmente estendibile a situazioni più complesse, forma in ogni caso utile per compattare i risultati ottenuti.

Considerata una funzione definita in  $\mathbb{R}^n$  (finora solo  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ ) e a valori in  $\mathbb{R}^m$  (finora solo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{R}^2$ ), abbiamo ricavato *una* delle tre variabili in funzione dell'altra o delle altre due, se la funzione era a valori in  $\mathbb{R}$  (cioè in  $\mathbb{R}^1$ ), *due* delle tre variabili in funzione della terza, se la funzione era a valori in  $\mathbb{R}^2$ . Per uniformare le notazioni indicheremo con  $x_1$ , oppure  $(x_1, x_2)$  le variabili che rimangono "libere" o indipendenti, con  $y_1$ , o  $(y_1, y_2)$  le variabili che, dopo esplicitazione, diventano dipendenti. Osserviamo che il numero delle variabili dipendenti coincide con la dimensione dello spazio di arrivo, cioè  $m$  (nei casi trattati due o tre), mentre le variabili indipendenti sono le residue, cioè in numero di  $n - m$ . Posto  $n - m = p$ , indicheremo con  $\mathbb{R}^{p+m}$ , anziché con  $\mathbb{R}^n$  lo spazio di partenza e quindi con

$$(81) \quad f: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

la funzione oggetto di indagine. L'equazione, o le equazioni, che definiscono implicitamente una o più (per ora solo due) funzioni si possono di conseguenza scrivere

$$(82) \quad f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_m) = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{m \text{ componenti}}$$

I tre casi considerati si riassumono come segue.

**Caso delle curve del piano**

Data  $f: \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , da  $f(x_1, y_1) = 0$  abbiamo ricavato  $y_1 = \varphi(x_1)$ .

**Caso delle superfici dello spazio**

Data  $f: \mathbb{R}^{2+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , da  $f(x_1, x_2, y_1) = 0$  abbiamo ricavato  $y_1 = \varphi(x_1, x_2)$ .

**Caso delle curve dello spazio**

Data  $f: \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , da  $f(x_1, y_1, y_2) = (0, 0)$  abbiamo ricavato  $y_1 = \varphi_1(x_1)$  e  $y_2 = \varphi_2(x_1)$ .

Detto in altri termini, in ciascuno dei casi considerati abbiamo potuto costruire una funzione

$$(83) \quad \gamma: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(una curva nel caso  $p = 1$ , una superficie nel caso  $p = 2$ ), il cui sostegno (cioè la cui immagine) descrive completamente (almeno nell'intorno di un punto opportuno) l'insieme dei punti soluzione di un'equazione del tipo (82). Questa funzione risulta così definita, nei tre casi considerati.

$$(84) \quad \gamma(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi(x_1) \end{pmatrix}, \quad \gamma(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad \gamma(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_1) \end{pmatrix}.$$

Le condizioni di regolarità via via imposte alla funzione  $f$  si possono riassumere dicendo che la funzione  $f$  deve essere di classe  $C^1$  e che la sua matrice jacobiana deve avere, nel punto  $P_0$  oggetto di indagine, rango massimo, cioè uguale a  $m$ .

La formulazione del teorema di Dini per il caso generale è ora solo una questione di riscrittura di uno dei teoremi già considerati, con le notazioni appena introdotte. Per un'ulteriore semplificazione della scrittura, indichiamo con  $(\vec{x}, \vec{y})$  un generico punto di  $\mathbb{R}^{p+m}$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ .

**Teorema 6** (della funzione implicita, o di Dini). *Sia*

$$fA \subseteq: \mathbb{R}^{p+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = (f_1(\vec{x}, \vec{y}), \dots, f_m(\vec{x}, \vec{y}))$$

una funzione di classe  $C^1$ , definita in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^{p+m}$ . Sia poi  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  un punto di  $A$  ove

$$f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Sia inoltre  $J_{f,y}(\vec{x}, \vec{y})$  la matrice jacobiana (di tipo  $m \times m$ ) della  $f$ , relativa alle variabili  $\vec{y}$ , ovvero

$$J_{f,y}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}.$$

Se  $J_{f,y}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  è non singolare<sup>(11)</sup>, allora esistono un intorno  $I$  di  $\vec{x}_0$  e una funzione  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  tali che:

1.  $(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) \in A, \forall \vec{x} \in I$ ;
2.  $\varphi(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ ;
3.  $f(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) = 0, \forall \vec{x} \in I$ ;

<sup>11</sup>Questo implica che la matrice jacobiana di  $f$ , rispetto a tutte le variabili, ha rango massimo, cioè uguale a  $m$ . Abbiamo considerato solo il minore  $J_{f,y}$ , cioè quello costituito dalle ultime  $m$  colonne di  $J_f$ , perché abbiamo supposto di riordinare le variabili in modo che quelle da esplicitare siano sempre le ultime  $m$ , come più sopra osservato.



4.  $\varphi$  è di classe  $C^1$  in  $I$ ;
5. in un intorno di  $(\vec{x}_0, \vec{x}_0)$  l'insieme degli zeri di  $f$  coincide con l'insieme  $\{(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) \mid \vec{x} \in I\}$ , cioè con il grafico della funzione  $\varphi$ .

La determinazione della matrice jacobiana della funzione  $\varphi$  (cioè delle sue derivate parziali) si fa come nei casi trattati precedentemente, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte.

## 7 Massimi e minimi vincolati per campi scalari

Per le funzioni a valori in  $\mathbb{R}$  un problema di grande importanza è quella della ricerca dei punti di massimo e minimo e dei corrispondenti valori massimo e minimo (relativi o assoluti) sul dominio, o su particolari sottoinsiemi del dominio. Se l'insieme in cui si esegue la ricerca è un aperto, si parla di massimi o minimi *liberi* e la loro ricerca si può fare, almeno per funzioni due volte differenziabili, con il teorema di Fermat (cioè con la ricerca di punti a gradiente nullo) e con l'uso della matrice Hessiana (anche se, come è ben noto, il teorema di Fermat fornisce solo una condizione necessaria e il test della matrice Hessiana fornisce solo una condizione sufficiente<sup>(12)</sup>).

Nel caso in cui interessi la ricerca su insiemi non aperti, il problema può diventare molto complesso, anche per funzioni opportunamente regolari. Siamo qui interessati alla situazione, di grande interesse applicativo, in cui l'insieme su cui ricercare gli estremi, insieme che chiameremo *insieme ammissibile*, sia definito come l'insieme dei punti del dominio di  $f$  che soddisfano una o più equazioni o disequazioni, dette *vincoli*. Parleremo di *vincoli bilaterali* nel caso di equazioni, di *vincoli unilaterali* nel caso sia presente almeno una disequazione. Ci occuperemo nel seguito solo di vincoli bilaterali e richiederemo che le equazioni che individuano l'insieme ammissibile soddisfino le ipotesi previste dai teoremi di Dini.

Come sempre, cominceremo con l'analisi di alcuni casi particolari, prima di giungere a una formulazione generale.

### Caso di funzioni di due variabili con un vincolo

Sia

$$(85) \quad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe  $C^1$  e sia

$$(86) \quad g(x, y) = 0$$

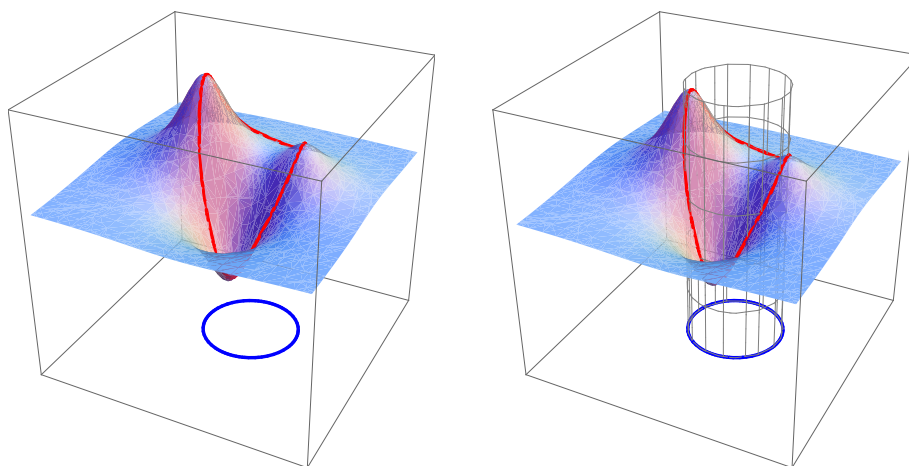
un'equazione in due incognite. Sia poi  $\Gamma$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione (86). Se  $A \cap \Gamma \neq \emptyset$ , diremo che  $g(x, y) = 0$  è un *vincolo* per  $f$ , e un punto di massimo o minimo per  $f|_{\Gamma}$  lo diremo di massimo o minimo *vincolato*.

In opportune condizioni di regolarità, si tratta di trovare i massimi e minimi di  $f$  su una curva piana tracciata nel dominio bidimensionale di  $f$ , anziché su tutto il suo dominio.

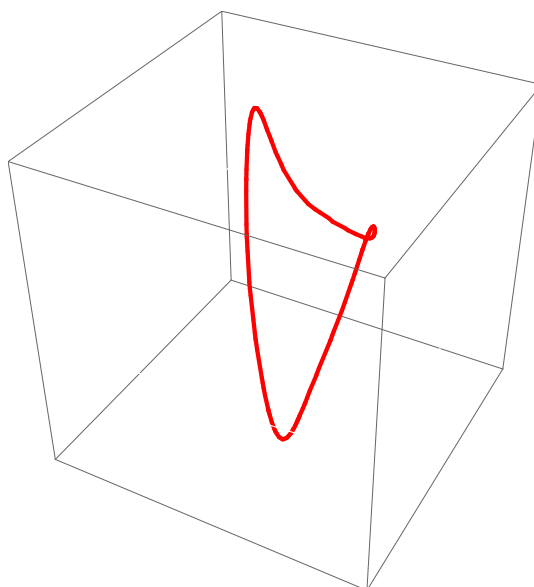
La figura 7 illustra un tipico esempio di questo caso; sulla destra è evidenziata anche la tecnica con cui si può ottenere la curva restrizione del grafico di  $f$  alla curva data da  $g(x, y) = 0$ . La figura 8 mostra solo il grafico della funzione  $f$  ristretta al "vincolo".

Se, per esempio, la superficie grafico della funzione  $f$  è visualizzabile come un profilo con due cime di montagna e una valle, la restrizione al vincolo può rappresentare un percorso stradale tracciato sopra questo profilo, come illustrato nelle figure 7 e 8.

<sup>12</sup>Attenzione: la condizione necessaria e quella sufficiente non possono essere "messe assieme" per ottenere una condizione necessaria e sufficiente!



**Figura 7** Un esempio di estremi vincolati



**Figura 8** Particolare della figura 7

### Caso di funzioni di tre variabili con un vincolo

Sia

$$(87) \quad f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe  $C^1$  e sia

$$(88) \quad g(x, y, z) = 0$$

un'equazione in tre incognite. Sia poi  $\Gamma$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione (88). Se  $A \cap \Gamma \neq \emptyset$ , diremo che  $g(x, y, z) = 0$  è un *vincolo* per  $f$ , e un punto di massimo o minimo per  $f|_{\Gamma}$  lo diremo di massimo o minimo *vincolato*.

In opportune condizioni di regolarità, si tratta di trovare i massimi e minimi di  $f$  su una superficie tracciata nel dominio tridimensionale di  $f$ , anziché su tutto il suo dominio.

### Caso di funzioni di tre variabili con due vincoli

Sia

$$(89) \quad f =: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe  $C^1$  e sia

$$(90) \quad \begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

un sistema di due equazioni in tre incognite. Sia poi  $\Gamma$  l'insieme delle soluzioni del sistema (90). Se  $A \cap \Gamma \neq \emptyset$ , diremo che  $g_1(x, y, z) = 0$  e  $g_2(x, y, z) = 0$  è una coppia di vincoli per  $f$ , e un punto di massimo o minimo per  $f|_{\Gamma}$  lo diremo di massimo o minimo *vincolato*.

In opportune condizioni di regolarità, si tratta di trovare i massimi e minimi di  $f$  su una curva dello spazio tracciata nel dominio tridimensionale di  $f$ , anziché su tutto il suo dominio.

### Il caso generale

Sia

$$(91) \quad f =: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe  $C^1$ ; sia poi

$$(92) \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m \text{ componenti}}), \quad \text{con } g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \leq n - 1,$$

un sistema di  $m$  equazioni in  $n$  incognite. Sia poi  $\Gamma$  l'insieme delle soluzioni del sistema (92). Se  $A \cap \Gamma \neq \emptyset$ , diremo che  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , è un insieme di vincoli per  $f$ , e un punto di massimo o minimo per  $f|_{\Gamma}$  lo diremo di massimo o minimo *vincolato*.

Il modo stesso con cui abbiamo esposto il problema suggerisce che la risoluzione del problema è legata all'uso del teorema di Dini, ed è in effetti quello che proveremo in quanto segue.

### 7.1 Il caso di un solo vincolo

**Teorema 7.** *Siano  $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di classe  $C^1$  nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  e  $P_0$  un punto regolare per  $g$  (cioè in cui il gradiente di  $g$  è non nullo). Allora, se  $P_0$  è punto di estremo per  $f$ , vincolato all'insieme  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , in  $P_0$  il gradiente di  $f$  e quello di  $g$  sono paralleli, ovvero esiste un unico  $\lambda$  tale che*

$$(93) \quad \nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla g(P_0).$$

La costante  $\lambda_0$  è detta moltiplicatore di Lagrange.

*Dimostrazione.* Proponiamo la dimostrazione solo nei casi  $n = 2$  e  $n = 3$ .

#### Caso $n = 2$

Nelle ipotesi fatte, il punto  $P_0$  è sull'insieme di livello 0 della funzione  $g$ , e le condizioni di regolarità imposte ci consentono di affermare che questo insieme è una curva,  $t \mapsto \gamma(t)$ , regolare e semplice, e che il gradiente di  $g$  è ortogonale a questa curva di livello, ovvero che

$$(94) \quad \nabla g(P_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0,$$

dove  $t_0$  è tale che  $P_0 = \gamma(t_0)$ .

D'altra parte la funzione  $f$  ha, per ipotesi, un estremo relativo se ristretta al sostegno di  $\gamma$ , ovvero la funzione  $f(\gamma(t))$  ha in  $t_0$  un estremo relativo, e quindi derivata nulla. Avendosi, come già più volte osservato,

$$\left( f(\gamma(t)) \right)' = \nabla f(P) \cdot \gamma'(t),$$

se ne deduce che

$$(95) \quad \nabla f(P_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0,$$

ovvero che anche il gradiente di  $f$  è ortogonale a  $\gamma'(t_0)$ , vettore non nullo per le ipotesi di regolarità fatte. Ciò basta per concludere la dimostrazione in questo caso.

Le figure 9 e 10 illustrano questa proprietà, visualizzando la superficie grafico di una funzione di due variabili, alcune linee di livello e il fatto che, in corrispondenza al massimo e al minimo, le linee di livello e la curva vincolo sono tra di loro tangenti; si noti comunque che ci può essere tangenza tra le due anche senza che ci sia un estremo, come mostra la parte destra della figura 10.

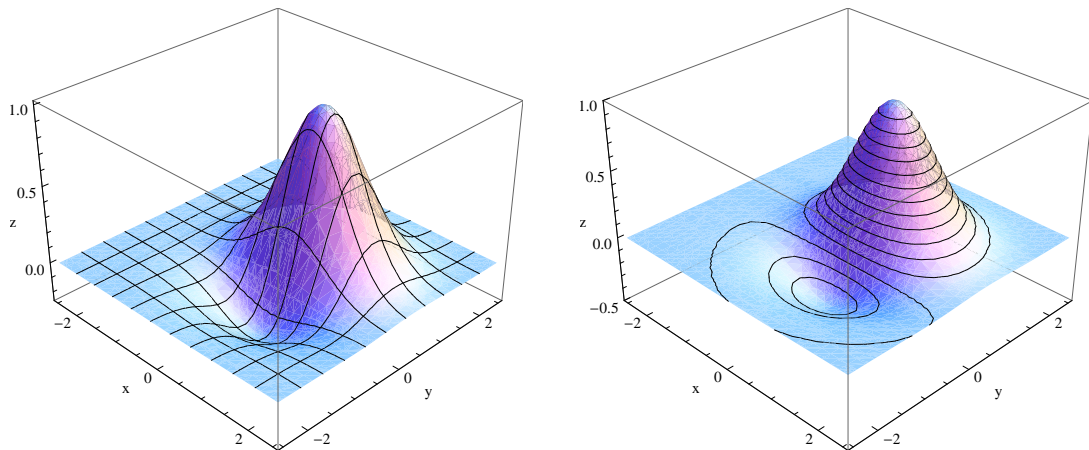


Figura 9 Una superficie  $e$ , a sinistra, alcune delle sue linee di livello

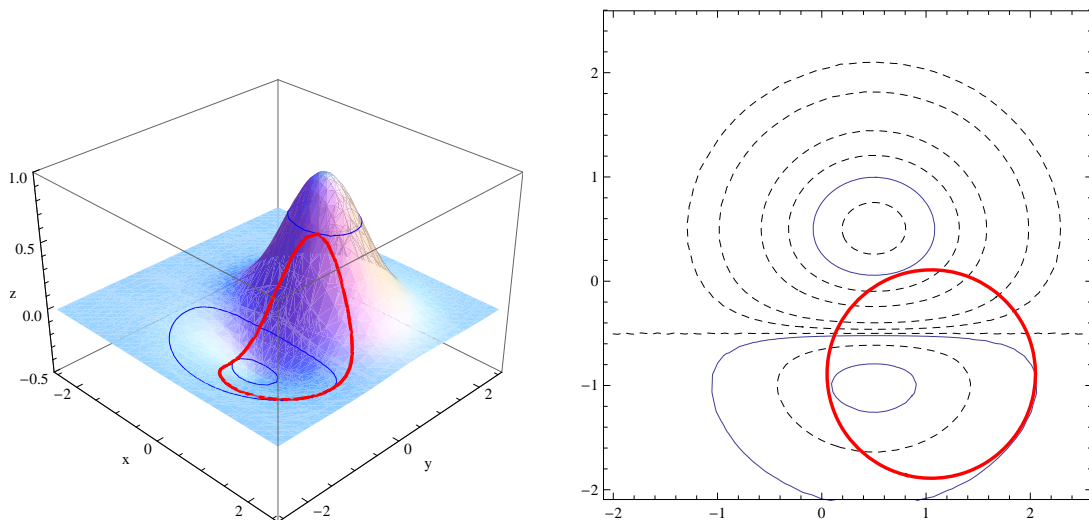


Figura 10 Estremi vincolati e tangenza tra linee di livello e vincolo

### Caso $n = 3$

Nelle ipotesi fatte il punto  $P_0$  è sull'insieme di livello 0 della funzione  $g$ , e le condizioni di regolarità imposte ci consentono di affermare che questo insieme è una superficie,  $(u, v) \mapsto \sigma(u, v) =$

$(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$ , regolare e semplice, e che il gradiente di  $g$  è ortogonale a questa superficie di livello. La funzione  $f$  ha inoltre per ipotesi, se ristretta al sostegno  $\sigma$  un estremo relativo in  $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ , ovvero la funzione  $f(\sigma(u, v))$  ha, in  $(u_0, v_0)$  un estremo relativo e quindi gradiente (e anche matrice jacobiana) nullo.

$$\begin{aligned} J_{f \circ \sigma}(u_0, v_0) &= J_f(P_0) J_\sigma(u_0, v_0) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Questo permette di concludere facilmente che  $\nabla f(P_0)$  è ortogonale alle due linee coordinate tracciate sul sostegno della superficie  $\sigma$  e quindi al piano tangente allo stesso sostegno, cioè, come prima, che  $\nabla f(P_0)$  è parallelo a  $\nabla g(P_0)$ .  $\square$

Si tenga ben presente che il teorema appena dimostrato esprime solo una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di estremo vincolato.

## 7.2 Il caso di più vincoli

Il caso di più vincoli richiede qualche maggiore attenzione, ma non è sostanzialmente diverso. Trattiamo in dettaglio il caso  $n = 3$  con 2 vincoli, come nell'equazione (90). In questo caso i due vincoli (sempre con le solite condizioni di regolarità che, a questo punto, possiamo sottintendere) definiscono, come già accennato, una curva di  $\mathbb{R}^3$ , e si devono trovare gli estremi di un funzione  $f$ , ristretta al sostegno di questa curva. Esattamente come fatto nel caso di 1 vincolo, possiamo concludere che il gradiente di  $f$  deve essere perpendicolare al vincolo in un punto di estremo, cioè deve stare sul piano normale alla curva per quel punto. D'altra parte questo piano normale è generato dai vettori gradienti delle due funzioni componenti il vincolo. Se ne deduce che il gradiente di  $f$  dovrà essere una combinazione lineare dei gradienti<sup>(13)</sup> delle due funzioni  $g_1$  e  $g_2$ :

$$(96) \quad \nabla f(P_0) = \lambda_{1_0} \nabla g_1(P_0) + \lambda_{2_0} \nabla g_2(P_0).$$

In generale si avrà dunque il seguente teorema.

**Teorema 8.** *Siano  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g = (g_1, \dots, g_m): A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$ , due funzioni di classe  $C^1$  definite in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Sia poi  $P_0$  un punto di estremo relativo per  $f$  sottoposta al vincolo  $g(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$  e dove  $g$  ha matrice jacobiana di rango massimo. Allora il gradiente di  $f$  in  $P_0$  è una combinazione lineare dei gradienti delle  $g_i$  in  $P_0$ , cioè esistono  $m$  costanti,  $\lambda_{1_0}, \lambda_{2_0}, \dots, \lambda_{m_0}$  tali che*

$$(97) \quad \nabla f(P_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_{i_0} \nabla g_i(P_0).$$

## 7.3 La funzione Lagrangiana

Riprendiamo in esame il teorema generale espresso mediante l'equazione (97), scrivendola per esteso, con l'esplicitazione dei gradienti mediante le derivate parziali.

<sup>13</sup>Essi sono linearmente indipendenti per le ipotesi di regolarità sul vincolo.

$$(98) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda_{10} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_{20} \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_{m0} \frac{\partial g_m}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Consideriamo ora la funzione, detta *funzione Lagrangiana*,

$$(99) \quad L: A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n).$$

È immediato che, per  $i = 1, 2, \dots, n$

$$(100) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \left( \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} \right),$$

mentre, per  $i = 1, 2, \dots, m$

$$(101) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -g_i(x_1, \dots, x_n).$$

Basta ora tenere conto delle (98) e del fatto che  $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$  sono le equazioni dei vincoli, per dedurre il seguente teorema.

**Teorema 9** (dei moltiplicatori di Lagrange). *Siano  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g = (g_1, \dots, g_m): A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$ , due funzioni di classe  $C^1$  definite in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Sia poi  $P_0$  un punto di estremo relativo per  $f$  sottoposta al vincolo  $g(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$  e dove  $g$  ha matrice jacobiana di rango massimo. Allora esistono  $m$  numeri  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0}$  tali che la funzione lagrangiana abbia, in  $(P_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \dots, \lambda_{m0})$ , gradiente nullo.*

## 7.4 Il metodo parametrico

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce, come già osservato, solo una condizione necessaria per la ricerca degli estremi vincolati di una funzione e si basa, sostanzialmente, sui teoremi di Dini relativi alle funzioni implicite. Purtroppo il teorema di Dini fornisce solo condizioni sufficienti per la scrittura dei vincoli in “forma esplicita”, senza dare indicazioni su come procedere per ottenere le effettive espressioni analitiche dei vincoli in forma esplicita. Nei casi in cui i vincoli non siano esplicitabili, il metodo dei moltiplicatori è l’unico applicabile per la risoluzione del problema.

In alcuni casi, anche di concreto interesse applicativo, l’insieme ammissibile dove calcolare gli estremi di una funzione  $f$  può invece essere espresso come immagine di una funzione,  $\varphi$ , di cui si conosce l’effettiva forma analitica, definita su un opportuno sottoinsieme,  $E$ , di  $\mathbb{R}^{n-m}$  ( $m$  è il numero dei vincoli). Altre volte lo stesso insieme può essere assegnato direttamente come immagine di una funzione del tipo citato.

In questi casi si può procedere a ricercare direttamente gli estremi di  $f \circ \varphi$ , che è una funzione di  $n - m$  variabili, definita in  $E$  e, se  $E$  è aperto, si applicheranno direttamente le tecniche previste per gli estremi liberi. In ogni caso il problema si ridurrà da un problema in  $n$  variabili a un problema in  $n - m$  variabili.

La cosa è particolarmente interessante quando  $n - m = 1$ , cioè quando l’insieme ammissibile può essere visto come immagine di un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$ : in questo caso la funzione composta è di una sola variabile e si possono applicare tutte le tecniche note. Questa situazione si presenta per funzioni  $f$  di due variabili in presenza di un solo vincolo, oppure di tre variabili in presenza di due vincoli. Molto frequente nelle applicazioni anche il caso in cui  $n - m = 2$ , in particolare quando  $f$  è una funzione di tre variabili e si è in presenza di un solo vincolo. In quest’ultimo caso la funzione

composta è di due variabili e, come è noto, il caso di due variabili è più semplice per quanto riguarda la discussione della segnatura della forma quadratica costruita con la matrice Hessiana.

Vediamo un esempio.

Sia  $f(x, y) = x^2 + y - 1$  e si vogliono trovare gli estremi di  $f$  ristretta al segmento (chiuso) di estremi  $A = (1, 0)$  e  $B = (0, 1)$ . Il segmento in questione può essere visto come il sostegno, per esempio, della seguente curva

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, 1 - t).$$

La funzione composta tra  $f$  e  $\gamma$  è:

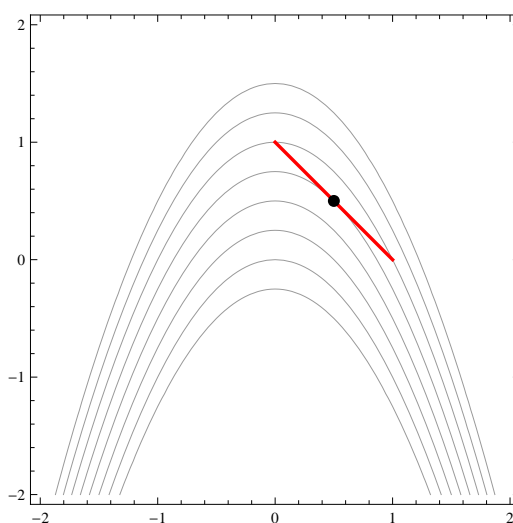
$$f \circ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\gamma(t)) = t^2 - t.$$

Questa funzione ha un minimo relativo interno al dominio in  $t = 1/2$ ; è immediato poi calcolarne i valori in questo punto di minimo e agli estremi del dominio. Si ottiene

$$f\left(\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \quad f(\gamma(0)) = f(0, 1) = 0; \quad f(\gamma(1)) = f(1, 0) = 0.$$

Se ne deduce che  $f$  ha, se ristretta al segmento  $AB$ , massimo in  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , minimo in  $(1/2, 1/2)$ , con i valori sopra riportati.

È interessante visualizzare il vincolo e le linee di livello della funzione  $f$  appena studiata, per controllare la validità della proprietà che in un punto di estremo, ove siano soddisfatte le condizioni di regolarità richieste, il vincolo e la relativa curva di livello sono tangenti: ciò succede per il punto  $(1/2, 1/2)$ . La figura 11 mostra alcune curve di livello e il vincolo. La curva tangente al vincolo è, naturalmente, quella a quota  $-1/4$ .



**Figura 11** *Un punto di estremo vincolato*

## 8 Osservazioni conclusive sulla ricerca dei punti di estremo

La ricerca dei punti di estremo relativo per una funzione definita in un insieme  $E$  di  $\mathbb{R}^n$  e a valori in  $\mathbb{R}$  è in genere problema delicato e complesso. Elenchiamo qui di seguito, a scopo riassuntivo, alcune cose da tenere presenti e alcune tecniche da utilizzare, desunte da quanto abbiamo detto nelle pagine precedenti e da quanto noto sulla ricerca degli estremi liberi, senza alcuna pretesa di completezza.

- Se l'insieme  $E$  è aperto e la funzione è due volte differenziabile in  $E$  si può applicare il teorema di Fermat e il teorema sulla segnatura della forma quadratica costruita con la matrice Hessiana, tenendo conto che, spesso, l'uso di questi teoremi non permette di concludere (il primo esprime solo una condizione necessaria, il secondo solo una condizione sufficiente).
- Se l'insieme  $E$  è chiuso, e la sua frontiera è esprimibile con delle equazioni di vincolo, magari in forma esplicita, si potranno applicare le tecniche indicate per i punti di estremo vincolato.
- Se ci sono dei punti dove non sono applicabili i teoremi studiati (funzioni non continue, o non differenziabili, oppure vincoli con punti dove le funzioni che li definiscono non sono regolari), bisognerà analizzarli separatamente.
- Si potrà tenere conto del fatto che se il dominio è un compatto e la funzione è continua, il massimo e il minimo assoluti esistono sicuramente.
- In particolare per le funzioni di 2 variabili un'indagine sulla forma delle curve di livello può risultare molto utile nella soluzione dei problemi di estremo (sia libero che vincolato).

Segnaliamo infine che anche per il problema degli estremi vincolati esistono condizioni del secondo ordine sulla funzione Lagrangiana (“Hessiano orlato”), ma non intendiamo qui occuparcene.

## 9 Un esercizio per concludere

Vogliamo mostrare su un esempio come l'applicazione del teorema di Dini permetta di trarre informazioni molto dettagliate sulle funzioni definite implicitamente da un'equazione o da un sistema di equazioni, anche se non è possibile trovare un'espressione analitica esplicita per quelle funzioni.

Si consideri l'equazione

$$f(x, y) = y^7 + 3y - 2xe^{3x} = 0,$$

e si verifichi che essa definisce implicitamente una funzione  $\varphi$ , di dominio  $\mathbb{R}$ , di cui si chiede un grafico il più possibile accurato.

Avendosi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2e^{3x}(1 + 3x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 7y^6 + 3,$$

possiamo notare che la derivata parziale rispetto a  $y$  è non nulla su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Sarà pertanto possibile esplicitare  $y$  in funzione di  $x$  nell'intorno di ogni punto di  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $y = \varphi(x)$  la funzione implicita. Si ha

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} = \frac{-2e^{3x}(1 + 3x)}{7(\varphi(x))^6 + 3}.$$

Dunque la funzione  $\varphi$  decresce per  $x < -1/3$ , cresce per  $x > -1/3$  e ha un minimo in corrispondenza a  $x = -1/3$ . Se  $x = 0$ , l'equazione data fornisce subito il valore  $y = 0$ , da cui si conclude che  $\varphi(0) = 0$ . Inoltre per  $x = -1/3$  la stessa equazione impone che  $y < 0$  e dunque il valore minimo è negativo: se ne potrà trovare un valore approssimato risolvendo numericamente l'equazione

$$y^7 + y + \frac{2}{3e} = 0.$$

Vediamo se possiamo trarre informazioni sul valore dei limiti a  $\pm\infty$ , certamente esistenti per la monotonia di  $f$  in un intorno di  $\pm\infty$ . Inoltre il limite a  $+\infty$  deve essere positivo, il limite a  $-\infty$  deve essere maggiore di  $\varphi(-1/3)$ . Osserviamo che deve aversi

$$(\varphi(x))^7 + 3\varphi(x) = 2xe^{3x},$$

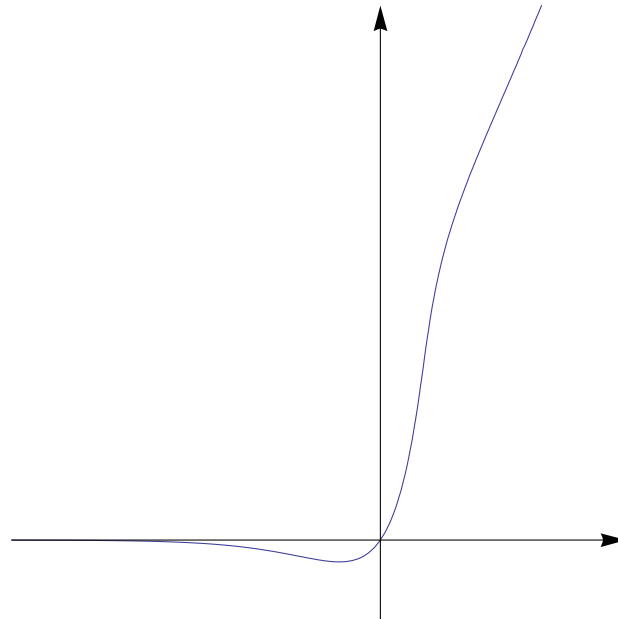
e che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{3x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{3x} = +\infty.$$



Se ne deduce subito che il limite della funzione a  $-\infty$  non può essere  $+\infty$  e che quello a  $+\infty$  deve essere  $+\infty$ . Detto  $l$  il limite (finito) per  $x$  tendente a  $-\infty$ , si deve avere  $l^7 + 3l = 0$ , da cui  $l = 0$ .

Non elementare invece la valutazione del segno della derivata seconda. Il grafico comprensivo dei risultati ottenuti (e di risultati ottenuti al computer mediante tecniche numeriche) è rappresentato nella figura 12.



**Figura 12** Esempio di grafico di una funzione implicita