Osservazioni sugli insiemi compatti

Luciano Battaia(*)

2 ottobre 2010

Questo articolo contiene, senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità, alcune osservazioni sugli insiemi compatti, a completamento del testo in uso per il corso di Analisi Matematica II, Università di Trieste, Sede di Pordenone, A.A. 2010/2011.

Indice

1 Insiemi compatti

Ci limiteremo a considerare solo spazi metrici, dove molte cose sono più semplici che non negli spazi topologici in genere.

Definizione 1 (Ricoprimento). *Dato un sottoinsieme X di uno spazio metrico E, diremo che una famiglia A_α, con α variabile in un opportuno insieme $\mathcal{A}$ di indici, di sottoinsiemi di E* ricopre *X se*

$$X \subseteq \bigcup_{a \in \mathcal{A}} A_\alpha ,$$

cosicché ogni punto di x è contenuto in qualche insieme della famiglia. Se gli A_α sono tutti aperti il ricoprimento di chiama aperto*.*

Esempio. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ con la metrica usuale. La famiglia di intervalli $]n - 2/3\, , \, n + 2/3[$, $n \in \mathbb{Z}$, costituisce un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Si noti che eliminando anche un solo intervallo non si ha più un ricoprimento di $\mathbb{R}$.

Esempio. Consideriamo di nuovo l'insieme $\mathbb{R}$ con la metrica usuale. La famiglia di intervalli illimitati (semirette) $]n, +\infty[$, $n \in \mathbb{Z}$, costituisce ancora un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Questa volta però posso tranquillamente eliminare anche un'infinità di elementi della famiglia (per esempio tutti quelli in cui $n \geq 0$), continuando ancora ad avere un ricoprimento aperto. In ogni caso se vogliamo un ricoprimento aperto con insiemi di questa famiglia, dovremo comunque prenderne infiniti.

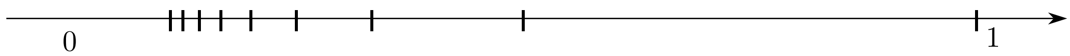
*http://www.batmath.it

Esempio. Sempre lavorando con l'insieme $\mathbb{R}$ con la metrica usuale, consideriamo la famiglia di sottoinsiemi $]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}$ a cui aggiungiamo l'intervallo $]-1, 1[$. Otteniamo così un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$, ma questa volta è evidente che se prendiamo solo gli insiemi $]-\infty, 0,$ $]-1, 1[$, $]0, +\infty[$, otteniamo ancora un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$, con insiemi della famiglia, ma costituito da un numero finito di elementi.

Esempio. Consideriamo ora il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (sempre con la metrica usuale)

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\},$$

che graficamente si può rappresentare come segue:



Se consideriamo un ricoprimento aperto costituito da intervalli che abbiano centro su ognuno dei punti di A, e si estendano a sinistra e a destra del centro fino alla metà della distanza tra due punti consecutivi, è chiaro che non potremo togliere dalla famiglia di intervalli del ricoprimento nemmeno un intervallo.

Se consideriamo invece l'insieme $B = A \cup \{0\}$ e aggiungiamo alla famiglia un intervallo del tipo $I_m =]-1/m, 1/m[$, con un qualunque valore positivo (anche molto grande) del naturale m, potremo ricoprire B con questa nuova famiglia, ma anche con la famiglia *finita* costituita da I_m e dagli intervalli precedenti che sono disgiunti da I_m.

Gli esempi proposti provano che, dato un ricoprimento aperto di un sottoinsieme di uno spazio metrico (o dell'intero spazio), a volte è possibile estrarre da questo ricoprimento un *sottoricoprimento* finito, a volte no. La cosa è della massima importanza nello studio delle proprietà topologiche e si dà la definizione seguente.

Definizione 2 (Insieme compatto). *Un sottoinsieme A di una spazio metrico si dice* compatto *se da* ogni *ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

Una prima proprietà di uso continuo è espressa dal seguente teorema.

Teorema 3. *Ogni sottoinsieme infinito di un insieme compatto ha almeno un punto di accumulazione.*

2 Insiemi compatti per successioni

Definizione 4 (Insiemi compatti per successioni). *Un sottoinsieme A di uno spazio metrico si dice* compatto per successioni *se da ogni successione di elementi di A si può estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento di A.*

Esempio. Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali, con la metrica usuale (indotta da quella di $\mathbb{R}$) e il sottoinsieme $A = [1, 3]$ (attenzione: solo i punti razionali di questo segmento!). La successione di punti

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

è tutta contenuta in A (come ben sappiamo!), ma nessuna sua sottosuccessione converge a un elemento di A (se fossimo in $\mathbb{R}$ convergerebbe ad e, ma e non è un razionale). Dunque questo insieme non è compatto per successioni.

Per gli spazi metrici la compattezza e la compattezza per successioni si equivalgono. Si dimostra infatti il seguente teorema.

Teorema 5. *Uno spazio metrico è compatto se, e soltanto se, è compatto per successioni.*

Conseguenza di questo teorema è che l'insieme $A = [1, 3] \subset \mathbb{Q}$ dell'esempio precedente non è compatto in $\mathbb{Q}$.

3 Il caso di $\mathbb{R}^n$

Il caso di $\mathbb{R}^n$ (e quindi in particolare di $\mathbb{R}$) è molto importante. In questo caso vale il seguente teorema.

Teorema 6. *Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Si badi bene che, come mostra l'esempio dell'insieme $[1, 3] \subset \mathbb{Q}$, questo non vale in tutti gli spazi metrici. In generale vale solo la proprietà che un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico è chiuso e limitato, non il viceversa.

Dunque in $\mathbb{R}^n$ decidere se un insieme è compatto è relativamente semplice.

4 Alcuni risultati importanti

Tra i tanti risultati importanti relativi ai compatti segnaliamo i seguenti.

Teorema 7 (di compattezza)**.** *Se f è un'applicazione continua di uno spazio metrico E in uno spazio metrico F (ciascuno con la sua distanza), e se K è un compatto di E, allora $f(K)$ è un compatto di F.*

Questo teorema ha come corollario il famoso teorema seguente.

Teorema 8 (di Weierstrass)**.** *Se f è un'applicazione continua di uno spazio metrico E in $\mathbb{R}$, e K è un compatto di E, allora f assume massimo e minimo in K.*

Teorema 9. *Se f è un'applicazione continua definita in uno spazio metrico E compatto e a valori in uno spazio metrico F, allora f è uniformemente continua.*