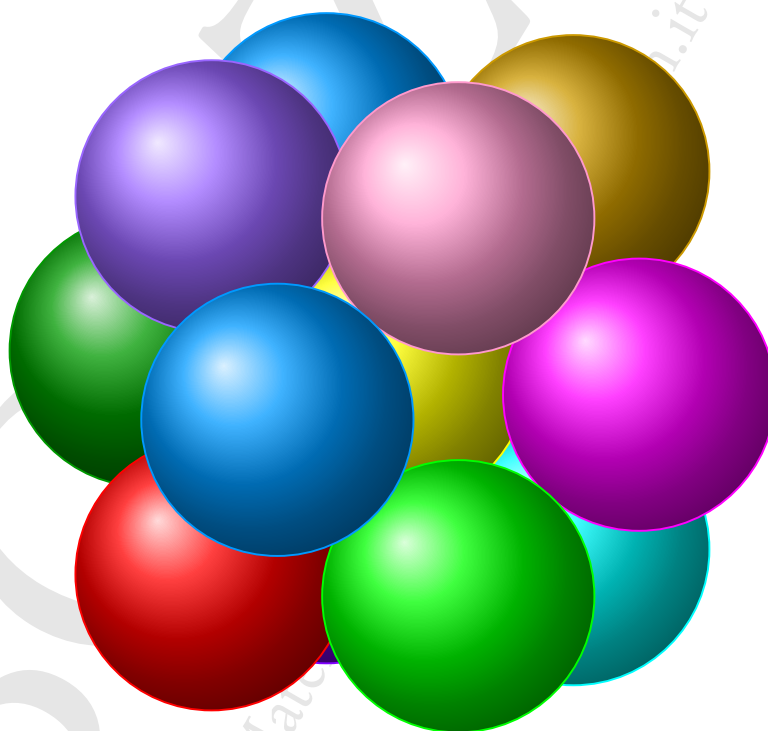


LUCIANO BATTAIA

FANTASTICI POLIEDRI

2 - Poliedri semiregolari e loro duali



www.batmath.it

Fantastici Poliedri

2 - Poliedri semiregolari e loro duali

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 22 maggio 2019

In copertina: Impacchettamento ottimale di tredici sfere sui vertici e al centro di un cubottaedro.

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>.

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

Attribuzione Devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale.

Non commerciale Non puoi usare il materiale per scopi commerciali.

Non opere derivate Se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, non puoi distribuire il materiale così modificato.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore usi di quest'opera in deroga da questa licenza.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013

Indice

Premessa [xxi](#)

Fascicoli pubblicati [xxiii](#)

- 1 Approfondimenti sulla dualità [1](#)
- 2 Poliedri semiregolari: prismi e antiprismi [9](#)
 - 2.1 Prismi e loro duali [9](#)
 - 2.2 Antiprismi e loro duali [13](#)
 - 2.2.1 Un antiprisma un po' speciale [15](#)
 - 2.2.2 Antiprismi non convessi [18](#)
- 3 Poliedri di Archimede: un po' di storia [19](#)
 - 3.1 Prima di Keplero [19](#)
 - 3.2 Keplero [28](#)
 - 3.3 Il poliedro di Miller [30](#)
- 4 Poliedri di Archimede e tetraedro circoscritto [33](#)
 - 4.1 Le caratteristiche dei solidi di Archimede [33](#)
 - 4.2 Il tetraedro circoscritto [35](#)
- 5 I solidi di Archimede mediante troncature [49](#)
 - 5.1 Troncature mediante semispazi [49](#)
 - 5.2 Troncatura ai vertici [53](#)
 - 5.2.1 Dal tetraedro al tetraedro troncato e all'ottaedro [53](#)
 - 5.2.2 Dal cubo al cubo troncato e al cubottaedro [55](#)
 - 5.2.3 Un poliedro intrecciato costruito per troncatura [55](#)
 - 5.2.4 Dall'ottaedro all'ottaedro troncato e al cubottaedro [57](#)
 - 5.2.5 Dal dodecaedro al dodecaedro troncato e all'icosidodecaedro [57](#)
 - 5.2.6 Dall'icosaedro all'icosaedro troncato e all'icosidodecaedro [59](#)
 - 5.3 Troncatura ai lati [61](#)
 - 5.3.1 Dal tetraedro al cubo [61](#)
 - 5.3.2 Dal cubo al dodecaedro rombico [62](#)
 - 5.3.3 Dall'ottaedro al dodecaedro rombico [62](#)
 - 5.3.4 Dal dodecaedro al triacontaedro rombico [64](#)

- 5.3.5 Dall'icosaedro al triacontaedro rombico 65
 - 5.4 Troncatura ai lati e ai vertici 67
 - 5.4.1 Dal tetraedro al cubottaedro e al tetraedro duale 68
 - 5.4.2 Dal cubo al rombicubottaedro e all'ottaedro 69
 - 5.4.3 Dall'ottaedro al rombicubottaedro e al cubo 70
 - 5.4.4 Rombicubottaedro: perché? 71
 - 5.4.5 Dal dodecaedro al rombicosidodecaedro e all'icosaedro 72
 - 5.4.6 Dall'icosaedro al rombicosidodecaedro e al dodecaedro 73
 - 5.4.7 Rombicosidodecaedro: perché? 74
 - 5.5 Troncatura ai lati e forte ai vertici 75
 - 5.5.1 Dal tetraedro all'ottaedro troncato e al tetraedro troncato 75
 - 5.5.2 Dal cubo al grande rombicubottaedro e all'ottaedro troncato 76
 - 5.5.3 Dall'ottaedro al grande rombicubottaedro e al cubo troncato 77
 - 5.5.4 Grande rombicubottaedro: perché? 78
 - 5.5.5 Dal dodecaedro al grande rombicosidodecaedro e all'icosaedro troncato 79
 - 5.5.6 Dall'icosaedro al grande rombicosidodecaedro e al dodecaedro troncato 80
 - 5.5.7 Grande rombicosidodecaedro: perché? 81
 - 5.6 Ancora sulla troncatura ai vertici 82
 - 5.7 Troncature del cubottaedro e dell'icosidodecaedro 85
 - 5.8 Troncature di poliedri mediante poliedri 88
 - 5.9 Riepilogo sulle troncature 91
 - 5.10 Osservazioni sui poliedri rombici 92
 - 5.11 I solidi di Steinmetz 99
- 6 Costruzione dei due solidi camusi 105
- 6.1 Il caso speciale del tetraedro 105
 - 6.2 Poliedri chirali 107
 - 6.3 Il cubo o ottaedro camuso 108
 - 6.4 Il dodecaedro o icosaedro camuso 110
 - 6.5 Una costruzione alternativa 112
- 7 Il metodo di espansione 115
- 7.1 Introduzione 115
 - 7.2 Espansione degli spigoli dei solidi platonici 116
 - 7.3 Espansione delle facce dei solidi platonici 117
 - 7.4 Contrazione di facce nei poliedri troncati 119
 - 7.5 Espansione di facce nel rombicubottaedro e nel rombicosidodecaedro 120
 - 7.6 Osservazioni 121
- 8 Sviluppi piani 123
- 8.1 Considerazioni generali 123
 - 8.2 Gli sviluppi dei poliedri archimedeei 125
- 9 Solidi di Catalan 131

- 9.1 Introduzione 131
- 9.2 Prima elevazione dei solidi platonici 133
- 9.3 Seconda elevazione dei solidi platonici 136
- 9.4 Elevazione del cubottaedro e dell'icosidodecaedro 138
- 9.5 L'esacisottaedro e l'esacicosaedro 139
- 9.6 L'icositetraedro e l'escontaedro pentagonali 141
- 9.7 Conclusioni 142

- 10 Tassellazioni semiregolari della sfera e dello spazio 143
 - 10.1 Tassellazioni archimedee 143
 - 10.2 Tassellazioni di Catalan 156
 - 10.3 Dualità e tassellazioni sulla sfera 169
 - 10.4 Tassellazioni di Catalan e tassellazioni regolari 171
 - 10.5 Tassellazioni dello spazio 177
 - 10.5.1 Tassellazione con ottaedri troncati 177
 - 10.5.2 Tassellazione con dodecaedri rombici 180
 - 10.5.3 Tassellazioni con più poliedri 183
 - 10.5.4 Tassellazioni coinvolgenti prismi 194

- A I dittatori nemici 197

- B Goldberg e variazioni 203
 - B.1 Introduzione 203
 - B.2 Esempi di sfere geodetiche 212
 - B.3 Esempi di poliedri di Goldberg 217
 - B.4 Un po' di numeri 219
 - B.5 Poliedri a simmetria tetraedrica e ottaedrica 221
 - B.6 Fullereni 223

- C Curiosità sul cubottaedro 225
 - C.1 Impacchettamento di tredici sfere 225
 - C.2 Decomposizioni del cubottaedro 229
 - C.3 Dal cubottaedro ai solidi platonici 232

- Bibliografia 239

- Indice analitico 241

Elenco delle figure

- 1.1 Costruzione della polare di un punto rispetto ad una circonferenza 1
- 1.2 Costruzione del piano polare di un punto rispetto a una sfera 2
- 1.3 Costruzione di un duale di una bipyramide irregolare 2
- 1.4 Un duale della bipyramide irregolare della figura 1.3 3
- 1.5 Un diverso duale della bipyramide della figura 1.3 3
- 1.6 Il duale di un cubo a partire dalla sfera circoscritta 4
- 1.7 Il duale di un cubo a partire dalla sfera inscritta 5
- 1.8 Costruzione del duale di un cubo con il metodo di Dorman Luke: schema della costruzione 6
- 1.9 Il duale di un cubo costruito con il metodo di Dorman Luke 6
- 1.10 Confronto tra tre facce corrispondenti degli ottaedri duali di un cubo costruiti a partire dalle tre sfere caratteristiche del cubo 7
- 1.11 Piramide duale di una piramide pentagonale, a partire dalla sfera circoscritta 8

- 2.1 Prisma a base quadrangolare non retto (a sinistra) e retto (a destra) 10
- 2.2 Un prisma concavo a base quadrangolare e un prisma retto con base un pentagramma regolare 11
- 2.3 Prismi uniformi: triangolare, quadrato, pentagonale 11
- 2.4 Costruzione del duale di un prisma triangolare uniforme, con il metodo di Dorman Luke 12
- 2.5 Il duale di un prisma pentagonale uniforme, costruito a partire dall'intersfera 12
- 2.6 Schema per la costruzione di un antiprisma a base quadrata 13
- 2.7 Costruzione dell'ottaedro come antiprisma triangolare 14
- 2.8 Costruzione del duale dell'antiprisma quadrato con il metodo di Dorman Luke 14
- 2.9 Il cubo come antidiamente dell'ottaedro 15
- 2.10 Il tetraedro come antiprisma digonale 16
- 2.11 Il tetraedro come antidiamente 16
- 2.12 L'antiprisma ottagonale e il suo antidiamente duale 17
- 2.13 Antiprisma con basi a pentagramma, non ruotate 18
- 2.14 Antiprisma con basi a pentagramma, ruotate. Schema della costruzione, a sinistra, e figura completa, a destra 18

- 3.1 Riproduzione, a sinistra, della figura originale di Piero della Francesca relativa alla costruzione del cubottaedro. A destra la stessa figura in una proiezione prospettica corretta 22
- 3.2 Illustrazione della costruzione del cubottaedro, secondo le indicazioni di Piero della Francesca 23
- 3.3 Riproduzione dell'Exacedron Abscisus Vacuus di Leonardo, dal *De Divina Proportione* 24

- 3.4 Sviluppo piano del cubottaedro: riproduzione della figura originale realizzata da Dürer nell'Unterweisung 25
- 3.5 Riproduzione del Solido troncato dall'incisione *Melancholia I* di Albrecht Dürer 26
- 3.6 Sviluppo ("Spiegatura") del cubottaedro secondo Barbaro 27
- 3.7 Pianta base per la costruzione del cubottaedro, dalla *Pratica della prospettiva* di Daniel Barbaro 27
- 3.8 Schema della costruzione del cubottaedro secondo le indicazioni di Daniel Barbaro, mediante "levatura" dalla pianta 28
- 3.9 Il cubottaedro, poggiato sulla base triangolare, costruito secondo le indicazioni di Daniel Barbaro 28
- 3.10 Riproduzione del cubottaedro dall'*Harmonices mundi* di Keplero 29
- 3.11 Il poliedro di Miller o *pseudo rombicubottaedro*, a sinistra, e il rombicubottaedro, a destra 31
- 4.1 Icosaedro inscritto in un tetraedro 35
- 4.2 Tetraedro troncato 36
- 4.3 Tetraedro troncato con tetraedri circoscritti 36
- 4.4 Cubo troncato 37
- 4.5 Cubo troncato con tetraedro circoscritto 37
- 4.6 Ottaedro troncato 38
- 4.7 Ottaedro troncato con tetraedro circoscritto 38
- 4.8 Dodecaedro troncato 39
- 4.9 Dodecaedro troncato con tetraedro circoscritto 39
- 4.10 Icosaedro troncato 40
- 4.11 Icosaedro troncato con tetraedro circoscritto 40
- 4.12 Cubottaedro 41
- 4.13 Cubottaedro con tetraedro circoscritto 41
- 4.14 Rombicubottaedro 42
- 4.15 Rombicubottaedro con tetraedro circoscritto 42
- 4.16 Cubottaedro troncato o grande rombicubottaedro 43
- 4.17 Cubottaedro troncato o grande rombicubottaedro con tetraedro circoscritto 43
- 4.18 Icosidodecaedro 44
- 4.19 Icosidodecaedro con tetraedro circoscritto 44
- 4.20 Rombicosidodecaedro 45
- 4.21 Rombicosidodecaedro con tetraedro circoscritto 45
- 4.22 Icosidodecaedro troncato o grande rombicosidodecaedro 46
- 4.23 Icosidodecaedro troncato o grande rombicosidodecaedro con tetraedro circoscritto 46
- 4.24 Snub cubo o cubo camuso 47
- 4.25 Snub cubo o cubo camuso con tetraedro circoscritto 47
- 4.26 Snub dodecaedro o dodecaedro camuso 48
- 4.27 Snub dodecaedro o dodecaedro camuso con tetraedro circoscritto 48
- 5.1 Schema della troncatura debole ai vertici di un poliedro regolare, applicata al cubo 50
- 5.2 Schema della troncatura ai lati di un poliedro regolare, applicata al cubo 51
- 5.3 Dalla troncatura ai lati alla troncatura ai lati e vertici 52

- 5.4 Troncatura ai lati e ai vertici di un poliedro regolare, applicata al cubo 52
- 5.5 Dalla troncatura ai vertici alla troncatura ai lati e forte ai vertici 53
- 5.6 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un poliedro regolare, applicata al cubo 53
- 5.7 Troncatura ai vertici di un tetraedro: un primo passo e il tetraedro troncato 54
- 5.8 Troncatura ai vertici di un tetraedro: oltre il tetraedro troncato e fino all'ottaedro 54
- 5.9 Troncatura ai vertici di un cubo: un primo passo e il cubo troncato 55
- 5.10 Troncatura ai vertici di un cubo: oltre il cubo troncato e fino al cubottaedro 56
- 5.11 Schema delle facce “esterne” e delle facce “ottenute per troncatura” di un poliedro intrecciato, costruito per troncatura ai vertici di un cubo 56
- 5.12 Poliedro intrecciato ottenuto per troncatura ai vertici di un cubo 57
- 5.13 Troncatura ai vertici di un ottaedro: un primo passo e l'ottaedro troncato 58
- 5.14 Troncatura ai vertici di un ottaedro: oltre l'ottaedro troncato e fino al cubottaedro 58
- 5.15 Troncatura ai vertici di un dodecaedro: un primo passo e il dodecaedro troncato 59
- 5.16 Troncatura ai vertici di un dodecaedro: oltre il dodecaedro troncato e fino all'icosidodecaedro 59
- 5.17 Troncatura ai vertici di un icosaedro: un primo passo e l'icosaedro troncato 60
- 5.18 Troncatura ai vertici di un icosaedro: oltre l'icosaedro troncato e fino all'icosidodecaedro 60
- 5.19 La troncatura ai lati di un tetraedro: due stadi intermedi 61
- 5.20 La troncatura ai lati di un tetraedro: un terzo stadio intermedio e il cubo come risultato finale 62
- 5.21 La troncatura ai lati di un cubo: due stadi intermedi 63
- 5.22 Il dodecaedro rombico ottenuto per troncatura completa ai lati di un cubo 63
- 5.23 La troncatura ai lati di un ottaedro: due stadi intermedi 64
- 5.24 Il dodecaedro rombico ottenuto per troncatura completa ai lati di un ottaedro 64
- 5.25 Troncatura ai lati di un dodecaedro: due passi intermedi 65
- 5.26 Il triacontaedro rombico ottenuto per troncatura ai lati completa di un dodecaedro 66
- 5.27 Troncatura ai lati di un icosaedro: due passi intermedi 66
- 5.28 Il triacontaedro rombico ottenuto per troncatura ai lati completa di un icosaedro 67
- 5.29 Il rombo aureo: poligono comune a tutte le facce del triacontaedro rombico 67
- 5.30 Troncatura ai lati e vertici di un tetraedro: un primo passo e il cubottaedro 68
- 5.31 Troncatura ai lati e vertici di un tetraedro: oltre il cubottaedro e fino al tetraedro duale 68
- 5.32 Troncatura ai lati e vertici di un cubo: un primo passo e il rombicubottaedro 69
- 5.33 Troncatura ai lati e vertici di un cubo: oltre il rombicubottaedro e fino all'ottaedro duale 69
- 5.34 Troncatura ai lati e vertici di un'ottaedro: un primo passo e il rombicubottaedro 70
- 5.35 Troncatura ai lati e vertici di un'ottaedro: oltre il rombicubottaedro e fino al cubo duale 70
- 5.36 Il rombicubottaedro, a sinistra, e il cubo ad esso “circoscritto”, a destra 71
- 5.37 L'ottaedro, a sinistra, e il dodecaedro rombico, a destra, “circoscritti” al rombicubottaedro 71
- 5.38 Troncatura ai lati e vertici di un dodecaedro: un primo passo e il rombicosidodecaedro 72
- 5.39 Troncatura ai lati e vertici di un dodecaedro: oltre il rombicosidodecaedro e fino all'icosaedro duale 72
- 5.40 Troncatura ai lati e vertici di un icosaedro: un primo passo e il rombicosidodecaedro 73
- 5.41 Troncatura ai lati e vertici di un icosaedro: oltre il rombicosidodecaedro e fino al dodecaedro duale 73
- 5.42 Il rombicosidodecaedro, a sinistra, e il dodecaedro ad esso “circoscritto”, a destra 74

- 5.43 L'icosaedro, a sinistra, e il triacontaedro rombico, a destra, "circoscritti" al rombicododecaedro 74
- 5.44 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un tetraedro: un primo passo e il cubottaedro 75
- 5.45 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un tetraedro: oltre il cubottaedro e fino al tetraedro troncato 75
- 5.46 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un cubo: un primo passo e il grande rombicubottaedro 76
- 5.47 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un cubo: oltre il grande rombicubottaedro e fino all'ottaedro troncato 76
- 5.48 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un ottaedro: un primo passo e il grande rombicubottaedro 77
- 5.49 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un ottaedro: oltre il grande rombicubottaedro e fino al cubo troncato 77
- 5.50 Il grande rombicubottaedro, a sinistra, e il cubo ad esso "circoscritto", a destra 78
- 5.51 L'ottaedro, a sinistra, e il dodecaedro rombico, a destra, "circoscritti" al grande rombicubottaedro 78
- 5.52 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un dodecaedro: un primo passo e il grande rombicododecaedro 79
- 5.53 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un dodecaedro: oltre il rombicododecaedro e fino all'icosaedro troncato 79
- 5.54 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un icosaedro: un primo passo e il grande rombicododecaedro 80
- 5.55 Troncatura ai lati e forte ai vertici di un icosaedro: oltre il grande rombicododecaedro e fino al dodecaedro troncato 80
- 5.56 Il grande rombicododecaedro, a sinistra e il dodecaedro ad esso "circoscritto", a destra 81
- 5.57 L'icosaedro, a sinistra, e il triacontaedro rombico, a destra, "circoscritti" al grande rombicododecaedro 81
- 5.58 Troncature ai vertici di un tetraedro oltre la metà: il tetraedro troncato "duale" e il tetraedro "duale" 83
- 5.59 Troncature ai vertici di un cubo oltre la metà: l'ottaedro troncato e l'ottaedro duale 83
- 5.60 Troncature ai vertici di un ottaedro oltre la metà: il cubo troncato e il cubo duale 84
- 5.61 Troncature ai vertici di un dodecaedro oltre la metà: l'icosaedro troncato e l'icosaedro duale 84
- 5.62 Troncature ai vertici di un icosaedro oltre la metà: il dodecaedro troncato e il dodecaedro duale 85
- 5.63 Il rombicubottaedro, a sinistra, e il cubottaedro fortemente troncato, a destra 86
- 5.64 Il grande rombicubottaedro, a sinistra, e il cubottaedro debolmente troncato, a destra 86
- 5.65 Il rombicododecaedro, a sinistra, e l'icosidodecaedro fortemente troncato, a destra 87
- 5.66 Il grande rombicododecaedro, a sinistra, e l'icosidodecaedro debolmente troncato, a destra 87
- 5.67 L'ottaedro e il suo cubo duale con i vertici sui centri delle facce 88
- 5.68 Troncatura di un cubo per mezzo dell'ottaedro duale: il tetraedro troncato e il cubottaedro 89
- 5.69 Troncatura di un cubo per mezzo dell'ottaedro duale: l'ottaedro troncato e l'ottaedro duale 89
- 5.70 Tetraedro con cubo circoscritto 90
- 5.71 Troncatura di un tetraedro con un cubo circoscritto: un primo passo e il risultato finale 90
- 5.72 Una cella di un favo d'api vista dal fondo, a sinistra, e dall'imboccatura, a destra 93
- 5.73 Il cubo costruito con i vertici di due tetraedri duali rispetto all'intersfera 93

- 5.74 Il dodecaedro rombico costruito con i vertici di un cubo e un ottaedro duali rispetto all'intersfera 94
- 5.75 Il triacontaedro rombico costruito con i vertici di un dodecaedro e un icosaedro duali rispetto all'intersfera 94
- 5.76 Il triacontaedro rombico 95
- 5.77 Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un nastro di dieci rombi da un triacontaedro rombico 96
- 5.78 L'icosaedro rombico aureo ottenuto congiungendo le due parti di triacontaedro della figura 5.77 96
- 5.79 Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un nastro di otto rombi da un icosaedro rombico aureo 96
- 5.80 Il dodecaedro rombico aureo, ottenuto congiungendo le due parti di icosaedro della figura 5.79 97
- 5.81 Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un primo nastro di sei rombi da un dodecaedro rombico aureo 97
- 5.82 Il romboedro aureo ottuso, ottenuto congiungendo le due parti di dodecaedro della figura 5.81 97
- 5.83 Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un secondo nastro di sei rombi da un dodecaedro rombico aureo 97
- 5.84 Il romboedro aureo acuto, ottenuto congiungendo le due parti di dodecaedro della figura 5.83 98
- 5.85 L'icosaedro rombico aureo, in una proiezione che ne evidenzia le proprietà 98
- 5.86 Il dodecaedro rombico "ordinario", a sinistra, e quello aureo, a destra 98
- 5.87 Il romboedro aureo ottuso, a sinistra, e quello acuto, a destra 99
- 5.88 L'intersezione di due cilindri tra di loro perpendicolari 100
- 5.89 Il solido ottenuto come parte comune a due cilindri tra di loro perpendicolari 100
- 5.90 L'effetto della introduzione di un terzo cilindro, perpendicolare ai primi due, sul solido comune a due cilindri tra di loro perpendicolari 101
- 5.91 Evidenziazione di due cilindri perpendicolari per ottenere il solido della figura 5.93 101
- 5.92 Evidenziazione del terzo cilindro perpendicolare ai precedenti per ottenere il solido della figura 5.93 102
- 5.93 Il solido ottenuto come intersezione di tre cilindri perpendicolari 102
- 5.94 Il tricilindro con il dodecaedro rombico circoscritto 103
- 6.1 Costruzione del tetraedro camuso: il tetraedro di partenza 106
- 6.2 Dal tetraedro all'icosaedro per levigatura 106
- 6.3 Oltre l'icosaedro e fino al tetraedro duale, per levigatura 107
- 6.4 Verifica dell'esistenza di simmetrie planari per il cubottaedro 107
- 6.5 Verifica della mancanza di simmetria assiale nel poliedro della figura 6.2 108
- 6.6 Il cubo, a sinistra, e un primo passo verso la costruzione del cubo-ottaedro camuso, a destra 109
- 6.7 Il cubo-ottaedro camuso 109
- 6.8 Oltre il cubo-ottaedro camuso, a sinistra, e fino all'ottaedro, a destra 109
- 6.9 Chiralità del cubo camuso 110

- 6.10 Il dodecaedro, a sinistra, e un primo passo verso la costruzione del dodecaedro-icosaedro camuso, a destra 110
- 6.11 Il dodecaedro-icosaedro camuso 111
- 6.12 Oltre il dodecaedro-icosaedro camuso, a sinistra, e fino all'icosaedro, a destra 111
- 6.13 Chiralità del dodecaedro camuso 111
- 6.14 Dal rombicubottaedro al cubo camuso 112
- 6.15 Dal rombicoidodecaedro al dodecaedro camuso 112

- 7.1 Espansione degli spigoli di un tetraedro per ottenere il tetraedro troncato 116
- 7.2 Espansione degli spigoli di un cubo per ottenere il cubo troncato 116
- 7.3 Espansione degli spigoli di un ottaedro per ottenere l'ottaedro troncato 116
- 7.4 Espansione degli spigoli di un dodecaedro per ottenere il dodecaedro troncato 117
- 7.5 Espansione degli spigoli di un icosaedro per ottenere l'icosaedro troncato 117
- 7.6 Espansione delle facce di un cubo per ottenere il rombicubottaedro 117
- 7.7 Espansione delle facce di un ottaedro per ottenere il rombicubottaedro 118
- 7.8 Espansione delle facce di un dodecaedro per ottenere il rombicoidodecaedro 118
- 7.9 Espansione delle facce di un icosaedro per ottenere il rombicoidodecaedro 118
- 7.10 Contrazione delle facce triangolari di un cubo troncato per ottenere il cubottaedro 119
- 7.11 Contrazione delle facce quadrate di un ottaedro troncato per ottenere il cubottaedro 119
- 7.12 Contrazione delle facce triangolari di un dodecaedro troncato per ottenere l'icosidodecaedro 119
- 7.13 Contrazione delle facce pentagonali di un icosaedro troncato per ottenere l'icosidodecaedro 120
- 7.14 Espansione delle facce quadrate non assiali di un rombicubottaedro per ottenere il grande rombicubottaedro 120
- 7.15 Espansione delle facce quadrate di un rombicoidodecaedro per ottenere il grande rombicoidodecaedro 120
- 7.16 Espansione delle facce di un tetraedro per ottenere il cubottaedro 121
- 7.17 Espansione delle facce del tetraedro duale rispetto alla figura 7.16 per ottenere il cubottaedro 121

- 8.1 Gli undici diversi sviluppi piani di un cubo 124
- 8.2 Un ottaedro concavo "a barchetta", a facce regolari, e un suo sviluppo piano 124
- 8.3 L'ottaedro regolare e un suo sviluppo piano 124
- 8.4 Sviluppo piano di un cestino 125
- 8.5 Sviluppo piano del tetraedro troncato 125
- 8.6 Sviluppo piano del cubo troncato 126
- 8.7 Sviluppo piano dell'ottaedro troncato 126
- 8.8 Sviluppo piano del dodecaedro troncato 126
- 8.9 Sviluppo piano dell'icosaedro troncato 127
- 8.10 Sviluppo piano del cubottaedro 127
- 8.11 Sviluppo piano dell'icosidodecaedro 127
- 8.12 Sviluppo piano del rombicubottaedro 128
- 8.13 Sviluppo piano del rombicoidodecaedro 128
- 8.14 Sviluppo piano del grande rombicubottaedro 128
- 8.15 Sviluppo piano del grande rombicoidodecaedro 129

- 8.16 Sviluppo piano del cubo camuso 130
- 8.17 Sviluppo piano del dodecaedro camuso 130

- 9.1 Costruzione del duale del tetraedro troncato con il metodo di Dorman-Luke 131
- 9.2 Il triacistetraedro, duale del tetraedro troncato, e il tetraedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base triangolare 133
- 9.3 Il triacisottaedro, duale del cubo troncato, e l'ottaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante l'aggiunta di piramidi a base triangolare 134
- 9.4 Il tetracisesaedro, duale dell'ottaedro troncato, e il cubo (esaedro) da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base quadrata 134
- 9.5 Il triacisicosaedro, duale del dodecaedro troncato, e l'icosaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base triangolare 135
- 9.6 Il pentacisdodecaedro, duale dell'icosaedro troncato, e il dodecaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base pentagonale 135
- 9.7 Il cubo, qui visto come esaedro rombico, e uno dei due tetraedri duali da cui esso è ottenuto come seconda elevazione 136
- 9.8 Il dodecaedro rombico, duale del cubottaedro 136
- 9.9 Seconda elevazione del cubo e dell'ottaedro per ottenere il dodecaedro rombico 137
- 9.10 Il triacontaedro rombico, duale dell'icosidodecaedro 137
- 9.11 Seconda elevazione del dodecaedro e dell'icosaedro per ottenere il triacontaedro rombico 137
- 9.12 L'icositetraedro trapezoidale, duale del rombicubottaedro, e il cubottaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base triangolare e quadrata 138
- 9.13 L'esacontaedro trapezoidale, duale del rombicosidodecaedro, e l'icosidodecaedro da cui esso è ottenuto per elevazione con aggiunta di piramidi a base triangolare e pentagonale 138
- 9.14 L'esacisottaedro, duale del grande rombicubottaedro, e l'ottaedro da cui esso è ottenuto poggiando sui vertici delle facce otto solidi a forma di piramide a punte con sei facce laterali 139
- 9.15 Costruzione dell'esacisottaedro ottenuto poggiando sui vertici della facce di un cubo sei solidi a forma di piramide a punte con otto facce, oppure elevando le dodici facce di un dodecaedro rombico con piramidi a base rombica 140
- 9.16 Uno dei solidi a forma di piramide a punte poggiato sui vertici di una faccia di un cubo per ottenere l'esacisottaedro 140
- 9.17 L'esacisicosaedro, duale del grande rombicosidodecaedro, e l'icosaedro da cui esso è ottenuto poggiando sui vertici delle facce venti solidi a forma di piramide a punte con sei facce laterali 140
- 9.18 Costruzione dell'esacisicosaedro ottenuto poggiando sui vertici della facce di un dodecaedro dodici solidi a forma di piramide a punte con dieci facce, oppure elevando le trenta facce di un triacontaedro rombico con piramidi a base rombica 141
- 9.19 L'icositetraedro pentagonale, duale del cubo camuso, nelle due versioni chirali non sovrapponibili 141
- 9.20 L'esacontaedro pentagonale, duale del dodecaedro camuso, nelle due versioni chirali non sovrapponibili 142

- 10.1 Il tetraedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 143

- 10.2 Il cubo troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 144
- 10.3 L'ottaedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 145
- 10.4 Il dodecaedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 146
- 10.5 L'icosaedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta, ovvero il pallone da calcio 147
- 10.6 Il cubottaedro e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 148
- 10.7 L'icosidodecaedro e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 149
- 10.8 Il rombicubottaedro e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 150
- 10.9 Il rombicoidodecaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 151
- 10.10 Il grande rombicubottaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 152
- 10.11 Il grande rombicoidodecaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 153
- 10.12 Il cubo camuso e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 154
- 10.13 Il dodecaedro camuso e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta 155
- 10.14 Il triacistetraedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 156
- 10.15 Il triacisottaedro e la tassellazione ottenuta mediante proiezione sulla sfera inscritta 157
- 10.16 Il tetracisesaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 158
- 10.17 Il triacisicosaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 159
- 10.18 Il pentacidodecaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 160
- 10.19 Il dodecaedro rombico e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 161
- 10.20 Il triacontaedro rombico e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 162
- 10.21 L'icositetraedro trapezoidale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 163
- 10.22 L'esacisottaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 164
- 10.23 L'esacontaedro trapezoidale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 165
- 10.24 L'esacisicosaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 166
- 10.25 L'icositetraedro pentagonale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 167
- 10.26 L'esacontaedro pentagonale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta 168
- 10.27 Il tetraedro troncato e il triacistetraedro con le facce divise in triangoli 169
- 10.28 Proiezione sull'intersfera del tetraedro troncato e del triacistedraedro, con facce divise in triangoli, con evidenziazione, per ciascuno, dei lati della proiezione del duale 170
- 10.29 Il triacistetraedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del tetraedro regolare sferico 171
- 10.30 Il triacisottaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale dell'ottaedro regolare sferico 172
- 10.31 Il tetracisesaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del cubo sferico 172
- 10.32 Il triacisicosaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale dell'icosaedro regolare sferico 173
- 10.33 Il pentacidodecaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del dodecaedro regolare sferico 173

- 10.34 Il dodecaedro rombico sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del cubo sferico, a sinistra, e dell'ottaedro regolare sferico, a destra, e successiva soppressione degli spigoli originali 174
- 10.35 Il triacontaedro rombico sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del dodecaedro regolare sferico, a sinistra, e dell'icosaedro regolare sferico, a destra, e successiva soppressione degli spigoli originali 174
- 10.36 L'icositetraedro trapezoidale sferico, ottenuto dal cubo sferico, a sinistra, e dall'ottaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i punti medi degli spigoli 175
- 10.37 L'esacontaedro trapezoidale sferico, ottenuto dal dodecaedro regolare sferico, a sinistra, e dall'icosaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i punti medi degli spigoli 175
- 10.38 L'esacisottaedro sferico, ottenuto dal cubo sferico, a sinistra, e dall'ottaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i vertici e i punti medi degli spigoli 176
- 10.39 L'esacisicosaedro sferico, ottenuto dal dodecaedro regolare sferico, a sinistra, e dall'icosaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i vertici e i punti medi degli spigoli 176
- 10.40 Sezioni di un cubo con un piano perpendicolare a una diagonale 177
- 10.41 Cubo spezzato con sezione esagonale regolare 177
- 10.42 Sovrapposizione dei due “mezzi cubi” della figura 10.41 per ottenere un quarto di ottaedro troncato 178
- 10.43 Ottaedro troncato costruito a partire da otto cubi 178
- 10.44 Tassellazione mediante ottaedri troncati: il primo poliedro 179
- 10.45 Tassellazione mediante ottaedri troncati: aggiunta progressiva di altri poliedri 179
- 10.46 Tassellazione mediante dodecaedri rombici: il primo poliedro 180
- 10.47 Tassellazione mediante dodecaedri rombici: accostamento di due poliedri 180
- 10.48 Tassellazione mediante dodecaedri rombici: aggiunta di poliedri 181
- 10.49 Il dodecaedro rombico costruito con sette cubi 181
- 10.50 Base di un impacchettamento esagonale di sfere 182
- 10.51 Piramide ottenuta con un impacchettamento a base esagonale di sfere 182
- 10.52 Due tetraedri troncati in posizione “rovesciata”, utilizzati come nucleo della tassellazione con tetraedri troncati e tetraedri 183
- 10.53 Tassellazione dello spazio mediante tetraedri e tetraedri troncati 184
- 10.54 Tassellazione dello spazio mediante cubi troncati e ottaedri 184
- 10.55 Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e cubottaedri 185
- 10.56 Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: uno strato di rombicubottaedri 185
- 10.57 Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: inserimento di un cubottaedro 186
- 10.58 Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: inserimento di cubi 186
- 10.59 Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: la struttura complessiva 187
- 10.60 Tassellazione con rombicubottaedri, cubi e tetraedri: uno strato di rombicubottaedri 187
- 10.61 Tassellazione con rombicubottaedri, cubi e tetraedri: inserimento di un cubo e di tetraedri 188
- 10.62 Tassellazione con rombicubottaedri, cubi e tetraedri: inizio di un secondo strato di rombicubottaedri 188
- 10.63 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati: uno strato di grandi rombicubottaedri 189

- 10.64 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati: aggiunta di cubi 189
- 10.65 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati: aggiunta di un ottaedro troncato 190
- 10.66 Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: un ottaedro iniziale 190
- 10.67 Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: aggiunta di cubottaedri 191
- 10.68 Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: aggiunta di tetraedri troncati 191
- 10.69 Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: aggiunta di cubottaedri, tetraedri troncati e di altri ottaedri troncati 192
- 10.70 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: un primo gruppo di grandi rombicubottaedri 192
- 10.71 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: aggiunta di tetraedri troncati 193
- 10.72 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: aggiunta di un cubo troncato 193
- 10.73 Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: aggiunta di un ulteriore grande rombicubottaedro 194
- 10.74 Tassellazione con grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale: due grandi rombicubottaedri affiancati 194
- 10.75 Tassellazione con grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale: aggiunta di prismi a base ottagonale 195
- 10.76 Tassellazione con grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale: aggiunta di un ulteriore grande rombicubottaedro 195
- 10.77 Una possibile tassellazione con prismi a base esagonale e triangolare 196
- A.1 Il problema di Tammes con tre punti 198
- A.2 Il problema di Tammes con quattro punti 198
- A.3 Il problema di Tammes con sei punti 199
- A.4 Il problema di Tammes con otto punti 199
- A.5 Il problema di Tammes con dodici punti 200
- A.6 Il problema di Tammes con ventiquattro punti 201
- B.1 Due poliedri di Goldberg a facce esagonali molto irregolari, ottenuti per troncatura ai vertici dell'icosaedro 205
- B.2 Troncatura ai lati di un dodecaedro, a sinistra, e troncatura ai vertici pentagonali di un triacontaedro rombico, a destra, per ottenere poliedri di Goldberg 206
- B.3 Il dodecaedro smussato o triacontaedro rombico pentatroncato 206
- B.4 Il dodecaedro smussato, ovvero un "super pallone da calcio", a sinistra, e l'icosaedro troncato, ovvero il normale pallone da calcio, a destra 207
- B.5 Troncatura ai vertici di un esacontaedro pentagonale: un primo passo e il poliedro di Goldberg con il massimo di regolarità 207
- B.6 Griglia triangolare nel piano 208
- B.7 Particolare delle tassellazioni dei tre triangoli della figura B.6 209

- B.8 Tassellazione di due facce contigue di un icosaedro, nei casi $a = 4$ e $b = 0$, in alto a sinistra, $a = b = 2$, in alto a destra, $a = 3$ e $b = 1$, in basso 210
- B.9 Un esempio di tassellazione di tutte le facce dell'icosaedro nel caso $a = 2$ e $b = 0$, a sinistra, e la sfera geodetica ottenuta per proiezione dei vertici sulla sfera circoscritta, a destra 211
- B.10 Dettaglio della sfera geodetica ottenuta nella figura B.9 211
- B.11 Percorso che congiunge due vertici vicini di valenza 5 in un pentacisdodecaedro, o $GD(1, 1)$, e in una $GD(2, 0)$ 213
- B.12 La sfera geodetica $GD(2, 0)$ e l'icosidodecaedro da cui essa può essere ottenuta per elevazione 214
- B.13 La sfera geodetica $GD(2, 1)$, con evidenziati i vertici di valenza 5 e un percorso che ne congiunge due vicini 214
- B.14 La sfera geodetica della figura B.13 con una diversa colorazione delle facce e lo snub dodecaedro da cui essa è ottenuta per elevazione 215
- B.15 Le due forme chirali della sfera $GD(2, 1)$ 215
- B.16 La sfera geodetica $GD(2, 2)$ 216
- B.17 La sfera geodetica $GD(3, 1)$ 216
- B.18 Il poliedro di Goldberg $GP(2, 1)$, con l'indicazione di due possibili percorsi per passare dal centro di un pentagono a quello di uno vicino 217
- B.19 Le due forme chirali del poliedro $GP(2, 1)$ 218
- B.20 Il poliedro di Goldberg $GP(2, 2)$ 218
- B.21 Il poliedro di Goldberg $GP(3, 1)$ 219
- B.22 Costruzione della sfera geodetica $\{3, 3+\}_{(3,0)}$ a simmetria tetraedrica: triangolazione del tetraedro, a sinistra, e la sfera ottenuta per proiezione, a destra 222
- B.23 La sfera geodetica $\{3, 3+\}_{(3,0)}$, a sinistra, e il corrispondente poliedro di Goldberg $\{3+, 3\}_{(3,0)}$, a destra 222
- B.24 Costruzione della sfera geodetica $\{3, 4+\}_{(3,0)}$ a simmetria ottaedrica: triangolazione dell'ottaedro, a sinistra, e la sfera ottenuta per proiezione, a destra 223
- B.25 La sfera geodetica $\{3, 4+\}_{(3,0)}$, a sinistra, e il corrispondente poliedro di Goldberg $\{4+, 3\}_{(3,0)}$, a destra 223
- B.26 La molecola del Buckminsterfullerene 224
- C.1 Esagono regolare e sette circonferenze tangenti esternamente 225
- C.2 I quattro esagoni regolari inscritti in un cubottaedro 226
- C.3 Quattro esagoni in un cubottaedro: visione complessiva 226
- C.4 Costruzione dell'impacchettamento di sfere sui vertici del cubottaedro: prime quattro sfere, a sinistra, e aggiunta di ulteriori quattro sfere più la sfera centrale, a destra 227
- C.5 Costruzione dell'impacchettamento di sfere sui vertici del cubottaedro: le tredici sfere 227
- C.6 Impacchettamento di sfere sui vertici del cubottaedro: le sei sfere sui vertici di un esagono inscritto, più la sfera centrale 228
- C.7 Contrazione in simmetria icosaedrica delle sfere della figura C.5, dopo soppressione della sfera centrale 228
- C.8 Dieci delle dodici sfere della figura C.7, a sinistra, ed evidenziazione della struttura icosaedrica, a destra 229
- C.9 Le sei piramidi a base quadrata e facce triangolari regolari che compongono, assieme ai tetraedri della figura C.10, il cubottaedro 230

- C.10 Gli otto tetraedri regolari che compongono, assieme alle piramidi della figura C.9, il cubottaedro 231
- C.11 Calcolo dell'altezza di una piramide a base quadrata e facce triangolari regolari e di un tetraedro regolare 231
- C.12 Il cubottaedro che sarà usato per le trasformazioni 232
- C.13 Il cubottaedro senza le facce quadrate, a sinistra, e la prima deformazione che conduce alla costruzione dell'icosaedro, a destra 233
- C.14 Il cubottaedro originale, a sinistra, e l'icosaedro ottenuto come primo passo della deformazione, a destra 233
- C.15 Il cubottaedro senza le facce quadrate, a sinistra, e la deformazione completa che conduce alla costruzione dell'ottaedro, a destra 234
- C.16 Il cubottaedro originale, a sinistra, e l'ottaedro ottenuto mediante deformazione, a destra 234
- C.17 L'ottaedro ottenuto per deformazione, a sinistra, e il tronco di tetraedro ottenuto per successiva deformazione, a destra 235
- C.18 Il tronco di tetraedro ottenuto nella figura C.17, a sinistra, e il triangolo equilatero ottenuto per successivo appiattimento, a destra 235
- C.19 Il triangolo equilatero ottenuto nella figura C.18, a sinistra, e il tetraedro ottenuto per successiva deformazione, a destra 236
- C.20 Visione d'assieme del cubottaedro e dei tre deltaedri platonici ottenuti per successive deformazioni 236

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

Premessa

Questo fascicolo fa parte di una raccolta dedicata ai poliedri. Non si tratta di un lavoro teorico sui poliedri, quanto piuttosto di una serie di immagini che illustrano le spettacolari caratteristiche “estetiche” di queste figure geometriche.

Ci preme anche segnalare che il lavoro non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità: non basterebbe una voluminosa enciclopedia per raccogliere quanto è noto su questo argomento.

Nella bibliografia, che è comune per tutti i fascicoli della raccolta, sono riportati i testi consultati, sui quali si possono trovare tutte le dimostrazioni necessarie a giustificare le affermazioni e costruzioni via via proposte in questo lavoro.

Lo spunto per realizzare questa raccolta è nato per soddisfare le esigenze del corso di *Matematica per il Design*, svolto presso l'ISIA Roma, sede di Pordenone.

La quasi totalità delle figure proposte è stata realizzata con il pacchetto grafico Tikz del sistema L^AT_EX, e anzi uno degli scopi di questo lavoro è proprio quello di mostrare come si possano realizzare con questo pacchetto anche figure tridimensionali molto complesse. Alcune figure sono costruite con Geogebra ed esportate come immagine.

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

Fascicoli pubblicati

- Solidi Platonici. Introduzione generale ai poliedri. I cinque poliedri regolari. Poliedri regolari elevati. Relazioni tra i poliedri regolari. Costruzioni dei poliedri regolari. Tassellazioni della sfera e dello spazio a partire dai poliedri regolari. Appendice sugli anelli di Borromeo. Miscellanea: simboli di Schläfli, poligoni di Petrie. Oltre duecentocinquanta illustrazioni.
- Solidi di Archimede e Catalan. Dualità. Dai poliedri regolari ai poliedri semiregolari mediante troncature o mediante espansione. Solidi di Catalan. Tassellazioni semiregolari della sfera e dello spazio. Il problema dei dittatori nemici. Poliedri di Goldberg e sfere geodetiche. Osservazioni sul cubottaedro. Oltre cinquecento illustrazioni.
- Solidi di Johnson. Le tecniche costruttive. I novantadue poliedri. Altri solidi ottenuti con le tecniche “alla Johnson”. Quasi solidi di Johnson (*Near misses*). Circa trecentottanta illustrazioni.
- Solidi di Keplero-Poinsot - Stellazioni. Generalità sulle stellazioni e le sfaccettature. I quattro solidi di Keplero-Poinsot. Alcune stellazioni dell'icosaedro. I poliedri di Badoureaux e Coxeter. I duali dei poliedri di Badoureaux e Coxeter. Prismi e antiprismi non convessi. Circa trecentosettanta illustrazioni.

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

1. Approfondimenti sulla dualità

Abbiamo già trattato nel fascicolo sui solidi platonici il concetto di dualità, nella sua forma più semplice possibile: purtroppo quella definizione non è adatta ai solidi non regolari e, pur senza entrare troppo nei dettagli, vediamo brevemente come essa possa essere estesa, almeno per i solidi convessi. Una definizione formale e completa si può trovare in Bruckner [7], ma essa è troppo complessa per essere qui esposta. Le considerazioni che seguono sono comunque abbastanza generali e si adattano ad ogni solido convesso.

Consideriamo una circonferenza di centro O e raggio r e un punto P del suo piano, distinto da O . Sulla retta OP consideriamo il punto Q tale che $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$: i due punti P e Q sono detti *inversi* uno dell'altro. La retta p per Q e perpendicolare ad OP è detta *polare* di P rispetto alla circonferenza, e, rispettivamente, P è detto il *polo* di p rispetto alla circonferenza. Se il punto P sta sulla circonferenza, p è semplicemente la tangente alla circonferenza in P . La figura 1.1 illustra la costruzione della polare rispettivamente nel caso di P interno o esterno alla circonferenza. Nel primo caso si conducono da P le tangenti, nei due punti A e B , alla circonferenza: p è semplicemente la retta AB . Nel secondo caso, simmetricamente, si traccia da P la perpendicolare ad \overline{OP} fino ad incontrare in A e B la circonferenza: detto Q il punto di intersezione delle due tangenti, p è la perpendicolare per Q alla retta OP .

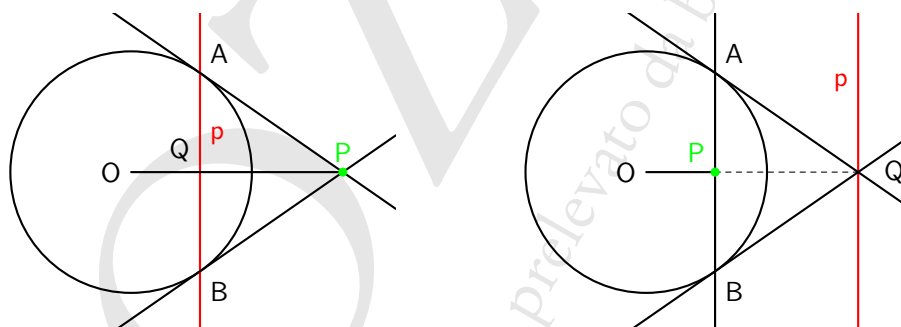


Figura 1.1.: Costruzione della polare di un punto rispetto ad una circonferenza

Nello spazio la circonferenza è sostituita da una sfera e la retta polare dal *piano polare*, con le stesse identiche costruzione e proprietà. Si veda la figura 1.2.

Applichiamo questo procedimento ad un solido convesso irregolare, in particolare alla bipyramide $ABCDE$ mostrata nella figura 1.3, a sinistra.

Consideriamo un punto O arbitrariamente scelto all'interno del poliedro e una sfera di raggio r , arbitrario, con centro in O . Costruiamo i piani polari di tutti i vertici della bipyramide, rispetto alla sfera scelta. Intersecando questi piani polari si ottengono 5 facce di un poliedro che è il duale del poliedro dato, rispetto a questa sfera. Nella figura 1.3 di destra è illustrato il modo per ottenere il piano di una di queste facce: i bordi della faccia sono stati ottenuti tenendo conto dell'intersezione con gli altri piani polari. Si noti come questa faccia sia un quadrilatero in perfetto accordo con il fatto che il vertice C da

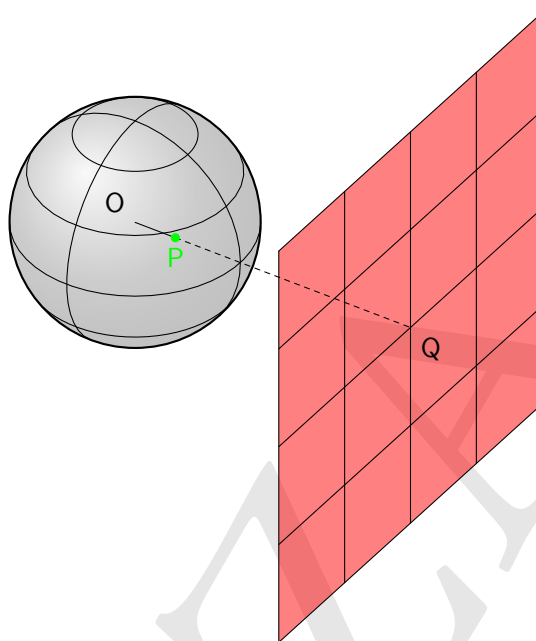


Figura 1.2.: *Costruzione del piano polare di un punto rispetto a una sfera*

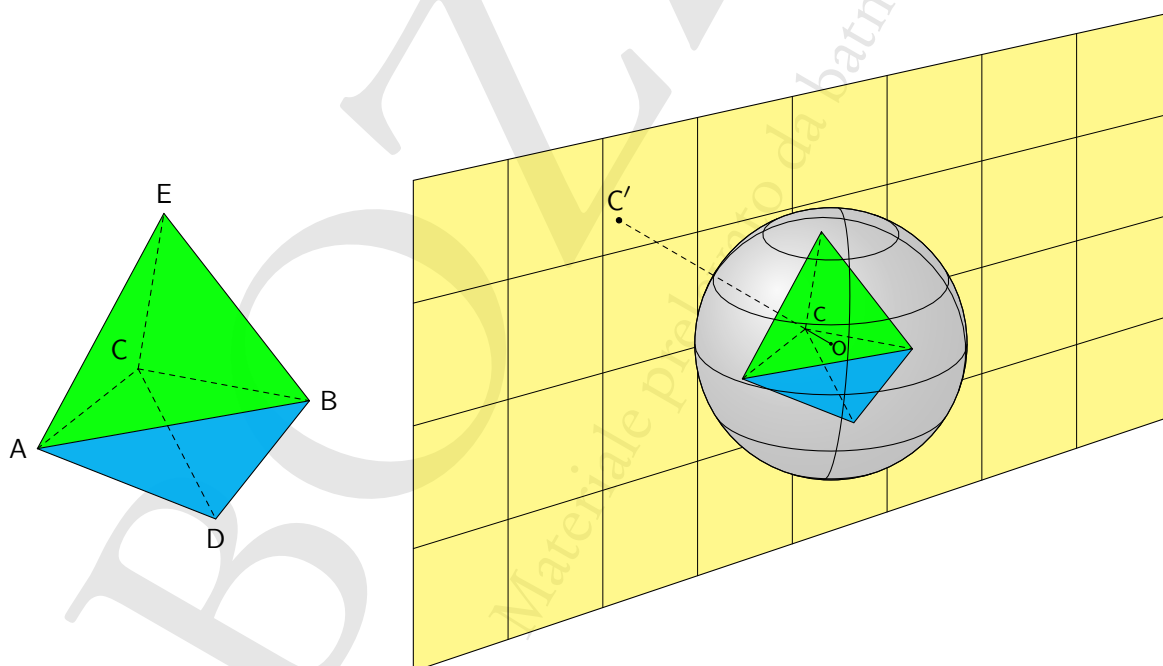


Figura 1.3.: *Costruzione di un duale di una bipyramide irregolare*

cui è stata ottenuta per polarità è un vertice di ordine 4, ovvero con quattro spigoli in esso concorrenti. Anche le facce ottenute per polarità dai due vertici A e B saranno quadrilateri, mentre quelle ottenute

dai vertici D e E saranno triangoli. Il risultato finale è mostrato nella figura 1.4: come si può vedere, si tratta di un poliedro di forma prismatica e in effetti vedremo tra poco che tutte le bipyramidi hanno come duali poliedri di questo tipo.

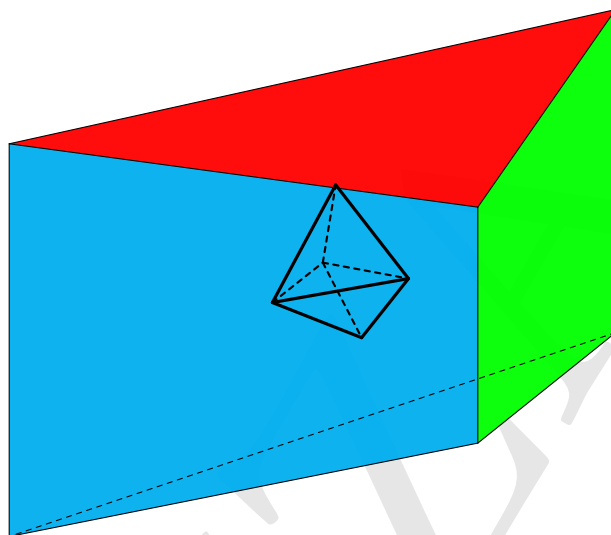


Figura 1.4.: *Un duale della bipyramide irregolare della figura 1.3*

Se si modifica il raggio della sfera il poliedro duale cambia solo in dimensione, mantenendo però le proporzioni. Se invece si cambia il centro della sfera, sempre all'interno del poliedro originale, si modificano le dimensioni degli spigoli del duale ottenuto, ma le sue caratteristiche in termini di numero e disposizione di facce, vertici e spigoli rimangono identiche. Un diverso duale, ottenuto con un diverso centro della sfera utilizzata, è mostrato nella figura 1.5.

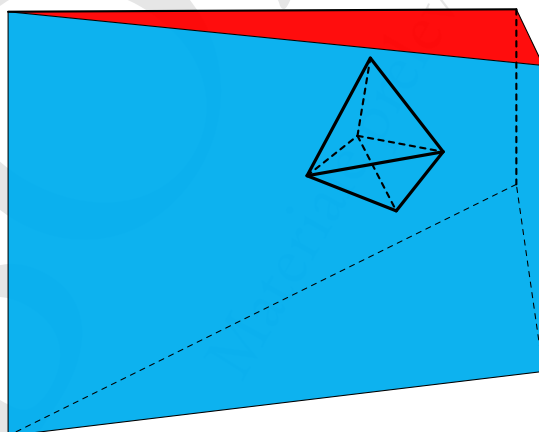


Figura 1.5.: *Un diverso duale della bipyramide della figura 1.3*

Se il poliedro ha un centro privilegiato (centro della sfera circoscritta, della sfera inscritta o dell'intersfera) allora chiaramente si conviene di scegliere questo centro come centro della sfera utilizzata per

generare il duale, che in questo caso risulta unico a meno di omotetie. Nel caso dei solidi platonici addirittura i centri di queste tre sfere coincidono in un unico punto che dunque è naturalmente assunto come centro per costruire il duale.

Come esempio proponiamo, nella figura 1.6, la costruzione del duale del cubo, cioè dell'ottaedro, a partire dalla sfera circoscritta. La faccia INP dell'ottaedro appartiene al piano per il vertice C del cubo e tangente alla sfera circoscritta ed è delimitata dalle intersezioni con gli altri piani tangenti negli altri vertici i cui spigoli concorrono in C: poiché tali spigoli sono in numero di 3, la faccia in questione è triangolare. Le note simmetrie del cubo, in particolare il fatto che le sue figure al vertice sono triangoli equilateri, portano a concludere che tutte le facce del duale sono triangoli equilateri: esse si possono ottenere con simile procedura.

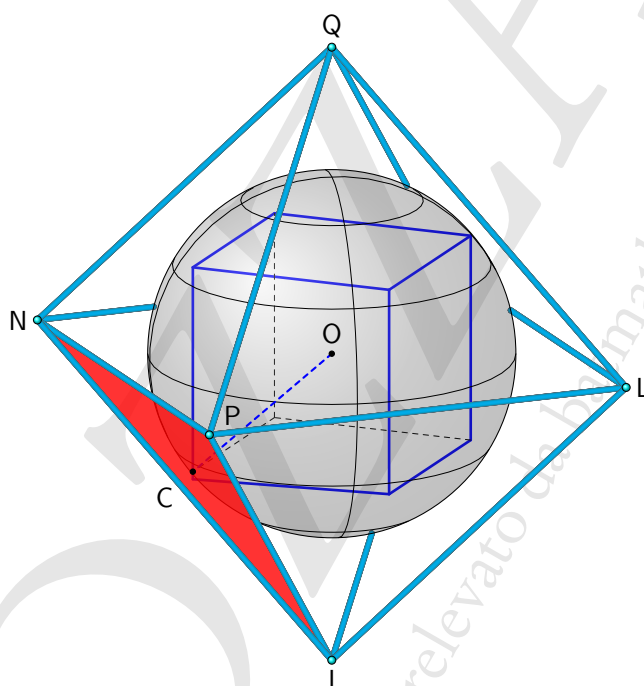


Figura 1.6.: *Il duale di un cubo a partire dalla sfera circoscritta*

Si noti che, come del resto discende immediatamente dalla costruzione, la sfera circoscritta al cubo è la sfera inscritta nell'ottaedro duale.

Per un utile confronto ripetiamo, nella figura 1.7, la stessa costruzione della figura 1.6 a partire invece dalla sfera inscritta. La faccia INP dell'ottaedro duale appartiene al piano polare del vertice C rispetto alla sfera inscritta ed è delimitata dalle intersezioni con i piani polari relativi agli altri vertici del cubo i cui spigoli concorrono in C: per tutto il resto si può ripetere esattamente quanto detto prima a proposito della sfera circoscritta.

Questa volta, in maniera simmetrica rispetto a prima, la sfera inscritta nel cubo è la sfera circoscritta all'ottaedro duale. È inoltre immediato che l'ottaedro duale costruito a partire dalla sfera inscritta è esattamente quello ottenuto congiungendo i centri delle sei facce del cubo, secondo la definizione elementare data a suo tempo.

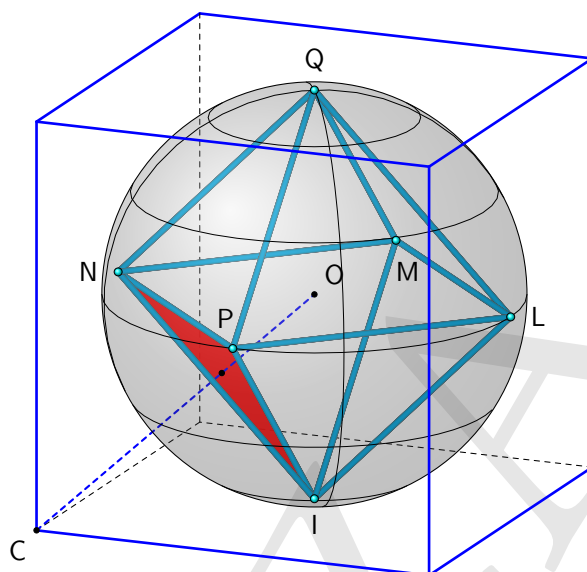


Figura 1.7.: Il duale di un cubo a partire dalla sfera inscritta

È molto interessante ripetere la stessa costruzione, utilizzando l'intersfera come sfera di riferimento: si otterrà ovviamente sempre un ottaedro simile ai due precedenti, ma sono molto interessanti la reciproca posizione delle due figure e le caratteristiche che ne emergono. In questo caso l'intersfera del cubo sarà anche l'intersfera dell'ottaedro duale.

Non ripetiamo la costruzione seguendo lo schema delle due precedenti. Seguiamo piuttosto un metodo alternativo molto interessante graficamente, detto il *metodo Dorman Luke*. L'idea è quella di costruire, per ogni vertice, la figura al vertice (che nel caso del cubo è un triangolo equilatero) congiungendo i centri degli spigoli che convergono nel vertice stesso. Successivamente si considera la circonferenza circoscritta a questa figura: il poligono ad essa circoscritto con i lati tangenti nei centri degli spigoli è una delle facce del poliedro duale. La costruzione è illustrata in dettaglio, nel caso del cubo già considerato precedentemente, nella figura 1.8, per due delle facce dell'ottaedro duale.

Si noti che le circonferenze circoscritte alle figure al vertice del cubo sono le intersezioni dell'intersfera con l'ottaedro duale e che le stesse figure al vertice sono le intersezioni del cubo con il suo duale. Simmetricamente, dalla stessa figura 1.8, si deduce immediatamente che le figure al vertice dell'ottaedro, che sono quadrati, sono le intersezioni dell'ottaedro con il cubo, vedi il quadrato $M_1M_5M_6M_4$, e le circonferenze circoscritte a queste figure al vertice sono le intersezioni del cubo con l'intersfera comune.

Sempre dalla stessa figura 1.8 si deduce anche che gli spigoli di un poliedro e quelli corrispondenti del duale sono tra di loro perpendicolari e si dividono scambievolmente a metà: questa è la base della costruzione di alcuni poliedri composti di cui abbiamo parlato nel fascicolo sui solidi platonici.

In sostanza possiamo concludere che è proprio la dualità basata sull'intersfera che giustifica le strette relazioni tra cubo e ottaedro, tra dodecaedro e icosaedro, lasciando il tetraedro regolare in una categoria a sé, in quanto duale di se stesso.

È anche opportuno osservare che il metodo di Dorman Luke non richiede specificamente la costruzione dell'intersfera. Tuttavia esso si può applicare solo quando tale intersfera esiste, in quanto ciò garantisce che le figure al vertice siano poligoni piani inscrittibili in una circonferenza.

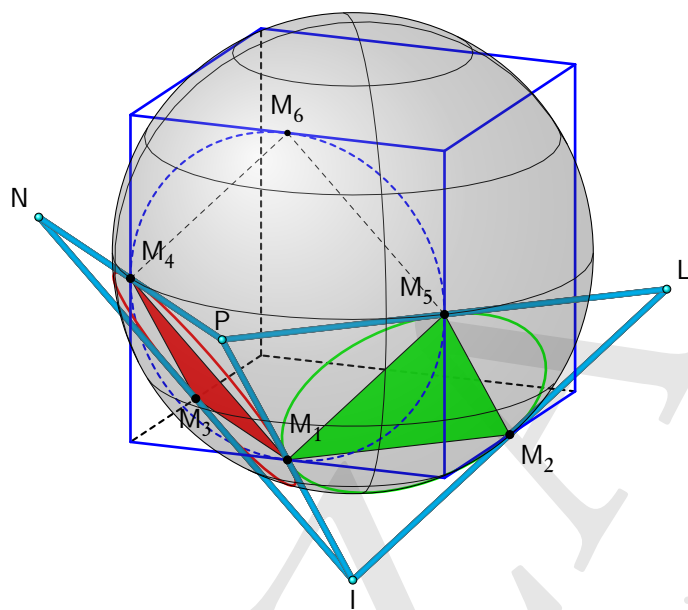


Figura 1.8.: *Costruzione del duale di un cubo con il metodo di Dorman Luke: schema della costruzione*

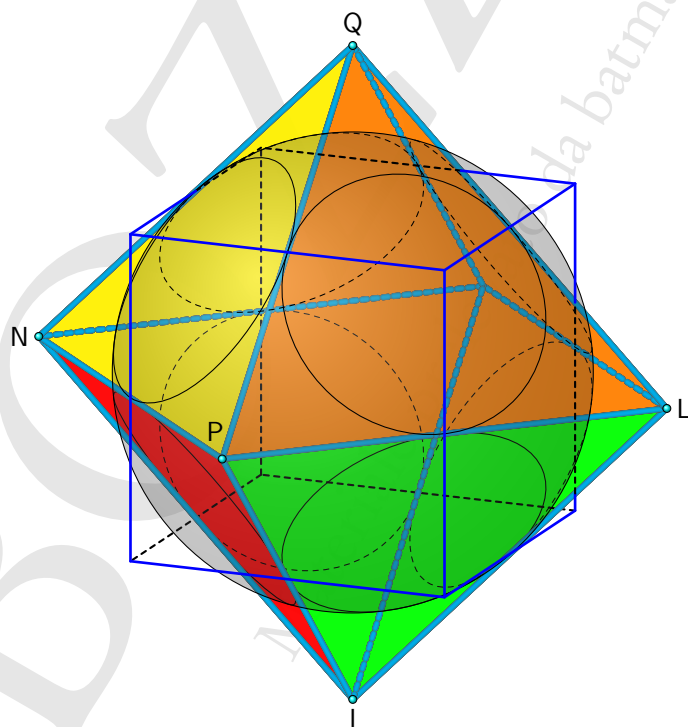


Figura 1.9.: *Il duale di un cubo costruito con il metodo di Dorman Luke*

La figura 1.9 illustra la costruzione completa dell'ottaedro duale di un cubo con il metodo di Dorman Luke.

Per concludere questa trattazione del duale di un cubo è utile evidenziare che, come già osservato, le tre costruzioni proposte forniscono lo stesso ottaedro duale, a meno di similitudini: lo si può constatare esaminando la figura 1.10, dove abbiamo rappresentato il cubo e una faccia per ciascuno degli ottaedri ottenuti con i tre metodi.

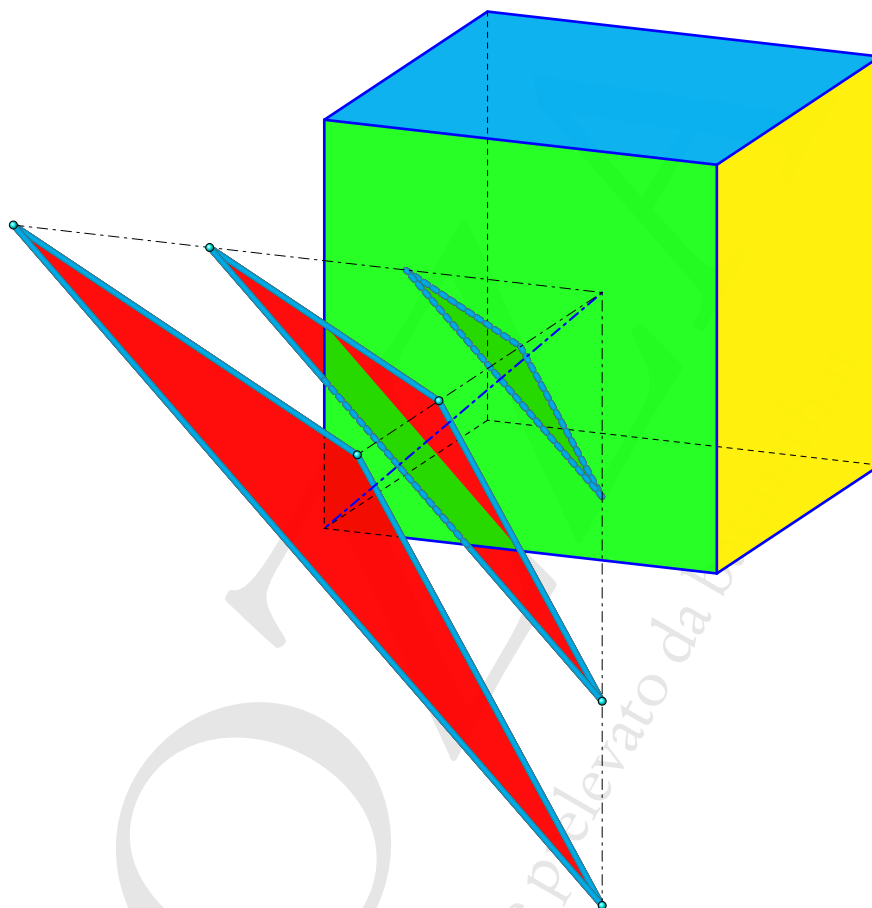


Figura 1.10.: *Confronto tra tre facce corrispondenti degli ottaedri duali di un cubo costruiti a partire dalle tre sfere caratteristiche del cubo*

Come abbiamo più volte osservato il tetraedro è duale di se stesso. In realtà tutte le piramidi godono di questa proprietà di autodualità: un esempio è proposto nella figura 1.11, dove abbiamo considerato come solido di partenza una piramide retta avente come base un pentagono regolare e in cui dunque le facce laterali sono triangoli isosceli. Una tal piramide ammette una sfera circoscritta e il duale, che è ancora una piramide dello stesso tipo, è stato costruito relativamente a questa sfera.

Accenniamo anche al fatto, di cui ci occuperemo di nuovo in seguito in particolare trattando i solidi di Johnson, che le facce delle piramidi rette a base regolare, che sono triangoli isosceli tra di loro uguali, possono ridursi a triangoli equilateri solo nel caso di base triangolare (tetraedro regolare), quadrata o pentagonale: la prima è un solido platonico, le altre due sono solidi di Johnson, ovvero solidi a facce

regolari, ma distinti dai solidi di Archimede. Queste piramidi sono strettamente legate ai poliedri regolari, in particolare le piramidi a base quadrata possono essere ottenute sezionando un ottaedro regolare, mentre quelle a base pentagonale sezionando un icosaedro regolare.

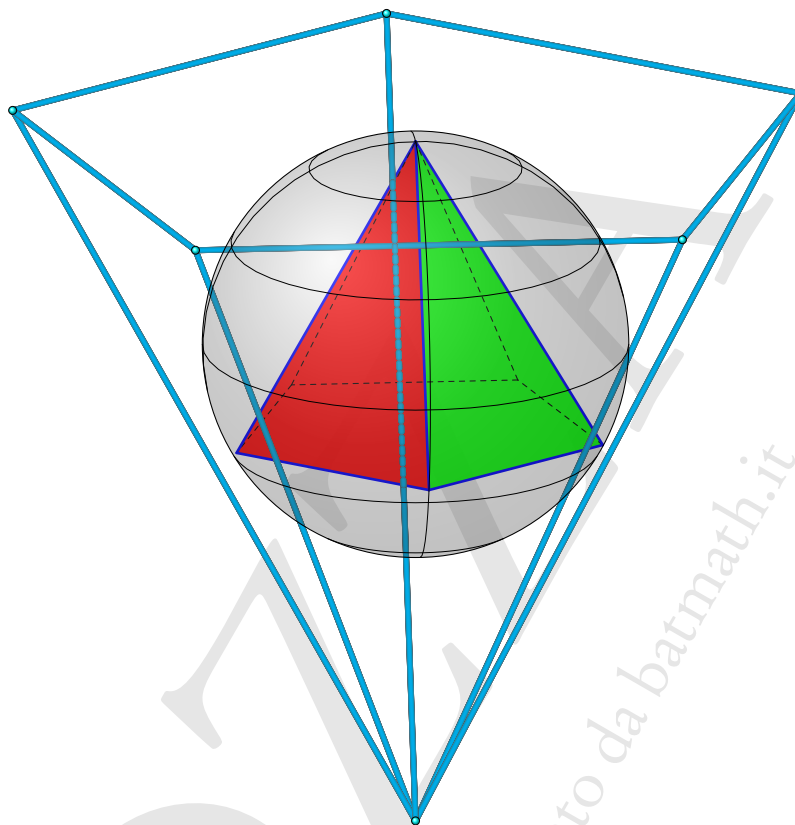


Figura 1.11.: *Piramide duale di una piramide pentagonale, a partire dalla sfera circoscritta*

In questo capitolo abbiamo trattato la dualità dal punto di vista *metrico*, concetto che ci pare più adatto nel caso dei poliedri. Esiste anche un concetto complementare, detto *dualità combinatoria*, e definito come segue, almeno nel caso dei poliedri.

Due poliedri P e Q si dicono combinatoriamente duali se esiste una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi di Vertici, Spigoli e Facce tale che:

1. ad un vertice, spigolo o faccia di P corrisponda una faccia, spigolo e vertice di Q ;
2. una faccia di P incide su un dato spigolo se e solo se il corrispondente spigolo di Q incide sul corrispondente vertice di Q e viceversa scambiando i ruoli di P e Q .

Per i poliedri convessi un tale duale è ottenuto scegliendo un vertice all'interno di ogni faccia e poi considerando il cosiddetto *involutro convesso* di questi vertici, ovvero il più piccolo poliedro convesso che ha quei vertici.

In ogni caso risulta evidente dalla definizione che due poliedri tra di loro combinatoriamente duali hanno lo stesso numero di spigoli mentre si scambiano i numeri di vertici e facce: questo fatto rimane vero anche per i poliedri metricamente duali, secondo la definizione che ne abbiamo dato.

2. Poliedri semiregolari: prismi e antiprismi

I poliedri regolari sono solamente cinque, in quanto le condizioni di regolarità loro richieste sono molto stringenti. Per costruire figure più complesse si possono “affievolire” alcune delle condizioni richieste per i solidi platonici. La prima idea, dovuta, secondo quanto riferito da Pappo di Alessandria nel libro quinto delle *Collezioni Matematiche*, ad Archimede, è quella di rinunciare a richiedere che le facce poligonali siano tutte congruenti, consentendo anche due o più tipi di poligoni regolari e non più un unico tipo, mantenendo però la condizione di uniformità dei vertici: intorno ad ogni vertice i poligoni si susseguono nello stesso ordine, anche se queste condizioni non sono esclusive. Una definizione più precisa richiede che in un poliedro semiregolare per ogni coppia di vertici esista una isometria dello spazio che conserva il poliedro e scambia tra di loro i due vertici. Naturalmente si mantiene anche la condizione di convessità.

Se si accetta questa possibilità, si può dimostrare che si ottengono tre famiglie di solidi, di cui le prime due sono infinite, mentre la terza, di gran lunga la più importante, è costituita solo da tredici solidi. Si tratta delle seguenti tre famiglie.

1. I prismi retti con basi regolari e facce laterali quadrate.
2. Gli antiprismi retti con basi regolari e facce laterali a triangoli equilateri
3. I poliedri *Archimedei*, che sono quelli scoperti, appunto, da Archimede.

Questi solidi sono chiamati *semiregolari*, anche se alcuni riservano questa denominazione solo ai solidi di Archimede.

A differenza dei solidi platonici, per questi solidi non esiste una sfera inscritta, mentre esistono sia la sfera circoscritta che l'intersefera, e come abbiamo già detto questo sarà importante per le considerazioni legate alla dualità.

Ci occuperemo ora con maggiore dettaglio dei prismi e degli antiprismi, nonché dei loro duali, rimandando uno studio accurato dei solidi archimedei ai capitoli successivi.

2.1. Prismi e loro duali

Un *prisma* (convesso) è un poliedro avente due facce poligonali identiche, una semplicemente traslata rispetto all'altra, dette *basi*, i cui vertici corrispondenti sono congiunti a 2 a 2 da spigoli (paralleli alla direzione di traslazione delle facce), che concorrono a formare i parallelogrammi delle *facce laterali*.

Il prisma è detto *retto* se le facce sono rettangoli, ovvero se la traslazione di una base per ottenere l'altra avviene perpendicolarmente al piano della base stessa. Il numero di lati del poligono di base si chiama *ordine* del prisma.

Quando in un prisma retto le basi sono *poligoni regolari* e le facce laterali sono *quadrati*, si ottiene un poliedro semiregolare con due poligoni regolari di n lati e n facce quadrate: i vertici sono uniformi e in

ogni vertice si susseguono due quadrati e un poligono regolare di n lati. Chiamiamo i prismi di questo tipo prismi *uniformi*, seguendo la denominazione di Coxeter.

Ricordiamo che si usa invece chiamare *prisma regolare* un prisma retto con base un poligono regolare. Si tenga però presente che un tal prisma non è in genere un poliedro semiregolare né, naturalmente, regolare.

Esiste un unico prisma uniforme che sia anche un poliedro regolare, ed è il cubo: esso può essere considerato un prisma in tre modi diversi, a seconda di quali copie di quadrati opposti sono considerati basi.

La figura 2.1 illustra una prisma convesso a base quadrangolare nelle due versioni: prisma retto e prisma non retto.

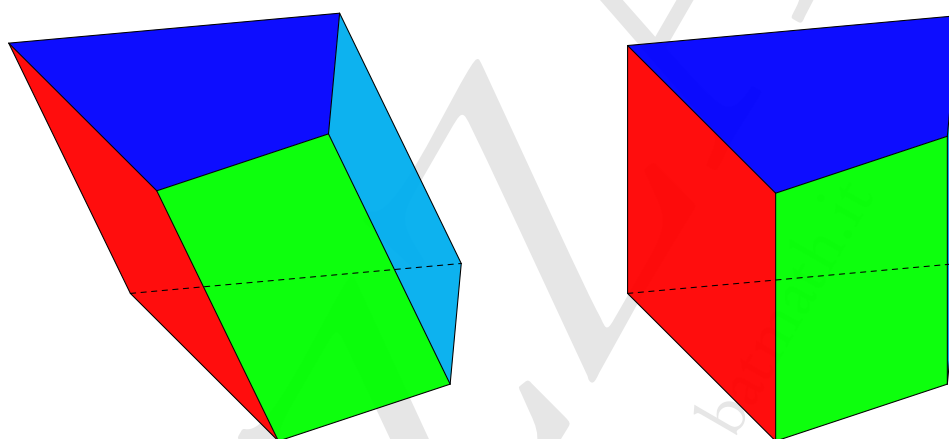


Figura 2.1.: Prisma a base quadrangolare non retto (a sinistra) e retto (a destra)

Si possono considerare anche prismi aventi per basi poligoni non convessi, e saranno naturalmente poliedri non convessi. Anche in questo caso si possono considerare prismi retti e prismi non retti. Per estensione si può anche considerare la situazione in cui le basi sono poligoni intrecciati. La figura 2.2 mostra due esempi: un prisma concavo obliquo a base quadrangolare e un prisma retto avente per base un pentagramma regolare.

Per tornare ai prismi uniformi è evidente che la loro famiglia è infinita, in particolare per ogni numero $n \geq 3$ esiste un ben definito prisma uniforme che ha come basi due poligoni di n lati. La figura 2.3 mostra i primi tre prismi, di cui il secondo è, come già detto, anche un poliedro regolare, ovvero il cubo.

Questi solidi hanno chiaramente una sfera circoscritta e, in ragione del fatto che gli spigoli sono tutti uguali, anche un'intersfera con lo stesso centro, ma non anche una sfera inscritta (escluso ovviamente il caso del cubo).

Per costruire il duale si può dunque usare una di queste due sfere e, come visto precedentemente, è particolarmente vantaggioso il metodo di Dorman Luke basato sull'intersfera. La figura 2.4 mostra questa costruzione nel caso del prisma triangolare: come si può notare si ottiene una *bipiramide*, in questo caso con "base interna" (non visibile!) regolare e facce triangolari isosceli identiche. Il fatto che le facce siano identiche è il duale della proprietà di uniformità dei vertici, di cui abbiamo già parlato.

La figura 2.5 illustra, limitatamente al risultato finale, il caso del prisma pentagonale. Per gli altri prismi il risultato è analogo. Poiché il duale del duale è il solido di partenza, da qui possiamo anche

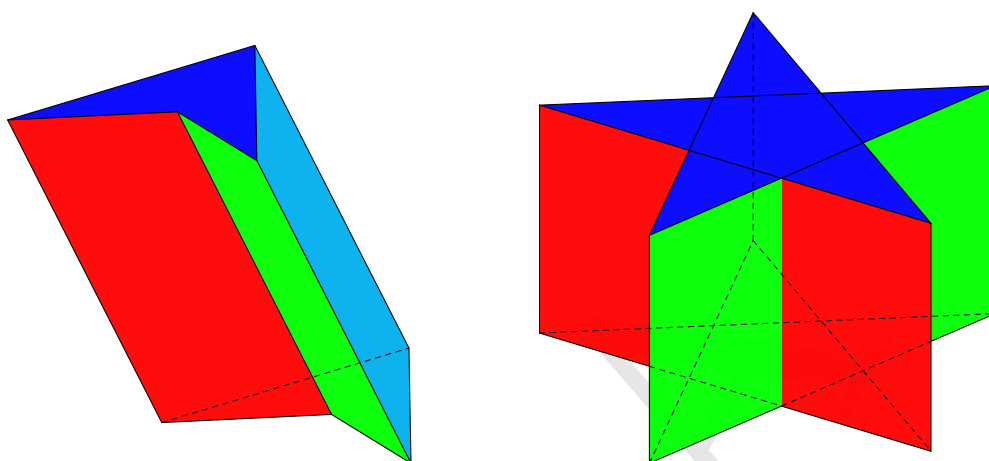


Figura 2.2.: Un prisma concavo a base quadrangolare e un prisma retto con base un pentagramma regolare

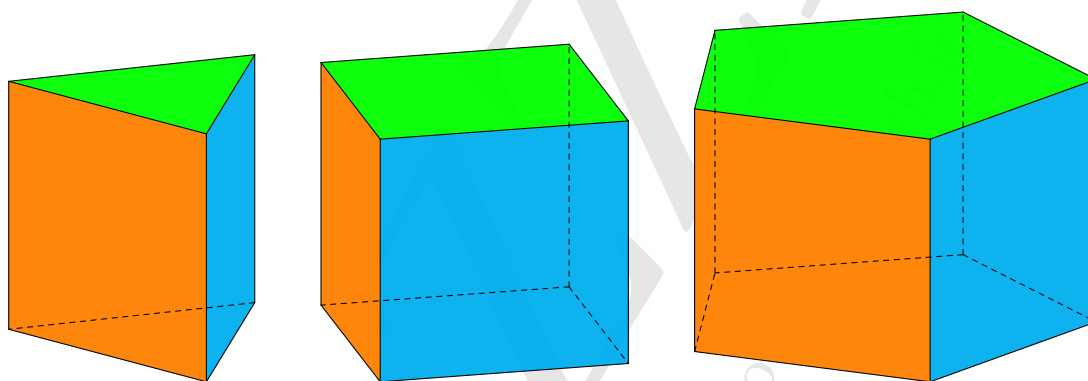


Figura 2.3.: Prismi uniformi: triangolare, quadrato, pentagonale

concludere che il duale di una bpiramide è un poliedro a forma di prisma, come già osservato nella costruzione legata alla figura 1.3. Se la bpiramide ha le facce tutte uguali, il suo duale è proprio un prisma uniforme.

Le bpiramidi, in ragione della loro forma, sono anche note come *diamanti*, anche se i diamanti non hanno di regola forme così semplici come le bpiramidi uniformi; molto più spesso sono l'unione per le basi di due piramidi rette a base regolare, ma con diverse altezze. Innumerevoli altre forme sono possibili, ma il modello di base è quasi sempre una bpiramide.

Le bpiramidi fanno parte, assieme ai trapezoidi e ai solidi di Catalan di cui parleremo in seguito, della famiglia dei *poliedri semiregolari di seconda specie*: si tratta dei poliedri tali che, per ogni coppia di facce, esiste un'isometria dello spazio che conserva globalmente il poliedro e trasforma una faccia in un'altra, in maniera perfettamente "duale" ai solidi semiregolari, dove al posto delle facce si considerano i vertici; i poliedri semiregolari e i poliedri semiregolari di seconda specie sono infatti proprio tra di loro duali. Tra le proprietà interessanti dei poliedri semiregolari di seconda specie (anche se non esclusive) ci sono il fatto che le facce sono isometriche tra di loro e che esiste una sfera inscritta.

Per concludere questa discussione sui prismi e loro duali osserviamo che, come il cubo è l'unico

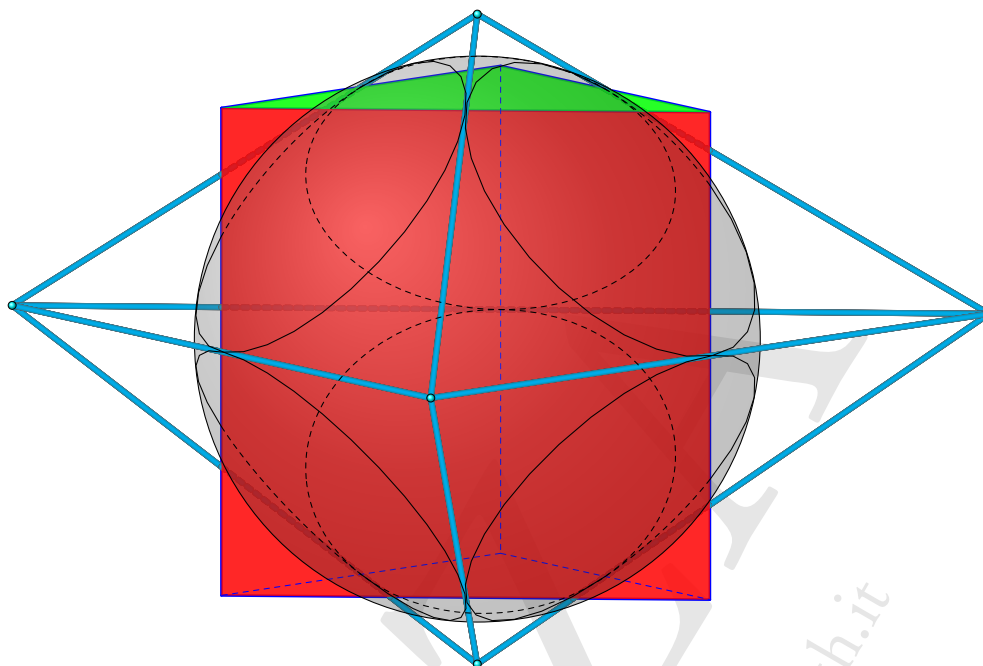


Figura 2.4.: *Costruzione del duale di un prisma triangolare uniforme, con il metodo di Dorman Luke*

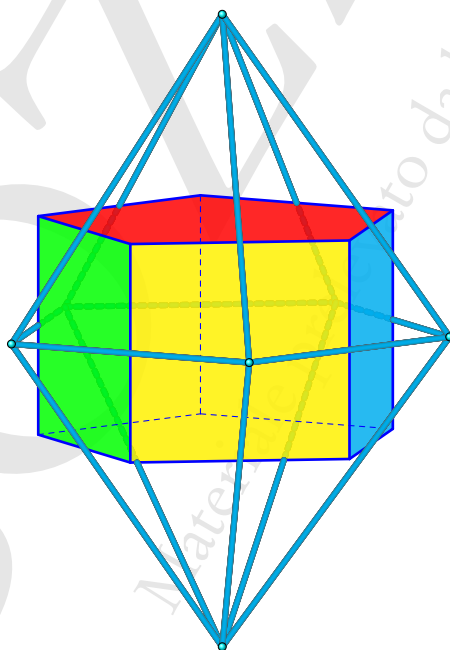


Figura 2.5.: *Il duale di un prisma pentagonale uniforme, costruito a partire dall'intersfera*

prisma che sia anche un poliedro regolare, così l'ottaedro è l'unica bipyramide che sia anche un solido regolare.

2.2. Antiprismi e loro duali

Riprendiamo in esame la costruzione di un prisma, in particolare di un prisma a basi regolari, e immaginiamo di sottoporre la prima base non solo ad una traslazione ma anche ad una rotazione, attorno alla perpendicolare per il centro, di un angolo pari alla metà dell'angolo al centro individuato da ogni lato della base stessa; successivamente colleghiamo i vertici delle due basi a formare dei triangoli anziché dei parallelogrammi: il solido che si ottiene si chiama *antiprisma*. Se l'antiprisma è retto (traslazione perpendicolare alla base di partenza) e la traslazione viene scelta in modo che i triangoli laterali siano equilateri, il solido che si ottiene è un poliedro semiregolare, di cui chiamiamo ancora *ordine* il numero di lati dei poligoni di base. Esso avrà $2n$ facce triangolari equilateri, oltre alle due facce regolari di base e i vertici saranno uniformi: in ognuno di essi convergono un poligono regolare di n lati e 3 triangoli equilateri, sempre nello stesso ordine. La figura 2.6 illustra la costruzione nel caso di un antiprisma a basi quadrate.

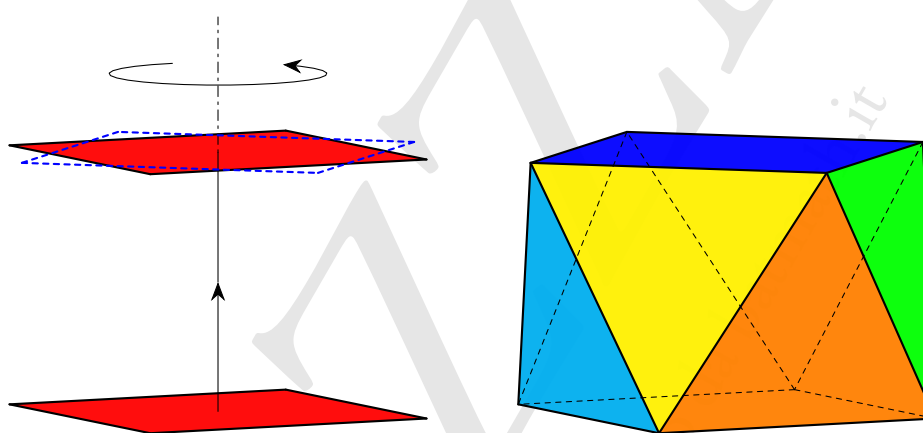


Figura 2.6.: Schema per la costruzione di un antiprisma a base quadrata

Come già per i prismi, anche tra gli antiprismi se ne trova uno solo, se si esclude il caso degenere di cui parleremo nel paragrafo 2.2.1, che è un solido regolare ed è quello con le basi più semplici possibili, ovvero triangolari: si tratta dell'ottaedro, come illustra la figura 2.7.

Gli antiprismi non hanno una sfera inscritta, hanno però sia una sfera circoscritta che un'intersfera: il duale canonico si può dunque costruire a partire da una di queste due sfere e, come già visto per i prismi, la costruzione più conveniente è quella di Dorman Luke. Ne proponiamo un esempio nella figura 2.8, relativa al caso dell'antiprisma quadrato.

I duali degli antiprismi, che sono anch'essi solidi semiregolari di seconda specie come i duali dei prismi, hanno facce tutte tra di loro congruenti e hanno una sfera inscritta, oltre all'intersfera comune con il corrispondente antiprisma duale.

Il nome più comune per questi duali è *trapezoedro*, anche se è un nome poco felice, in quanto le facce non sono trapezi. Molto più appropriato il nome *deltoedro*, in quanto le facce sono *deltoidi*⁽¹⁾ o *aquiloni*: non si deve però fare confusione con *deltaedro*, nome che è riservato a poliedri con facce triangolari

¹I deltoidi sono quadrilateri con due coppie di lati consecutivi uguali. Se i quattro lati sono addirittura uguali si ottiene un rombo o, come caso ancora più particolare, un quadrato.

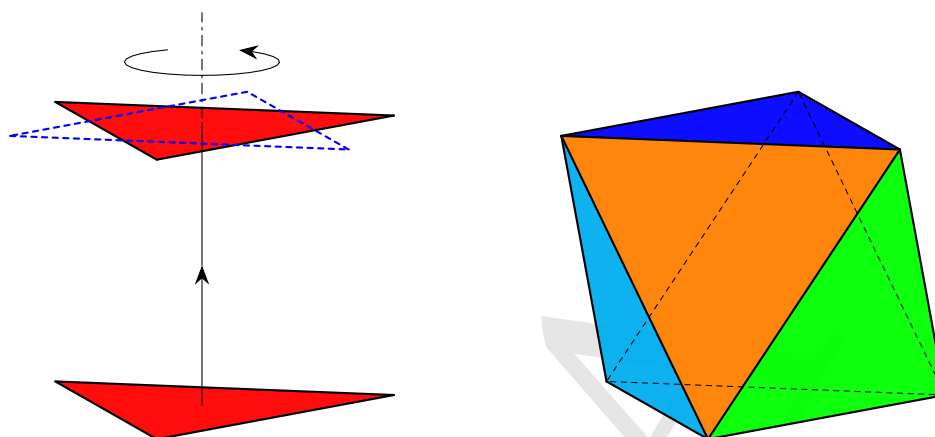


Figura 2.7.: *Costruzione dell'ottaedro come antiprisma triangolare*

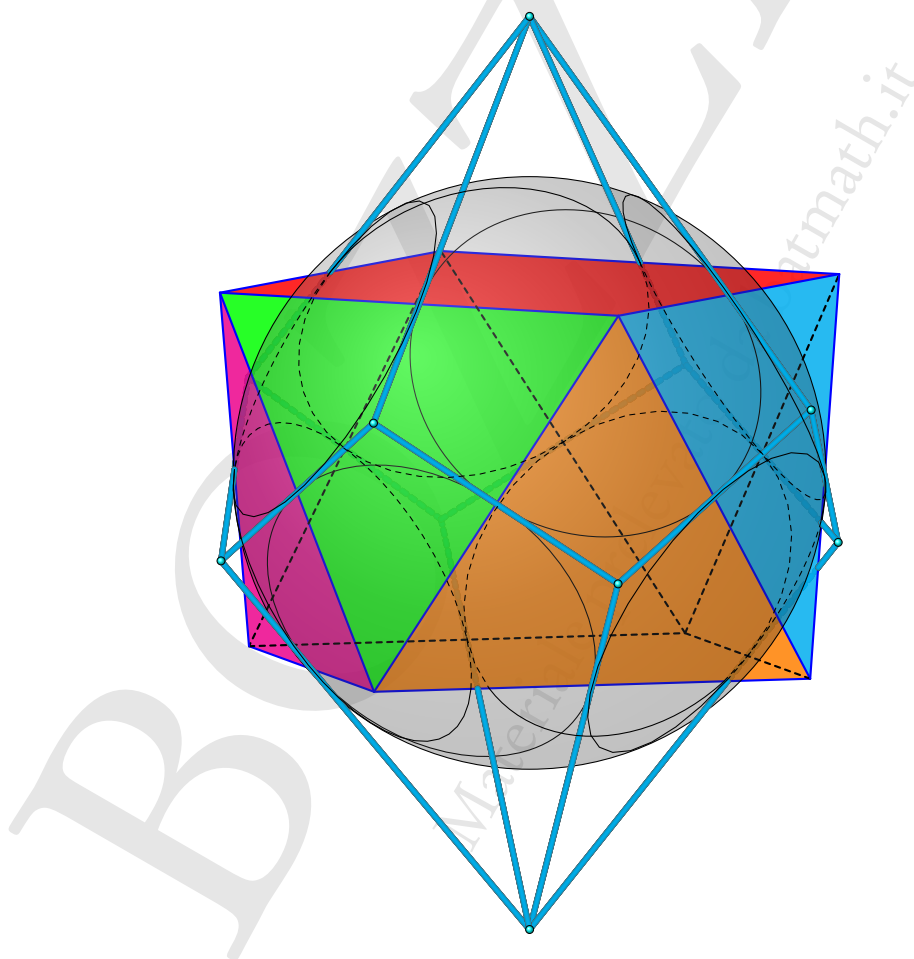


Figura 2.8.: *Costruzione del duale dell'antiprisma quadrato con il metodo di Dorman Luke*

(come il tetraedro, l'ottaedro, l'icosaedro). È anche utilizzato il nome di *antidiamanti*, in analogia con i diamanti, duali dei prismi.

L'unico antidiamante regolare è il cubo, duale dell'ottaedro visto come antiprisma: in questo caso i sei deltoidi delle facce si riducono a quadrati. La figura 2.9 illustra un cubo nella posizione più conveniente per interpretarlo come antidiamante.

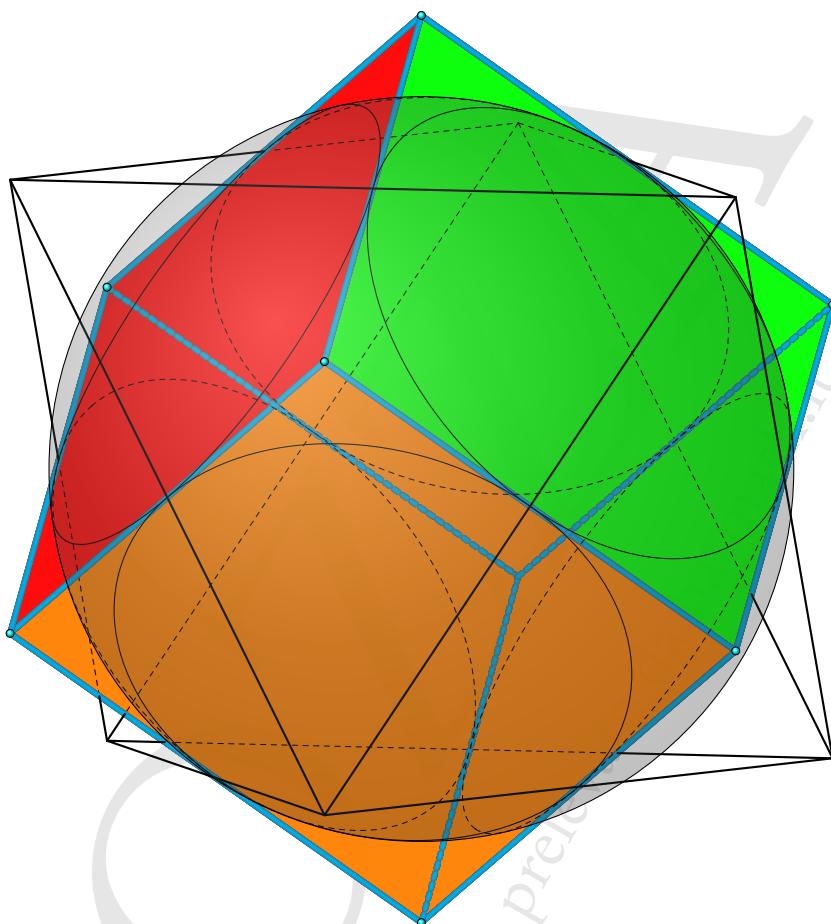


Figura 2.9.: *Il cubo come antidiamante dell'ottaedro*

2.2.1. Un antiprisma un po' speciale

Come abbiamo visto, i prismi e gli antiprismi sono originati da due basi poligonali traslate una rispetto all'altra ed eventualmente anche successivamente ruotate. Poiché il poligono con minor numero di lati è il triangolo, sia il prisma che l'antiprisma con minor numero di facce sono quelli a basi triangolari. In matematica è spesso utile però esaminare anche situazioni "limite", o "degeneri". In questo caso possiamo chiederci che cosa succede se "tiriamo un po' per i capelli" la definizione di poligono, consentendo anche poligoni con due soli lati, definiti nello stesso modo degli ordinari poligoni a tre o più lati: prendiamo due punti A e B e, a partire da A, costruiamo una "poligonale chiusa" che raggiunga B e successivamente

torni in A. Otterremo chiaramente un segmento \overline{AB} , percorso due volte, una figura che possiamo chiamare un *digono*. Fin qui niente di interessante. Possiamo però ora chiederci se, a partire da un digono e applicando la tecnica per costruire prismi o antiprismi uniformi si ottiene o no un solido: per il caso dei prismi la risposta è no, in quanto si ottiene semplicemente una sovrapposizione di due quadrati identici, ovvero ancora un poligono; diversa la situazione per gli antiprismi, nel qual caso si ottiene il tetraedro, detto in questo caso *antiprisma digonale*, come illustra la figura 2.10.

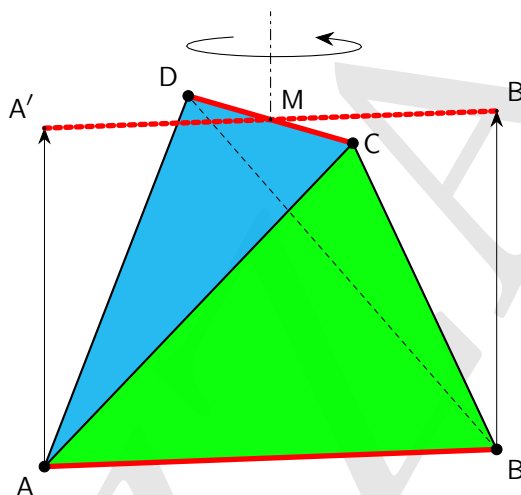


Figura 2.10.: Il tetraedro come antiprisma digonale

La “faccia” digonale AB viene prima tralata in $A'B'$, successivamente subisce una rotazione di 90° fino a raggiungere la posizione finale CD: infatti nella “faccia” DC l'angolo al centro è $\widehat{DMC} = 180^\circ$ e quindi la rotazione deve essere proprio di 90° . Interpretato in questo modo il tetraedro è proprio un antiprisma con 6 facce, 8 lati e 4 vertici. Il suo duale, che naturalmente come ben sappiamo sarà ancora un tetraedro, dovrà avere 4 facce a forma di aquilone, sempre 8 lati e 6 vertici.

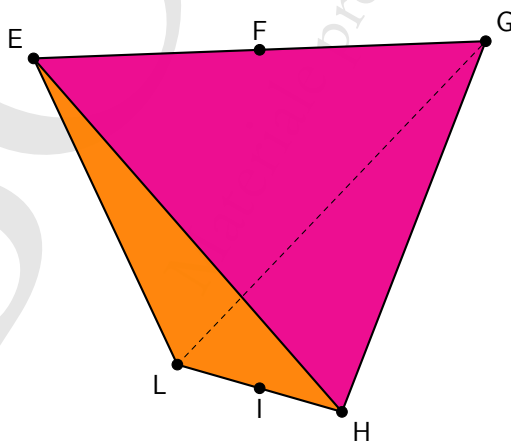


Figura 2.11.: Il tetraedro come antidiamente

In effetti, esaminando la figura 2.11, possiamo vedere come le facce siano in realtà degli aquiloni degeneri, in cui i lati corti sono uno sul prolungamento dell'altro, formando un triangolo, in cui però possiamo individuare 4 lati: uno dei tre lati va pensato come diviso in due da un vertice centrale. Siccome nella dualità ad ogni faccia deve corrispondere un vertice, in questo caso, sempre esaminando la figura 2.11, possiamo concludere che i vertici F ed I corrispondono alle "facce" DC e AB rispettivamente, E corrisponde alla faccia ACD, G alla faccia BCD, H alla faccia ABC e infine L alla faccia ABD.

Anche in questa situazione limite, tutte le proprietà della dualità sono rispettate!

Questa situazione limite evidenzia una proprietà grafica degli antidiamenti uniformi: nel duale costruito con il metodo di Dorman Luke, i vertici corrispondenti alle basi dell'antiprisma sono tanto più vicini alla base stessa, quanto più piccolo è l'ordine dell'antiprisma, come si può constatare esaminando le figure 2.8 e 2.9: se le basi sono addirittura dei "digoni" i vertici duali stanno proprio sulle facce stesse, come mostrano le figure 2.10 e 2.11. Per una ulteriore verifica proponiamo, nella figura 2.12, l'esempio relativo all'antiprisma ottagonale.

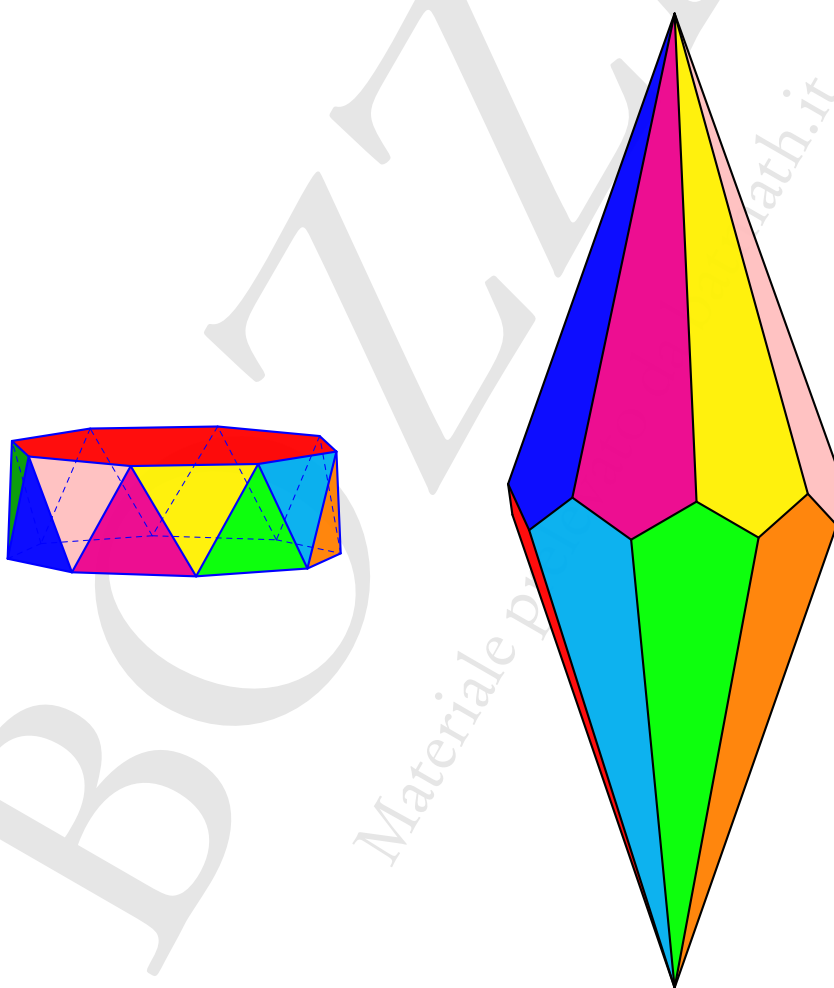


Figura 2.12.: *L'antiprisma ottagonale e il suo antidiamento duale*

2.2.2. Antiprismi non convessi

La costruzione considerata per gli antiprismi, in particolare retti, può essere applicata anche a poligoni concavi o stellati. Proponiamo come esempio il caso delle basi costituite da pentagrammi regolari, in due versioni: nella prima, vedi la figura 2.13, le due basi sono semplicemente traslate una rispetto all'altra, nella seconda sono anche ruotate come comunemente si fa con gli antiprismi, vedi la figura 2.14. A proposito di queste due costruzioni è interessante osservare che con questo tipo di poligoni si possono ottenere antiprismi anche senza bisogno di sottoporre ad una rotazione la faccia traslata.

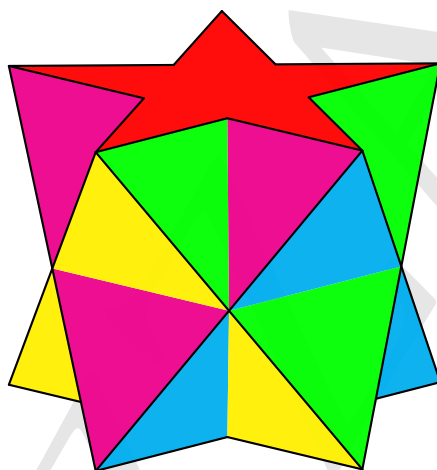


Figura 2.13.: *Antiprisma con basi a pentagramma, non ruotate*

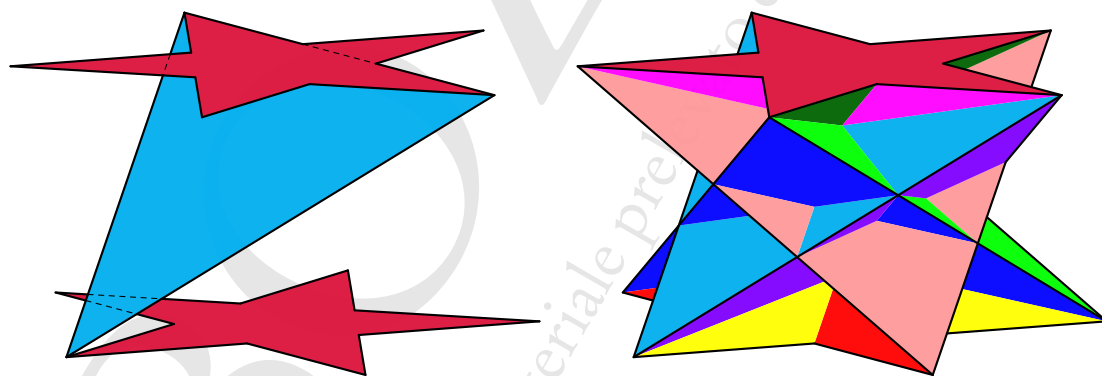


Figura 2.14.: *Antiprisma con basi a pentagramma, ruotate. Schema della costruzione, a sinistra, e figura completa, a destra*

Si noti come nelle due situazioni, in cui i poligoni di base sono identici, l'altezza dei solidi sia diversa: il tipo di costruzione utilizzato richiede che le facce laterali siano triangoli equilateri, che nel secondo caso sono molto più inclinati rispetto alla verticale che non nel primo.

3. Poliedri di Archimede: un po' di storia

3.1. Prima di Keplero

Tra i poliedri semiregolari i più interessanti, nonché più famosi, sono i tredici poliedri *Archimedei*. Come abbiamo già detto, essi furono molto probabilmente scoperti da Archimede, anche se non ci è pervenuto alcuno scritto originale: l'unica informazione che abbiamo è dovuta a Pappo.

Pappo è un matematico greco di grande importanza, non solo per le scoperte e i teoremi a lui attribuibili, ma anche, e forse soprattutto, per il fatto che è solo tramite Pappo che abbiamo notizia di numerosi risultati dei suoi predecessori. In effetti dopo la morte di Apollonio (verso l'inizio del secondo secolo prima di Cristo) la geometria classica non aveva più trovato nessun sostenitore. Tuttavia, durante il regno di Diocleziano (284-305), visse ad Alessandria uno scienziato animato dallo spirito che aveva posseduto i grandi matematici greci: Pappo di Alessandria, appunto. Verso il 320 compose un'opera dal titolo *Synagoge*⁽¹⁾, tradotta e pubblicata nel 1588 a Pesaro da Federico Commandino con il titolo di *Collectiones mathematicae*. Essa è suddivisa in otto libri di cui il primo è andato completamente perduto e il secondo perduto in parte. Per quanto ci riguarda in questo momento, è dal Libro V delle *Collectiones* che siamo venuti a sapere della scoperta da parte di Archimede dei tredici poliedri semiregolari, scoperta di cui altrimenti non avremmo avuto notizia. Tuttavia è da segnalare il fatto che Archimede non menziona questi poliedri in nessuna delle altre sue opere a noi pervenute e quindi non abbiamo certezze sulla paternità.

Pappo presenta esclusivamente un elenco dei solidi di Archimede raggruppandoli per numero di facce. La sua descrizione è riportata di seguito.

Benché molte figure solide con ogni tipo di facce possano essere concepite, quelle che appaiono regolarmente formate sono degne di maggiore attenzione. Queste includono non solo le cinque figure che si trovano nel divino Platone, cioè il tetraedro e il cubo, l'ottaedro e il dodecaedro e in quinto luogo l'icosaedro, ma anche i solidi, in numero di tredici, che furono scoperti da Archimede e sono racchiusi da poligoni equilateri e equiangoli, ma non simili.

La prima è una figura di otto facce, racchiusa da quattro triangoli e quattro esagoni (*tetraedro troncato*). Dopo vengono tre figure di quattordici basi, la prima racchiusa da otto triangoli e sei quadrati (*cubottaedro*), la seconda da sei quadrati e otto esagoni (*ottaedro troncato*), e la terza da otto triangoli e sei esagoni (*cubo troncato*). Dopo queste vengono due figure di ventisei basi, la prima racchiusa da otto triangoli e diciotto quadrati (*rombicubottaedro*), la seconda da dodici quadrati, otto esagoni e sei ottagoni (*cubottaedro troncato*). Poi

¹Il più antico manoscritto a noi pervenuto di quest'opera, datato intorno al decimo secolo, si trova presso la Biblioteca Vaticana (Codex vaticanus Graecus 218) e un fotografia di due pagine del manoscritto si può consultare al link <http://www.ibiblio.org/expo/vatican.exhibit/exhibit/d-mathematics/images/math08a.jpg>. È interessante la consultazione di queste due pagine, almeno per visualizzare alcune antiche costruzioni geometriche.

vengono tre figure di trentadue basi, la prima racchiusa da venti triangoli e dodici pentagoni (*icosidodecaedro*), la seconda da dodici pentagoni e venti esagoni (*icosaedro troncato*) e la terza da venti triangoli e dodici decagoni (*dodecaedro troncato*). Poi viene una figura di trentotto basi, racchiusa da trentadue triangoli e sei quadrati (*cuvo camuso*). Dopo queste vengono due figure di sessantadue basi, la prima racchiusa da venti triangoli, trenta quadrati e dodici pentagoni (*rombicosidodecaedro*), la seconda da trenta quadrati, venti esagoni e dodici decagoni (*icosidodecaedro troncato*). E dopo queste infine viene una figura di novantadue basi, racchiusa da ottanta triangoli e dodici pentagoni (*dodecaedro camuso*).

In tempi moderni il primo studio sistematico di questi poliedri è dovuto a Keplero, in *Harmonices mundi* del 1629, anche se tutti, con la sola eccezione del dodecaedro camuso, erano già stati a vario titolo considerati da diversi artisti rinascimentali. I nomi fondamentali a questo proposito sono Piero della Francesca, Luca Pacioli, Albrecht Dürer e Daniel Barbaro, dei quali ci occuperemo brevemente utilizzando in gran parte l'importante l'articolo di Field [24] sulla storia dei poliedri archimedei prima di Keplero.

Le opere di questi autori che interessano la storia dei poliedri archimedei sono qui di seguito elencate.

- *Trattato d'abaco e Libellus de quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca; questi libri sono stati pubblicati a stampa con il nome del loro autore solo nel ventesimo secolo: prima erano circolati solo sotto forma di manoscritto.
- *De divina proportione* di Luca Pacioli, del 1509.
- *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* di Albrecht Dürer, pubblicato nel 1525 e successivamente in una nuova edizione leggermente espansa nel 1538.
- *La Practica della Perspectiva* di Daniel Barbaro del 1568-1569.

A questi nomi va necessariamente aggiunto quello di Wentzel Janmitzer autore del magnifico *Perspectiva Corporium Regularium* del 1568 (appena prima del lavoro di Barbaro) con molte illustrazioni di grande pregio: è in questo testo che compare la prima illustrazione del rombicosidodecaedro, successivamente ripresa da Daniel Barbaro.

La tabella 3.1, sostanzialmente riprodotta dall'articolo di Field [24], riassume la storia della riscoperta dei solidi Archimedei prima di Keplero, con indicazione, per ciascun solido, di quale dei quattro autori citati l'ha trattato. L'ordine dei solidi è quello usato da Keplero in *Harmonices mundi*.

Piero della Francesca è soprattutto noto come uno dei più grandi pittori del Rinascimento, dopo la generazione di Masaccio e del Beato Angelico. I due libri che ci interessano (in entrambi ci sono questioni relative ai poliedri) sono opere della tarda maturità quando Piero, ormai ricco e famoso, si ritirò a Borgo San Sepolcro, nella sua città natale. Interessante la storia del *Libellus*: quasi certamente Luca Pacioli conobbe il manoscritto e lo pubblicò con il suo nome come terza parte del *De Divina*, con il titolo di *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporium regularium et dependentium active perscrutationis D. Petro Solferino principi perpetuo populi florentini a M. Luca Paciolo Burgense minoritano particulariter dicatus*. La prima segnalazione di questo plagio si trova nelle *Vite* di Vasari e da allora questo volume è stato oggetto di accese dispute, non ancora concluse.

La prima pubblicazione del testo completo di Piero, basata sul manoscritto ritrovato nel 1903 nella Biblioteca Vaticana, avviene nel 1915, nelle Memorie della Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche della Reale Accademia dei Lincei, ad opera di Girolamo Mancini, con l'inequivocabile titolo *L'opera «De corporibus regularibus» di Pietro Franceschi detto Della Francesca, usurpata da fra Luca Pacioli*. Un'altra

Tabella 3.1.: *I poliedri Archimedei prima di Keplero*

Poliedro	Piero	Pacioli	Dürer	Barbaro
cubo troncato	✓		✓	✓
tetraedro troncato	✓	✓	✓	✓
dodecaedro troncato	✓			✓
icosaedro troncato	✓	✓		✓
ottaedro troncato	✓	✓	✓	✓
cubottaedro troncato			✓	✓
icosidodecaedro troncato				✓
cubottaedro	✓	✓	✓	✓
icosidodecaedro		✓		✓
rombicubottaedro		✓	✓	✓
rombicosidodecaedro				✓
cubo camuso			✓	
dodecaedro camuso				

opera di Piero, non strettamente riguardante i poliedri è *De prospectiva pingendi*, il primo trattato sulla prospettiva, estesamente utilizzato da tutti gli autori successivi, sempre consultando i manoscritti o i sostanziosi estratti pubblicati in *La Pratica della prospettiva* di Daniel Barbaro. Il *Libellus* è il primo trattato geometrico del Rinascimento in cui vengono sviluppati i problemi di costruzione e di calcolo relativi ai poliedri, mai prima disegnati in forma stereometrica: il codice manoscritto pervenutoci non è opera diretta di Piero, come invece sono le correzioni, aggiunte e, soprattutto, i disegni.

Il *Trattato d'abaco* contiene moltissima geometria, molto più di quella che normalmente si trovava sui testi scolastici del tempo, e questo è sicuramente legato alle preferenze e alla formazione di Piero. Secondo le abitudini del periodo la trattazione procede quasi esclusivamente con esempi ed esercizi risolti, senza praticamente alcun testo discorsivo. Consideriamo per esempio il caso del cubottaedro, solido considerato da tutti i quattro autori citati e che per questo tratteremo con un certo dettaglio per poter fare i confronti. Esso, in Piero, compare senza alcun preavviso, subito dopo un problema che conduce al tetraedro troncato. Riportiamo integralmente il testo e la soluzione del problema, preso dall'edizione della Domus Galileiana di Pisa del 1970 a cura di Gino Arrighi.

Egl'è uno corpo sperico, che il suo diametro è 6 bracci; vogloci mectere dentro una figura de quatordecim base, 6 quadrate et 8 triangulare, de equali lati. Domando quanto sirà ciascuno lato.

Questa tale figura se cava del cubo, perché à 6 base et 8 anguli; che, tagliando i suoi 8 anguli, fa 14 base, cioè cusì. Tu à il cubo ABCD.EFGH, deidi ciascuno lato per equali: AB in puncto I, et CD in puncto L, BD in puncto K, AC in puncto M, et AG in puncto N, GH in

puncto O, HB in puncto P, HF in puncto Q, FD in puncto R, FE in puncto S, EC in puncto T, EG in puncto V. Tira una linea da T ad P passante per lo cintro K, la quale po' quanto po' le do' linee TN et NP, perché N è angulo recto oposto a la linea TP; et l'angulo P e l'angulo T tocchano la circumferentia de la sfera, et simili fanno gl'altri anguli M, K, I, L, O, Q, N, S, V, R. Adunqua TP è diametro de la sfera, che è 6, e la posança sua è 36 che è quanto po' le do' linee NP et NT, dunqua è ciascuna radici de 18. Et se NP è radici de 18, la quale po' quanto po' le do' linee NI et IP, dunqua NI è radici de 9; e cusì IP che sono lati de la figura de 14 base contenuta da la sfera che il suo diametro è 6. Si che di' che il lato de la figura de 14 base, 6 quadrate e 8 triangulare, è radici de 9 che è 3.

La figura 3.1 riproduce, a sinistra, (quasi) esattamente l'illustrazione di Piero per questa costruzione, illustrazione che mostra una proiezione prospettica, quasi corretta, del cubottaedro. Infatti Piero costringe⁽²⁾ i punti M, L, K, R, Q, O, N ad appartenere a un cerchio, che dovrebbe essere la traccia della sfera in cui il poliedro è inscritto: in realtà la cosa non è possibile per una qualunque proiezione prospettica. Tuttavia la figura è significativa e chiara per gli scopi a cui è destinata: anche la presenza della circonferenza è giustificata dal fatto che Piero vuole rendere evidente il fatto che il poliedro è inscritto in una sfera, cosa che era la richiesta di base del problema. Nell'originale di Piero i punti sulla figura sono nominati a volte con lettere maiuscole, a volte con minuscole: abbiamo preferito mantenere la convenzione attuale con lettere tutte maiuscole. La stessa figura, a destra, mostra una corretta proiezione prospettica in cui i punti M, L, K, R, Q, O, N risultano appartenere ad un'ellisse.

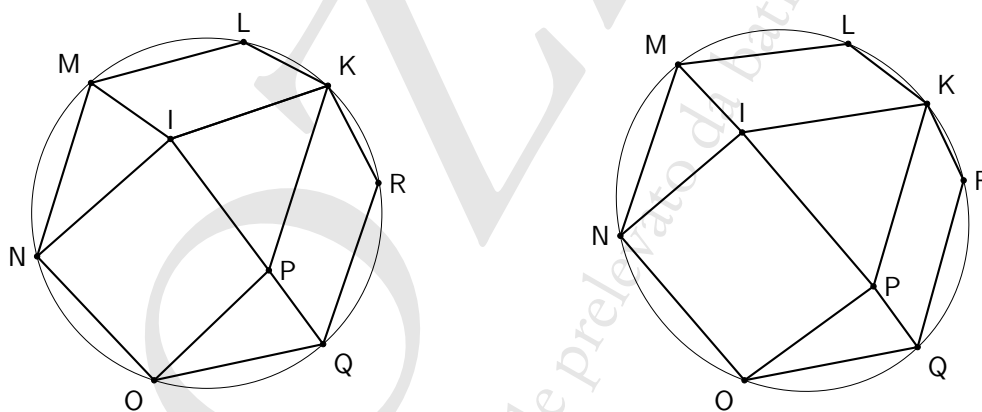


Figura 3.1.: Riproduzione, a sinistra, della figura originale di Piero della Francesca relativa alla costruzione del cubottaedro. A destra la stessa figura in una proiezione prospettica corretta

La figura 3.2 mostra i dettagli della stessa costruzione a partire dal cubo, in una proiezione parallela. La dimostrazione di Piero procede molto sinteticamente e dà per scontate molte cose. Innanzitutto i vertici della costruenda figura ottenuti prendendo i punti medi degli spigoli del cubo devono stare su una sfera, che è la sfera di 6 “bracci” di diametro che è il punto iniziale del problema. Successivamente i punti P e T sono diametralmente opposti e il triangolo TNP è retto in N, come pure il triangolo NIP che è retto in I; dunque $TP^2 = NP^2 + NT^2$ e $NP^2 = NI^2 + IP^2$: è questo il significato di “... po' quanto po'...”. Si tratta tuttavia di cose quasi evidenti e su cui giustamente Piero non si dilunga inutilmente. Si noti in

²Nel manoscritto originale si vede ancora il buco lasciato dalla punta del compasso utilizzato per disegnare il cerchio.

questa figura, dove è riportata la nomenclatura di Piero, che le lettere dei poligoni non sono elencate in ordine orario o antiorario: per il quadrato superiore del cubo noi diremmo “il quadrato ABDC”, visto come sono disposte le lettere, in Piero invece si parla del quadrato ABCD. Lo stesso si può osservare nella *Pratica della Perspectiva* di Barbaro.

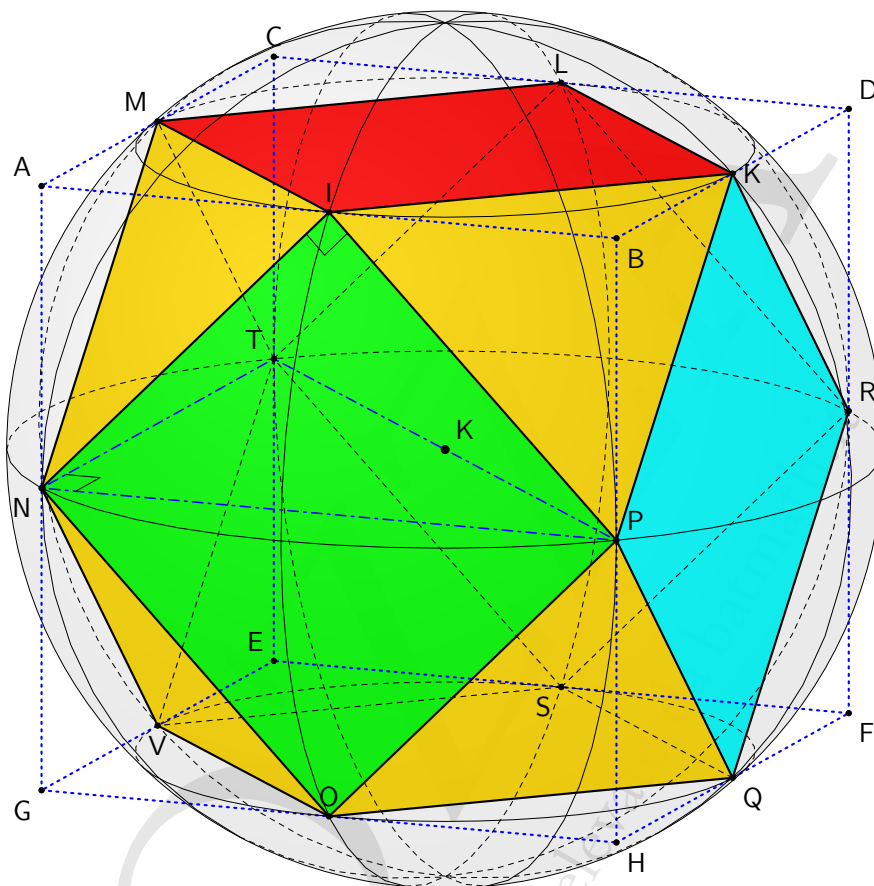


Figura 3.2.: *Illustrazione della costruzione del cubottaedro, secondo le indicazioni di Piero della Francesca*

Per quanto riguarda la *Divina Proportione* di Luca Pacioli in essa si trovano le tavole di Leonardo⁽³⁾ relative a ben sei solidi Archimedei, ovviamente non proposti esattamente con i nomi oggi in uso, tutti sia nella versione “solida” che in quella “vacua”: Vigintisex basium Planus (Rombicubottaedro), Duodecedron Abscisus (Icosidodecaedro), Ycocedron Abscisus (Icosaedro troncato), Octocedron Abscisus (Ottaedro troncato), Exacedron Abscisus (Cubottaedro), Tetracedron Abscisus (Tetraedro troncato).

Come preannunciato, vediamo il modo in cui Pacioli tratta il cubottaedro, per il quale non c’è un “capitolo” apposito, essendo esso inserito nella trattazione del cubo, quasi come un caso particolare: la vera comprensione è rimandata alla spettacolare immagine (solida o vacua) di Leonardo. In particolare

³La presentazione di Pacioli relativa a queste tavole suona sostanzialmente così: “supreme et legiadriissime figure de tutti li platonici et mathematici regulari et dependenti, ch’in prospectivo disegno non è possibile al mondo farle meglio, facte et formate per quella ineffabile sinistra mano, a tutte le discipline mathematici acomodatissima del principe oggi fra’ mortali, Lionardo nostro da Vinci”.

l'immagine del poliedro vacuo dovette destare profonda meraviglia al tempo della pubblicazione: nulla di simile era mai comparso in un trattato di geometria. Riportiamo integralmente la succinta descrizione.

Lo exacedron scapezzo o ver absciso piano similmente solido o ver vacuo ha 24 linee quali circa epso causano 48 anguli superficiali deli quali 24 sonno recti eli altri acuti. E haue 12 solidi e fia contenuto da 14 superficie o ver basi cioe da 6 quadrate e 8 triangule. E tutte le dicte linee sonno commune ale quadrate e ale trigone perche quelle 6 quadrate gionte asiemi angulariter de necessita causano 8 trianguli si commo fecero li exagoni nello tetracedron absciso. E nasci dal cubo tagliato uniforme nella mita de ciascun suo lato commo dimostra alochio la sua proposta forma materiale.

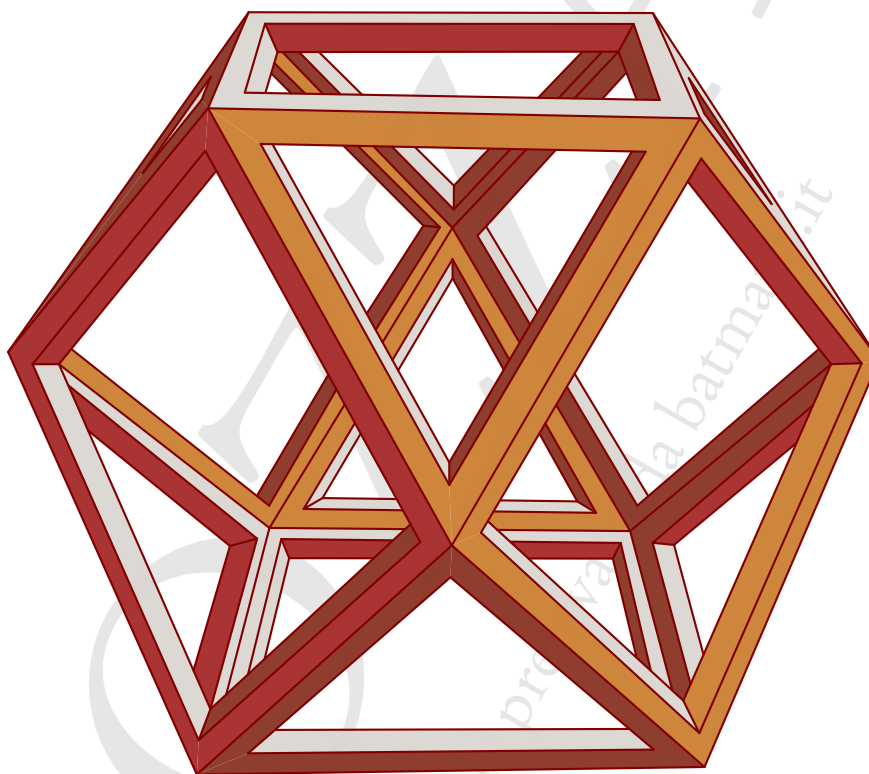


Figura 3.3.: Riproduzione dell'*Exacedron Abscisus Vacuus* di Leonardo, dal *De Divina Proportione*

Ancora a proposito di Luca Pacioli è doveroso ricordare il famoso ritratto che lo raffigura assieme a un giovane, che qualche critico ha identificato in Guidobaldo da Montefeltro anche se oggi la cosa pare alquanto dubbia, opera attribuita da alcuni a Jacopo de' Barbari, ma anche in questo caso senza alcuna certezza. L'opera è conservata al Museo di Capodimonte a Napoli. Sul tavolo, davanti a Luca Pacioli, campeggiano due libri (la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* dello stesso e gli *Elementi* di Euclide, aperti su due Proposizioni del XIII libro) e alcuni strumenti da disegno (compasso, gesso, cancellino, penna, squadra, calamaio e astuccio). Quello che però interessa per l'argomento che stiamo trattando è un corpo rifrangente scuro, appeso sulla sinistra e per metà riempito d'acqua: si tratta del *rombicubottaedro*, a ventisei facce: probabilmente, assieme al solido di Dürer, esso è uno dei due più

discussi poliedri della storia della pittura, che comunque ne comprende moltissimi. Sulla destra, sopra la *Summa* è anche appoggiato un dodecaedro regolare.

Albrecht Dürer nella sua opera “tecnica” non propone immagini prospettiche o assonometriche dei poliedri trattati, quanto piuttosto i loro sviluppi piani, e pare proprio che sia stato Dürer l’iniziatore di questa efficiente tecnica di rappresentazione dei poliedri. La descrizione è estremamente compatta e riporta solo il numero e il tipo delle facce. Per il cubottaedro essa recita così: «Il terzo solido irregolare ha sei facce quadrate e otto facce triangolari. Se lo sviluppo aperto viene piegato, da chiuso avrà dodici angoli e ventiquattro lati.» La figura 3.4 riproduce l’originale presente in *Underweisung*, dove porta il numero 37. Segnaliamo che in Dürer compare per la prima e unica volta, prima di Keplero, uno dei poliedri camusi, precisamente il cubo camuso.

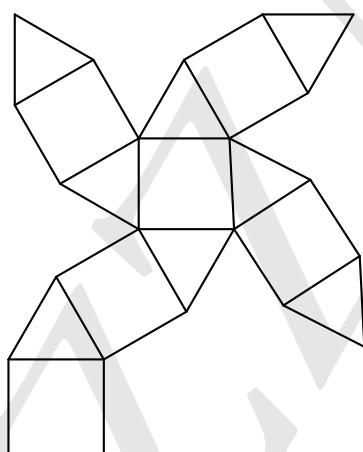


Figura 3.4.: Sviluppo piano del cubottaedro: riproduzione della figura originale realizzata da Dürer nell’*Underweisung*

Dürer è anche famoso per un poliedro troncato “enigmatico” presente nell’incisione *Melancholia I*: un cubo o, più probabilmente, un romboedro, troncato nel vertice superiore, e con il vertice inferiore forse troncato anch’esso oppure infisso nel terreno, riprodotto nella figura 3.5.

La *Pratica della Perspectiva* di Daniel Barbaro è un’ opera complessa e deve molto agli altri tre autori che abbiamo considerato, in particolare probabilmente a Piero della Francesca e al suo *De prospectiva pingendi*: in ogni caso per molti poliedri la presentazione è molto più dettagliata e precisa con ampio spazio dedicato anche alle tecniche costruttive. Per esempio per il cubottaedro Barbaro riconosce che esso può essere costruito sia a partire dal cubo che dall’ottaedro; lo stesso avviene per l’icosidodecaedro che è riconsociuto provenire sia dal dodecaedro che dall’icosaedro. Tranne che nei casi più complessi sono proposti sia lo sviluppo piano (la *spiegatura*) che una o più visioni prospettiche.

Anche per Barbaro riportiamo dalla *Pratica*, anche se solo nella parte iniziale in quanto i successivi dettagli tecnici sono abbastanza di difficile comprensione, la trattazione relativa al cubottaedro, con la riproduzione della figura fondamentale (la pianta) e la costruzione secondo le indicazioni fornite nel testo. La descrizione costituisce il capitolo VIII della parte terza dell’opera, quella che “tratta del modo di levare i corpi dalle piante”, ovvero di produrre l’immagine tridimensionale a partire dalla pianta. Il titolo del capitolo in questione è “DESCRIZIONE D’UNO CORPO, IL QUALE NASCE dal cubo, e dall’octoedro, e sua spiegatura”: il testo di Barbaro è organizzato in maniera molto più simile ai moderni testi, con una accurata divisione in parti e sottoparti, ciascuna con un proprio titolo.

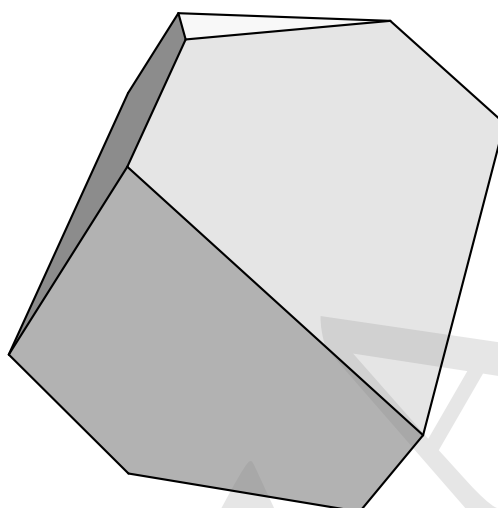


Figura 3.5.: Riproduzione del Solido troncato dall'incisione Melancholia I di Albrecht Dürer

Nasce dal cubo, e dall'octoedro uno corpo, il quale contiene in se le superficie di detti corpi, cioè, otto trianguli, e sei quadrati, e si fa tagliando i lati dell'uno e dell'altro in due parti uguali, e tirate le linee dal punto di mezzo di quelle parti a l'altro levando gli anguli sodi ai detti corpi al termine estremo di dette linee, in modo, che tagliando gli anguli sodi dell'octoedro, che sono sei, si formeranno sei superficie quadrate, e resteranno otto trianguli di lati uguali, e gli anguli del cubo, che sono otto trianguli formano otto trianguli, e gli restano sei quadrati, e questo corpo (come s'è detto) ha sei quadrati, e otto trianguli di lati uguali, ventiquattro anguli stretti, e altrettanti giusti piani, e dodici sodi formati da dritti, e larghi, e lati ventiquattro.

La spiegatura⁽⁴⁾ di questo corpo è nella figura 6 (3.6), Ma la pratica descrizione del perfetto è questa. Sia sopr'al centro⁽⁵⁾ A, fatto uno circulo, nel quale sia descritta una superficie di sei lati eguali B, C, D, E, F, G, e siano tratte le linee BE, BF, EF, CD, CG, e DG, le quali formeranno un'altra superficie di sei lati eguali HLMIKN, per li cui punti H, I, K, e L, M, N, siano formati i trianguli di lati uguali, HIK e LMN, e cosi si hauerà il perfetto, i cui otto trianguli sono, HIK, LMN, HCB, LBD, IDF, NFG, KGE, e CME, e i sei quadrati, CHEK, CMBL, BHDI, DLFN, FIGK, e GNEM, come è nella figura 7 (3.7). Nella quale è anche il digradato⁽⁶⁾.

Le altezze di questo corpo se egli si ha da posare con la basa triangulare, si trovano a questo modo. Sia la linea DF, partita egualmente nel punto O, e sia tratta la linea MO, la quale taglierà LN, in P, sia poi sopra O, posta la linea FDO⁽⁷⁾, e sopra P, centro, e ispacio DF,

⁴In realtà nella figura 6 di Barbaro c'è un errore in quanto i triangoli rappresentati sono nove e non otto: in ogni caso la figura da lui proposta è semplicemente una rotazione di quella di Dürer (spesso citato da Barbaro con il nome italianizzato di Alberto Durero).

⁵I nomi dei punti in Barbaro sono tutti in lettere minuscole; abbiamo preferito usare la convenzione moderna delle lettere maiuscole per una maggiore leggibilità.

⁶Il digradato è la costruzione prospettica tridimensionale, ricavata dalla pianta. La figura di Barbaro è solo un abbozzo: abbiamo preferito, nelle figure 3.8 e 3.9 proporre lo schema costruttivo e il risultato finale, in proiezione parallela.

⁷Ancora una volta FOD, come diremmo noi, è denominato invece FDO.

sia tratto il circolo il quale taglierà FD, nel punto R, e centro R, spacio RO, sia tratto l'arco, il quale taglierà FR, in Q, e quelli punti, O, R, Q, sono i piani, e le altezze del proposto corpo, perche...

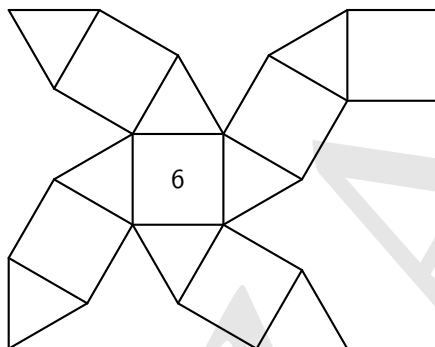


Figura 3.6.: Sviluppo (“Spiegatura”) del cubottaedro secondo Barbaro

La figura 3.7 riproduce la pianta per la costruzione dell’ottaedro secondo Barbaro, nell’ipotesi che il solido poggi su una base triangolare. La figura 3.8 mostra lo schema della illustrazione tridimensionale, costruito “levando” il corpo dalla pianta. La figura 3.9 illustra il risultato finale della costruzione, elementare dopo aver disegnato lo schema per “levatura”. Segnaliamo che le corrispondenti figure di Barbaro sono in proiezione prospettica, anziché in proiezione parallela come quelle qui proposte.

Per completezza ricordiamo anche che Daniel Barbaro propone la costruzione, anche qui con tutti i dettagli, dello stesso solido anche “posando con la basa quadrata”.

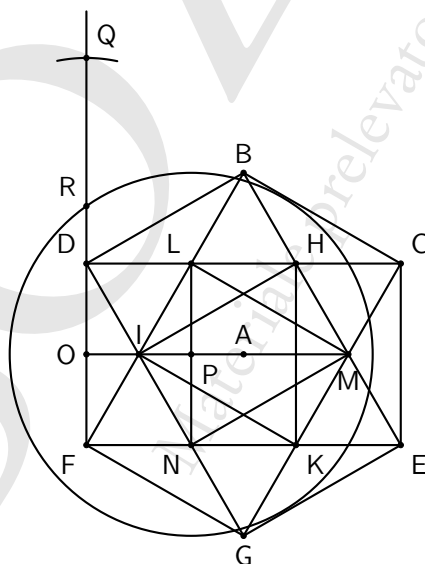


Figura 3.7.: Pianta base per la costruzione del cubottaedro, dalla Pratica della prospettiva di Daniel Barbaro

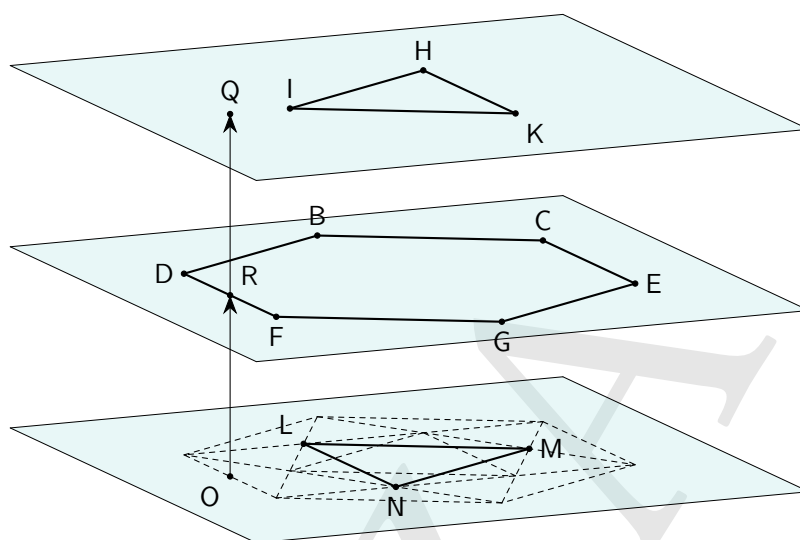


Figura 3.8.: Schema della costruzione del cubottaedro secondo le indicazioni di Daniel Barbaro, mediante “levatura” dalla pianta

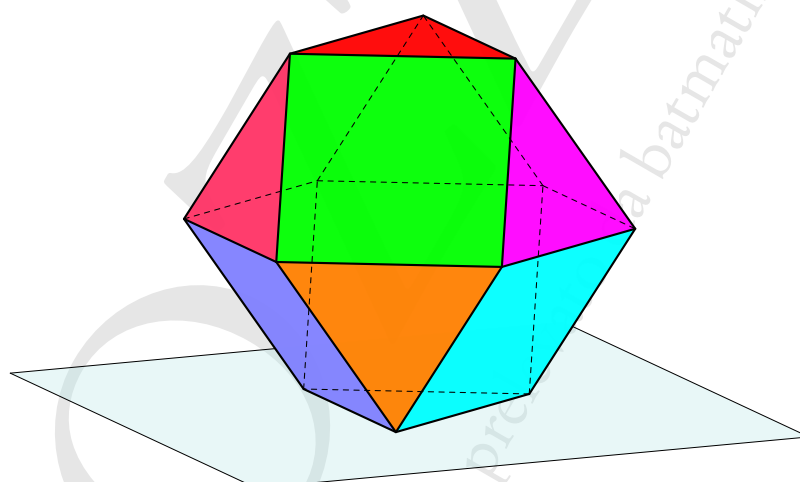


Figura 3.9.: Il cubottaedro, poggiato sulla base triangolare, costruito secondo le indicazioni di Daniel Barbaro

3.2. Keplero

Keplero, come già accennato, affronta il problema dei poliedri platonici e dei poliedri archimedei nell’*Harmonices mundi*, in particolare nel Liber II, dal titolo *De Congruentia Figurarum Harmonicarum*, dove il termine congruenza è spiegato dallo stesso Keplero nella prima definizione del libro per quanto riguarda il caso piano, nella quinta per il caso solido: “C’è congruenza nello spazio, e una figura solida, quando gli angoli di diverse figure piane formano un angolo solido, e figure regolari o semiregolari sono riunite insieme in modo da non lasciare alcun vuoto tra i lati delle figure...”.

Keplero tratta questi poliedri in maniera sistematica esaminando i vari tipi di “congruenza” che si

possono avere e le figure che si costruiscono di conseguenza: in sostanza, mentre i predecessori scoprono alcuni particolari poliedri, Keplero affronta lo studio con un approccio molto più matematico, definendo classi di poliedri e andando alla ricerca dei membri di queste classi. È per questo che riconosce che anche i prismi e gli antiprismi (da lui descritti per la prima volta) soddisfano le condizioni di semiregolarità richieste ai solidi di Archimede.

I solidi Platonici sono discussi nella XXV Propositio: *Congruentiae figurarum planarum ad solidam figuram formandam, perfectissimae et regulares, sunt quinque*. I solidi Archimedei sono invece discussi nella XXVIII Propositio: *Perfectae in solido congruentiae gradus inferioris species sunt tredecim; ex quibus tredecim oriuntur Archimedeae corpora*. Nelle due proposizioni intermedie Keplero introduce i due poliedri stellati che portano il suo nome, ovvero il piccolo e il grande dodecaedro stellato, e due poliedri con facce rombiche, precisamente il dodecaedro rombico e il triacontaedro rombico (trenta facce). I due poliedri stellati erano già stati illustrati precedentemente, ma Keplero per primo sembra riconoscere⁽⁸⁾ che essi soddisfano le condizioni di regolarità richieste per i poliedri regolari, tranne quella della convessità. Anche il triacontaedro rombico (o una sua approssimazione) era già stato illustrato da Janmitzer, ma certamente Keplero ha una più profonda conoscenza della sua struttura e delle sue relazioni con gli altri poliedri.

Nella citata proposizione XXVIII Keplero comincia ad esaminare le “congruenze” costituite solo da triangoli e quadrati, iniziando dal caso in cui in un vertice è presente un solo quadrato e due o tre triangoli oppure due quadrati e un triangolo. Con un primo vertice in cui concorrono un solo quadrato e due triangoli si può costruire solo una piramide che è la metà di un ottaedro, quindi in cui gli angoli solidi non sono tutti uguali. Se invece in un vertice concorrono un quadrato e tre triangoli si ottiene un antiprisma a base quadrata; se infine si hanno due quadrati e un triangolo si ottiene un prisma a base triangolare. Tutte queste figure sono considerate *imperfette*, secondo una precedente definizione dello stesso libro II. Occorre dunque aumentare il numero di figure concorrenti in un vertice.

Il primo caso considerato è quello in cui ci sono quattro triangoli e un quadrato (come fa notare ripetutamente Keplero la somma degli angoli di quattro triangoli e un quadrato è meno di quattro retti (360°), per cui si ottiene effettivamente un angolo solido. La figura che si ottiene è un triacontaedro (30 facce) che viene chiamata *Cubo simo*.

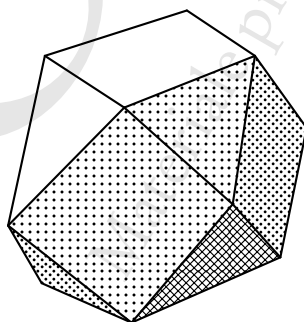


Figura 3.10.: Riproduzione del cubottaedro dall'*Harmonices mundi* di Keplero

⁸In effetti non appare certo che Keplero intendesse inserire questi poliedri nel novero dei regolari, anche se la cosa pare plausibile, soprattutto per il contesto in cui essi sono posti.

Successivamente i casi di cinque triangoli e un quadrato o quattro triangoli e due quadrati non si possono considerare perchè la somma degli angoli supera i (360°) . La costruzione può funzionare invece con due triangoli e due quadrati e la figura che si ottiene è un “tessareskaedecaedro” (quattordici facce), che viene chiamata *Cubottaedro*: di questa proponiamo, nella figura 3.10, anche la riproduzione dell’illustrazione presente nell’*Harmonices*. È interessante segnalare che nell’Introduzione al libro II Keplero dichiara esplicitamente che proporrà solo una breve discussione della “congruenza” delle figure, in quanto le dimostrazioni non sono per niente difficili e richiedono poco più che una illustrazione: in effetti non viene proposto in generale alcun dettaglio su come costruire i vari poliedri presentati.

Proseguendo nella descrizione Keplero nota che una figura con due triangoli e tre quadrati concorrenti in un vertice non può essere costruita, mentre l’ultima che rimane di questo tipo è quella con un triangolo e tre quadrati e il poliedro che si ottiene ha otto triangoli e diciotto quadrati riuniti a formare un icosiesaedro che viene chiamato *Cubottaedro rombo troncato* o *Rombicubottaedro*.

Successivamente Keplero, proseguendo con lo stesso stile, presenta gli altri dieci poliedri archimedei.

È da segnalare che l’opera di Keplero, seppure così moderna nello spirito e nell’impostazione, non è stata considerata nella sua importanza fino a tempi recenti e non sembra aver molto influenzato la storia dei poliedri.

Altri autori naturalmente si occuparono di poliedri di Archimede e qui citiamo solo Cartesio, che tuttavia trattò solo gli undici poliedri che si possono ottenere per troncatura e non i due solidi camusi.

3.3. Il poliedro di Miller

Nella storia dei poliedri archimedei entra di prepotenza un poliedro che, almeno secondo le moderne vedute, archimedeo non è: il cosiddetto *poliedro di Miller*, noto anche con il nome assegnatogli da Normann Johnson⁽⁹⁾ di *Girobicupola quadrata elongata*. Infatti fino a tempi abbastanza recenti, e comprendendo anche Keplero, i poliedri di Archimede erano ritenuti caratterizzati dal fatto di avere le facce tutte costituite da poligoni regolari di almeno due tipi e con i vertici uniformi, ovvero le facce distribuite allo stesso modo intorno ad ogni vertice. Ebbene, se si adotta questa definizione esiste un quattordicesimo poliedro che verifica tutte le condizioni richieste e che è rappresentato nella figura 3.11: esso ha 26 facce di cui otto triangolari equilateri e diciotto quadrate, esattamente come nel rombicubottaedro, e disposte intorno ai vertici esattamente come il rombicubottaedro ovvero con incidenza $\{3, 4, 4, 4\}$, tanto che viene anche chiamato *pseudo rombicubottaedro*. Il problema è che esso non gode delle stesse simmetrie richieste per i poliedri semiregolari, in particolare il fatto per ogni coppia di vertici esista una isometria dello spazio che conserva il poliedro e scambia tra di loro i due vertici.

La differenza appare visivamente evidente dal confronto dei due solidi proposti nella figura 3.11: nel poliedro di Miller esiste un solo anello, quello “equatoriale”, di otto quadrati e due vertici possono non avere la stessa posizione rispetto a questo anello, come ad esempio i due vertici A e B in figura. Non si riuscirà mai a prendere in mano il poliedro di Miller e rigirarlo in modo che il vertice A si vada a trovare nella posizione occupata da B (e il poliedro appaia invece nella stessa posizione). Nel vero poliedro di Archimede di questi anelli ce ne sono tre e ogni vertice appartiene a due anelli.

⁹La famiglia dei poliedri di Johnson costituirà oggetto di uno specifico fascicolo di questa raccolta.

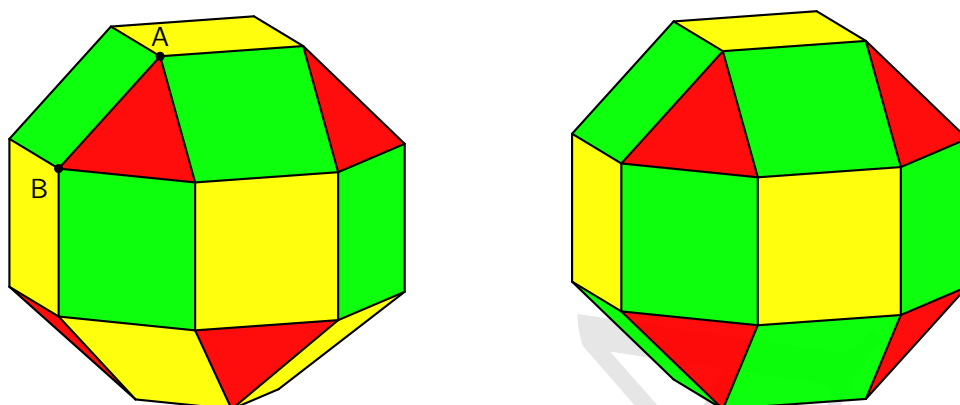


Figura 3.11.: Il poliedro di Miller o pseudo rombicubottaedro, a sinistra, e il rombicubottaedro, a destra

Non è chiaro se Keplero avesse trovato o no questo poliedro, su cui torneremo a suo tempo, tuttavia in una espressione contenuta nel suo libretto del 1611 *Strena seu de nive sexangula*⁽¹⁰⁾ si trova la seguente frase: «Quibus ego rhombis admonitus coepi in geometria inquirere, num quod corpus simile regularibus quinque et Archimedeis quatuordecim ex rhombis meris constitui possit: invenique duo, quorum alterum cognatum sit cubo et octaedro, reliquum dodecaedro et icosaedro (nam cubus ipse tertii vicem sustinet, cognatus duobus tetraedris invicem coaptatis), primum duodecim rhombis clauditur, alterum triginta». Come si può notare, in essa si fa riferimento a quattordici poliedri archimedei, oltre ai due poliedri a facce rombiche scoperti da Keplero. Tuttavia non abbiamo alcuna altra notizia in altri scritti di Keplero relativa a questo quattordicesimo poliedro archimedeo, mentre esistono precisi riferimenti nell'*Harmonices* relativi al dodecaedro e al triacontaedro rombico.

Esistono altri poliedri molto simili ai poliedri di Archimede, in particolare con esattamente le stesse facce, ma l'unico in cui è mantenuta la locale simmetria dei vertici è il poliedro di Miller: come già accennato, torneremo su questo problema nel fascicolo sui solidi di Johnson.

¹⁰Sul fiocco di neve a sei angoli: si tratta di un piccolo libretto che ebbe grande influenza sulla scienza della cristallografia nei due secoli successivi e dove viene formulata la cosiddetta *congettura di Keplero* sul modo più efficace di impacchettare le sfere.

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

4. Poliedri di Archimede e tetraedro circoscritto

4.1. Le caratteristiche dei solidi di Archimede

Ricapitoliamo ora le proprietà dei solidi di Archimede, già discusse nei capitoli precedenti.

Innanzitutto i poliedri di Archimede sono poliedri *semiregolari*, ovvero con le caratteristiche di seguito elencate.

1. Tutte le facce sono poligoni regolari di almeno due tipi.
2. Tutti i vertici hanno la stessa valenza (o grado), ovvero il numero di spigoli, e quindi di facce, che vi concorrono è identico.
3. Gli angoli solidi in ciascun vertice sono identici.
4. Tutti i vertici sono isometrici nel senso che le figure formate dalle semirette uscenti da ciascun vertice sono isometriche.
5. Tutti gli spigoli hanno la stessa lunghezza.

Se si esclude il caso del poliedro di Miller, vedi il paragrafo 3.3 del capitolo 3, basterebbero le tre condizioni seguenti:

1. essere un poliedro convesso a facce regolari, di almeno due tipi;
2. avere vertici identici, nel senso che vi concorrono facce dello stesso tipo e disposte nello stesso ordine;
3. essere inscrittibile in una sfera.

Nella categoria dei poliedri semiregolari rientrano, come già detto, i prismi, gli antiprismi e i tredici solidi di Archimede. In questo capitolo cominceremo ad occuparci in dettaglio di questi ultimi.

Nella tabella 4.1 ne elenchiamo le caratteristiche essenziali, ovvero il numero di facce, spigoli e vertici, nonché il tipo di incidenza nei vertici. Per quanto riguarda l'incidenza nei vertici usiamo la notazione standard: per esempio la scrittura $\{4, 6, 10\}$ significa che in ogni vertice convergono un quadrato, un esagono e un decagono regolari in quest'ordine.

Come si può notare alcuni dei poliedri della tabella 4.1 hanno due nomi.

Per quanto riguarda il cubo od ottaedro camusi e il dodecaedro od icosaedro camusi la cosa è logica perché questi solidi si possono ottenere sia a partire da cubo che dall'ottaedro e, rispettivamente, dal dodecaedro o dall'icosaedro.

Per quanto invece riguarda gli altri quattro casi il problema nasce dal fatto che i nomi di cubottaedro troncato e icosidodecaedro troncato (inizialmente proposti da Keplero e quindi mantenuti) sono impropri, in quanto questi solidi *non* si ottengono per troncatura dal cubottaedro e dall'icosidodecaedro, come vedremo, in quanto le troncature di questi due solidi non producono solidi semiregolari. In considerazione delle somiglianze del cubottaedro troncato con il rombicubottaedro e dell'icosidodecaedro troncato

Tabella 4.1.: *I poliedri archimedei e le loro caratteristiche essenziali*

Nome	Facce	Tipo di facce	Spigoli	Vertici	Incidenza
tetraedro troncato	8	4 triangoli 4 esagoni	18	12	{3,6,6}
cubo troncato	14	8 triangoli 6 ottagoni	36	24	{3,8,8}
ottaedro troncato	14	6 quadrati 8 esagoni	36	24	{4,6,6}
dodecaedro troncato	32	20 triangoli 12 decagoni	90	60	{3,10,10}
icosaedro troncato	32	12 pentagoni 20 esagoni	90	60	{5,6,6}
cubottaedro	14	8 triangoli 6 quadrati	24	12	{3,4,3,4}
icosidodecaedro	32	20 triangoli 12 pentagoni	60	30	{3,5,3,5}
rombicubottaedro/ piccolo rombicubottaedro	26	8 triangoli 18 quadrati	48	24	{3,4,4,4}
cubottaedro troncato/ grande rombicubottaedro	26	12 quadrati 8 esagoni 6 ottagoni	71	48	{4,6,8}
rombicosidodecaedro/ piccolo rombicosidodecaedro	62	20 triangoli 30 quadrati 12 pentagoni	120	60	{3,4,5,4}
icosidodecaedro troncato/ grande rombicosidodecaedro	62	30 quadrati 20 esagoni 12 decagoni	180	120	{4,6,10}
cubo camuso o simo/ ottaedro camuso o simo	38	32 triangoli 6 quadrati	60	24	{3,3,3,3,4}
dodecaedro camuso o simo/ icosaedro camuso o simo	92	80 triangoli 12 pentagoni	150	60	{3,3,3,3,5}

con il rombicosidodecaedro, sono attualmente più in uso i nomi *grande rombicubottaedro* e *grande rombicosidodecaedro*; per una maggiore precisione ai nomi del rombicubottaedro e del rombicosidodecaedro si premette l'aggettivo *piccolo*.

Trattando, nei capitoli successivi, la costruzione di questi solidi, vedremo anche il motivo dei vari nomi assegnati.

Anche per i poliedri semiregolari si possono considerare delle varianti “stellate”: si mantengono le caratteristiche dei poliedri semiregolari, tranne che non sono più convessi. Come già a suo tempo accennato i poliedri regolari stellati sono i quattro poliedri di Keplero-Poinsot; i poliedri semiregolari stellati, diversi dai prismi e dagli antiprismi, sono i 53 poliedri di *Badoureaux-Coxeter*: tratteremo questi poliedri, e in generale il problema delle *stellazioni*, in un apposito fascicolo di questa raccolta.

4.2. Il tetraedro circoscritto

In genere i solidi di Archimede sono individuati dal fatto di essere poliedri semiregolari diversi dai prismi e dagli antiprismi. Tuttavia esiste una caratteristica peculiare che li individua, sempre all’interno dei poliedri semiregolari, e di cui ci occupiamo in questo capitolo.

La caratteristica in questione, vedi Pugh [44] pag. 25, riguarda il fatto che dei solidi semiregolari solo quelli di Archimede possono essere inscritti in un tetraedro in modo che ciascuna delle quattro facce del tetraedro contenga una faccia del poliedro di Archimede. Nemmeno il poliedro di Miller soddisfa questo requisito, che potrebbe dunque essere usato come definizione di poliedro archimedeeo.

In sostanza, tenendo conto di questo fatto possiamo definire un poliedro di Archimede come un poliedro convesso con una simile successione di facce poligonali regolari di due o più tipi convergenti in ciascun vertice e che possa essere circoscritto da un tetraedro in modo che quattro facce del poliedro giacciono sulle facce del tetraedro.

Si noti che bisogna precisare che le facce poligonali devono essere di due o più tipi perché anche l’icosaedro platonico può essere iscritto in questo modo in un tetraedro (oltre ovviamente al tetraedro stesso!): si veda la figura 4.1.

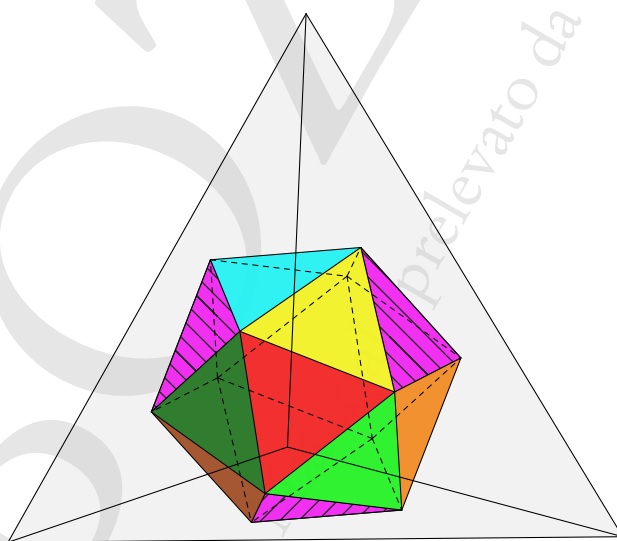
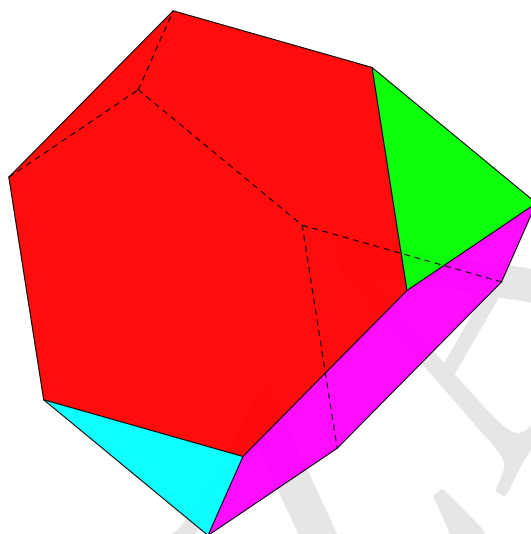
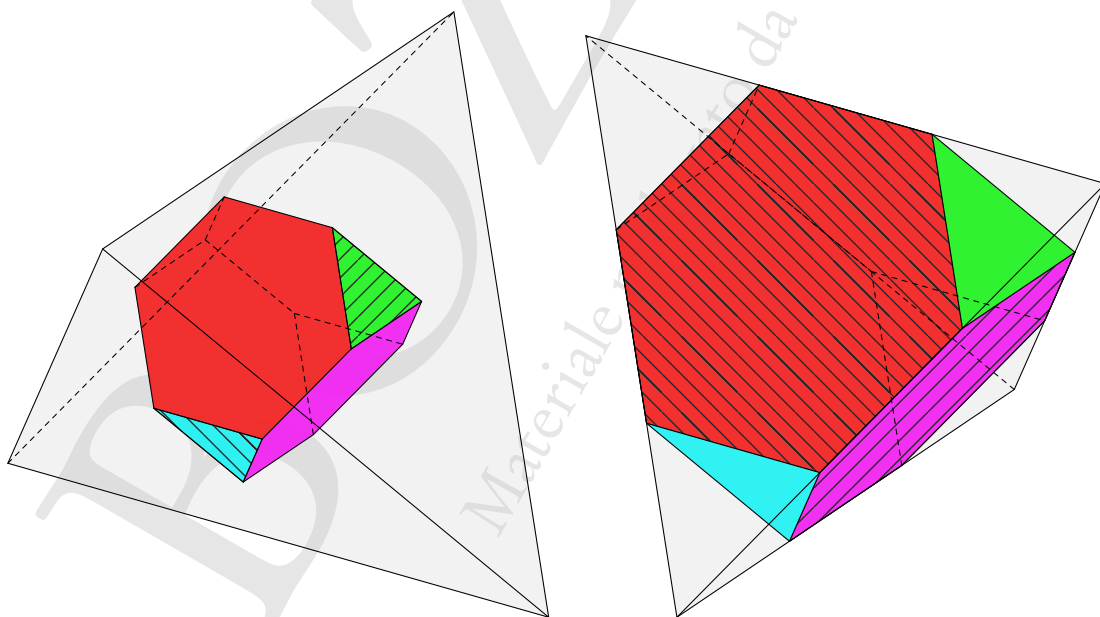


Figura 4.1.: *Icosaedro inscritto in un tetraedro*

Nelle figure che seguono proponiamo, per ciascuno dei tredici poliedri archimedeei, l’illustrazione del poliedro e di uno dei tetraedri circoscritti, due nel caso del tetraedro, di cui uno ovvio, quello a destra della figura 4.3

Figura 4.2.: *Tetraedro troncato*Figura 4.3.: *Tetraedro troncato con tetraedri circoscritti*

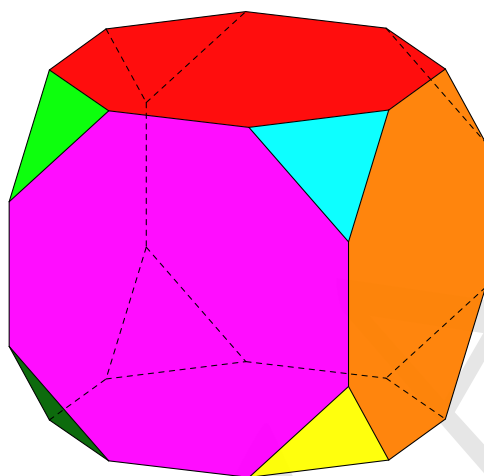


Figura 4.4.: *Cubo troncato*

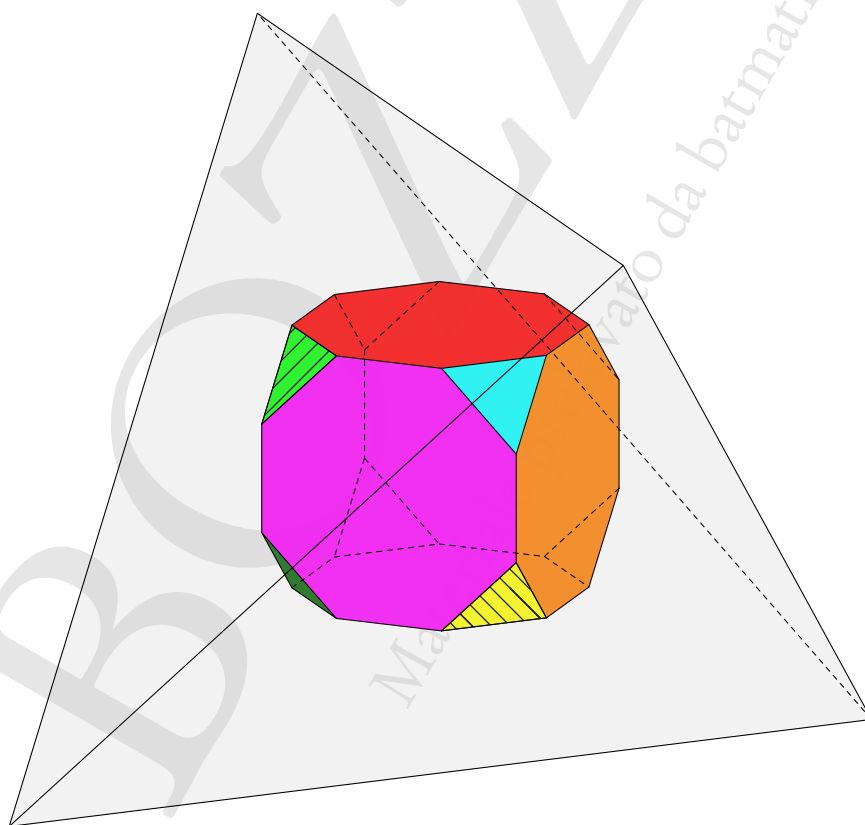


Figura 4.5.: *Cubo troncato con tetraedro circoscritto*

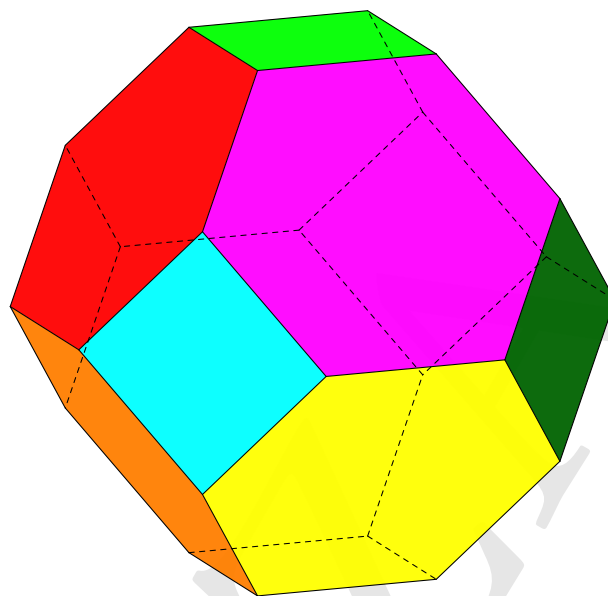


Figura 4.6.: *Ottaedro troncato*

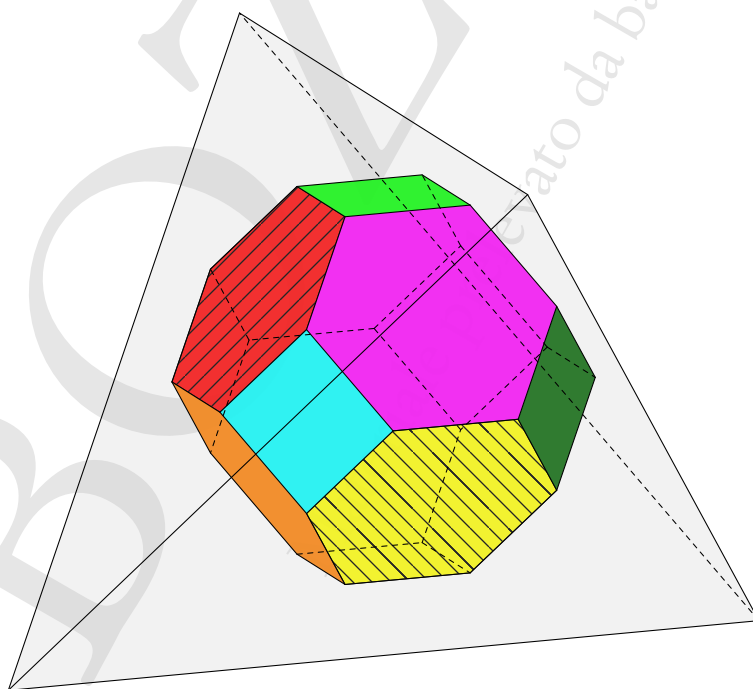


Figura 4.7.: *Ottaedro troncato con tetraedro circoscritto*

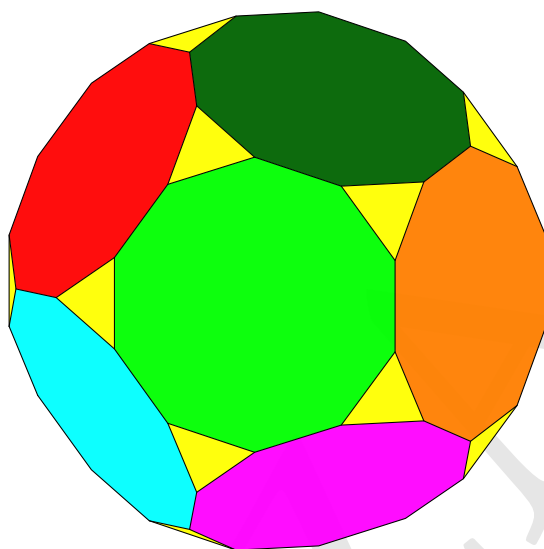


Figura 4.8.: *Dodecaedro troncato*

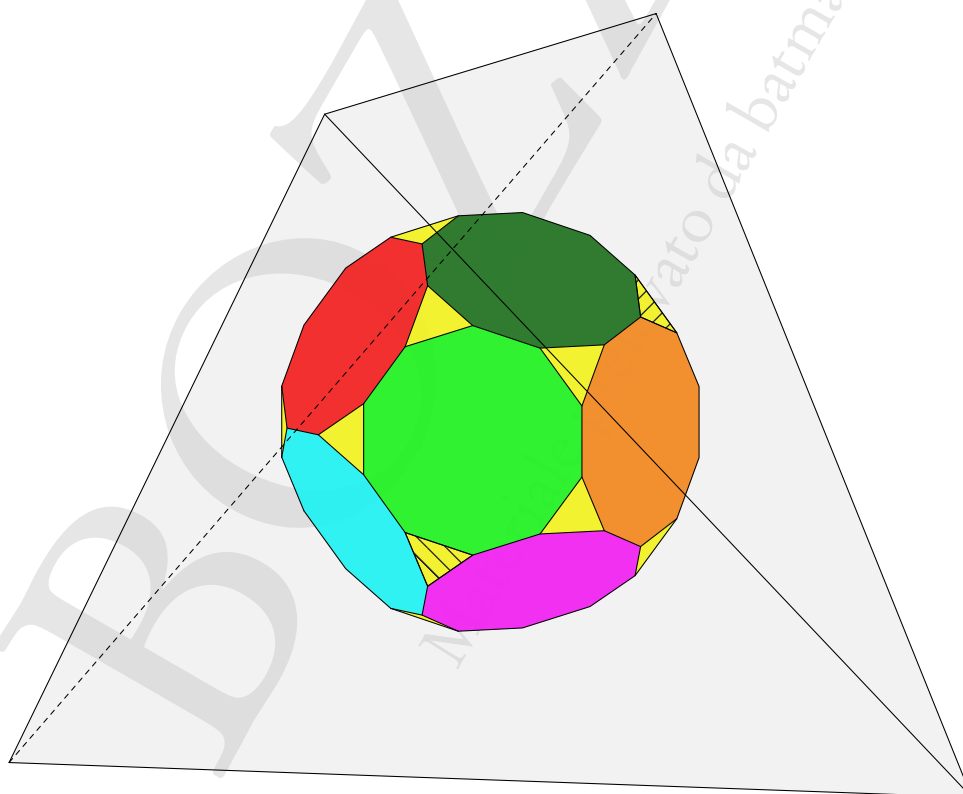


Figura 4.9.: *Dodecaedro troncato con tetraedro circoscritto*

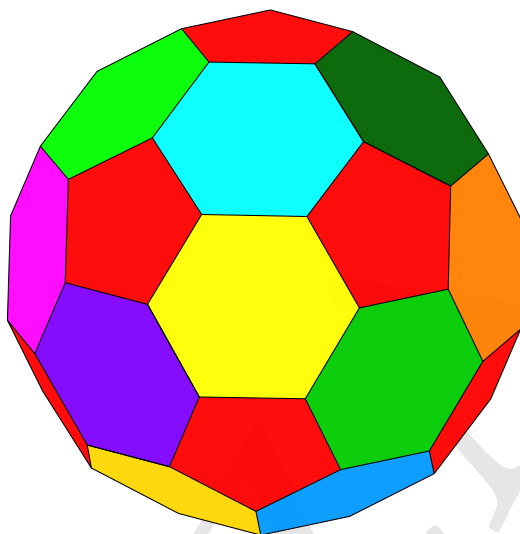


Figura 4.10.: *Icosaedro troncato*

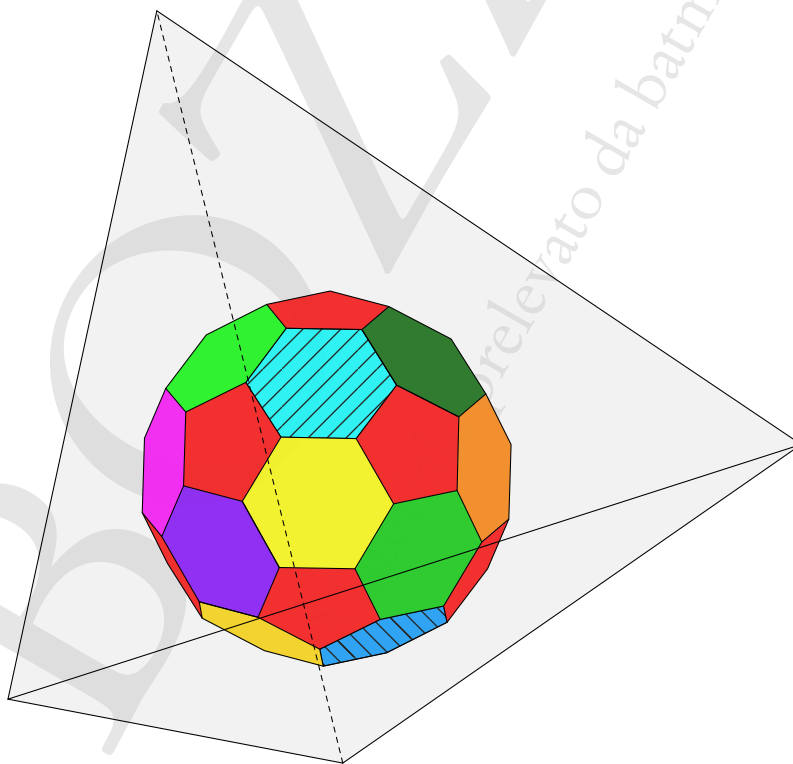


Figura 4.11.: *Icosaedro troncato con tetraedro circoscritto*

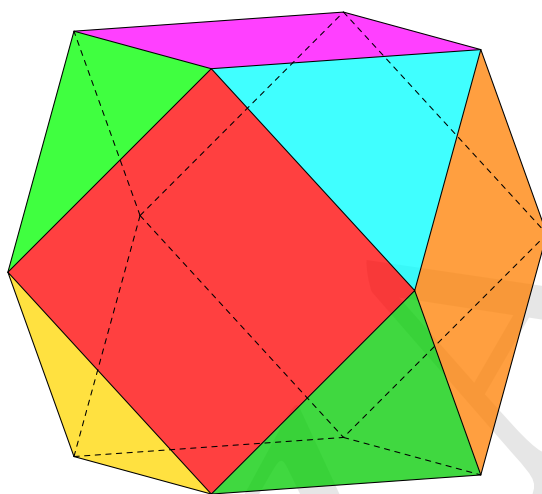


Figura 4.12.: *Cubottaedro*

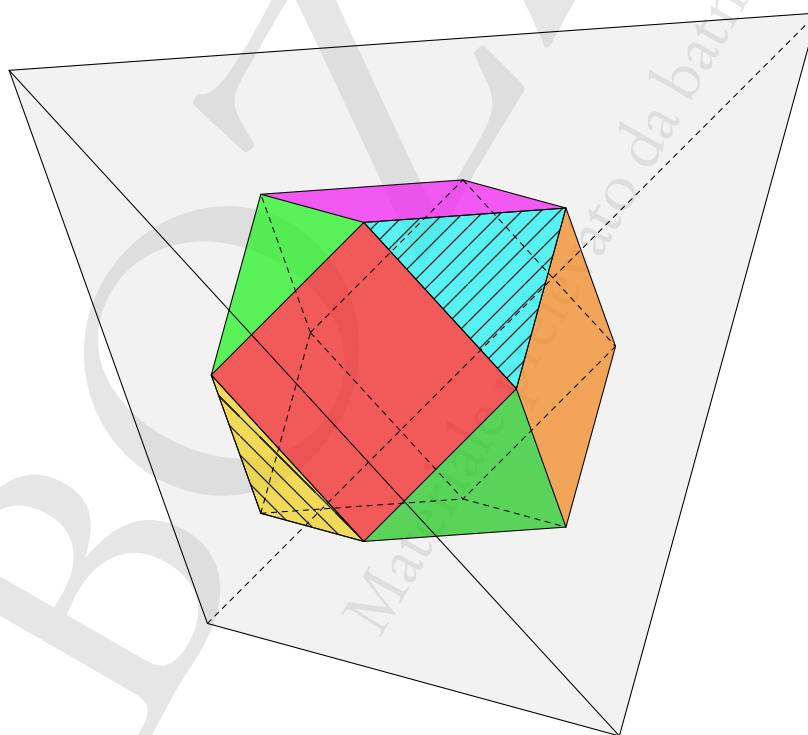


Figura 4.13.: *Cubottaedro con tetraedro circoscritto*

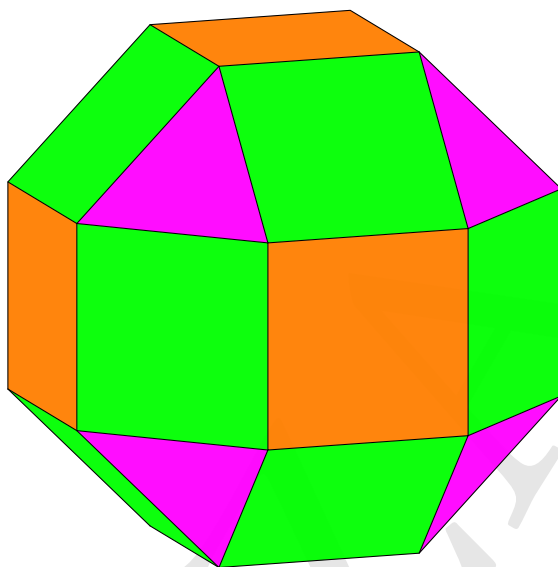


Figura 4.14.: *Rombicubottaedro*

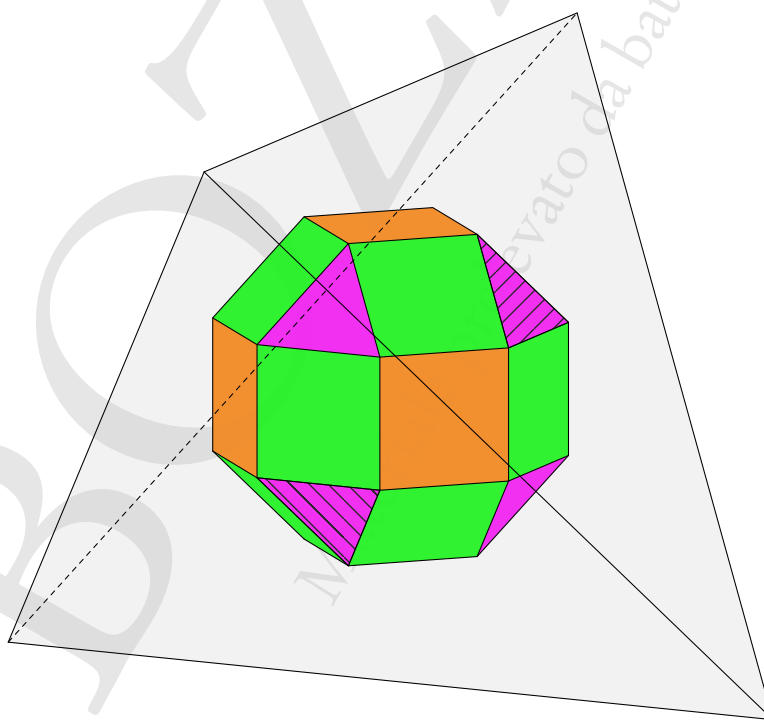


Figura 4.15.: *Rombicubottaedro con tetraedro circoscritto*

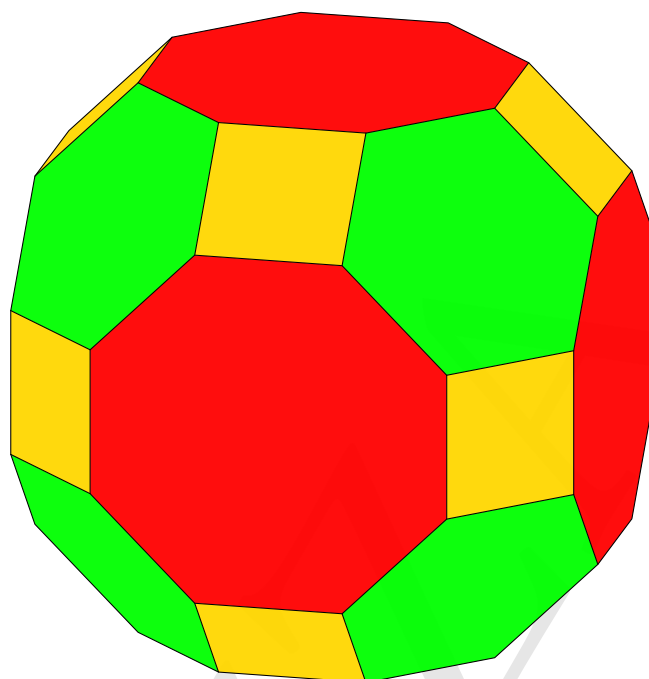


Figura 4.16.: *Cubottaedro troncato o grande rombicubottaedro*

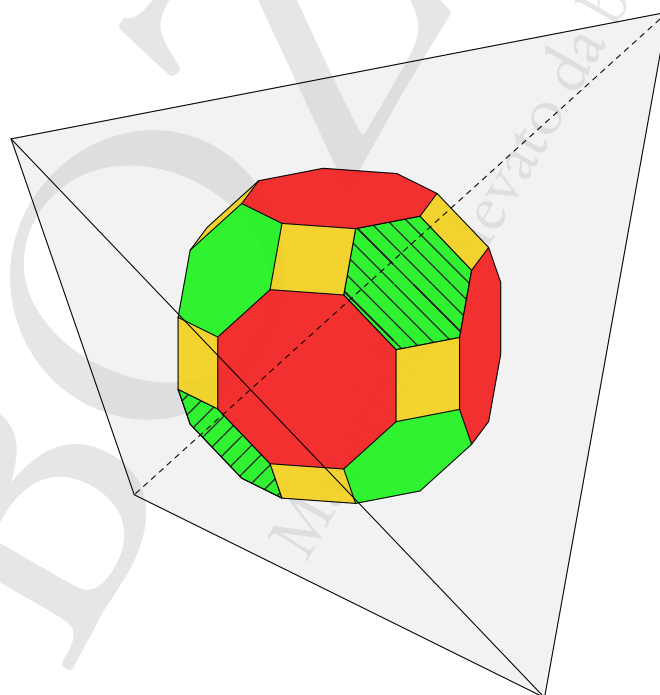


Figura 4.17.: *Cubottaedro troncato o grande rombicubottaedro con tetraedro circoscritto*

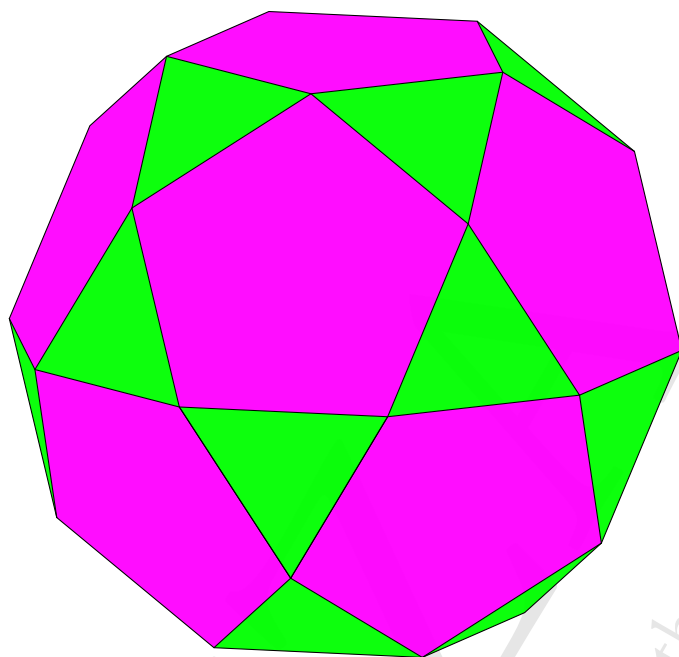


Figura 4.18.: *Icosidodecaedro*

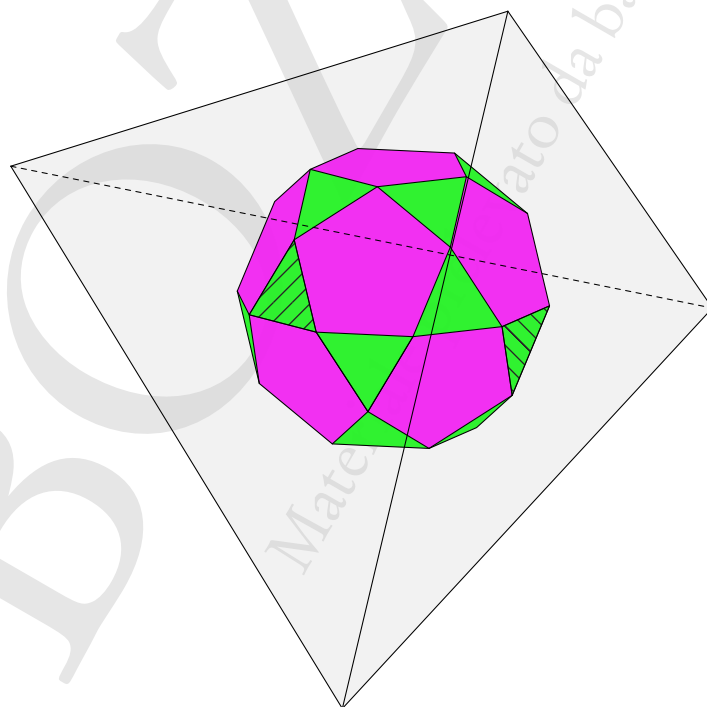


Figura 4.19.: *Icosidodecaedro con tetraedro circoscritto*

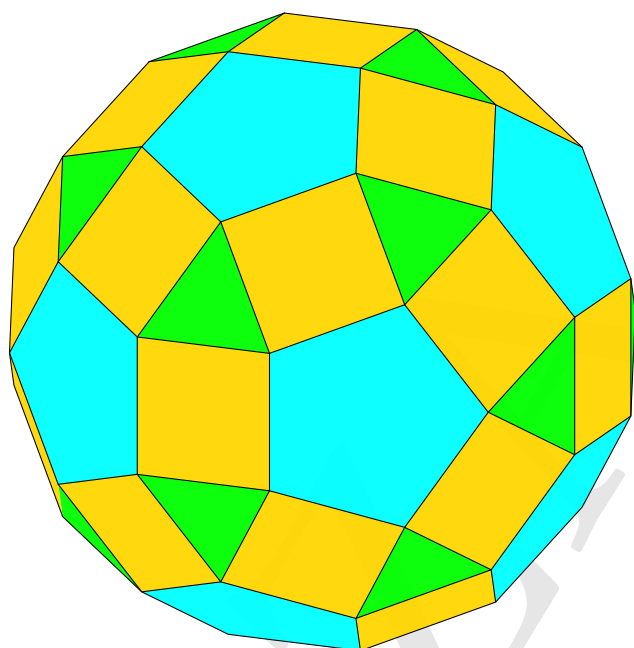


Figura 4.20.: *Rombicosidodecaedro*

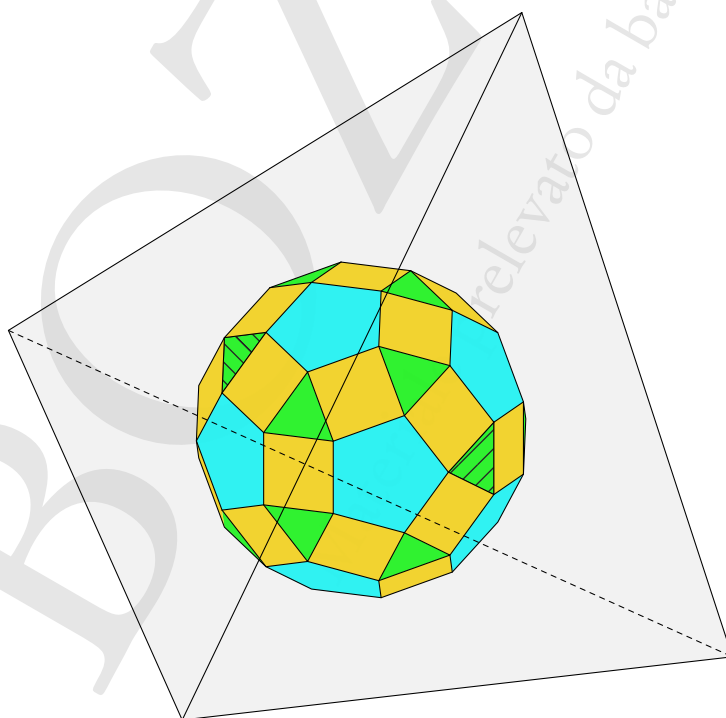


Figura 4.21.: *Rombicosidodecaedro con tetraedro circoscritto*

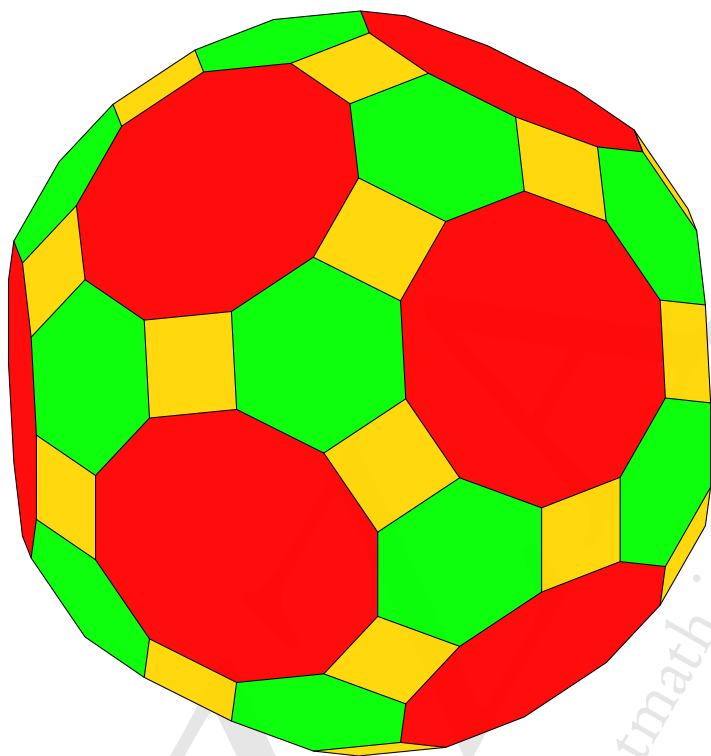


Figura 4.22.: *Icosidodecaedro troncato o grande rombicosidodecaedro*

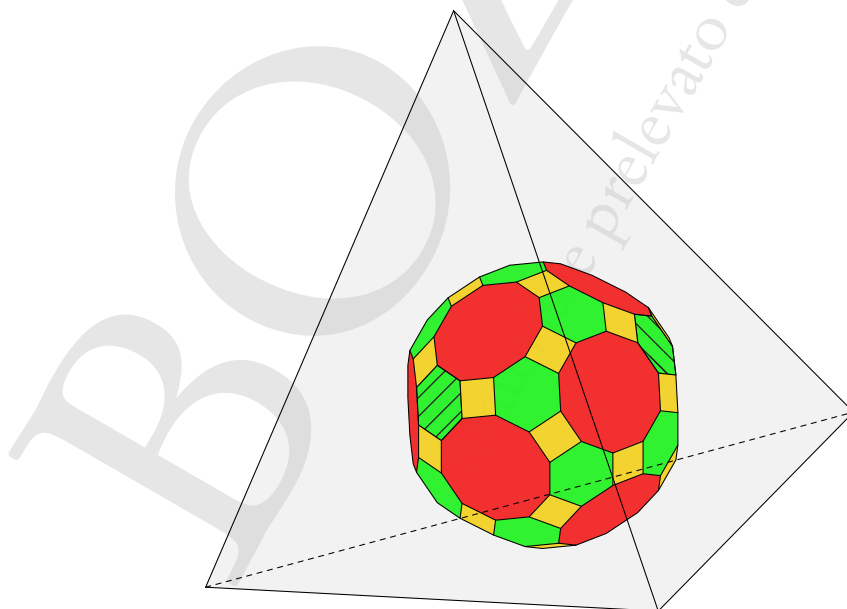


Figura 4.23.: *Icosidodecaedro troncato o grande rombicosidodecaedro con tetraedro circoscritto*

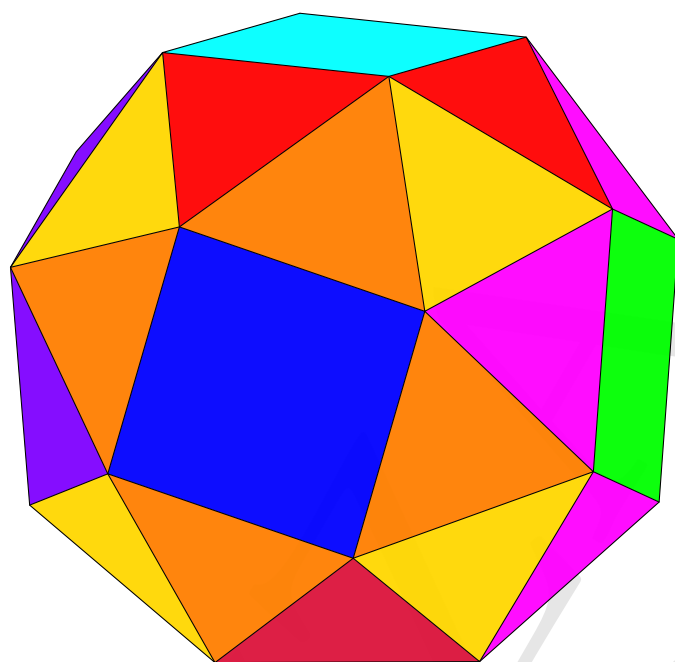


Figura 4.24.: *Snub cubo o cubo camuso*

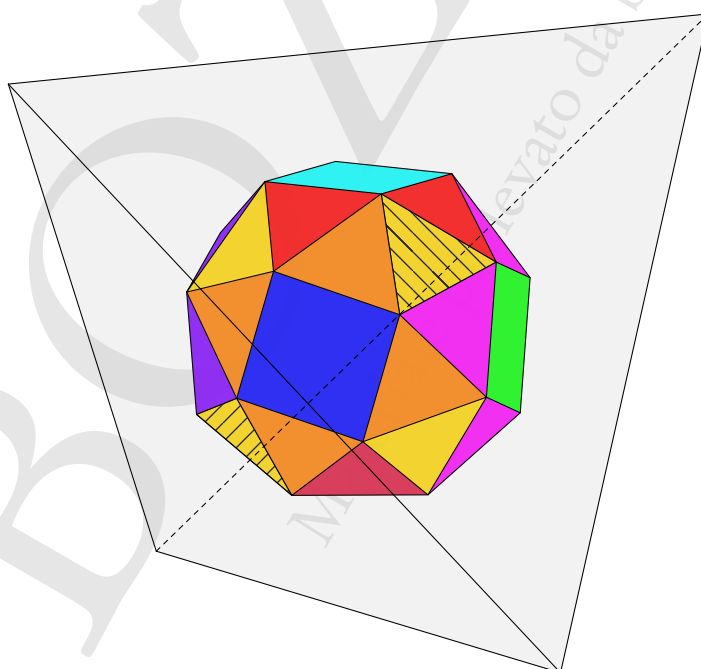
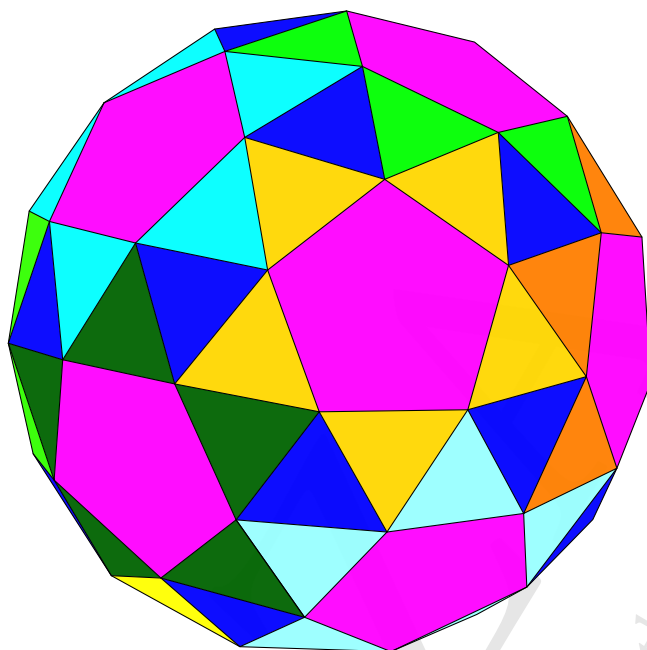
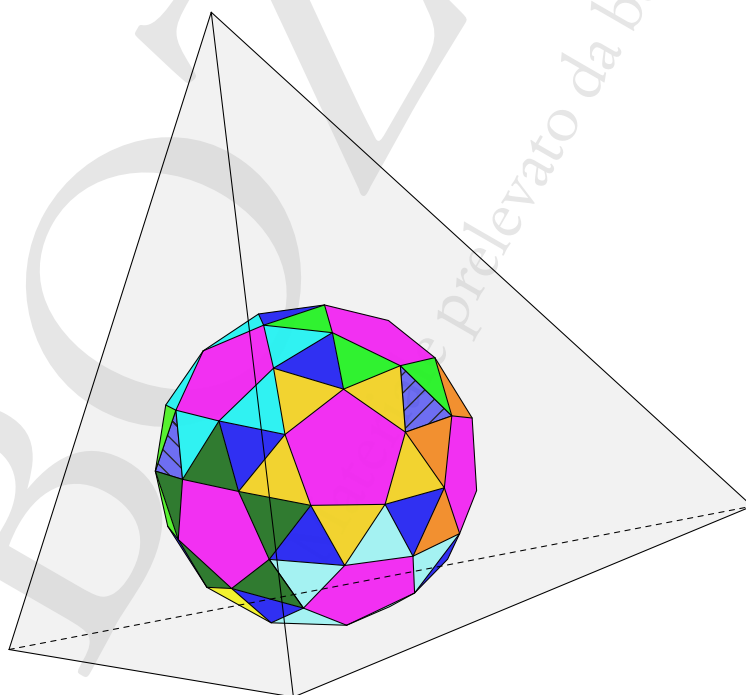


Figura 4.25.: *Snub cubo o cubo camuso con tetraedro circoscritto*

Figura 4.26.: *Snub dodecaedro o dodecaedro camuso*Figura 4.27.: *Snub dodecaedro o dodecaedro camuso con tetraedro circoscritto*

5. I solidi di Archimede mediante troncature

In questo capitolo ci occupiamo del più diffuso metodo di costruzione dei solidi Archimedei, ovvero quello che utilizza le troncature dei solidi platonici, che, nella sua forma tradizionale, funziona per undici dei tredici poliedri di Archimede, con l'esclusione dei due snub poliedri o poliedri camusi. Sarebbe tuttavia possibile considerare una variante del metodo tradizionale, per ottenere anche i solidi camusi, come provato in [46] e riportato anche in [33]: tuttavia non ci occuperemo di questa variante, che riteniamo un metodo di troncatura un po' "tirato per i capelli" e non è citato nei testi più comuni. Tratteremo invece i due solidi camusi nel capitolo 6.

5.1. Troncature mediante semispazi

I solidi platonici costituiscono il punto di partenza per creare, mediante opportune modifiche, nuovi poliedri. Abbiamo già considerato nel fascicolo apposito i poliedri elevati, di cui si occupò anche Leonardo, e alcuni poliedri composti. Un metodo molto interessante per ottenere poliedri derivati è quello delle *troncature*, che, come già detto, permette di costruire 11 dei solidi archimedei, oltre a molti altri solidi di cui ci occuperemo in seguito.

L'implementazione effettiva di questa tecnica può essere fatta in diversi modi: ci occuperemo qui della strategia di base che consiste nel rimuovere da un dato poliedro la sua intersezione con un semispazio avente origine in un piano che possiamo chiamare *piano di troncatura*: il poliedro residuo si chiama, appunto, *poliedro troncato*. Siamo naturalmente interessati a troncature particolari, legate alle simmetrie del poliedro in considerazione. Per quanto riguarda i solidi platonici le due operazioni di base sono le seguenti.

1. Troncamento, per ogni vertice, con un piano perpendicolare all'asse di rotazione per quel vertice che lascia invariato il solido: viene creata per ogni vertice una nuova faccia costituita da un poligono regolare di ordine uguale all'ordine dei vertici (triangolo per il tetraedro, cubo e dodecaedro, quadrato per l'ottaedro, pentagono per l'icosaedro); si parla in questo caso di *troncatura ai vertici*. Questo troncamento può essere *debole* quando i lati che convergono in un vertice vengono troncati per meno di $1/2$, o *forte* quando i lati vengono troncati per $1/2$. La troncatura forte è anche detta *rettificazione*. Il troncamento forte di un poliedro e del suo duale produce lo stesso poliedro.
2. Troncamento, per ogni lato, con un piano parallelo al lato e perpendicolare al piano bisettore delle due facce che convergono su quel lato: per ogni lato viene creata una nuova faccia esagonale, che non è un esagono equiangolo e può diventare invece equilatero; si parla in questo caso di *troncatura ai lati*.

Con il primo metodo, scegliendo in modo opportuno la profondità della troncatura (un terzo per i tre poliedri a facce triangolari, valori diversi per il cubo e il dodecaedro, come vedremo), si può ottenere un poliedro con tutte le facce regolari, e queste saranno le situazioni che ci interesseranno nel seguito.

Con il secondo metodo invece non si ottengono mai poliedri con tutte le facce regolari, in quanto gli esagoni non sono equiangoli, come già detto.

Sono importanti due combinazioni delle tecniche precedenti, che consentono di ottenere poliedri con le facce regolari, come vedremo.

Illustreremo nel dettaglio la strategia da applicare per l'implementazione di queste tecniche facendo riferimento al caso del cubo. Consideriamo un vertice, per esempio il vertice A della figura 5.1, la retta OA, che costituisce asse di simmetria rotazionale per il cubo, e il piano ad essa perpendicolare per un punto del segmento \overline{OA} . La troncatura consiste nel rimuovere la parte di cubo, individuata da questo piano, contenente il vertice A. Ripetendo la troncatura su tutti i vertici, i lati che convergono in ogni vertice vengono via via troncati fino a ridursi ad un punto quando i piani sezionanti passano per il punto medio dei lati: chiameremo questa "posizione limite" anche se andando oltre si possono produrre interessanti poliedri stellati, di cui faremo un cenno nel paragrafo 5.2.3, o ancora gli stessi poliedri semiregolari, come vedremo. Dalla troncatura ha origine un triangolo, visto che ci sono tre facce che convergono in quel vertice, regolare per le simmetrie del poliedro. Le originali facce quadrate diventano ottagoni, generalmente non regolari a parte una ben precisa posizione, e si riducono nuovamente a quadrati quando ciascun lato è completamente troncato: illustreremo in seguito queste situazioni.

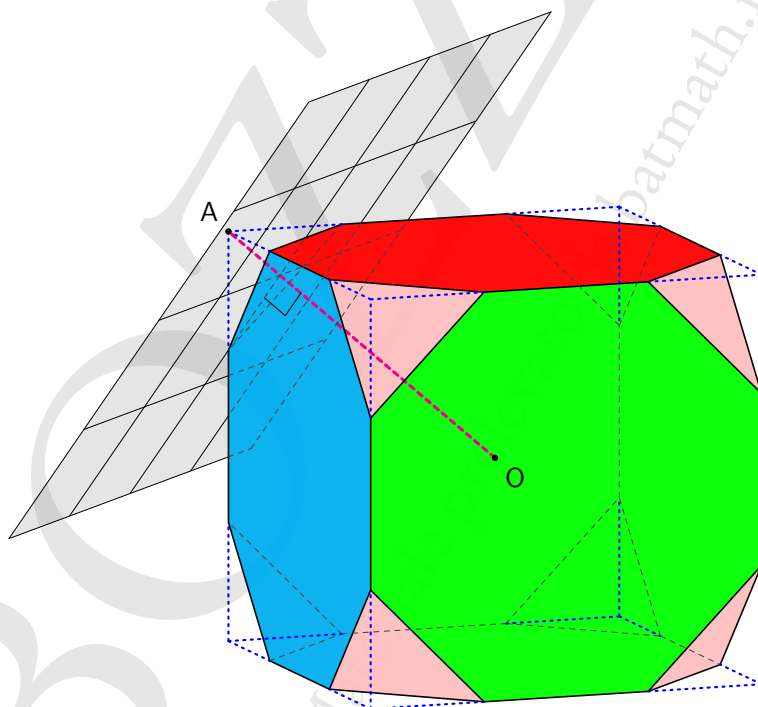


Figura 5.1.: Schema della troncatura debole ai vertici di un poliedro regolare, applicata al cubo

Passiamo ora a trattare la troncatura ai lati. Per ogni lato consideriamo un piano parallelo allo stesso e perpendicolare al piano bisettore delle due facce che convergono in quel lato, come illustrato nella figura 5.2, in modo da intersecare il cubo. La troncatura consiste nel rimuovere la parte di cubo contenente il lato in esame; naturalmente si rimuoverà anche una zona circostante i vertici e ciascun lato sarà sostituito da un esagono che potrà ridursi a un rombo quando ciascun piano sezionante passa per i punti medi

degli altri lati contigui a quello in esame: anche questa è una posizione limite, oltre la quale si ottengono poliedri stellati. Le facce originali del cubo rimangono quadrati, via via più piccoli, fino a ridursi a un punto nella posizione limite. Gli esagoni hanno quattro angoli tra di loro uguali (di circa 125°) e gli altri due angoli (quelli che hanno il vertice in comune con gli altri esagoni della costruzione) sempre tra di loro uguali (di circa 109°): l'esagono è dunque quasi equiangolo. Questi angoli non mutano al variare della profondità della troncatura. Discuteremo più in dettaglio questo tipo di troncatura, applicato ai cinque solidi platonici, nel paragrafo 5.3.

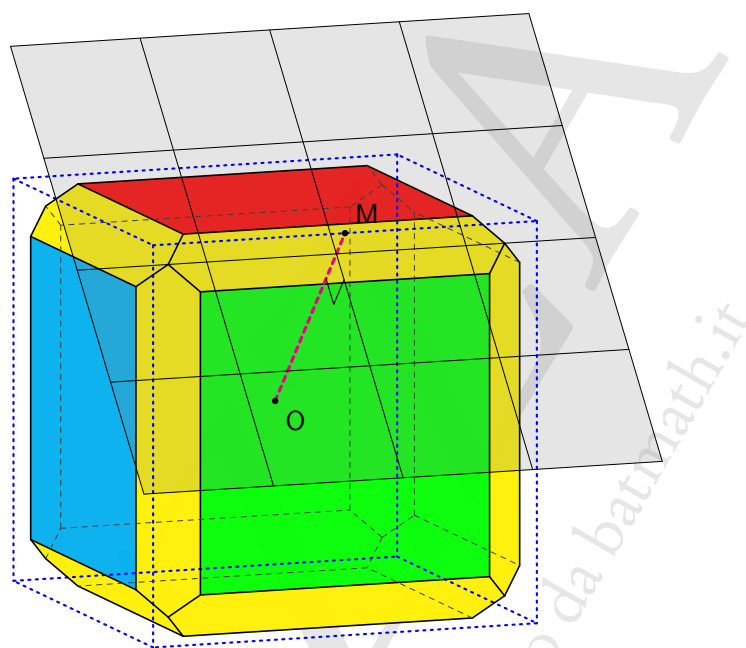


Figura 5.2.: Schema della troncatura ai lati di un poliedro regolare, applicata al cubo

Le due troncature considerate possono essere combinate in due diversi modi. Dopo aver eseguito una troncatura ai lati, consideriamo uno dei vertici comuni agli esagoni ottenuti (nel caso del cubo comuni a tre esagoni) ed eseguiamo una troncatura al vertice con un piano che passi per gli altri estremi degli esagoni convergenti nel vertice. In corrispondenza dei vertici troncati si otterranno poligoni regolari di ordine uguale a quello degli originali vertici del poliedro (in questo caso triangoli) mentre gli esagoni si ridurranno a rettangoli (ed eventualmente quadrati), fino a diventare nuovamente segmenti; le facce originali rimangono quadrati via via più piccoli fino a ridursi a punti. La figura 5.3 illustra lo schema del processo, la figura 5.4 illustra il risultato dell'applicazione del processo a tutti i vertici.

Questo tipo di troncatura è nota come *troncatura ai lati e vertici* e, per alcuni autori, anche come *troncatura ai lati*, in quanto la semplice troncatura ai lati sopra considerata non viene presa in considerazione in ragione dell'impossibilità di ottenere con essa poliedri semiregolari.

Consideriamo ora l'ordine inverso: dopo aver eseguito una troncatura ai vertici, consideriamo uno dei lati residui del poliedro originale ed eseguiamo una troncatura ai lati, come indicato nella figura 5.5, in modo che i lati delle nuove facce triangolari vengano troncati per un terzo, così da ottenere esagoni regolari; dopo aver eseguito la troncatura su tutti i lati, i lati saranno sostituiti da rettangoli, che potranno anche divenire quadrati e, nella posizione limite si ridurranno nuovamente a segmenti. Le facce del cubo

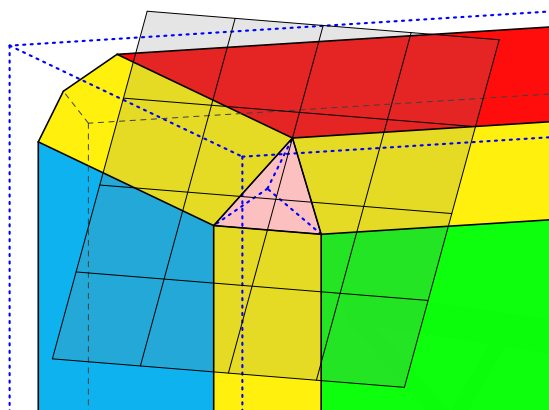


Figura 5.3.: Dalla troncatura ai lati alla troncatura ai lati e vertici

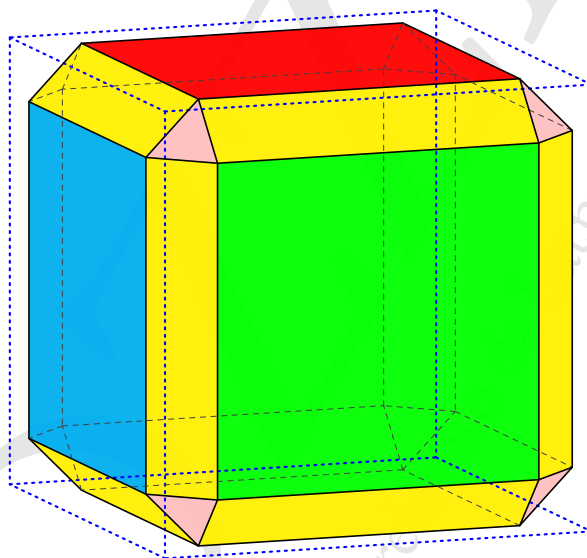


Figura 5.4.: Troncatura ai lati e ai vertici di un poliedro regolare, applicata al cubo

originale sono sostituite da ottagoni che possono divenire regolari e finalmente ridursi nuovamente a quadrati. La figura 5.6 illustra il risultato dell'applicazione del processo a tutti i lati. Naturalmente la profondità della troncatura delle facce ottenute sui vertici del poliedro originale dipenderà dal tipo di poligono, che può essere un triangolo come in questo caso, nel caso del tetraedro e del dodecaedro, un quadrato nel caso dell'ottaedro, un pentagono nel caso dell'icosaedro.

Questo tipo di troncatura si chiama *troncatura ai lati e forte ai vertici* e il nome è significativo in quanto, rispetto al caso precedente, la troncatura ai vertici è molto più profonda.

Gli effetti che abbiamo descritto in questo paragrafo si possono ottenere anche mediante troncatura di un poliedro con un altro poliedro: ce ne occuperemo nel paragrafo 5.8.

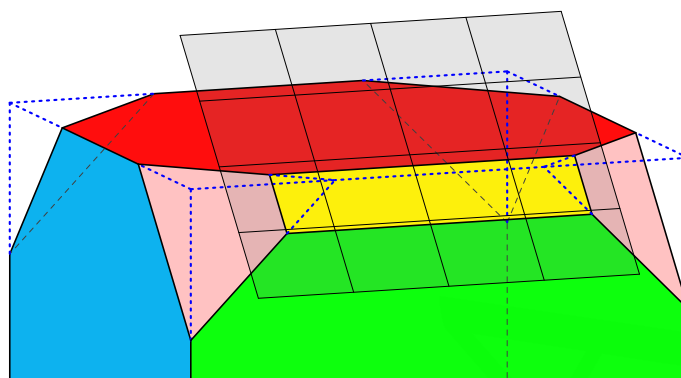


Figura 5.5.: *Dalla troncatura ai vertici alla troncatura ai lati e forte ai vertici*

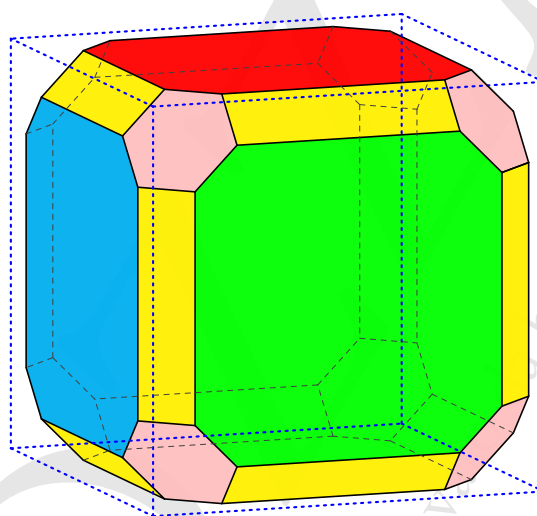


Figura 5.6.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un poliedro regolare, applicata al cubo*

5.2. Troncatura ai vertici

La troncatura ai vertici produce sette poliedri archimedei: i cinque poliedri platonici troncati, il cubottaedro e l'icosidodecaedro. Dal tetraedro si può inoltre ottenere l'ottaedro.

5.2.1. Dal tetraedro al tetraedro troncato e all'ottaedro

Il poliedro di Archimede più semplice è il *tetraedro troncato* che si ottiene per troncatura del tetraedro ai vertici, quando il piano di troncatura taglia i tre lati convergenti in ogni vertice per un terzo.

Il poligono che si ottiene sul piano di troncatura in corrispondenza di ogni vertice è sempre un triangolo equilatero, mentre le facce del tetraedro originale diventano esagoni, inizialmente irregolari fin quando non si ottiene il tetraedro troncato (troncatura dei lati per un terzo) con quattro facce triangolari

e quattro facce esagonali. Si veda la figura 5.7 dove a sinistra è rappresentata una situazione intermedia e a destra la situazione che corrisponde al tetraedro troncato.

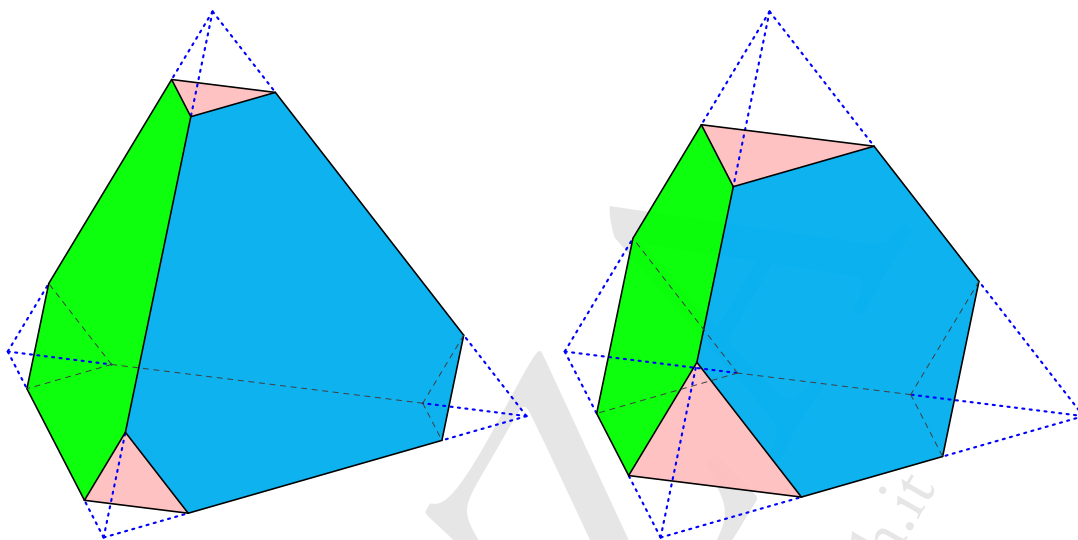


Figura 5.7.: *Troncatura ai vertici di un tetraedro: un primo passo e il tetraedro troncato*

Proseguendo nella troncatura gli esagoni diventano di nuovo irregolari fino a ridursi a triangoli equilateri (troncatura dei lati per un mezzo), quando si ottiene l'ottaedro. In generale il poliedro che si ottiene quando il piano di troncatura giunge alla sua posizione limite, cioè passa per il centro dei lati convergenti in un vertice, si chiama anche *poliedro rettificato*. In questo senso l'ottaedro si può considerare la *rettificazione* del tetraedro.

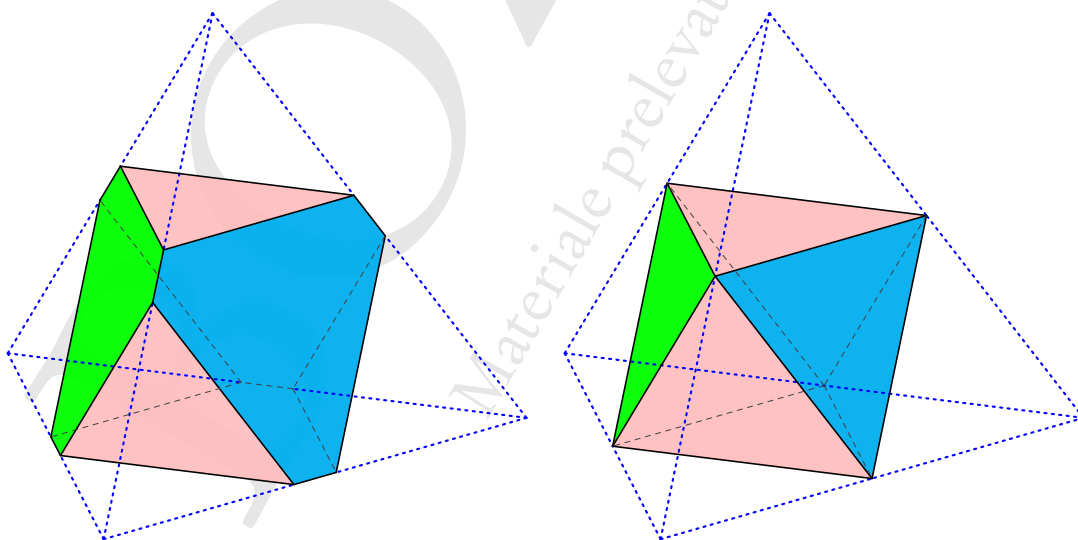


Figura 5.8.: *Troncatura ai vertici di un tetraedro: oltre il tetraedro troncato e fino all'ottaedro*

5.2.2. Dal cubo al cubo troncato e al cubottaedro

Passiamo ora ai due solidi archimedei che si possono ottenere per troncatura ai vertici di un cubo: il *cubo troncato*, che si ottiene quando il piano di troncatura taglia i lati convergenti in un vertice con un rapporto di $1 - \sqrt{2}/2 \simeq 0.29289$, e il *cubottaedro*, che si ottiene per rettificazione del cubo, ovvero, come già detto, quando il piano di troncatura giunge alla sua posizione limite. Come vedremo il cubottaedro si può ottenere con lo stesso processo anche dall'ottaedro e questo giustifica il suo nome di cubottaedro, come solido intermedio tra il cubo e l'ottaedro.

Il poligono che si ottiene sul piano di troncatura in corrispondenza di ogni vertice è anche in questo caso un triangolo equilatero, mentre le originali facce quadrate diventano ottagoni, inizialmente irregolari, fin quando non si ottiene il cubo troncato dotato di otto facce triangolari e sei facce ottagonali, tutte regolari.

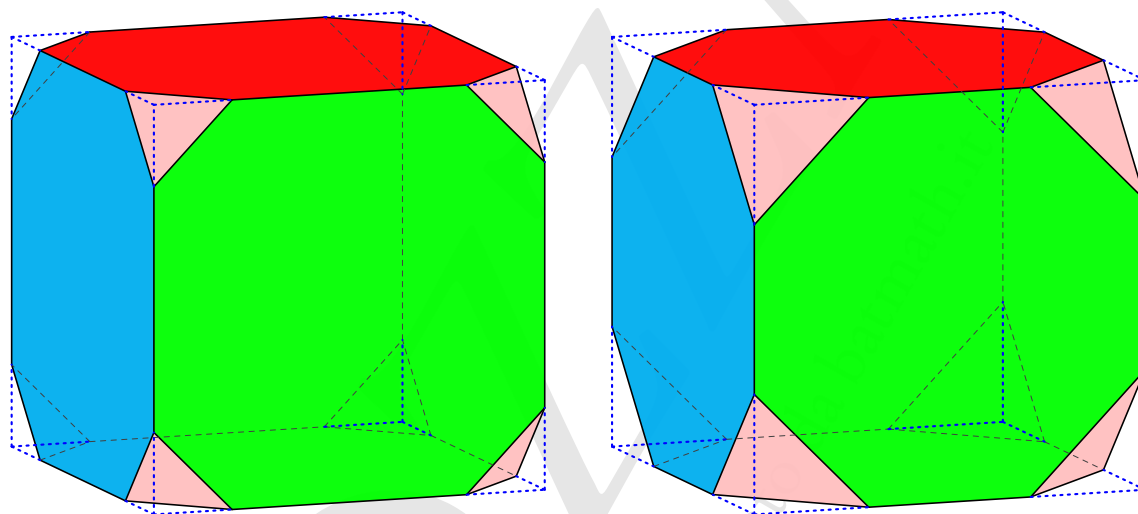


Figura 5.9.: Troncatura ai vertici di un cubo: un primo passo e il cubo troncato

Proseguendo nella profondità della troncatura gli ottagoni diventano nuovamente irregolari, fino a ridursi a quadrati quando si ottiene il cubottaedro dotato di otto facce triangolari regolari e sei facce quadrate. Il cubottaedro ha una regolarità superiore a quella del cubo troncato: non solo è transitivo sui vertici, come tutti i poliedri semiregolari, ma anche sui lati, in quanto ogni lato fa parte esattamente di due poligoni regolari dello stesso tipo. Per questo motivo il cubottaedro (e l'icosidodecaedro che ha la stessa proprietà) sono anche chiamati poliedri *quasi regolari*. Sia per il cubottaedro che per l'icosidodecaedro questa “quasi regolarità”, è una conseguenza del fatto che si tratta di poliedri “a metà strada” tra i due poliedri regolari da cui derivano per troncatura forte ai vertici.

5.2.3. Un poliedro intrecciato costruito per troncatura

Come già accennato, si potrebbe procedere con la troncatura anche oltre quella che abbiamo chiamato “posizione limite”: qui proporremo un esempio relativo al caso in cui i poligoni di troncatura vengono conservati nella loro interezza. In questa situazione si ottengono poliedri molto più complessi, che possiamo chiamare, in analogia con quanto fatto nei poligoni, *poliedri intrecciati*.

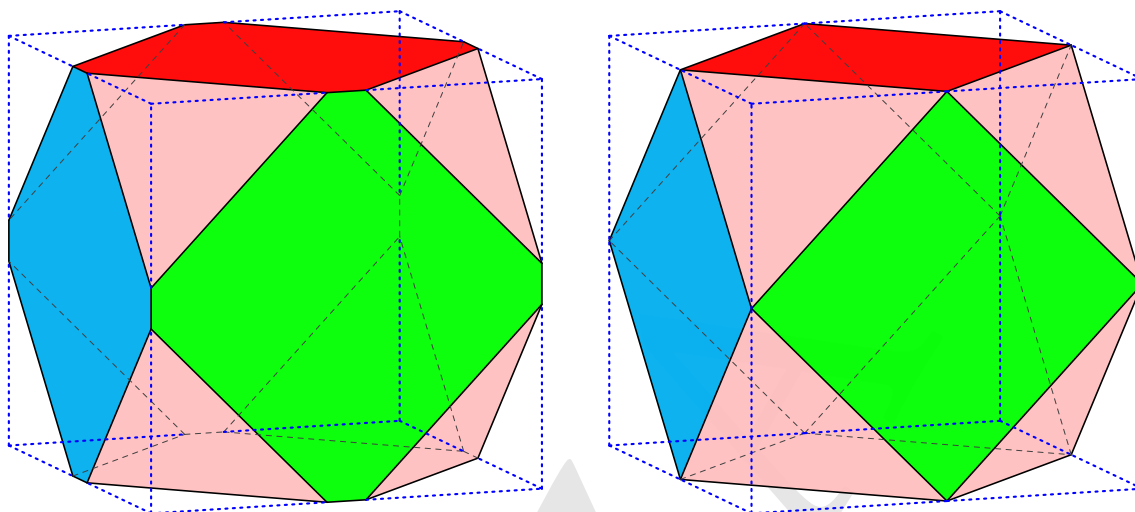


Figura 5.10.: *Troncatura ai vertici di un cubo: oltre il cubo troncato e fino al cubottaedro*

L'esempio che proponiamo è relativo al cubo troncato ai vertici, quando il piano di troncatura taglia i lati per tre quarti: gli ottagoni corrispondenti alle facce originarie del cubo diventano intrecciati e i triangoli tracciati sui piani di troncatura, che come detto vengono mantenuti nella loro interezza, si intersecano.

Nella figura 5.11 abbiamo proposto a sinistra i residui delle sei facce laterali del cubo, a destra gli otto triangoli ottenuti dalla troncatura dei vertici. Nella figura 5.12 abbiamo proposto invece il poliedro nella sua interezza.

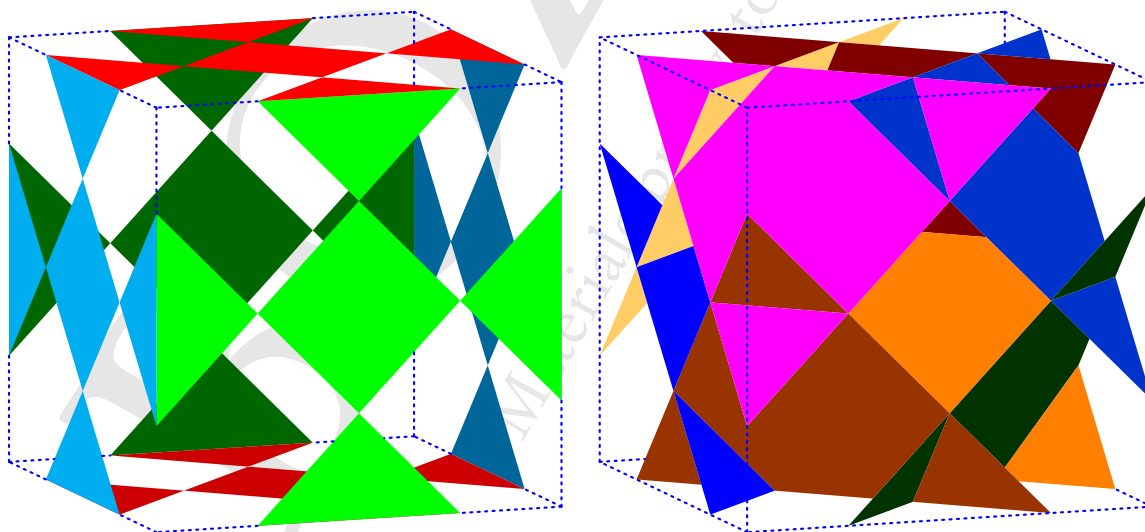


Figura 5.11.: *Schema delle facce "esterne" e delle facce "ottenute per troncatura" di un poliedro intrecciato, costruito per troncatura ai vertici di un cubo*

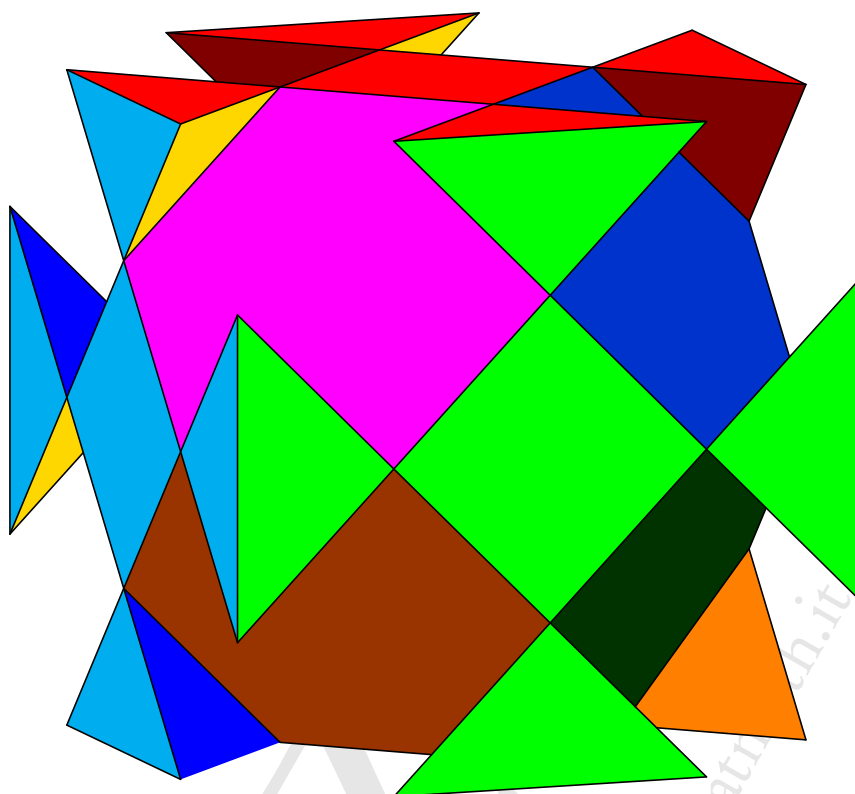


Figura 5.12.: Poliedro intrecciato ottenuto per troncatura ai vertici di un cubo

5.2.4. Dall'ottaedro all'ottaedro troncato e al cubottaedro

Se applichiamo il metodo di troncatura ai vertici al caso dell'ottaedro otteniamo due solidi archimedei: l'*ottaedro troncato*, che si ottiene quando il piano di troncatura taglia i lati convergenti in un vertice per un terzo, e il *cubottaedro*, che si ottiene per rettificazione dell'ottaedro, ovvero quando il piano di troncatura giunge alla sua posizione limite. Come abbiamo visto il cubottaedro si ottiene con lo stesso processo anche a partire dal cubo.

Poichè nell'ottaedro in ogni vertice concorrono quattro spigoli, il poligono che si ottiene sul piano di troncatura sarà sempre un quadrato, mentre le originali facce triangolari dell'ottaedro diventano esagoni, inizialmente irregolari, fin quando non si ottiene l'ottaedro troncato dotato di sei facce quadrate e otto facce esagonali.

Proseguendo nella profondità della troncatura gli esagoni diventano di nuovo irregolari, fino a ridursi a triangoli quando si ottiene il cubottaedro dotato di otto facce triangolari e sei facce quadrate.

5.2.5. Dal dodecaedro al dodecaedro troncato e all'icosidodecaedro

Nel dodecaedro i vertici hanno valenza tre, dunque sul piano di troncatura otterremo triangoli equilateri, mentre i pentagoni diventeranno decagoni: al primo livello (troncatura dei lati con un rapporto di 0.276393) si ottiene il *dodecaedro troncato*, con venti triangoli e dodici decagoni, al secondo

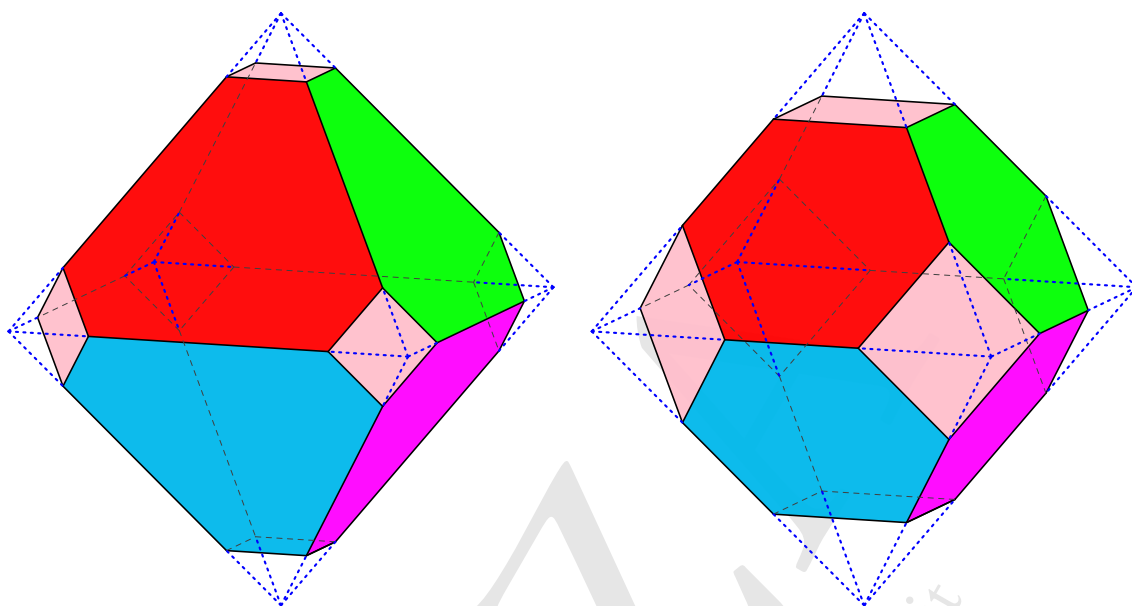


Figura 5.13.: *Troncatura ai vertici di un ottaedro: un primo passo e l'ottaedro troncato*

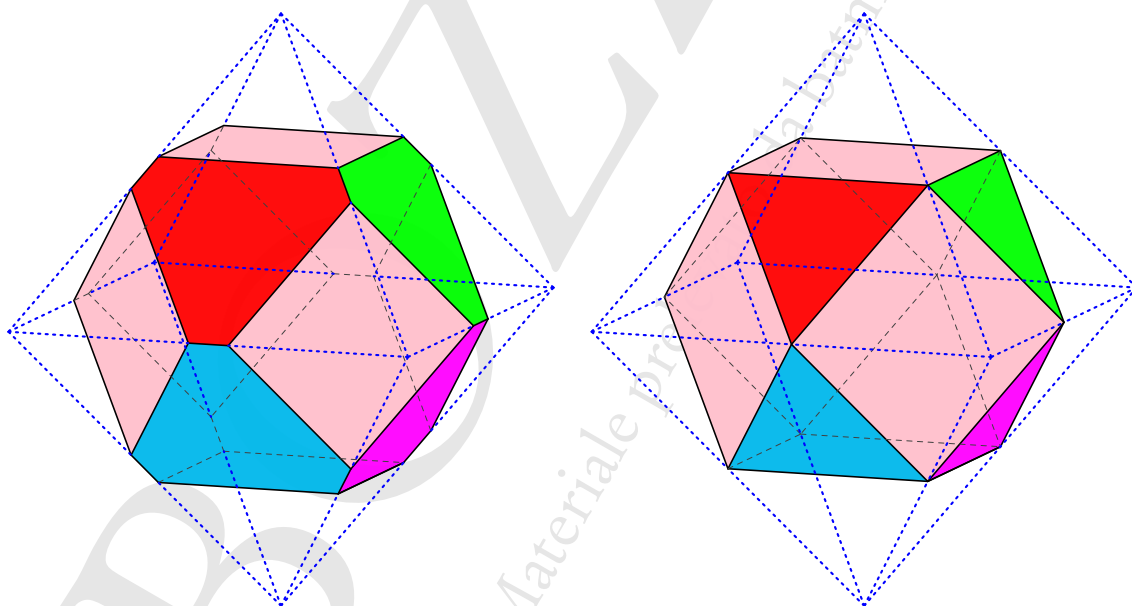


Figura 5.14.: *Troncatura ai vertici di un ottaedro: oltre l'ottaedro troncato e fino al cubottaedro*

livello (rettificazione o troncatura per un mezzo) i decagoni diventano di nuovo pentagoni e si ottiene l'*icosidodecaedro*, con venti triangoli e dodici pentagoni, che si otterrà con lo stesso metodo dall'icosaedro. Come già detto anche l'icosidodecaedro è un poliedro quasi regolare.

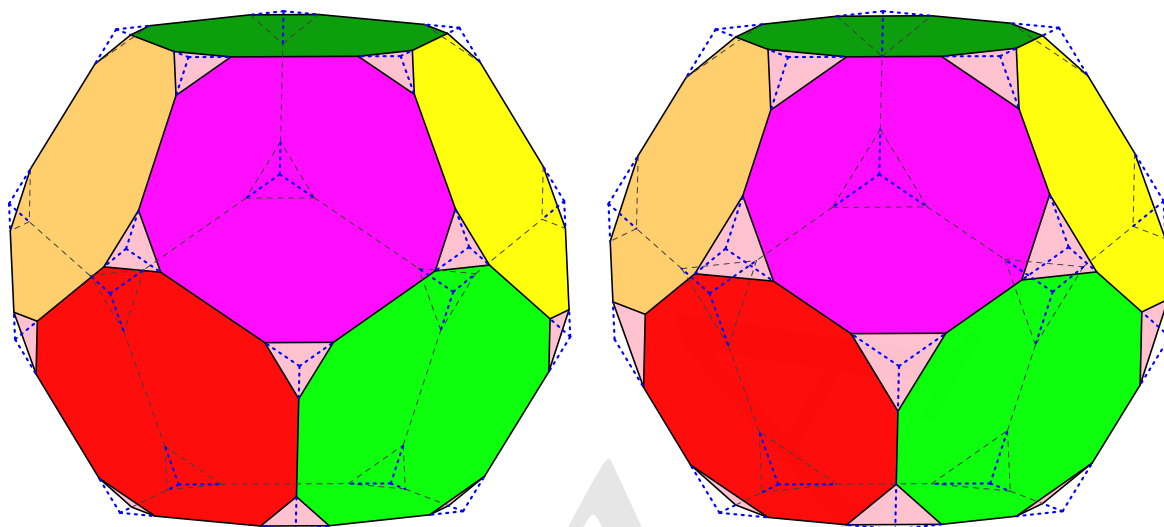


Figura 5.15.: *Troncatura ai vertici di un dodecaedro: un primo passo e il dodecaedro troncato*

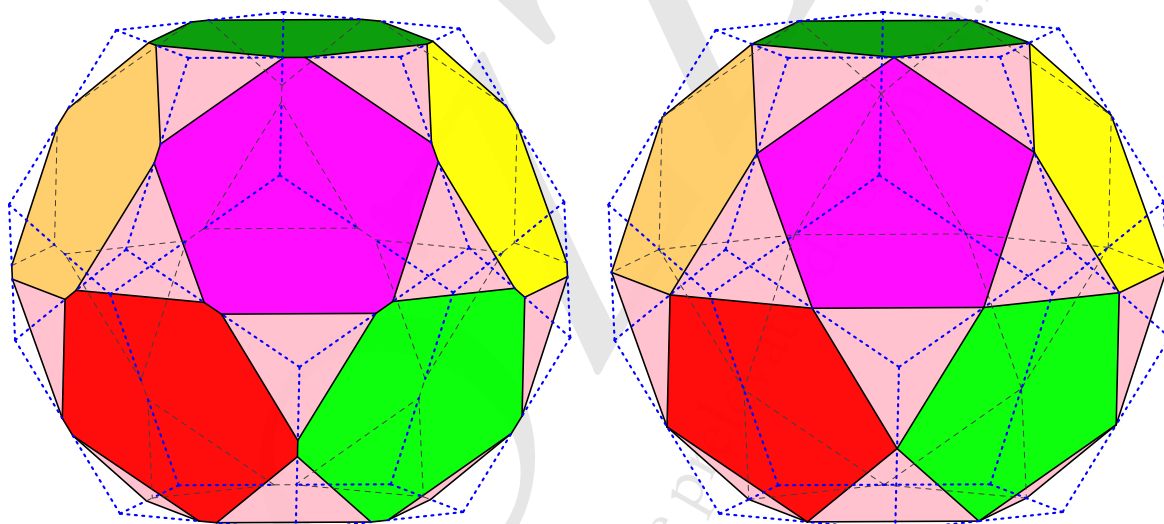


Figura 5.16.: *Troncatura ai vertici di un dodecaedro: oltre il dodecaedro troncato e fino all'icosidodecaedro*

5.2.6. Dall'icosaedro all'icosaedro troncato e all'icosidodecaedro

Passando infine all'icosaedro, sul piano di troncatura otterremo pentagoni regolari (in quanto ci sono cinque spigoli che concorrono in un vertice), mentre le facce triangolari si riducono ad esagoni: al primo livello (troncatura dei lati per un terzo) otterremo l'*icosaedro troncato*, con dodici pentagoni e venti esagoni, al secondo livello (rettificazione o troncatura per un mezzo) gli esagoni diventano di nuovo triangoli e si ottiene l'*icosidodecaedro*, che abbiamo già ottenuto con lo stesso metodo a partire dal dodecaedro.

Per quanto riguarda l'icosaedro troncato è opportuno segnalare che esso rientra nella classe dei

cosiddetti *Poliedri di Goldberg*, costituiti da facce esagonali e pentagonali, con tutti i vertici di valenza tre e le stesse simmetrie rotazionali dell'icosaedro. Essi sono i duali delle sfere geodetiche, che rivestono grande importanza in molte applicazioni. Come conseguenza della formula di Eulero tutti questi poliedri devono avere esattamente dodici facce pentagonali: il dodecaedro e l'icosaedro troncato sono i due casi più semplici, e sono anzi gli unici con tutte le facce poligonali regolari.

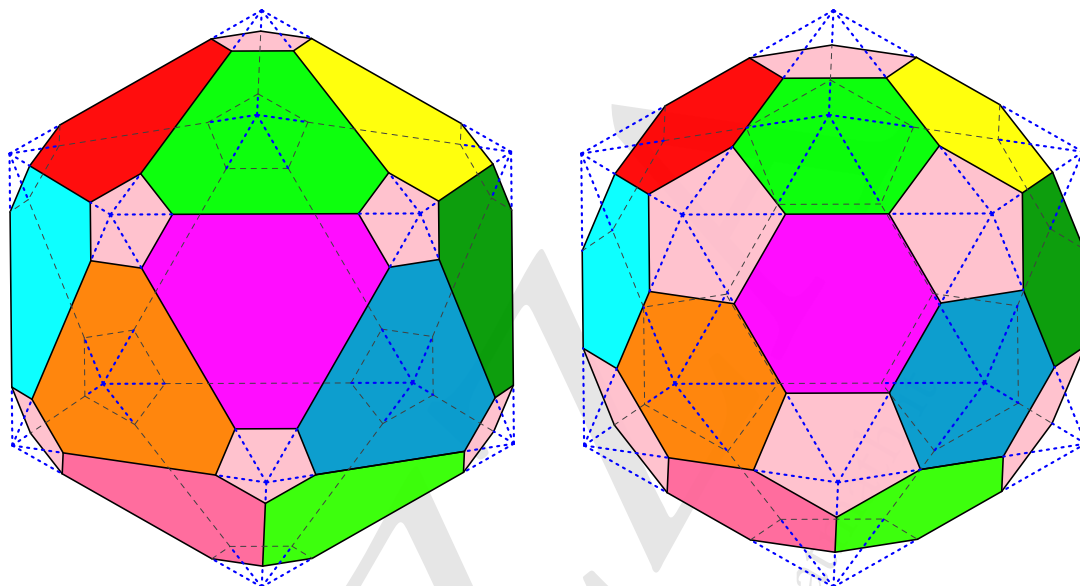


Figura 5.17.: *Troncatura ai vertici di un icosaedro: un primo passo e l'icosaedro troncato*

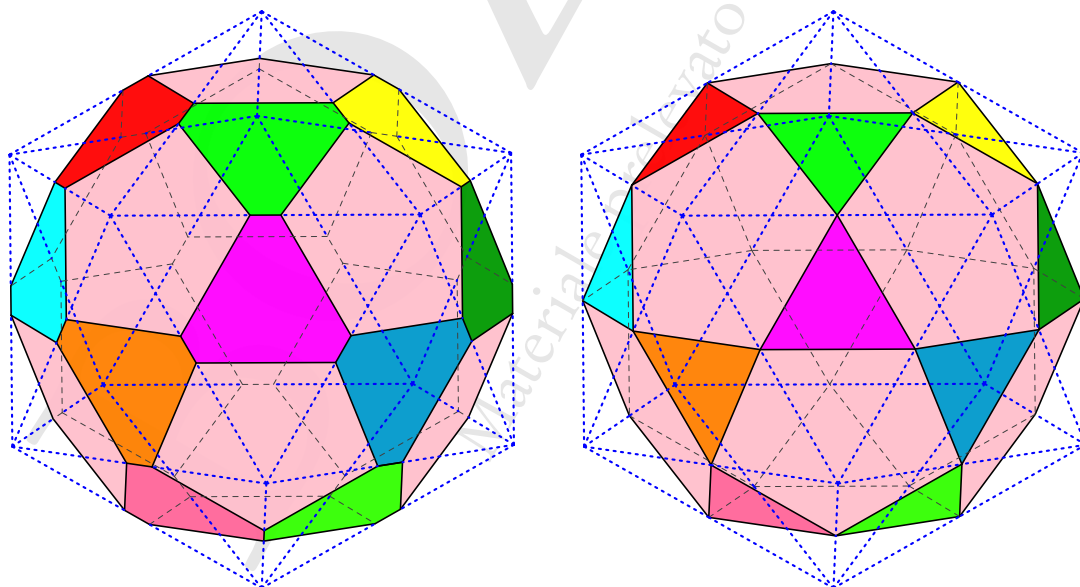


Figura 5.18.: *Troncatura ai vertici di un icosaedro: oltre l'icosaedro troncato e fino all'icosidodecaedro*

5.3. Troncatura ai lati

La troncatura ai lati di un poliedro regolare non produce poliedri semiregolari. Come già visto nello schema applicato al caso del cubo, questo tipo di troncatura sostituisce ciascun lato del poliedro originale con un esagono irregolare, mentre le facce mantengono la loro forma, riducendosi fino a un punto quando la troncatura raggiunge la posizione limite, quando gli esagoni diventano rombi. Le troncature limite sono di tre tipi: precisamente si ottiene un cubo nel caso del tetraedro, un dodecaedro rombico nel caso del cubo e dell'ottaedro, un triacontaedro rombico nel caso del dodecaedro e dell'icosaedro. Esamineremo ora in dettaglio le varie situazioni.

5.3.1. Dal tetraedro al cubo

Nel tetraedro i vertici hanno valenza 3 e dunque a seguito della troncatura ai lati si avranno tre esagoni con un vertice in comune in corrispondenza a ogni vertice del tetraedro di partenza. In ogni esagono i due angoli con questo vertice sono retti, mentre gli altri quattro angoli misurano 135° . Come già detto questi angoli non mutano al variare della profondità della troncatura; solo nella posizione limite, quando gli esagoni si riducono a rombi, le due coppie opposte di angoli di 135° si ridurranno ad un solo angolo di ampiezza $2 \times 135^\circ - 180^\circ = 90^\circ$: il rombo diventa dunque un quadrato e il poliedro completamente troncato diventa un cubo.

La figura 5.19 illustra due stadi intermedi in successione della troncatura del tetraedro, la figura 5.20 illustra un terzo stadio nella troncatura e, sulla destra, il cubo ottenuto come risultato finale.

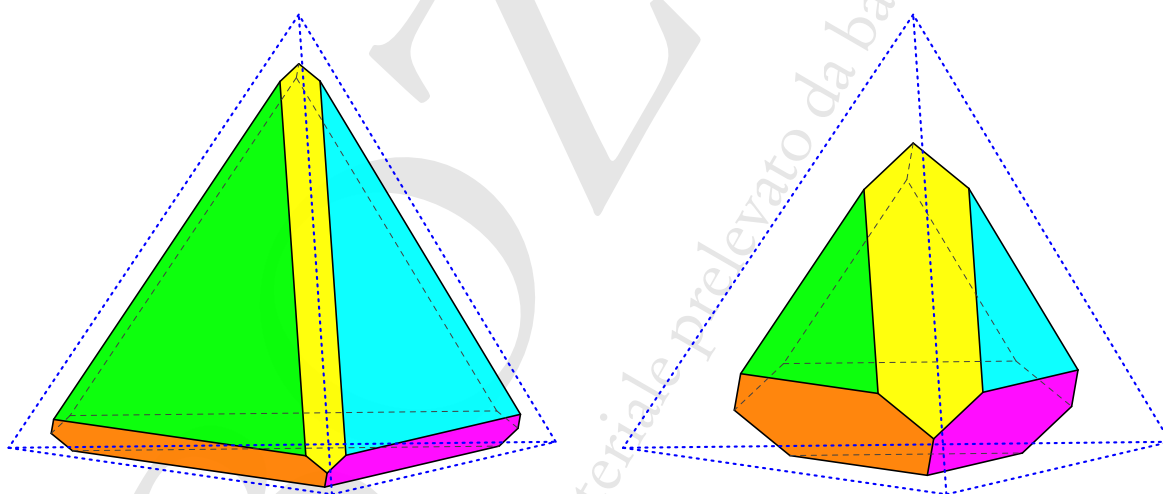


Figura 5.19.: *La troncatura ai lati di un tetraedro: due stadi intermedi*

Si noti che abbiamo già visto che dal tetraedro per troncatura forte ai vertici si ottiene l'ottaedro, mentre ora troviamo che per troncatura completa ai lati si ottiene il cubo. Il cubo si sarebbe naturalmente potuto ottenere anche dall'ottaedro per dualità. Si tratta di un fatto abbastanza interessante: potremmo dire che, in un certo senso, il cubo e l'ottaedro possono essere “generati” dal tetraedro. Trattando i poliedri camusi vedremo che anche l'icosaedro e il dodecaedro possono essere ottenuti opportunamente dal tetraedro: questo fa assumere al tetraedro un ruolo centrale nell'insieme dei cinque solidi platonici.

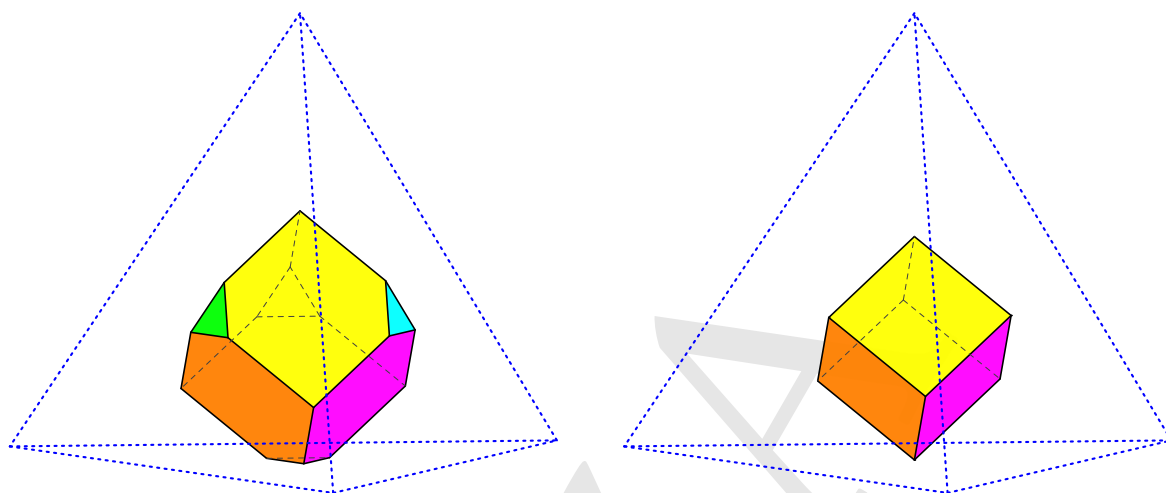


Figura 5.20.: La troncatura ai lati di un tetraedro: un terzo stadio intermedio e il cubo come risultato finale

5.3.2. Dal cubo al dodecaedro rombico

Anche nel cubo i vertici hanno valenza tre e dunque a seguito della troncatura ai lati si avranno tre esagoni con un vertice in comune in corrispondenza a ogni vertice del cubo di partenza. In ogni esagono i due angoli con questo vertice misurano 109.48° , mentre gli altri quattro angoli misurano 125.26° . Nella posizione limite, quando gli esagoni si riducono a rombi, le due coppie opposte di angoli di 125.26° si riducono ad un solo angolo di ampiezza $2 \times 125.26^\circ - 180^\circ = 70.52^\circ$.

Nella posizione limite le facce originarie del cubo si riducono ad un punto, mentre i 12 esagoni si riducono a 12 rombi identici, con gli angoli già indicati: il poliedro ottenuto è il *dodecaedro rombico*. Come è ovvio non si tratta di un poliedro semiregolare, tuttavia è strettamente collegato ai poliedri di Archimede, in quanto è il duale del cubottaedro. Torneremo su questo nel capitolo 9 sui solidi di Catalan.

La figura 5.21 illustra due passi intermedi della troncatura, la figura 5.22 illustra invece il dodecaedro rombico ottenuto come risultato finale.

5.3.3. Dall'ottaedro al dodecaedro rombico

Nell'ottaedro i vertici hanno valenza 4 e dunque a seguito della troncatura ai lati si avranno quattro esagoni con un vertice in comune in corrispondenza a ogni vertice dell'ottaedro di partenza. In ogni esagono i due angoli con questo vertice misurano 70.52° , mentre gli altri quattro angoli misurano 144.74° . Nella posizione limite, quando gli esagoni si riducono a rombi, le due coppie opposte di angoli di 144.74° si riducono ad un solo angolo di ampiezza $2 \times 144.74^\circ - 180^\circ = 109.48^\circ$. Si noti come questa situazione sia perfettamente simmetrica rispetto a quella del cubo, in accordo con il fatto che cubo e ottaedro sono tra di loro duali.

Esattamente come per il cubo anche qui il poliedro limite è il dodecaedro rombico, duale del cubottaedro, come già osservato. È utile ricordare che il cubottaedro può essere ottenuto per troncatura, come abbiamo visto, sia dal cubo che dall'ottaedro.

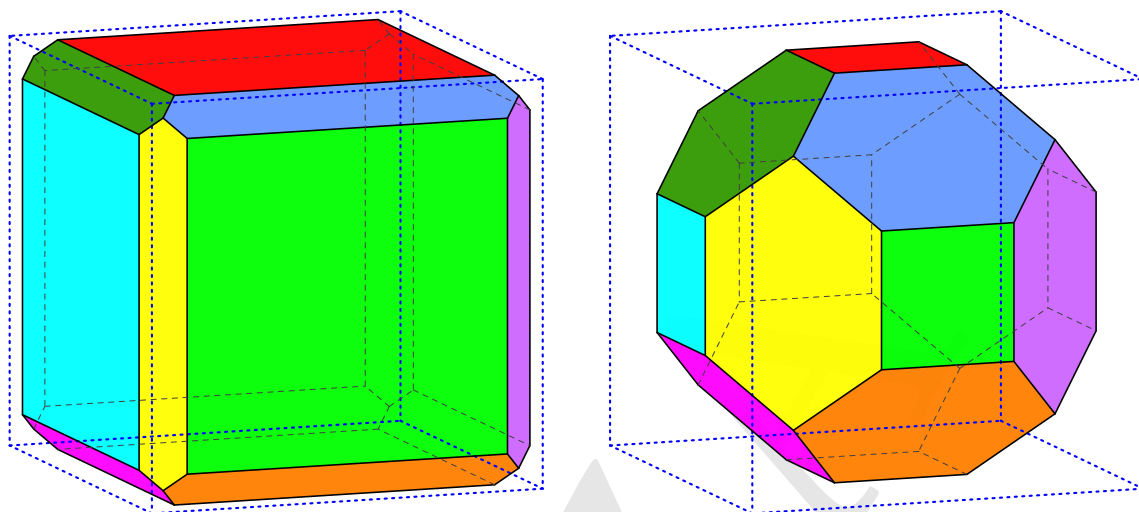


Figura 5.21.: *La troncatura ai lati di un cubo: due stadi intermedi*

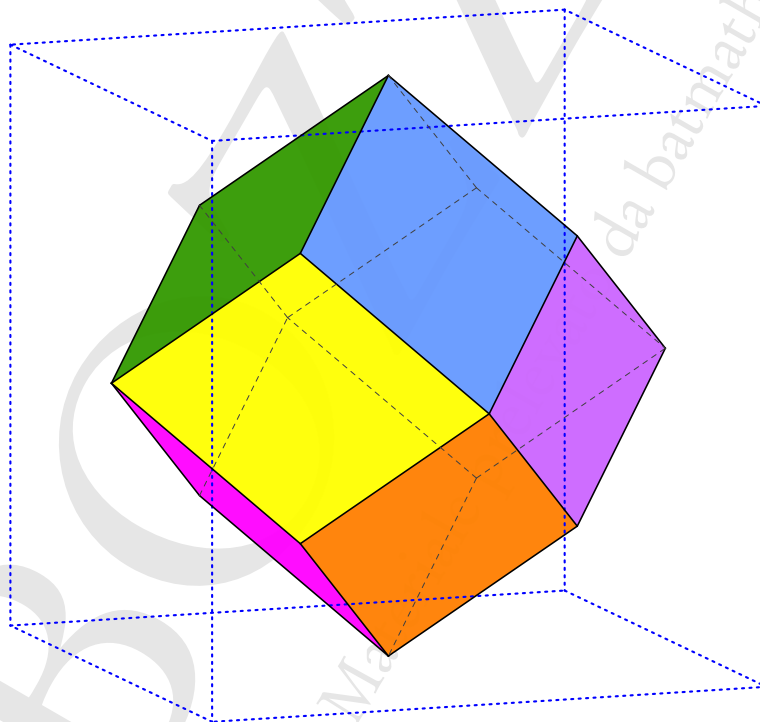


Figura 5.22.: *Il dodecaedro rombico ottenuto per troncatura completa ai lati di un cubo*

La figura 5.23 illustra due passi intermedi della troncatura, la figura 5.24 illustra invece il dodecaedro rombico ottenuto come risultato finale.

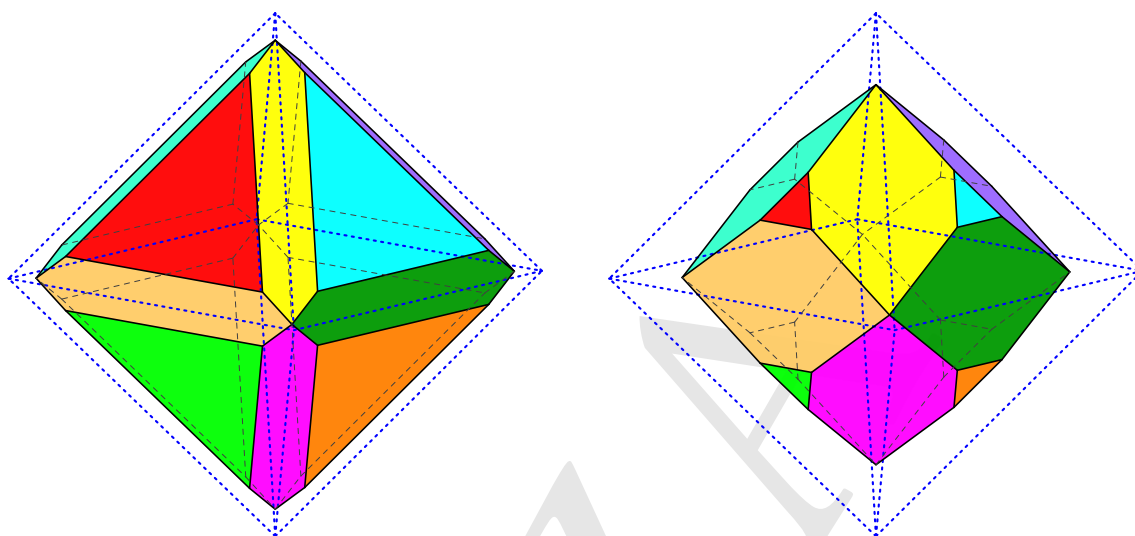


Figura 5.23.: *La troncatura ai lati di un ottaedro: due stadi intermedi*

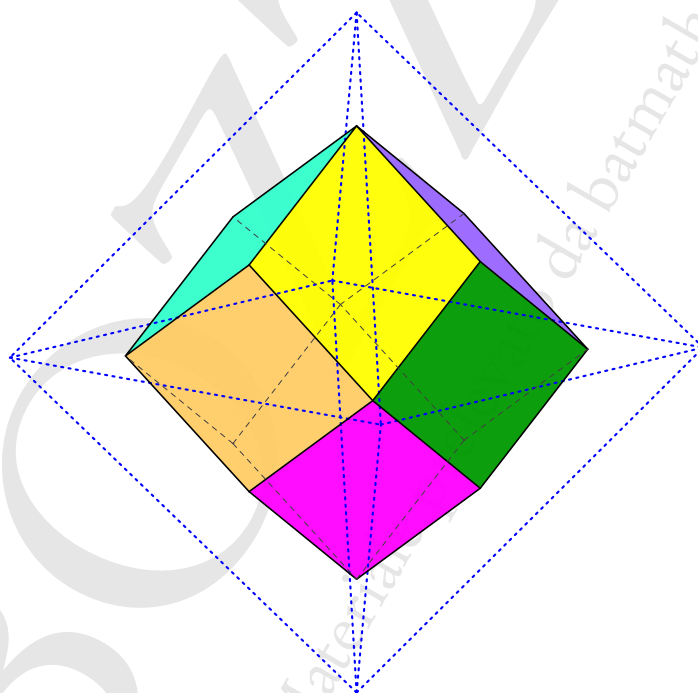


Figura 5.24.: *Il dodecaedro rombico ottenuto per troncatura completa ai lati di un ottaedro*

5.3.4. Dal dodecaedro al triacontaedro rombico

Nel dodecaedro i vertici hanno di nuovo valenza tre e quindi a seguito della troncatura ai lati si avranno tre esagoni con un vertice in comune in corrispondenza a ogni vertice del dodecaedro di partenza. In ogni esagono i due angoli con questo vertice misurano 116.56° , mentre gli altri quattro angoli misurano

121.72° . Nella posizione limite, quando gli esagoni si riducono a rombi, le due coppie opposte di angoli di 121.72° si riducono ad un solo angolo di ampiezza $2 \times 121.72^\circ - 180^\circ = 63.44^\circ$.

Nella posizione limite le facce originarie del dodecaedro si riducono ad un punto, mentre i 30 esagoni si riducono a 30 rombi identici, con gli angoli già indicati: il poliedro ottenuto è il *triacontaedro rombico*. Come è ovvio non si tratta di un poliedro semiregolare, tuttavia è strettamente collegato ai poliedri di Archimede, in quanto è il duale dell'icosidodecaedro. Anche su questo torneremo nel capitolo 9 sui solidi di Catalan.

La figura 5.25 illustra due passi intermedi della troncatura, la figura 5.26 illustra invece il triacontaedro rombico ottenuto come risultato finale.

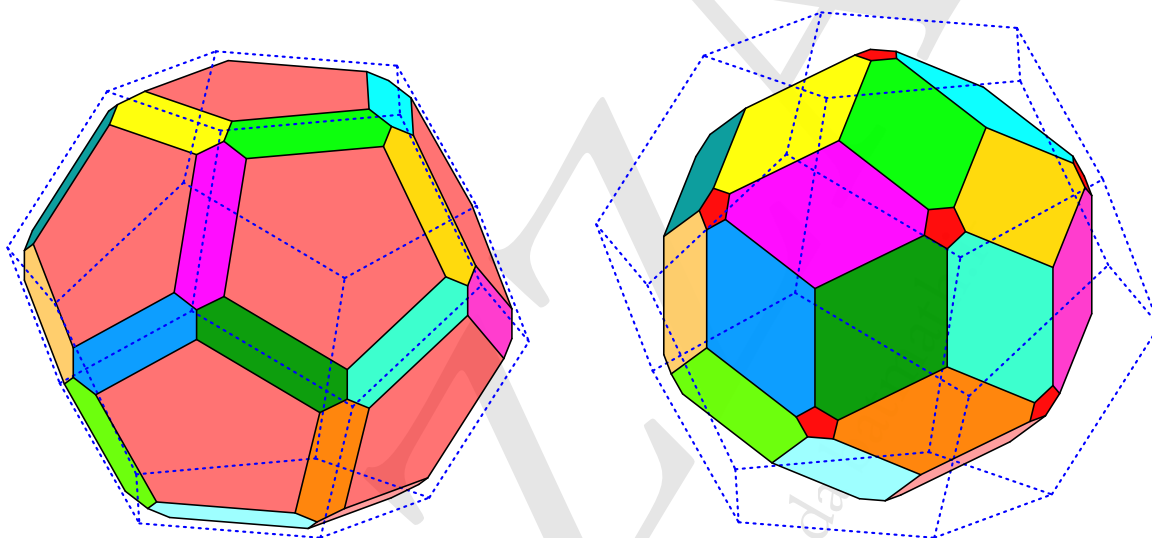


Figura 5.25.: Troncatura ai lati di un dodecaedro: due passi intermedi

Trattandosi di dodecaedro è chiaro che il rapporto aureo doveva in qualche modo metterci lo zampino. In effetti il rapporto delle diagonali dei rombi del triacontaedro è proprio il rapporto aureo

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

5.3.5. Dall'icosaedro al triacontaedro rombico

L'icosaedro, dal punto di vista della troncatura ai lati, è la situazione più complessa, in quanto i vertici hanno valenza 5, dunque a seguito della troncatura ai lati si avranno cinque esagoni con un vertice in comune in corrispondenza a ogni vertice dell'icosaedro di partenza. Anche ora, come nel caso della coppia cubo-ottaedro, avremo una situazione simmetrica rispetto a quella del dodecaedro. In ogni esagono i due angoli con il vertice in comune con gli altri esagoni misurano 63.44° , mentre gli altri quattro angoli misurano 148.28° . Nella posizione limite, quando gli esagoni si riducono a rombi, le due coppie opposte di angoli di 148.28° si riducono ad un solo angolo di ampiezza $2 \times 148.28^\circ - 180^\circ = 116.56^\circ$.

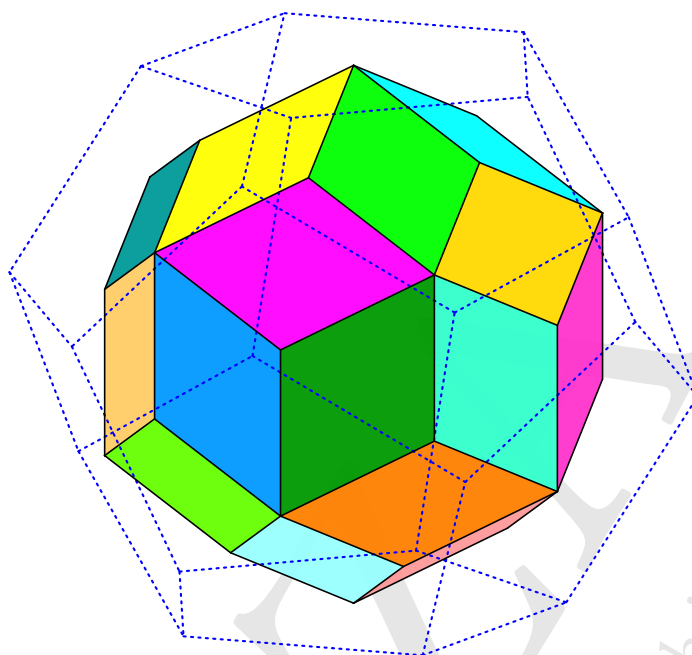


Figura 5.26.: *Il triacontaedro rombico ottenuto per troncatura ai lati completa di un dodecaedro*

Esattamente come per il dodecaedro anche qui il poliedro limite è il triacontaedro rombico, duale dell'icosidodecaedro, come già osservato. È utile ricordare qui che anche l'icosidodecaedro può essere ottenuto, come abbiamo visto, per troncatura sia dal dodecaedro che dall'icosaedro.

La figura 5.27 illustra due passi intermedi della troncatura, la figura 5.28 illustra invece il triacontaedro rombico ottenuto come risultato finale.

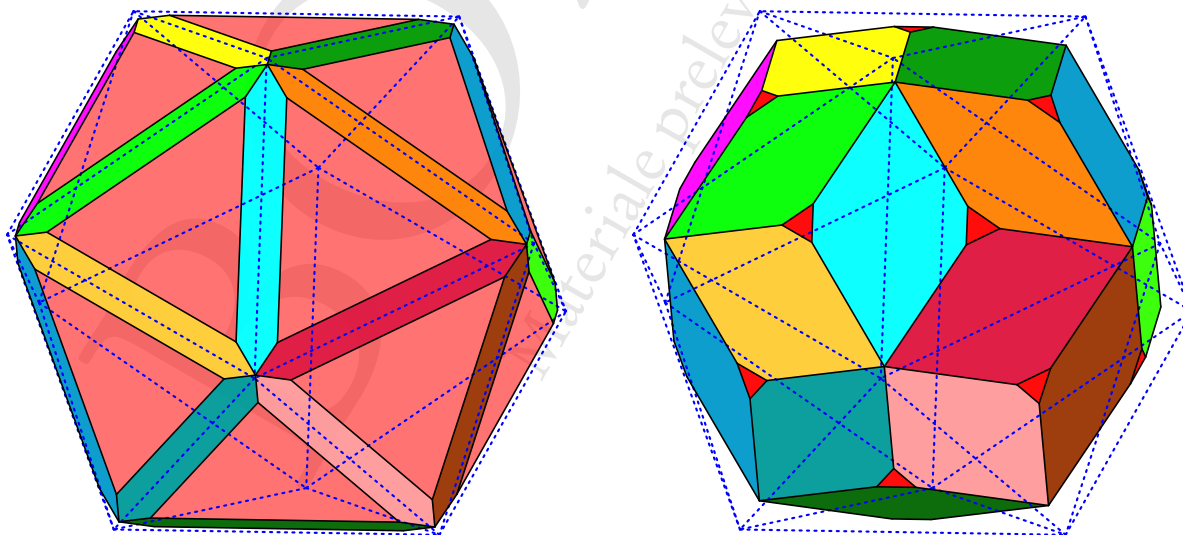


Figura 5.27.: *Troncatura ai lati di un icosaedro: due passi intermedi*

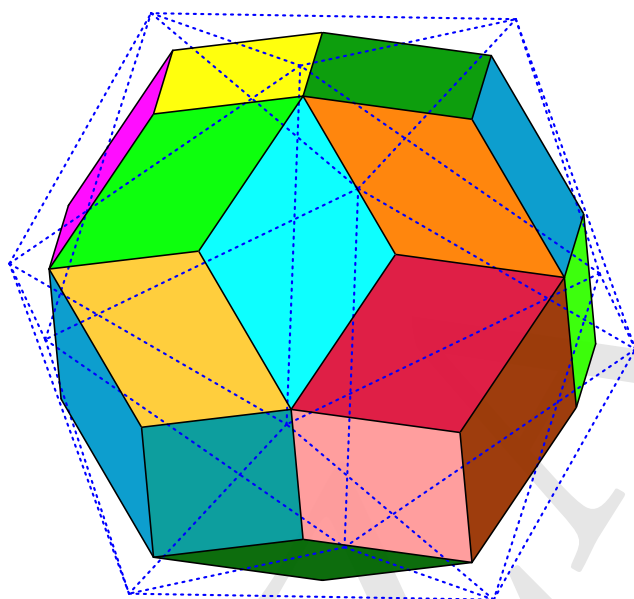


Figura 5.28.: Il triacontaedro rombico ottenuto per troncatura ai lati completa di un icosaedro

Come abbiamo già segnalato i rombi che compaiono nel triacontaedro rombico hanno il rapporto delle diagonali uguale al rapporto aureo: rombi di questo tipo sono chiamati, ovviamente, *rombi aurei*: si veda la figura 5.29.

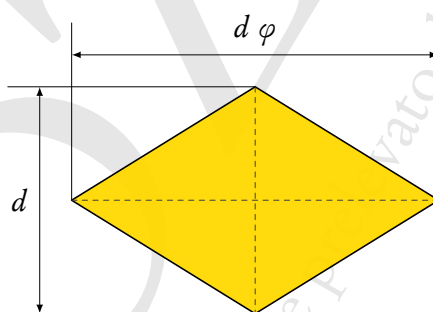


Figura 5.29.: Il rombo aureo: poligono comune a tutte le facce del triacontaedro rombico

Per completezza segnaliamo che nel dodecaedro rombico il rapporto delle due diagonali è invece $\sqrt{2}$, un rapporto ugualmente importante nelle applicazioni: è per esempio il rapporto dei due lati del rettangolo di un foglio A4.

5.4. Troncatura ai lati e ai vertici

La troncatura ai lati e vertici produce due nuovi poliedri archimedei, precisamente il rombicubottaedro e il rombicosidodecaedro. Inoltre si ottiene nuovamente il cubottaedro a partire dal tetraedro e il duale di ciascun solido platonico, quando la troncatura raggiunge la posizione limite.

5.4.1. Dal tetraedro al cubottaedro e al tetraedro duale

La troncatura ai lati e vertici a partire dal tetraedro non produce nuovi poliedri archimedeei: si ottiene nuovamente il cubottaedro come troncatura intermedia e il tetraedro in posizione duale, come troncatura finale.

Si vedano le figure 5.30, dove a destra è visualizzato il cubottaedro, e 5.31, dove a destra è invece visualizzato il duale del tetraedro di partenza.

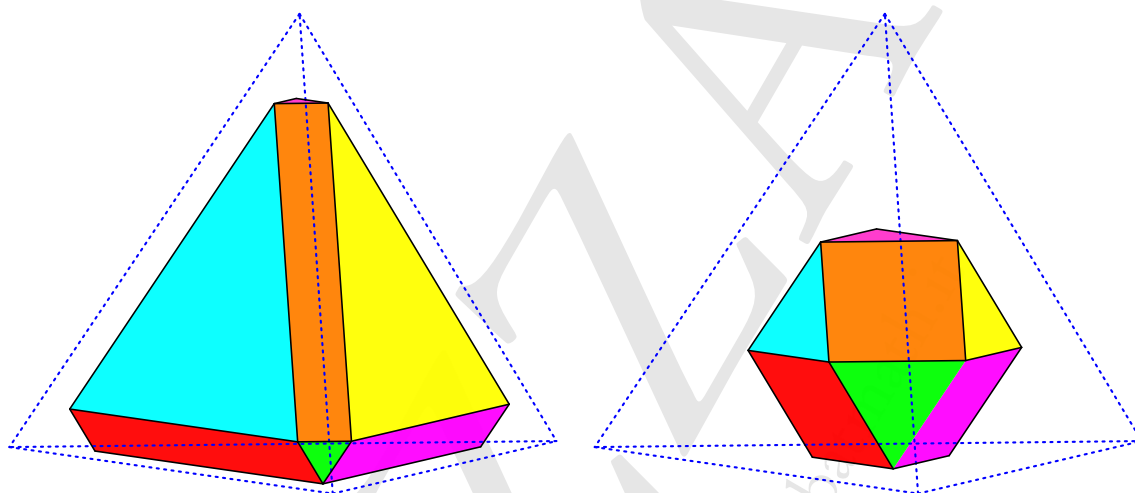


Figura 5.30.: *Troncatura ai lati e vertici di un tetraedro: un primo passo e il cubottaedro*

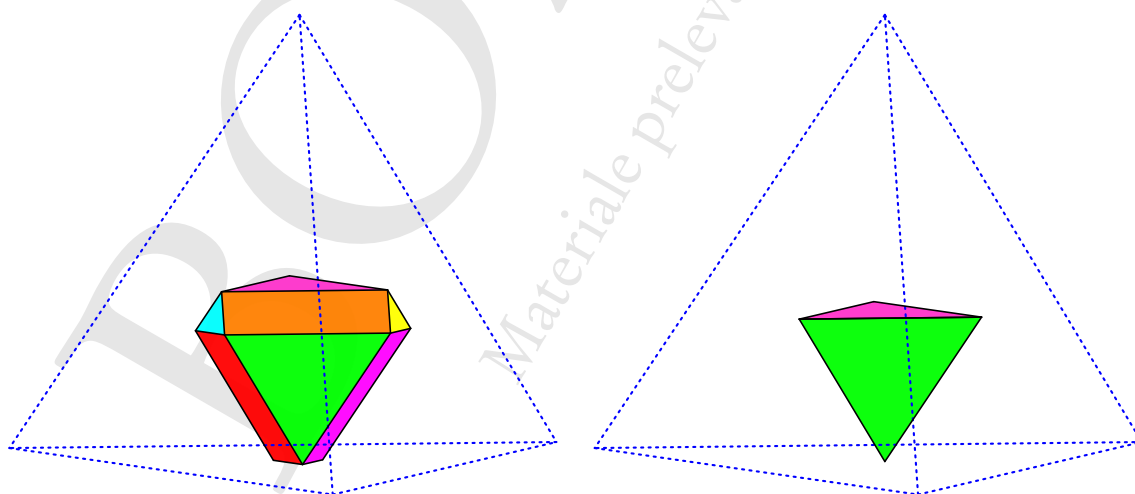


Figura 5.31.: *Troncatura ai lati e vertici di un tetraedro: oltre il cubottaedro e fino al tetraedro duale*

5.4.2. Dal cubo al rombicubottaedro e all'ottaedro

La troncatura ai lati e vertici a partire dal cubo produce il rombicubottaedro come troncatura intermedia e l'ottaedro, duale del cubo, come troncatura finale.

Si vedano le figure 5.32, dove a destra è visualizzato il rombicubottaedro, e 5.33, dove a destra è invece visualizzato l'ottaedro duale del cubo di partenza.

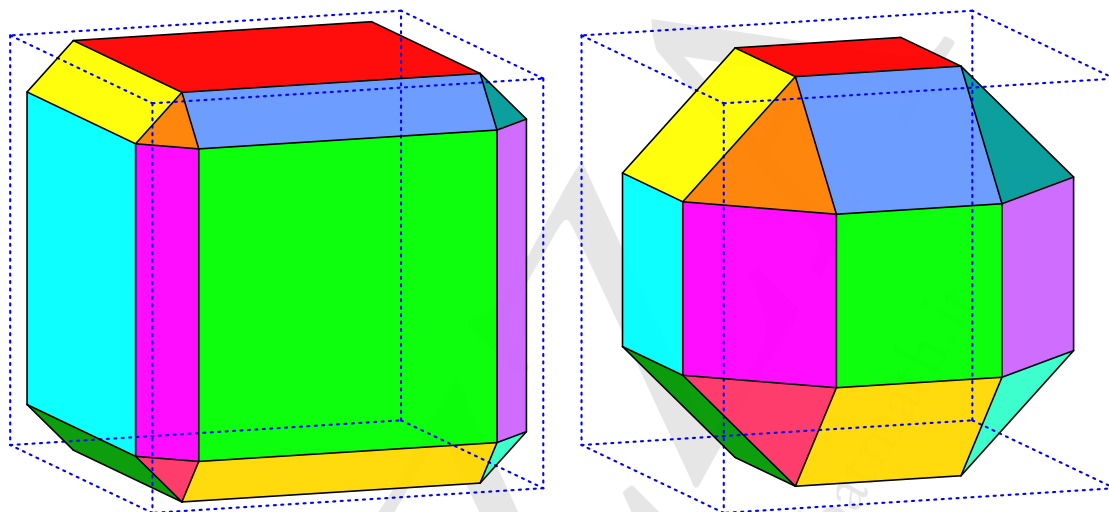


Figura 5.32.: *Troncatura ai lati e vertici di un cubo: un primo passo e il rombicubottaedro*

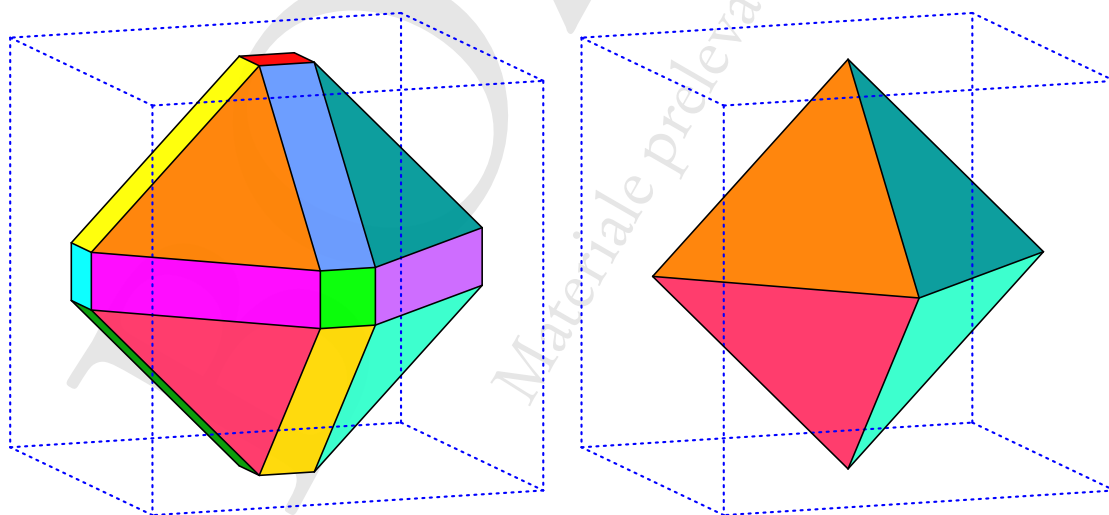


Figura 5.33.: *Troncatura ai lati e vertici di un cubo: oltre il rombicubottaedro e fino all'ottaedro duale*

5.4.3. Dall' ottaedro al rombicubottaedro e al cubo

La troncatura ai lati e vertici a partire dall'ottaedro produce il rombicubottaedro come troncatura intermedia e il cubo, duale dell'ottaedro, come troncatura finale.

Si vedano le figure 5.34, dove a destra è visualizzato il rombicubottaedro, e 5.35, dove a destra è invece visualizzato il cubo duale dell'ottaedro di partenza.

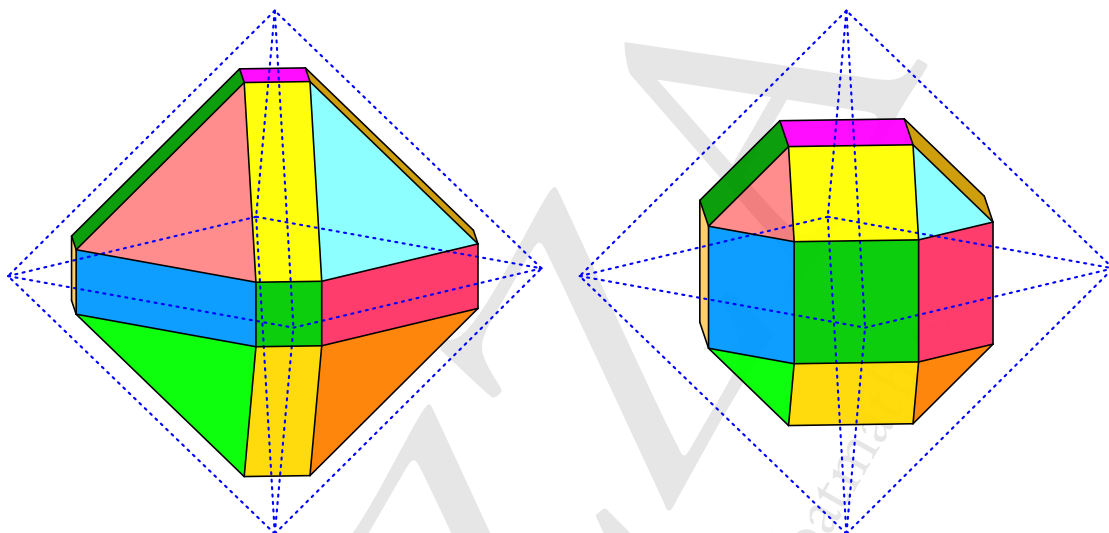


Figura 5.34.: *Troncatura ai lati e vertici di un'ottaedro: un primo passo e il rombicubottaedro*

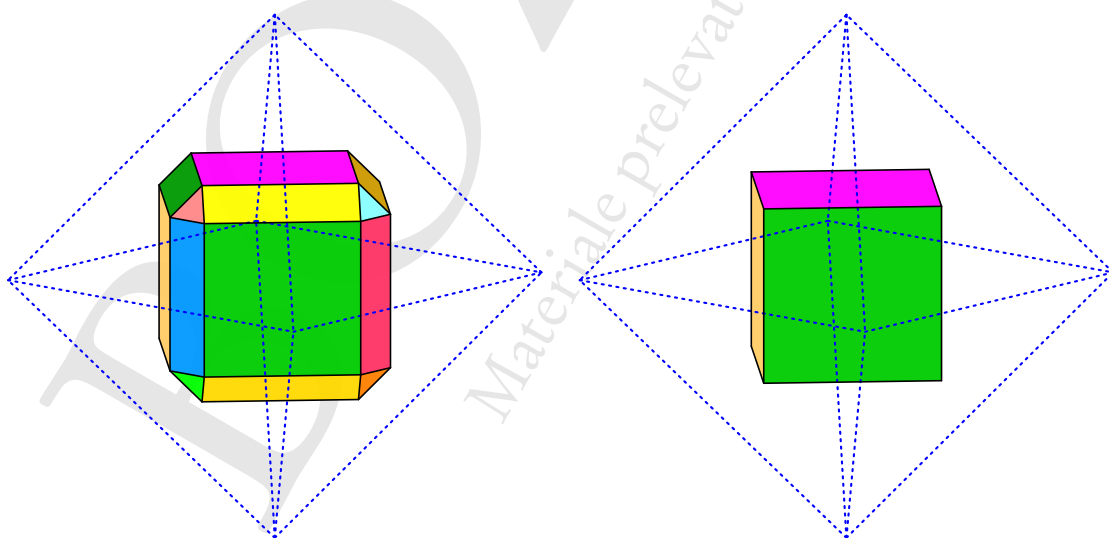


Figura 5.35.: *Troncatura ai lati e vertici di un'ottaedro: oltre il rombicubottaedro e fino al cubo duale*

5.4.4. Rombicubottaedro: perché?

Se si riesaminano le costruzioni del dodecaedro rombico e del rombicubottaedro sia a partire dal cubo che dall'ottaedro, si capisce facilmente il perché del nome assegnato al rombicubottaedro: esso ha un cubo circoscritto, sulle cui facce giacciono sei sue facce quadrate, un ottaedro circoscritto, sulle cui facce giacciono le sue otto facce triangolari e un dodecaedro rombico circoscritto, sulle cui facce giacciono le restanti dodici sue facce quadrate. Si vedano le figure 5.36 e 5.37.

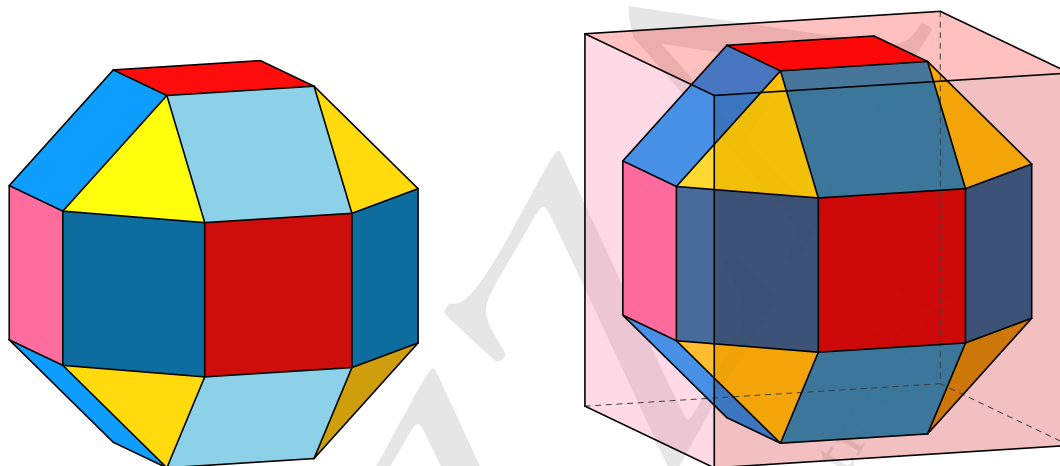


Figura 5.36.: Il rombicubottaedro, a sinistra, e il cubo ad esso “circoscritto”, a destra

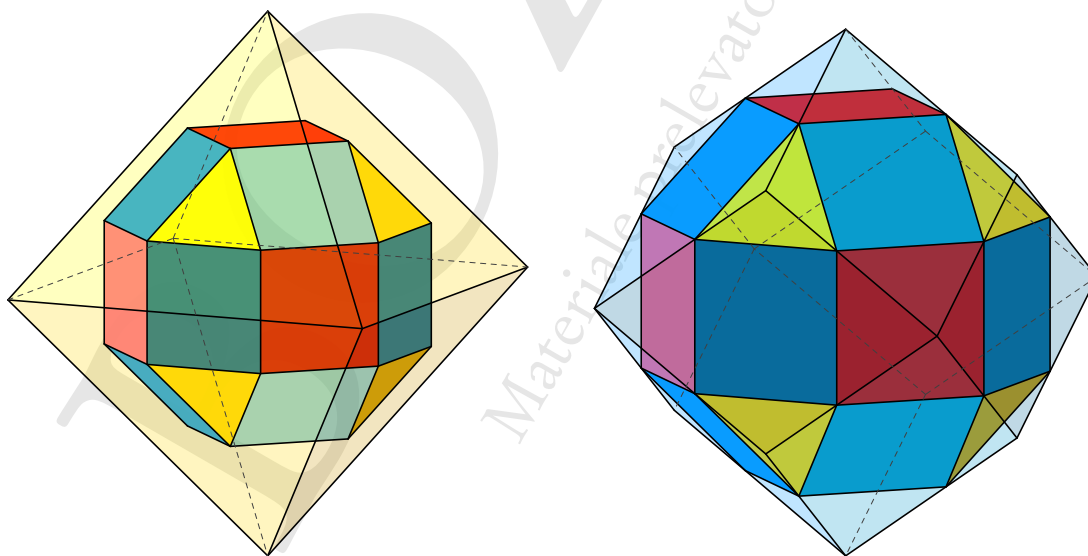


Figura 5.37.: L'ottaedro, a sinistra, e il dodecaedro rombico, a destra, “circoscritti” al rombicubottaedro

5.4.5. Dal dodecaedro al rombicosidodecaedro e all'icosaedro

La troncatura ai lati e vertici a partire dal dodecaedro produce il rombicosidodecaedro come troncatura intermedia e l'icosaedro, duale del dodecaedro, come troncatura finale.

Si vedano le figure 5.38, dove a destra è visualizzato il rombicosidodecaedro, e 5.39, dove a destra è invece visualizzato l'icosaedro duale del dodecaedro di partenza.

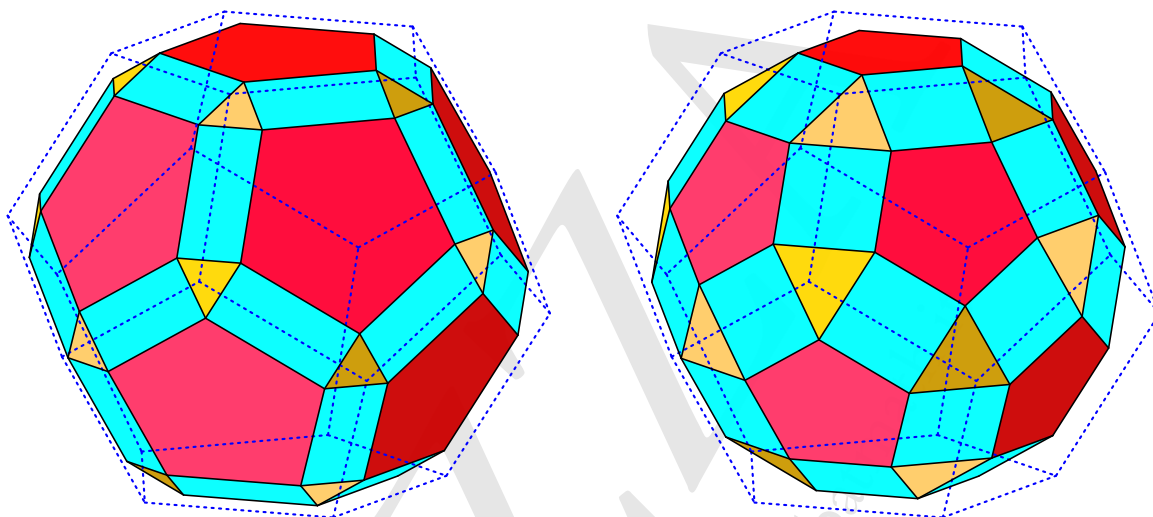


Figura 5.38.: Troncatura ai lati e vertici di un dodecaedro: un primo passo e il rombicosidodecaedro

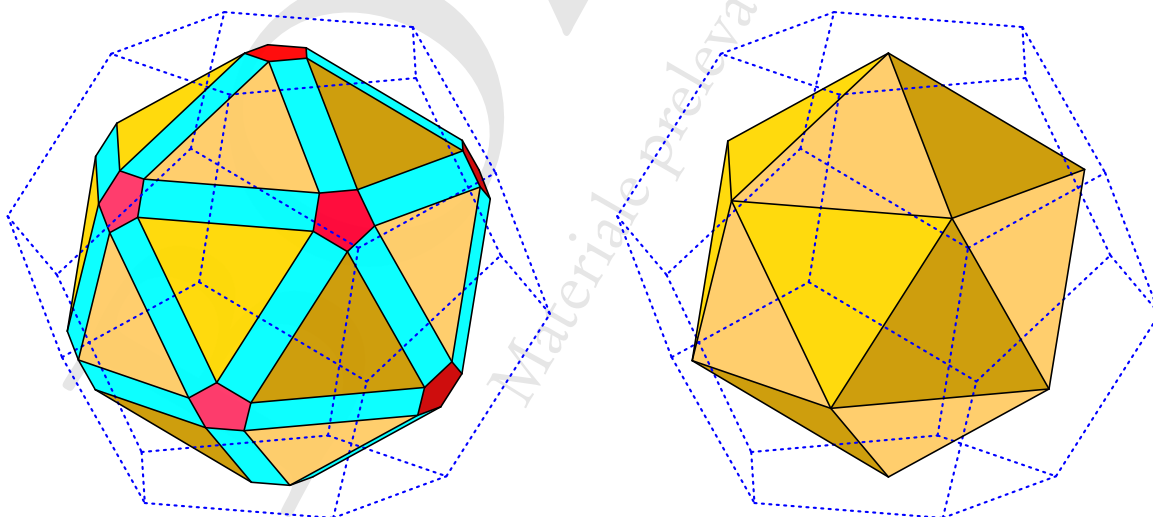


Figura 5.39.: Troncatura ai lati e vertici di un dodecaedro: oltre il rombicosidodecaedro e fino all'icosaedro duale

5.4.6. Dall'icosaedro al rombicosidodecaedro e al dodecaedro

La troncatura ai lati e vertici a partire dall'icosaedro produce il rombicosidodecaedro come troncatura intermedia e il dodecaedro, duale dell'icosaedro, come troncatura finale.

Si vedano le figure 5.40, dove a destra è visualizzato il rombicosidodecaedro, e 5.41, dove a destra è invece visualizzato il dodecaedro duale dell'icosaedro di partenza.

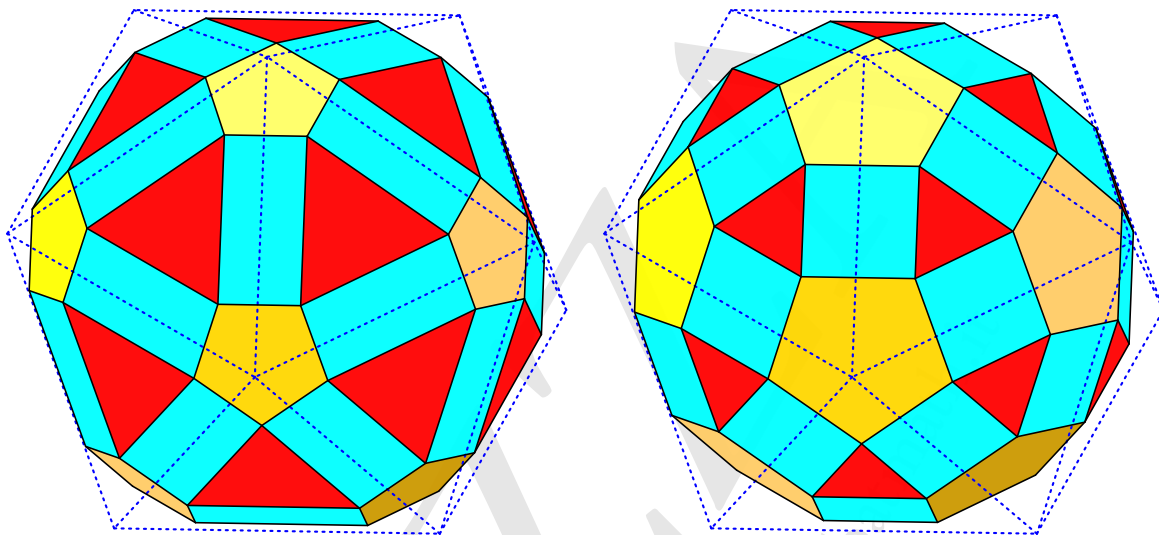


Figura 5.40.: Troncatura ai lati e vertici di un icosaedro: un primo passo e il rombicosidodecaedro

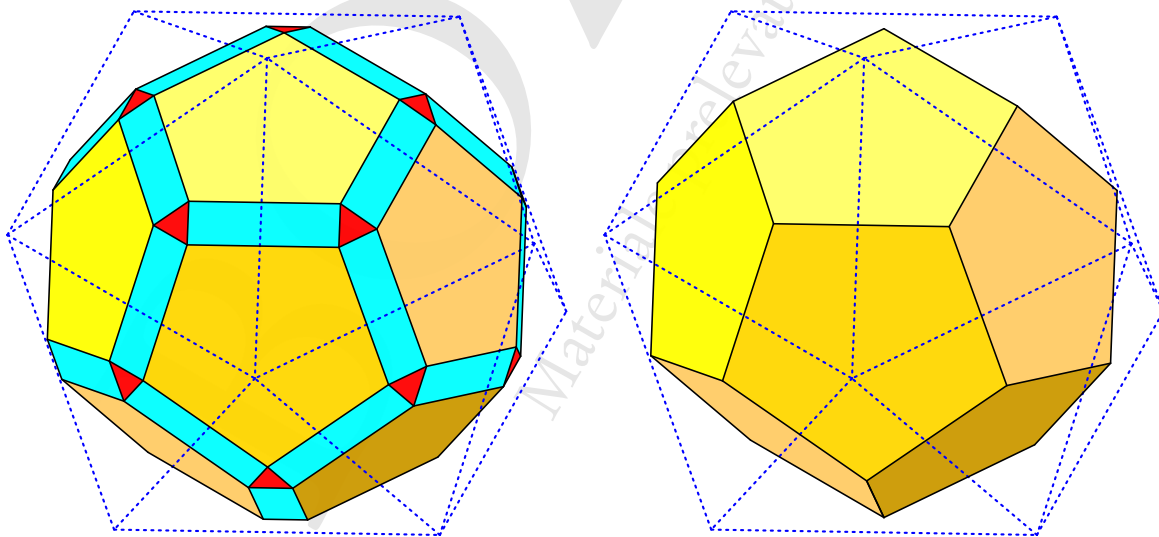


Figura 5.41.: Troncatura ai lati e vertici di un icosaedro: oltre il rombicosidodecaedro e fino al dodecaedro duale

5.4.7. Rombicosidodecaedro: perché?

Se si riesaminano le costruzioni del triacontaedro rombico e del rombicosidodecaedro sia a partire dal dodecaedro che dall'icosaedro, si capisce facilmente il perché del nome assegnato al rombicosidodecaedro: esso ha un dodecaedro circoscritto, sulle cui facce giacciono le dodici sue facce pentagonali, un icosaedro circoscritto, sulle cui facce giacciono le sue venti facce triangolari e un triacontaedro rombico circoscritto, sulle cui facce giacciono le restanti trenta sue facce quadrate. Si vedano le figure 5.42 e 5.43.

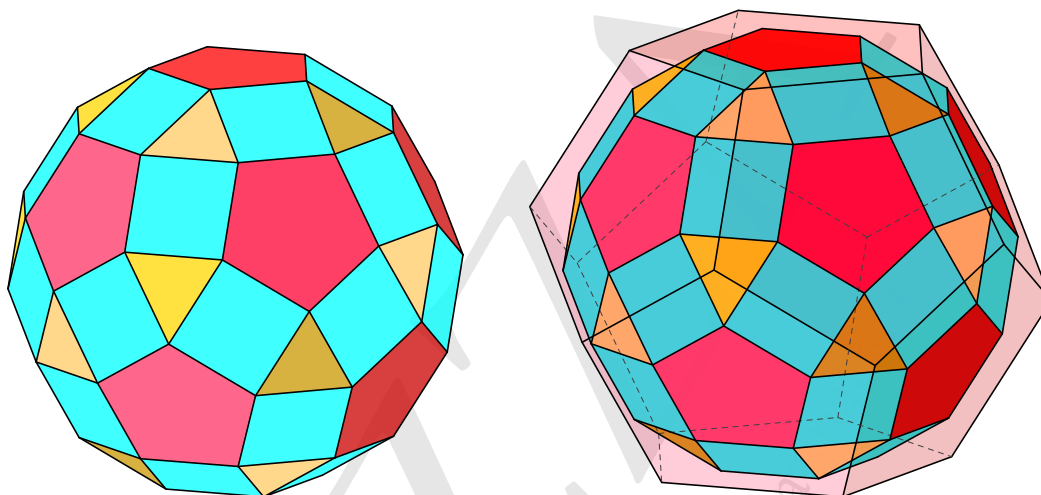


Figura 5.42.: Il rombicosidodecaedro, a sinistra, e il dodecaedro ad esso “circoscritto”, a destra

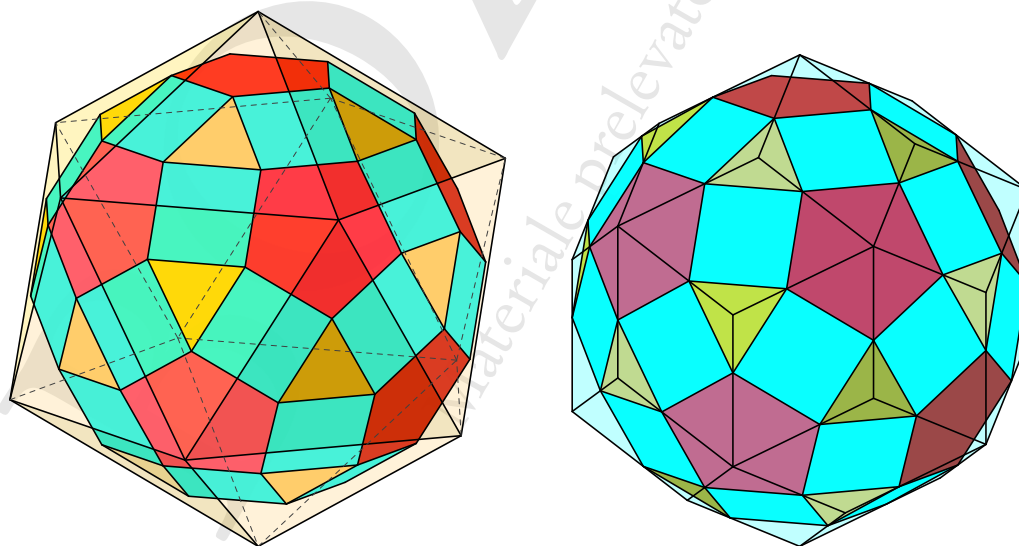


Figura 5.43.: L'icosaedro, a sinistra, e il triacontaedro rombico, a destra, “circoscritti” al rombicosidodecaedro

5.5. Troncatura ai lati e forte ai vertici

La troncatura ai lati e forte vertici produce due nuovi poliedri archimedei, precisamente il grande rombicubottaedro e il grande rombicosidodecaedro. Inoltre si ottiene nuovamente l'ottaedro troncato a partire dal tetraedro e il troncato del duale di ciascun solido platonico, quando la troncatura raggiunge la posizione limite.

5.5.1. Dal tetraedro all'ottaedro troncato e al tetraedro troncato

La troncatura ai lati e forte ai vertici, applicata al tetraedro, produce il cubottaedro come poliedro intermedio, e il tetraedro troncato come risultato finale. Si noti che il tetraedro troncato ottenuto in questo modo corrisponde alla troncatura debole ai vertici del tetraedro duale rispetto a quello della figura 5.7 nella pagina 54.

Si vedano le figure 5.44 e 5.45.

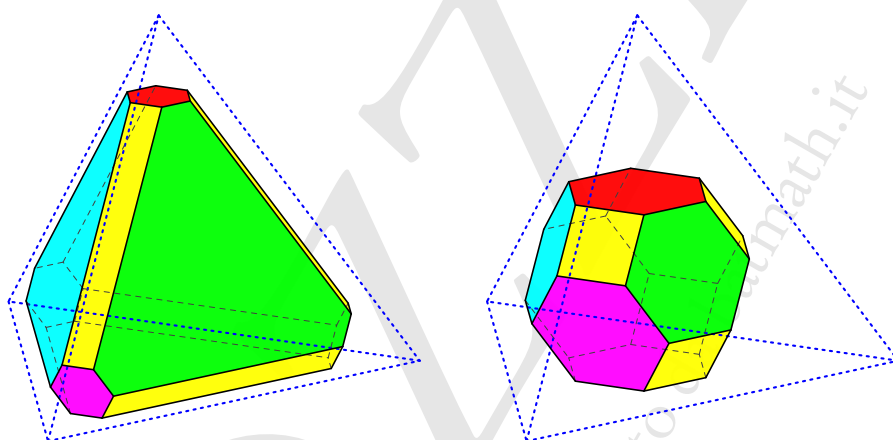


Figura 5.44.: Troncatura ai lati e forte ai vertici di un tetraedro: un primo passo e il cubottaedro

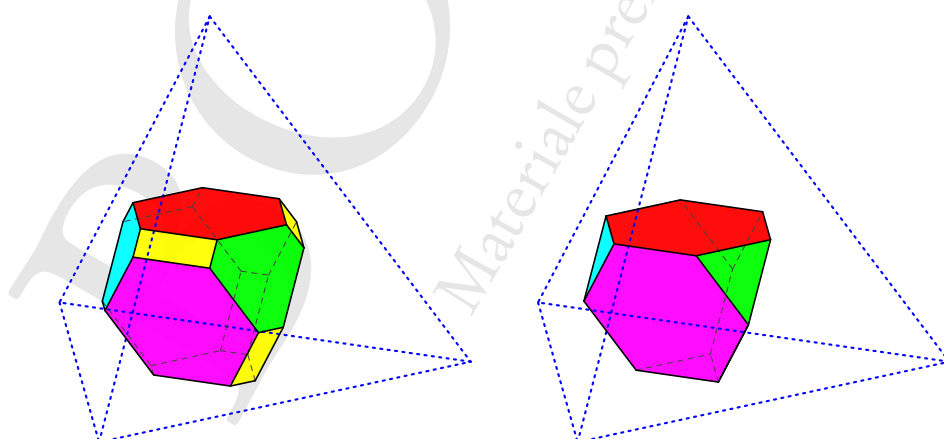


Figura 5.45.: Troncatura ai lati e forte ai vertici di un tetraedro: oltre il cubottaedro e fino al tetraedro troncato

5.5.2. Dal cubo al grande rombicubottaedro e all'ottaedro troncato

La troncatura ai lati e forte ai vertici, applicata al cubo, produce il grande rombicubottaedro come poliedro intermedio, e l'ottaedro troncato come risultato finale.

Si vedano le figure 5.46 e 5.47.

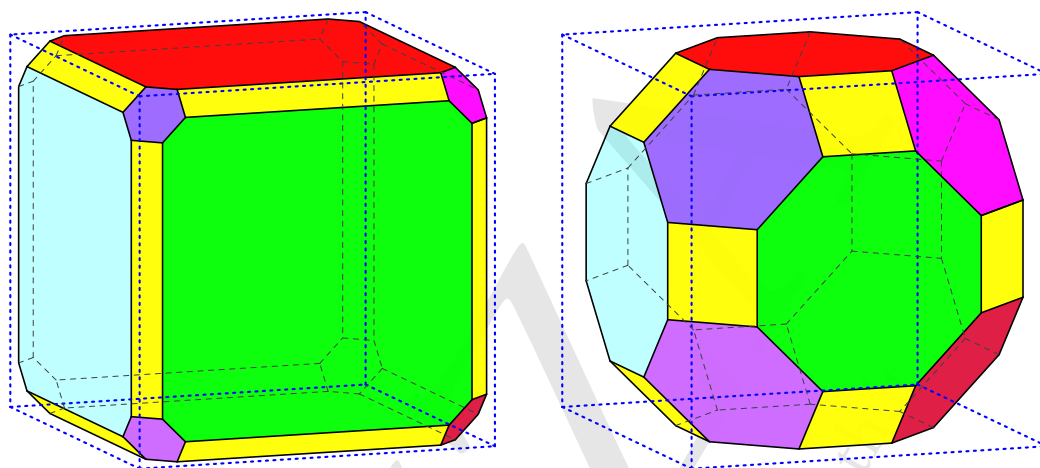


Figura 5.46.: Troncatura ai lati e forte ai vertici di un cubo: un primo passo e il grande rombicubottaedro

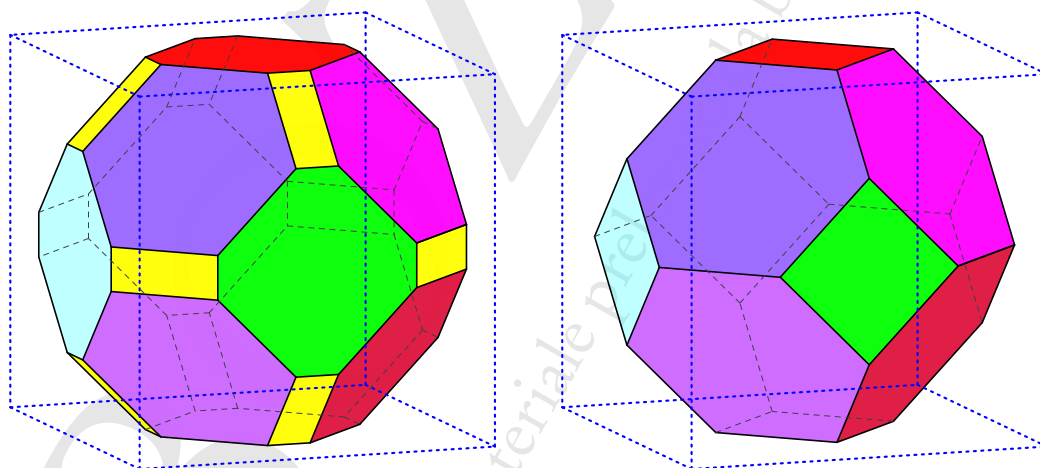


Figura 5.47.: Troncatura ai lati e forte ai vertici di un cubo: oltre il grande rombicubottaedro e fino all'ottaedro troncato

Abbiamo già accennato, vedi il paragrafo 4.1 nella pagina 33, al fatto che il nome di cubottaedro troncato, dato da Keplero al solido ottenuto per troncatura intermedia ai lati e forte ai vertici del cubo è in effetti improprio, in quanto i solidi che si ottengono per troncatura dal cubottaedro non sono mai semiregolari: più appropriato il nome, che ormai si sta imponendo, di *grande rombicubottaedro*. Discuteremo in dettaglio il problema nel paragrafo 5.7.

5.5.3. Dall'ottaedro al grande rombicubottaedro e al cubo troncato

La troncatura ai lati e forte ai vertici, applicata all'ottaedro, produce il grande rombicubottaedro come poliedro intermedio e il cubo troncato risultato finale.

Si vedano le figure 5.48 e 5.49.

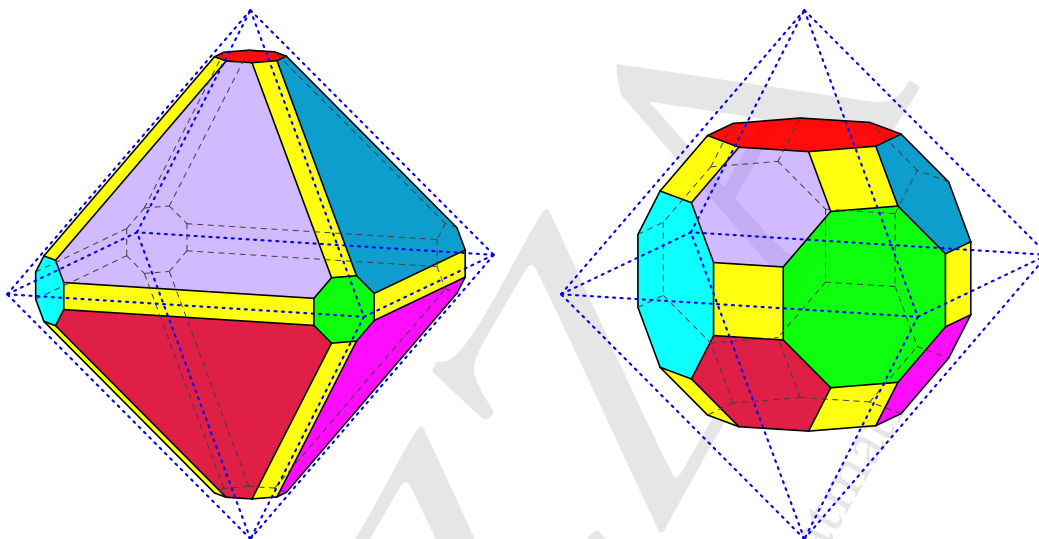


Figura 5.48.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un ottaedro: un primo passo e il grande rombicubottaedro*

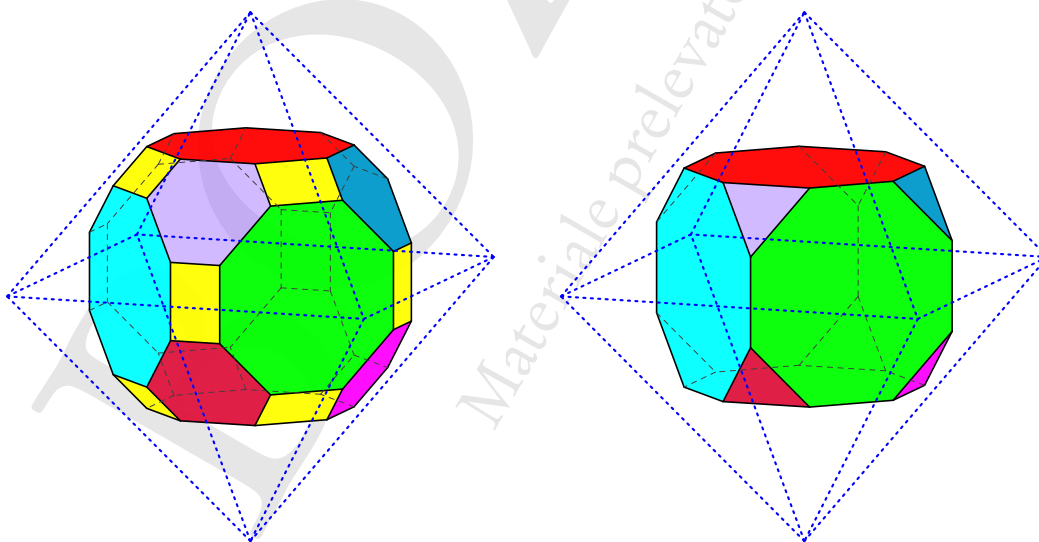


Figura 5.49.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un ottaedro: oltre il grande rombicubottaedro e fino al cubo troncato*

5.5.4. Grande rombicubottaedro: perché?

Se si riesaminano le costruzioni del dodecaedro rombico e del grande rombicubottaedro sia a partire dal cubo che dall'ottaedro, si capisce facilmente il perché del nome assegnato al (grande) rombicubottaedro: esso ha un cubo circoscritto, sulle cui facce giacciono le sei sue facce ottagonali, un ottaedro circoscritto, sulle cui facce giacciono le sue otto facce esagonali e un dodecaedro rombico circoscritto, sulle cui facce giacciono le dodici sue facce quadrate. Si vedano le figure 5.50 e 5.51.

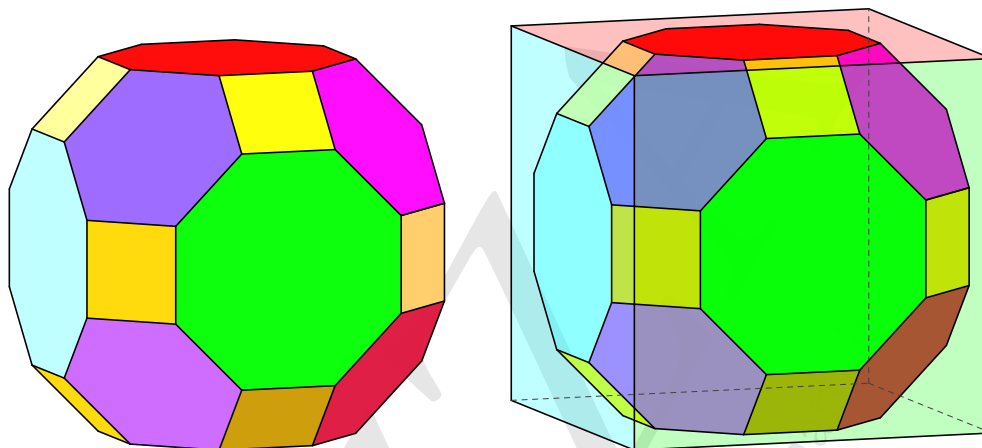


Figura 5.50.: Il grande rombicubottaedro, a sinistra, e il cubo ad esso “circoscritto”, a destra

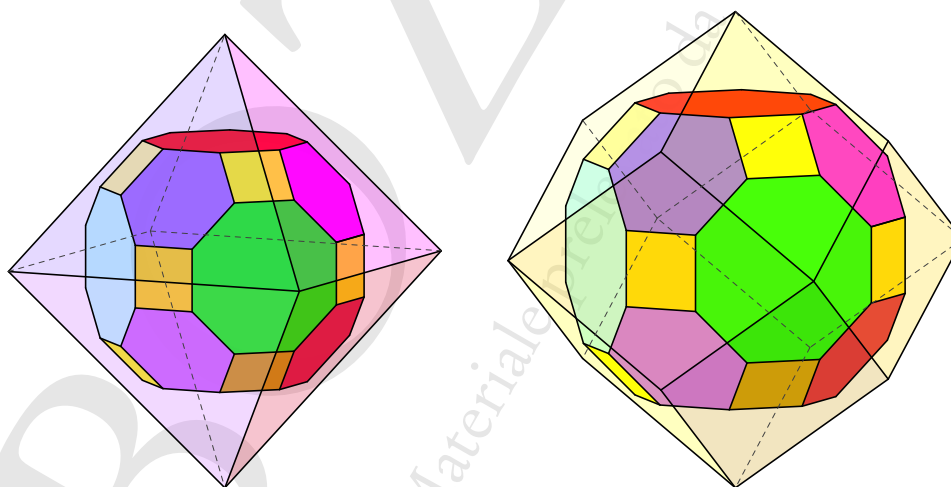


Figura 5.51.: L'ottaedro, a sinistra, e il dodecaedro rombico, a destra, “circoscritti” al grande rombicubottaedro

L'aggettivo grande, usato per distinguere questo solido dal rombicubottaedro, è legato al fatto che in questo solido il volume è circa $41.8l^3$, mentre nel (piccolo) rombicubottaedro il volume è circa $8.7l^3$, dove l è il lato degli spigoli. Questo fatto risulta visivamente evidente se si confrontano i rombi del dodecaedro rombico su cui giacciono dodici facce quadrate del piccolo e del grande rombicubottaedro: si confrontino le immagini di destra delle figure 5.37 e 5.51.

5.5.5. Dal dodecaedro al grande rombicosidodecaedro e all'icosaedro troncato

La troncatura ai lati e forte ai vertici, applicata a un dodecaedro, produce il grande rombicosidodecaedro come poliedro intermedio e l'icosaedro troncato come risultato finale.

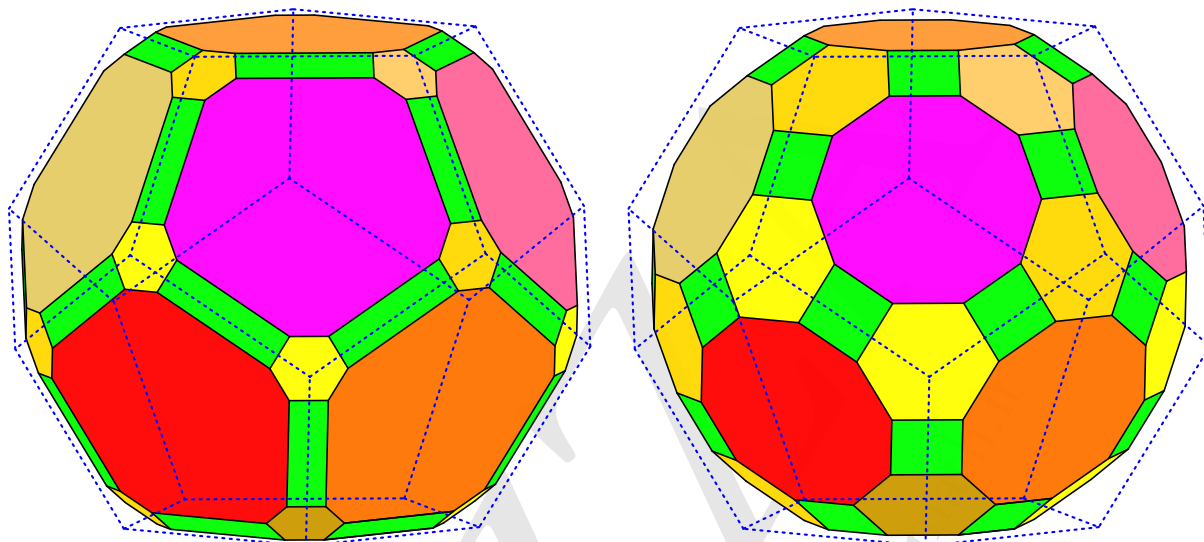


Figura 5.52.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un dodecaedro: un primo passo e il grande rombicosidodecaedro*

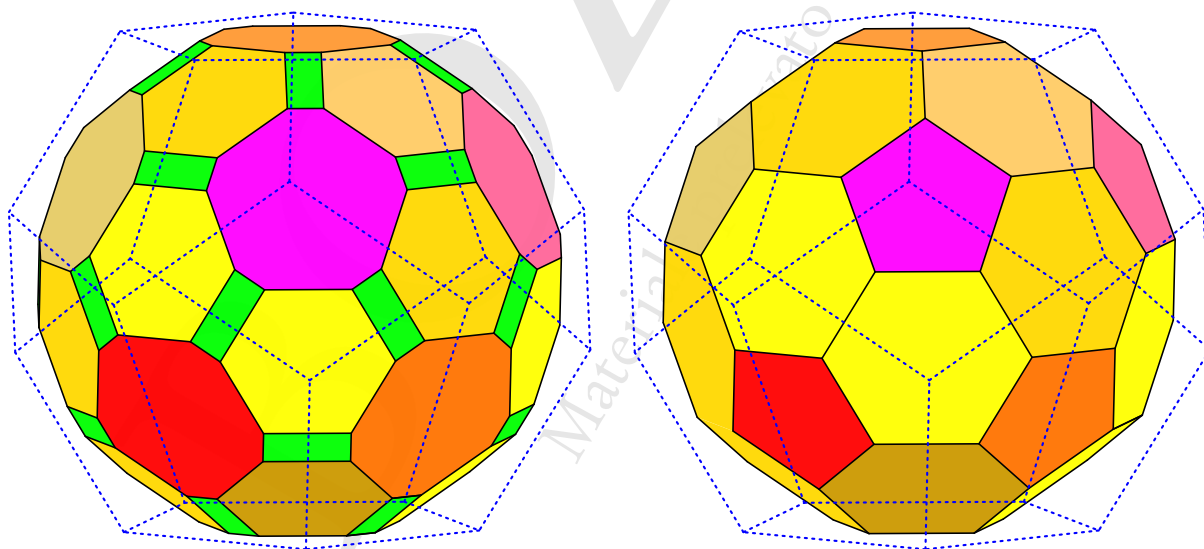


Figura 5.53.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un dodecaedro: oltre il rombicosidodecaedro e fino all'icosaedro troncato*

5.5.6. Dall'icosaedro al grande rombicosidodecaedro e al dodecaedro troncato

La troncatura ai lati e forte ai vertici, applicata a un icosaedro, produce il grande rombicosidodecaedro come poliedro intermedio e il dodecaedro troncato come risultato finale.

Si vedano le figure 5.54 e 5.55.

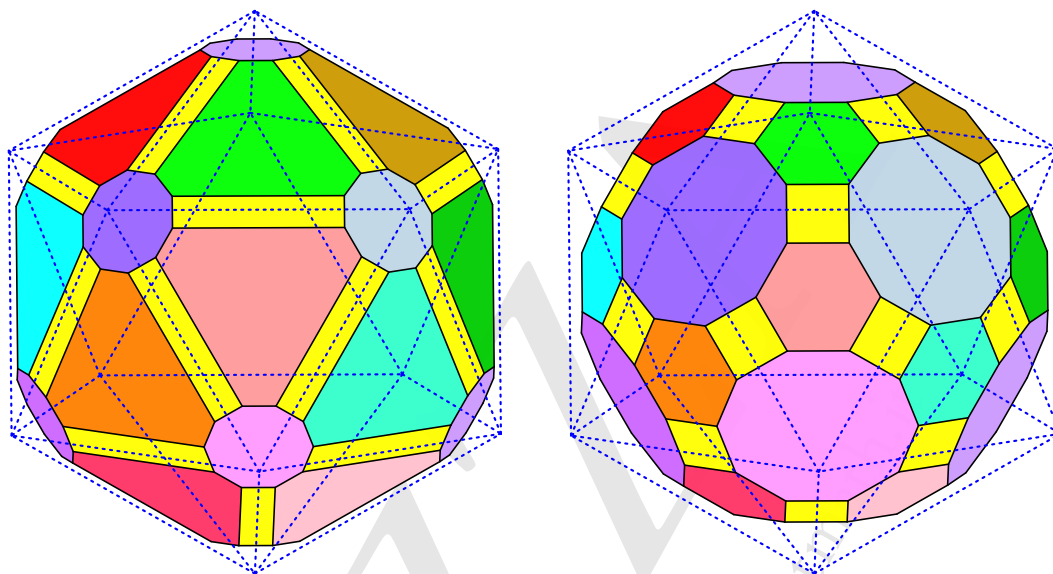


Figura 5.54.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un icosaedro: un primo passo e il grande rombicosidodecaedro*

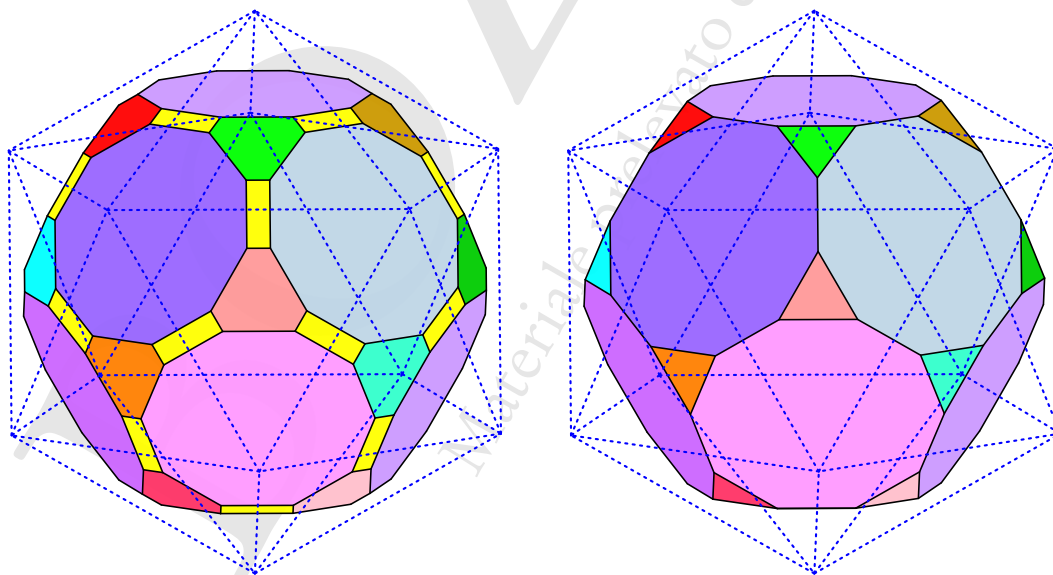


Figura 5.55.: *Troncatura ai lati e forte ai vertici di un icosaedro: oltre il grande rombicosidodecaedro e fino al dodecaedro troncato*

5.5.7. Grande rombicosidodecaedro: perché?

Se si riesaminano le costruzioni del triacontaedro rombico e del grande rombicosidodecaedro sia a partire dal dodecaedro che dall'icosaedro, si capisce facilmente il perché del nome assegnato al (grande) rombicosidodecaedro: esso ha un dodecaedro circoscritto, sulle cui facce giacciono le dodici sue facce decagonali, un icosaedro circoscritto, sulle cui facce giacciono le sue venti facce esagonali e un triacontaedro rombico circoscritto, sulle cui facce giacciono le restanti trenta sue facce quadrate. Si vedano le figure 5.56 e 5.57.

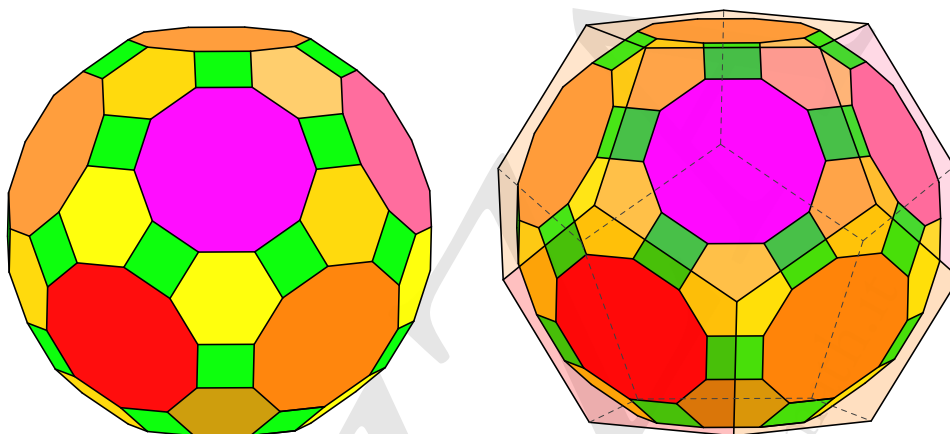


Figura 5.56.: Il grande rombicosidodecaedro, a sinistra e il dodecaedro ad esso “circoscritto”, a destra

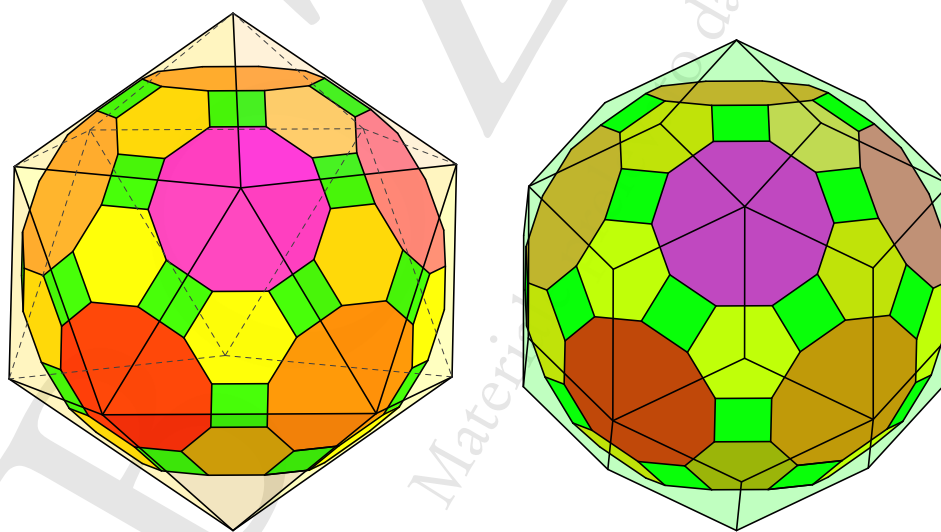


Figura 5.57.: L'icosaedro, a sinistra, e il triacontaedro rombico, a destra, “circoscritti” al grande rombicosidodecaedro

Per quanto riguarda l'aggettivo “grande”, anche qui si può osservare che il volume del (piccolo) rombicosidodecaedro è circa $81.6l^3$, mentre nel (grande) rombicosidodecaedro il volume è circa $206l^3$, dove l è il lato degli spigoli.

5.6. Ancora sulla troncatura ai vertici

La troncatura ai vertici dei poliedri platonici è interessante non solo perché consente la costruzione di sette dei tredici poliedri archimedei, ma anche perché rivela gli stretti legami che esistono tra un poliedro e il suo duale.

Tutto questo diventa particolarmente evidente se si procede con la troncatura oltre il limite della metà dei lati consentendo ai piani di troncatura di intersecarsi all'interno del poliedro di partenza e non solo all'esterno come avviene per le normali troncature precedentemente considerate. Come già osservato, anche i poligoni originati su ogni vertice dai piani di troncatura si intersecano e si possono scegliere due strategie: mantenere questi poligoni nella loro interezza, originando dei poliedri intrecciati come mostrato su un esempio relativo al cubo nel paragrafo 5.2.3, oppure eliminare le parti che si intersecano, situazione che esamineremo in dettaglio in questo paragrafo.

Per comprendere appieno i legami di cui vogliamo parlare tra un poliedro platonico e il suo duale occorre premettere l'osservazione che per ogni coppia di poliedri platonici duali esiste un poliedro archimedeo intermedio, che mantiene alcune delle caratteristiche dei due solidi di partenza. Il modo migliore per evidenziare questo fatto è di considerare il duale costruito a partire dall'intersfera: in questo modo i due poliedri si dispongono nello spazio relativamente uno all'altro nella maniera più simmetrica possibile. Il poliedro intermedio che ci interessa è la parte comune ai due poliedri duali così costruiti. Precisamente si tratta:

1. dell'ottaedro per il caso del tetraedro e del suo duale che è ancora un tetraedro, in diversa posizione spaziale;
2. del cubottaedro nel caso di cubo e di un ottaedro;
3. dell'icosidodecaedro nel caso di un dodecaedro e di un icosaedro.

A parte il caso speciale del tetraedro, i nomi usati per i poliedri intermedi sottolineano proprio il fatto che essi hanno alcune caratteristiche di entrambi i poliedri originari. Vedremo in dettaglio queste costruzioni nel paragrafo 5.8.

Come già detto, la troncatura ai vertici, in particolare se proseguita fin quando le facce del poliedro originario si riducono a un punto, rende manifeste tutte queste caratteristiche: a partire da ognuno dei cinque poliedri si ottengono, oltre naturalmente a solidi non regolari né semiregolari, in successione:

1. il corrispondente poliedro archimedeo troncato,
2. il poliedro intermedio con il duale,
3. il poliedro archimedeo troncato del duale,
4. il poliedro platonico duale.

Le figure 5.58, 5.59, 5.60, 5.61 e 5.62 illustrano gli ultimi due stadi di questi passaggi, mentre i primi due sono già stati trattati nel paragrafo 5.2.

Nel caso del tetraedro, cubo e ottaedro le figure mostrano anche tutti i poligoni ottenuti per troncatura, evidenziando le loro intersezioni; nel caso del dodecaedro e dell'icosaedro sono evidenziati solo due dei poligoni ottenuti per troncatura, per rendere più leggibile le illustrazioni.

Abbiamo voluto mantenere separata la trattazione di queste troncature oltre la metà dei lati rispetto alle troncature normali, perché qui non si originano nuovi poliedri: lo scopo è invece quello di evidenziare i legami detti tra i poliedri e i loro duali.

Si noti come, essendo il tetraedro autoduale, il suo comportamento in questo contesto è leggermente diverso da quello degli altri poliedri, in particolare il poliedro intermedio è ancora un poliedro platonico (un ottaedro) e non un poliedro archimedeo.

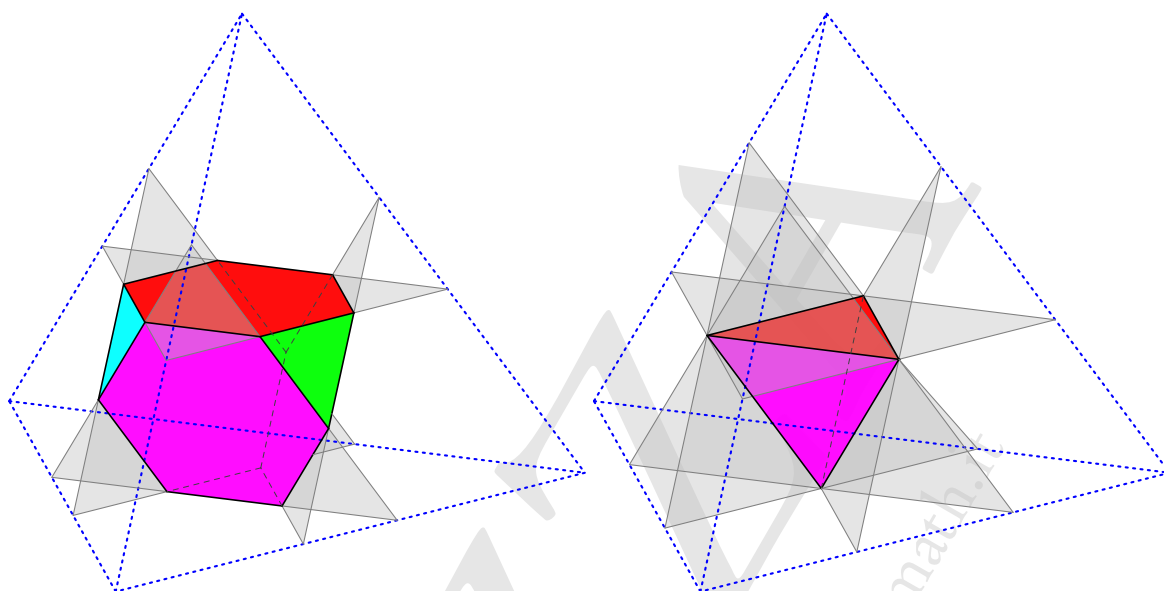


Figura 5.58.: *Troncature ai vertici di un tetraedro oltre la metà: il tetraedro troncato “duale” e il tetraedro “duale”*

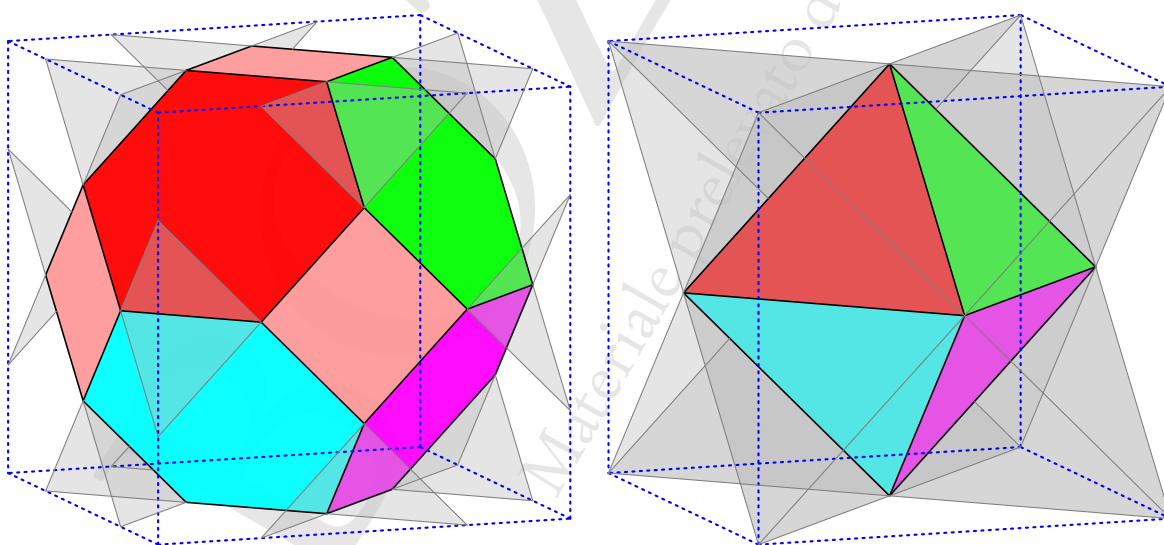


Figura 5.59.: *Troncature ai vertici di un cubo oltre la metà: l’ottaedro troncato e l’ottaedro duale*

Il confronto della figura 5.59 di sinistra con la figura 5.11 di destra rende evidente la differenza tra la troncatura qui considerata, che possiamo chiamare *sottrattiva*, con quella utilizzata per il cubo intrecciato,

che possiamo chiamare *additiva*: qui le porzioni intersecantesi dei poligoni di troncatura sono eliminate, nel cubo intrecciato sono invece mantenute.

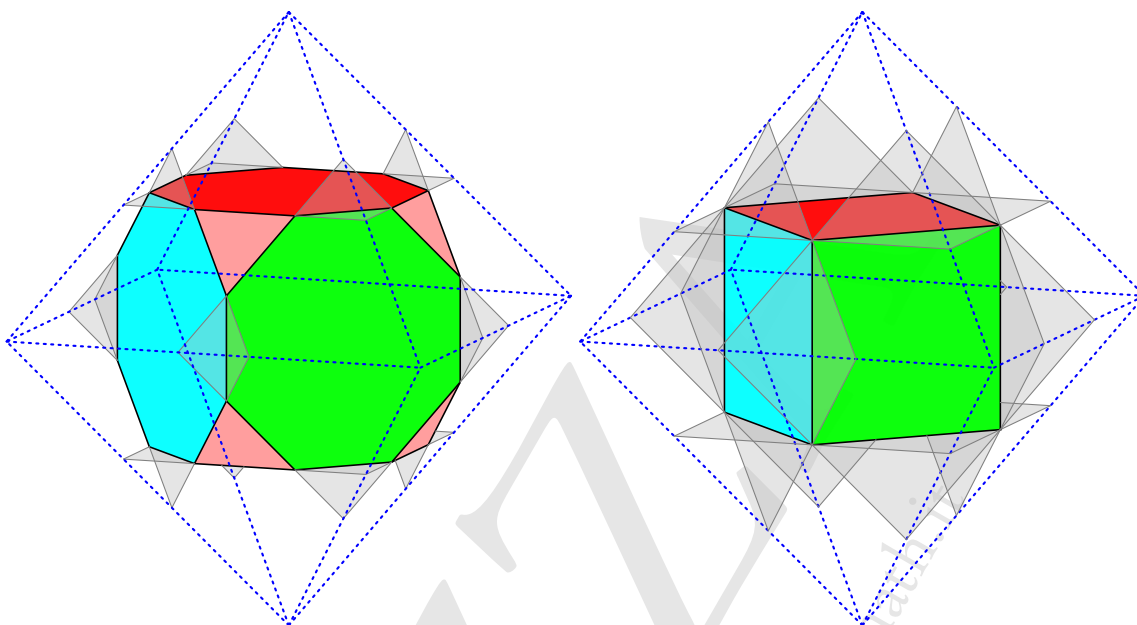


Figura 5.60.: *Troncature ai vertici di un ottaedro oltre la metà: il cubo troncato e il cubo duale*

Come precedentemente segnalato, nei due casi rimanenti del dodecaedro e dell'icosaedro le figure mostrano solo due dei poligoni originati dalla troncatura, per una maggiore leggibilità.

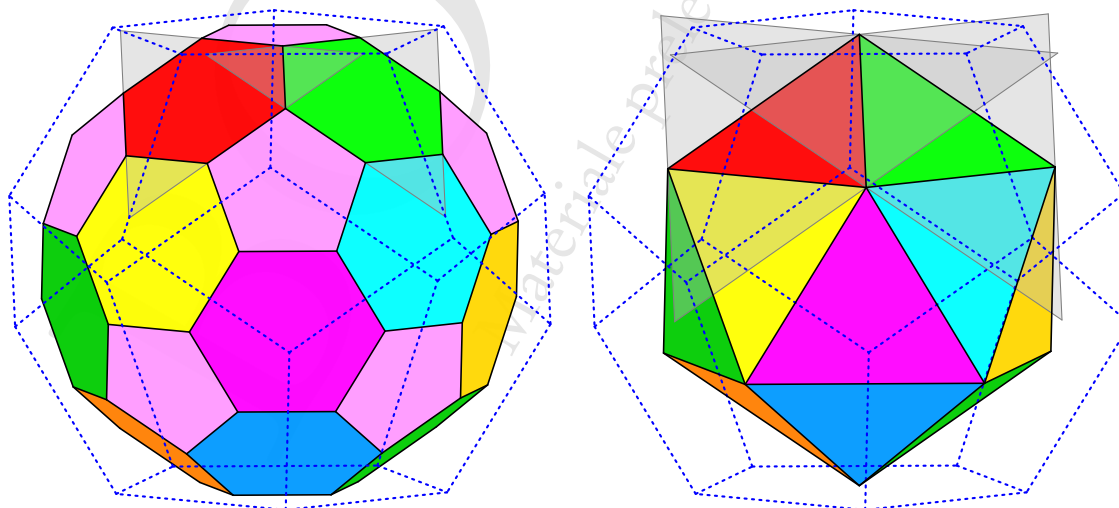


Figura 5.61.: *Troncature ai vertici di un dodecaedro oltre la metà: l'icosaedro troncato e l'icosaedro duale*

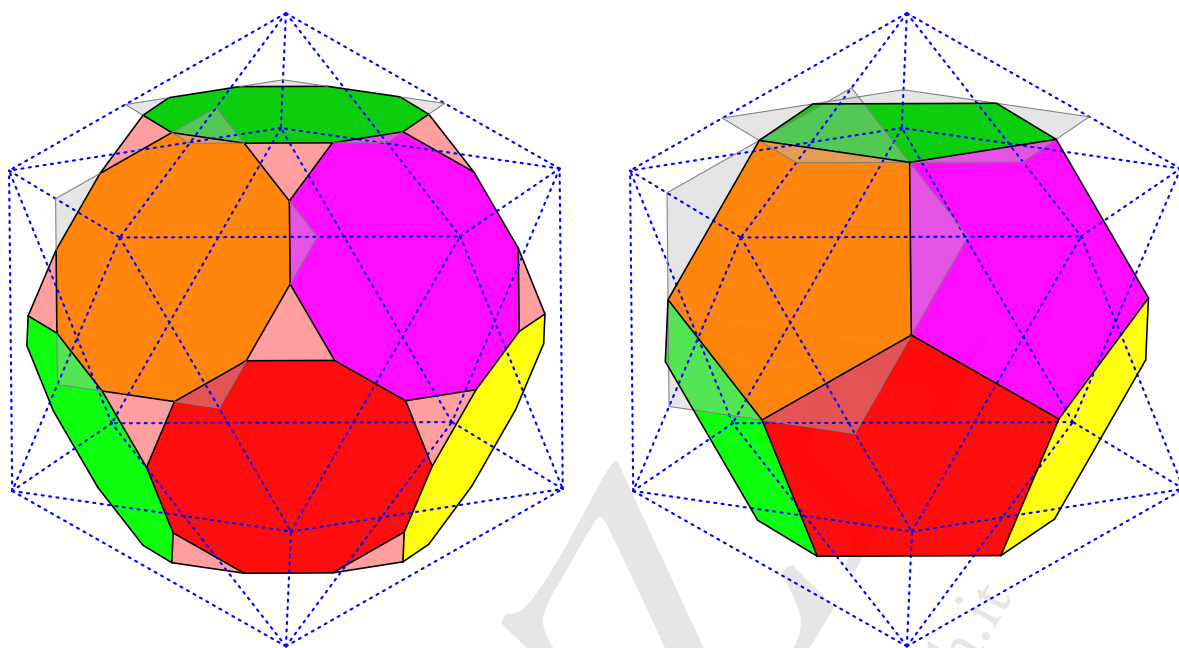


Figura 5.62.: Troncature ai vertici di un icosaedro oltre la metà: il dodecaedro troncato e il dodecaedro duale

5.7. Troncature del cubottaedro e dell'icosidodecaedro

Come già segnalato nel paragrafo 4.1 del capitolo 4, le troncature del cubottaedro e dell'icosidodecaedro non danno luogo a solidi semiregolari: per questo motivo i nomi di cubottaedro troncato e icosidodecaedro troncato, utilizzati normalmente per il grande rombocubottaedro e il grande rombicosidodecaedro sono inappropriati. In ogni caso Keplero era stato molto preciso su questo fatto. Tutto è descritto nella proposizione XXVIII del Liber II dell'*Harmonices*, come già detto. Per quanto riguarda il rombocubottaedro esso è descritto come terzo solido di Archimede nel modo che segue.

Come terza possibilità, un triangolo e tre quadrati sono meno di 4 retti. Quindi otto triangoli e diciotto (cioè 12 e 6) quadrati, convergono a formare un Icosiesaedro che chiamo *Sectum Rhombum Cuboctaëdricum*, ovvero *Rhombicuboctaedron*.

Il grande rombocubottaedro è descritto con il numero XII nel modo seguente.

Un quadrato con un esagono e un ottagono sommano a meno di 4 retti; e 12 quadrati, 8 esagoni, e 6 ottagoni, convergono a formare un Icosiesaedro, che chiamo *Truncum Cuboctaëdron*: non perché possa avere origine per troncamento, ma perché è simile a un cubottaedro che è stato troncato.

Si possono fare alcune osservazioni relativamente a queste descrizioni. Intanto il cubottaedro è presentato come una troncatura del *Rhombum*, che qui è da intendersi come dodecaedro rombico, e in effetti questo solido può essere ottenuto proprio per troncamento dal dodecaedro rombico, come risulta evidente se si esamina la figura 5.37 nella pagina 71, a destra. Tuttavia per questa troncatura Keplero usa il termine *sectum* anziché *truncum*, proprio per sottolineare la differenza con le usuali troncature dei

solidi platonici. Per quanto riguarda il grande rombicubottaedro, Keplero esplicitamente dichiara che il nome *cubottaedro troncato* è usato solo per la somiglianza con il solido ottenuto dal cubottaedro per troncatura debole.

Tutto questo risulta evidente se si esaminano le figure 5.63 e 5.64, dove sono rappresentati i due solidi archimedei e i simili solidi ottenuti per troncatura forte e debole dal cubottaedro.

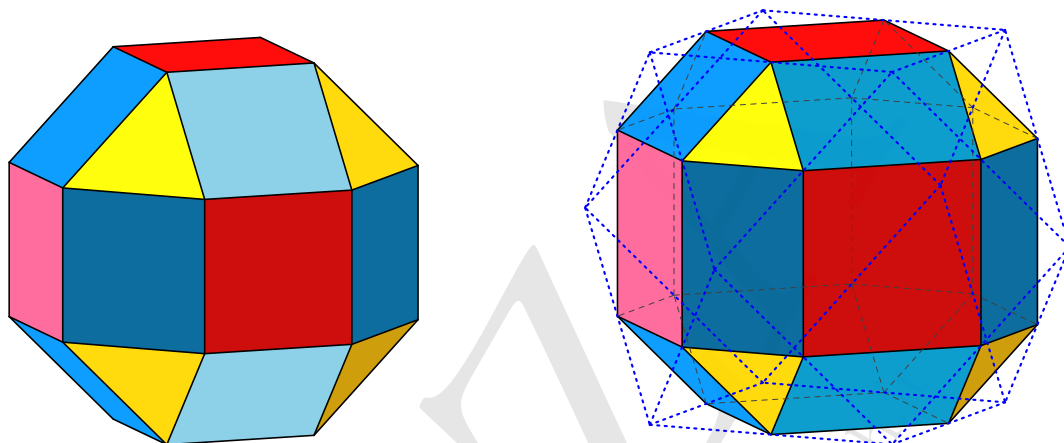


Figura 5.63.: *Il rombicubottaedro, a sinistra, e il cubottaedro fortemente troncato, a destra*

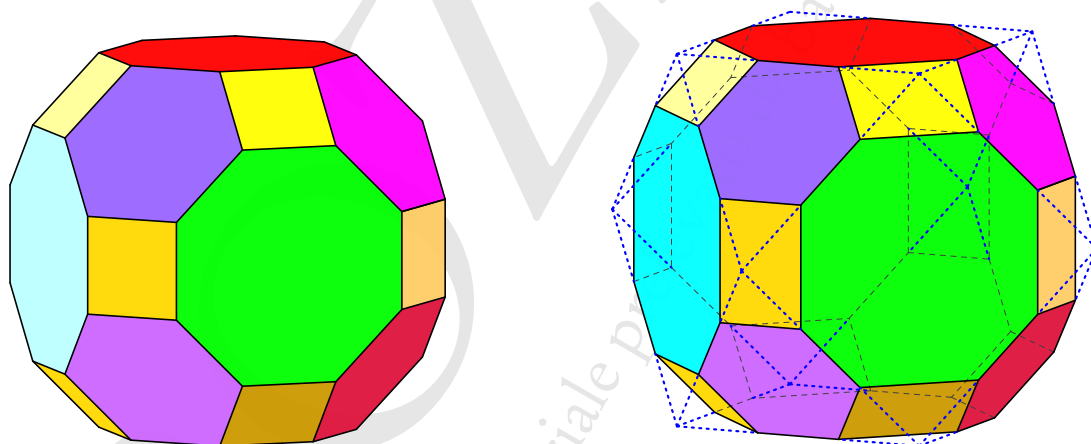


Figura 5.64.: *Il grande rombicubottaedro, a sinistra, e il cubottaedro debolmente troncato, a destra*

È interessante osservare anche che i due solidi ottenuti per troncatura forte e debole dal cubottaedro sono correttamente raffigurati nel testo di Janmitzer [31], nella tavola V, a proposito dei solidi derivati dal cubo.

Discorsi sostanzialmente simili si possono ripetere a proposito del rombicosidodecaedro e del grande rombicosidodecaedro. Per il primo la descrizione, che porta il numero XI, è la seguente.

Un triangolo, con due quadrati e un pentagono, sommano a meno di 4 retti, e 20 triangoli, 30 quadrati e 12 pentagoni concorrono a formare un esacontadiedro, che chiamo

Rhombicosidodecaëdron, oppure Sectum Rhombum Icosidodecaëdricum.

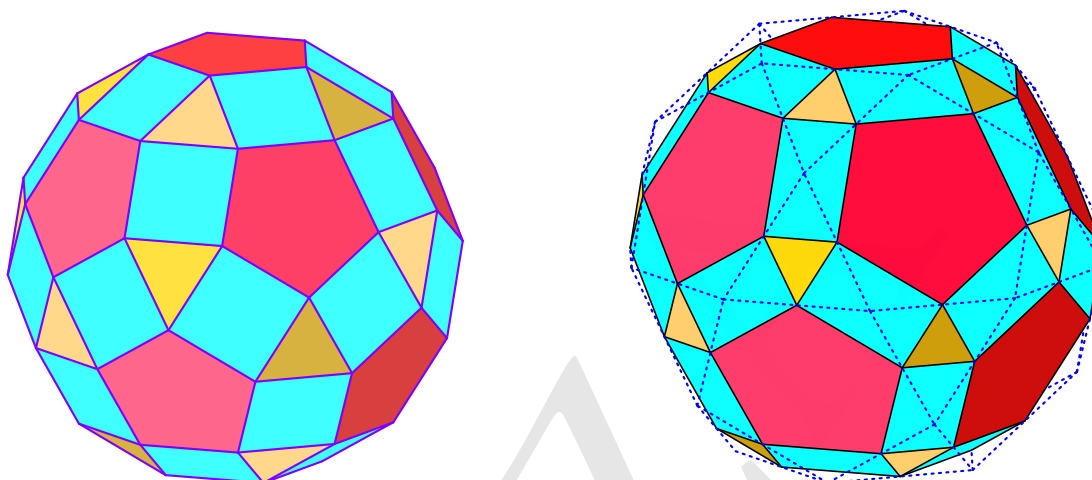


Figura 5.65.: *Il rhombicosidodecaedro, a sinistra, e l'icosidodecaedro fortemente troncato, a destra*

Per il secondo la descrizione, che porta il numero XIII, è come segue.

Un quadrato con un esagono e un decagono, sommano a meno di 4 retti: e 30 quadrati. 20 esagoni e 12 decagoni concorrono a formare un esacontadiedro, che chiamo *Truncum Icosidodecaëdron*, per un motivo simile a quello del *Truncum Cuboctaëdron*.

Anche per queste descrizioni si possono ripetere le osservazioni già fatte a proposito del cubottaedro e suoi derivati. In particolare questa volta con *Sectum Rhombum* si deve intendere triacontaedro rombico troncato: in effetti esaminando la figura 5.43 nella pagina 74, a destra, si verifica facilmente che il rhombicosidodecaedro è proprio ottenibile per troncatura dal triacontaedro rombico.

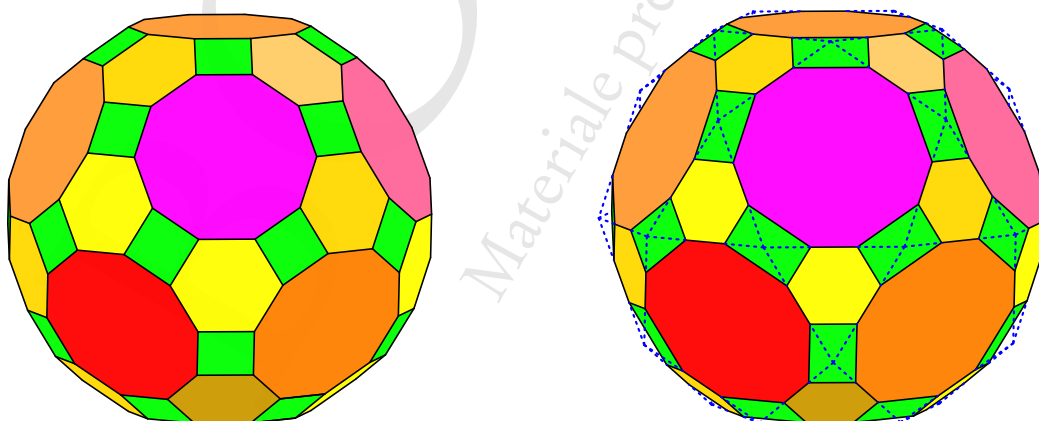


Figura 5.66.: *Il grande rhombicosidodecaedro, a sinistra, e l'icosidodecaedro debolmente troncato, a destra*

5.8. Troncature di poliedri mediante poliedri

Le troncature che abbiamo utilizzato per costruire i poliedri archimedei a partire dai solidi platonici possono anche essere realizzate sostituendo i piani di troncatura con facce di poliedri: nulla cambia nel risultato finale, si tratta solo di un diverso modo di visualizzare il processo.

Una delle situazioni più interessanti si presenta quando un poliedro viene troncato dal suo duale. Le figure 5.67, 5.68 e 5.69 illustrano questa tecnica nel caso del cubo troncato dal suo ottaedro duale.

La figura 5.67 mostra un ottaedro e il suo cubo duale costruito prendendo i centri delle varie facce oppure, equivalentemente, costruendo il duale sulla base della sfera inscritta. Immaginiamo ora di sottoporre l'ottaedro a una contrazione di coefficiente via via più grande rispetto al suo centro, congelando le dimensioni e la posizione del cubo. Se eliminiamo le parti di cubo esterne all'ottaedro così contratto, otterremo i vari solidi che si ottengono per troncatura ai vertici di un cubo, come descritti nei paragrafi 5.2.2 e 5.6.

Naturalmente il risultato cambierebbe se le posizioni relative dei due solidi duali fossero diverse: quella qui di seguito mostrata è comunque la sequenza più importante, per i solidi che si ottengono e per le sue evidenti simmetrie.

cubo \rightarrow cubo troncato \rightarrow cubottaedro \rightarrow ottaedro troncato \rightarrow ottaedro.

Come già accennato nel paragrafo 5.6, il solido intermedio (il cubottaedro) è un poliedro che ha alcune caratteristiche di entrambi i due solidi duali da cui è ottenuto. È chiaro che la sequenza può anche essere invertita, partendo dall'ottaedro e arrivando al cubo.

Le stesse considerazioni si possono ripetere per la coppia dodecaedro-icosaedro quando il solido intermedio è l'icosidodecaedro, e per la coppia tetraedro-tetraedro in posizione duale, quando il solido intermedio è l'ottaedro.

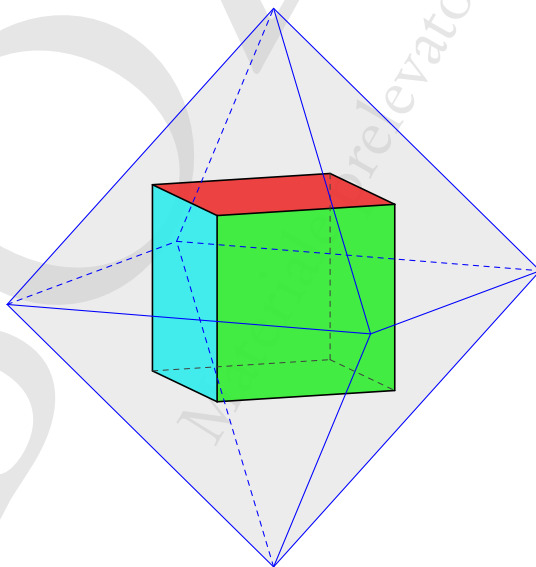


Figura 5.67.: *L'ottaedro e il suo cubo duale con i vertici sui centri delle facce*

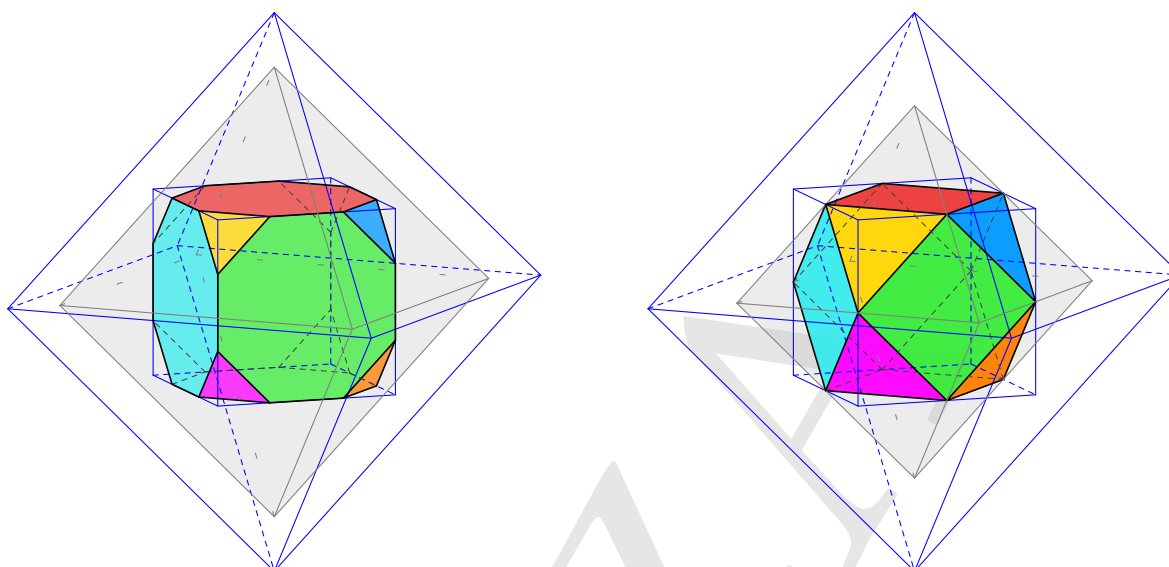


Figura 5.68.: *Troncatura di un cubo per mezzo dell'ottaedro duale: il tetraedro troncato e il cubottaedro*

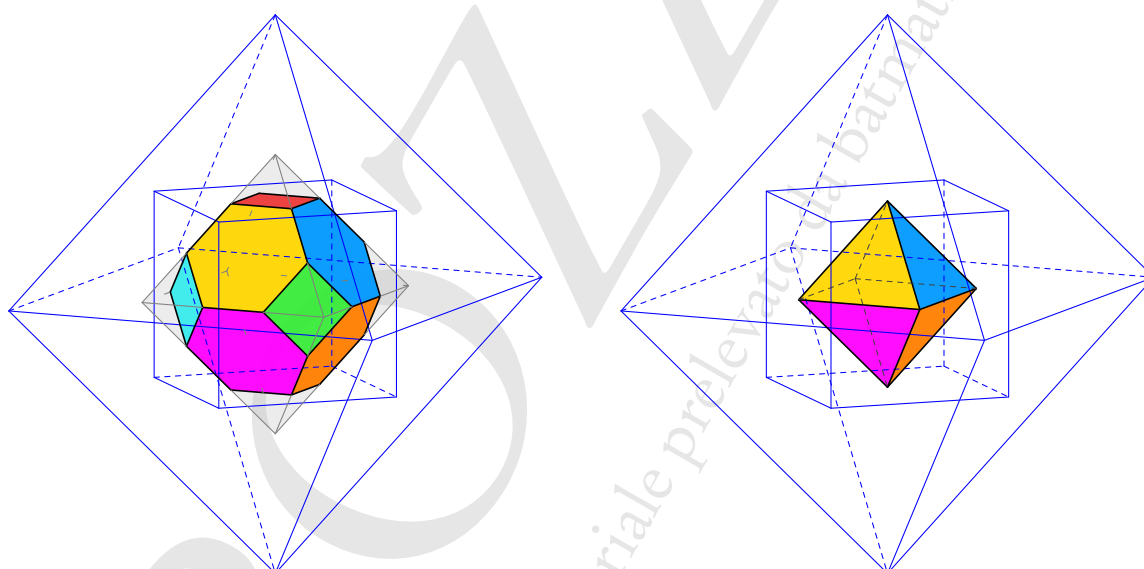


Figura 5.69.: *Troncatura di un cubo per mezzo dell'ottaedro duale: l'ottaedro troncato e l'ottaedro duale*

Si possono anche considerare innumerevoli altre situazioni. Segnaliamo solo un altro caso interessante, quello della troncatura ai lati dei cinque poliedri archimedeei che si può equivalentemente ottenere troncando il tetraedro con un cubo, la coppia cubo-ottaedro con un dodecaedro rombico e la coppia dodecaedro-icosaedro con un triacontaedro rombico. Nelle figure 5.70 e 5.71 illustriamo il caso del tetraedro: nulla cambia nella sostanza per gli altri quattro poliedri platonici. Questo modo di interpretare le troncature ai lati rende anche evidente il motivo per cui il cubo, il dodecaedro rombico e il triacon-

taedro rombico sono, come abbiamo visto, i solidi finali nella troncatura ai lati. Nel paragrafo 5.10 ci occuperemo con maggiore dettaglio dei poliedri rombici e dei loro legami con i poliedri archimedei.

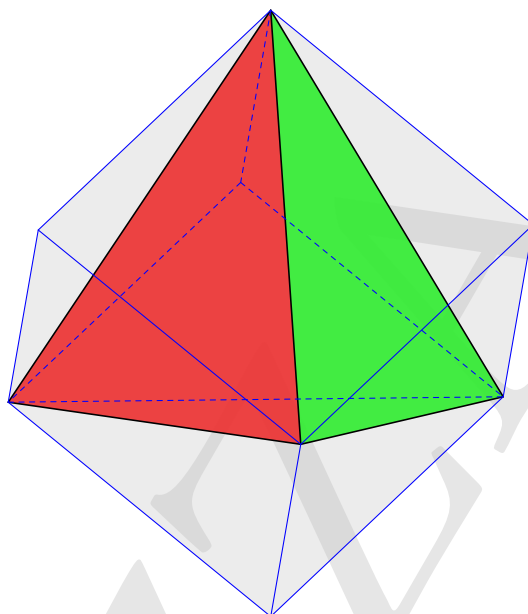


Figura 5.70.: *Tetraedro con cubo circoscritto*

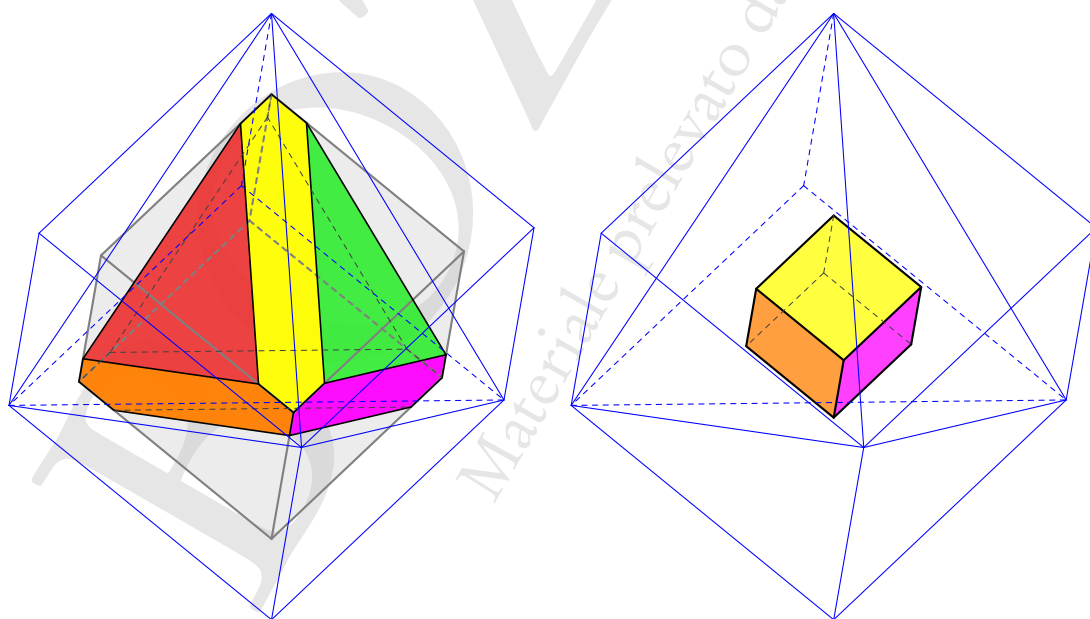


Figura 5.71.: *Troncatura di un tetraedro con un cubo circoscritto: un primo passo e il risultato finale*

5.9. Riepilogo sulle troncature

Riepiloghiamo per comodità i poliedri importanti che abbiamo ottenuto mediante le diverse troncature a partire dai solidi platonici.

1. Tetraedro

- a) Tetraedro troncato, per troncatura debole ai vertici
- b) Ottaedro, per troncatura forte ai vertici
- c) Cubo, per troncatura forte ai lati
- d) Cubottaedro, per troncatura intermedia ai lati e vertici
- e) Tetraedro duale, per troncatura completa ai lati e vertici
- f) Ottaedro troncato, per troncatura intermedia ai lati e forte ai vertici
- g) Tetraedro duale troncato, per troncatura completa ai lati e forte ai vertici
- h) Tetraedro duale troncato, per troncatura ai vertici oltre la metà
- i) Tetraedro duale, per troncatura completa ai vertici oltre la metà

2. Cubo

- a) Cubo troncato, per troncatura debole ai vertici
- b) Cubottaedro, per troncatura forte ai vertici
- c) Dodecaedro rombico, per troncatura forte ai lati
- d) Rombicubottaedro, per troncatura intermedia ai lati e vertici
- e) Ottaedro duale, per troncatura completa ai lati e vertici
- f) Grande rombicubottaedro, per troncatura intermedia ai lati e forte ai vertici
- g) Ottaedro troncato, per troncatura completa ai lati e forte ai vertici
- h) Ottaedro troncato, per troncatura ai vertici oltre la metà
- i) Ottaedro duale, per troncatura completa ai vertici oltre la metà

3. Ottaedro

- a) Ottaedro troncato, per troncatura debole ai vertici
- b) Cubottaedro, per troncatura forte ai vertici
- c) Dodecaedro rombico, per troncatura forte ai lati
- d) Rombicubottaedro, per troncatura intermedia ai lati e vertici
- e) Cubo duale, per troncatura completa ai lati e vertici
- f) Grande rombicubottaedro, per troncatura intermedia ai lati e forte ai vertici
- g) Cubo troncato, per troncatura completa ai lati e forte ai vertici
- h) Cubo troncato, per troncatura ai vertici oltre la metà
- i) Cubo duale, per troncatura completa ai vertici oltre la metà

4. Dodecaedro

- a) Dodecaedro troncato, per troncatura debole ai vertici
- b) Icosidodecaedro, per troncatura forte ai vertici
- c) Triacontaedro rombico, per troncatura forte ai lati
- d) Rombicosidodecaedro, per troncatura intermedia ai lati e vertici
- e) Icosaedro duale, per troncatura completa ai lati e vertici
- f) Grande rombicosidodecaedro, per troncatura intermedia ai lati e forte ai vertici

- g) Icosaedro troncato, per troncatura completa ai lati e forte ai vertici
- h) Icosaedro troncato, per troncatura ai vertici oltre la metà
- i) Icosaedro duale, per troncatura completa ai vertici oltre la metà

5. Icosaedro

- a) Icosaedro troncato, per troncatura debole ai vertici
- b) Icosidodecaedro, per troncatura forte ai vertici
- c) Triacontaedro rombico, per troncatura forte ai lati
- d) Rombicosidodecaedro, per troncatura intermedia ai lati e vertici
- e) Dodecaedro duale, per troncatura completa ai lati e vertici
- f) Grande rombicosidodecaedro, per troncatura intermedia ai lati e forte ai vertici
- g) Dodecaedro troncato, per troncatura completa ai lati e forte ai vertici
- h) Dodecaedro troncato, per troncatura ai vertici oltre la metà
- i) Dodecaedro duale, per troncatura completa ai vertici oltre la metà

5.10. Osservazioni sui poliedri rombici

Abbiamo ripetutamente incontrato il dodecaedro rombico e il triacontaedro rombico trattando le troncature dei solidi platonici. In questo paragrafo vogliamo approfondire un po' la trattazione di questo tipo di poliedri, che presentano numerose analogie e legami con i solidi platonici e archimedei.

La scoperta di questi due poliedri è dovuta, come abbiamo già detto, a Keplero che ne parla per la prima volta nel *De Nive Sexangula*. In questo libretto è trattata in primis la questione del perché i fiocchi di neve hanno sei angoli (da cui il titolo dell'opera), ma Keplero fa frequenti digressioni per trattare altri argomenti. In una di queste digressioni si occupa della forma delle celle dei favi delle api: come tutti sanno queste celle hanno un'imboccatura a forma di esagono regolare (per ovvie questioni di efficienza e risparmio materiale). Molto meno noto è che, sempre per questioni di efficienza, la chiusura delle celle è costituita da tre rombi identici, come è mostrato nella figura 5.72.

Discutendo di questo fatto Keplero continua⁽¹⁾ come segue.

...Questi rombi mi hanno messo in testa l'idea di affrontare un problema di geometria: se possa essere costruito un corpo, simile ai cinque solidi regolari e ai quattordici solidi di Archimede con nient'altro che rombi. Ne ho trovati due, uno con affinità con il cubo e l'ottaedro, l'altro con il dodecaedro e l'icosaedro (lo stesso cubo può servire a considerare un terzo esempio, a causa della sua affinità con due tetraedri accoppiati). Il primo solido è limitato da dodici rombi, il secondo da trenta.

Il riferimento al cubo nel capoverso citato è dovuto al seguente fatto. Se si considera il solido composto da un cubo e un ottaedro duali uno dell'altro tramite l'intersfera, si constata facilmente che i suoi quattordici vertici sono i vertici di un dodecaedro rombico tale che le diagonali delle sue facce siano esattamente due spigoli intersecantesi perpendicolarmente del cubo e dell'ottaedro. Analogamente i 32 vertici del solido composto nello stesso modo da un dodecaedro e un icosaedro duali sono i vertici di un triacontaedro rombico tale che le diagonali delle sue facce siano esattamente due spigoli intersecantesi

¹Abbiamo già riportato questo capoverso, vedi la pagina 31, nella discussione concernente la possibilità che Keplero avesse trovato il poliedro di Miller, inizialmente ritenendolo un poliedro archimedeo.

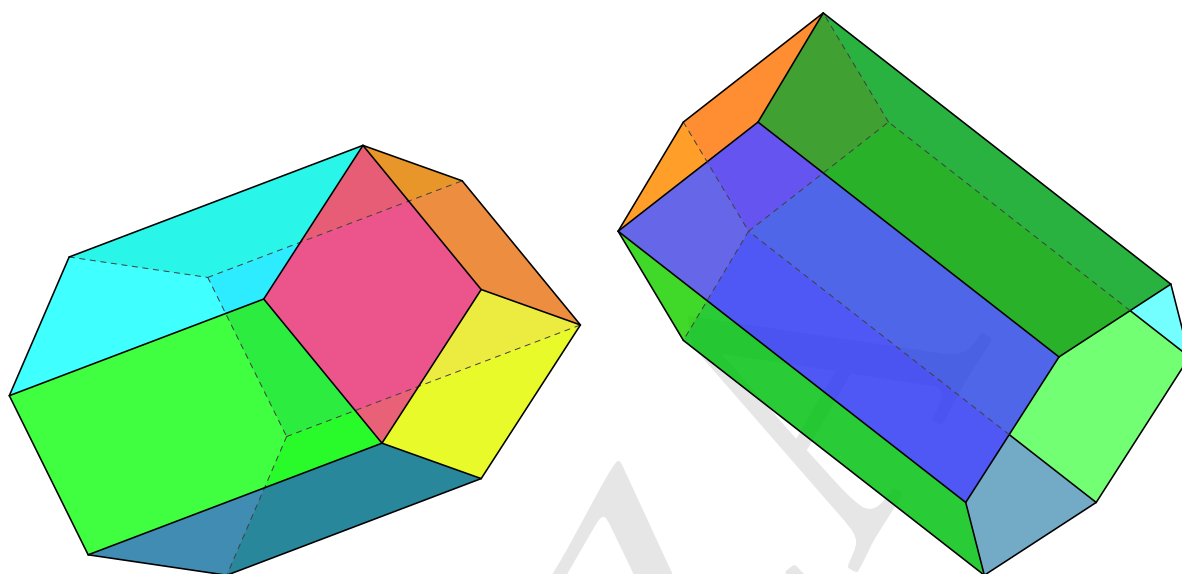


Figura 5.72.: Una cella di un favo d'api vista dal fondo, a sinistra, e dall'imboccatura, a destra

perpendicolarmente del dodecaedro e dell'icosaedro. Se parimenti consideriamo il solido costituito da un tetraedro e dal suo duale tramite l'intersfera, i suoi otto vertici individuano un solido che, per analogia, può essere considerato un terzo "poliedro rombico": come sappiamo si tratta di un cubo, ovvero di un poliedro rombico molto particolare, in quanto non solo le sue facce sono rombi tutti identici, ma addirittura i rombi si sono ridotti a quadrati. Del resto il tetraedro doveva avere un comportamento molto speciale, essendo l'unico poliedro platonico autoduale.

Questi tre poliedri rombici hanno molte rassomiglianze con i poliedri platonici: come questi ultimi hanno una sfera inscritta e una intersfera, una sfera circoscritta che passa per i vertici provenienti da uno dei poliedri componenti, una circoscritta che passa per i vertici provenienti dall'altro poliedro componente (queste sfere coincidono nel caso del cubo, che è un poliedro regolare); hanno inoltre tutte le facce uguali e un alto grado di simmetria.

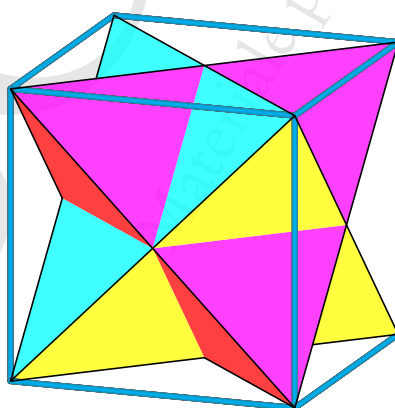


Figura 5.73.: Il cubo costruito con i vertici di due tetraedri duali rispetto all'intersfera

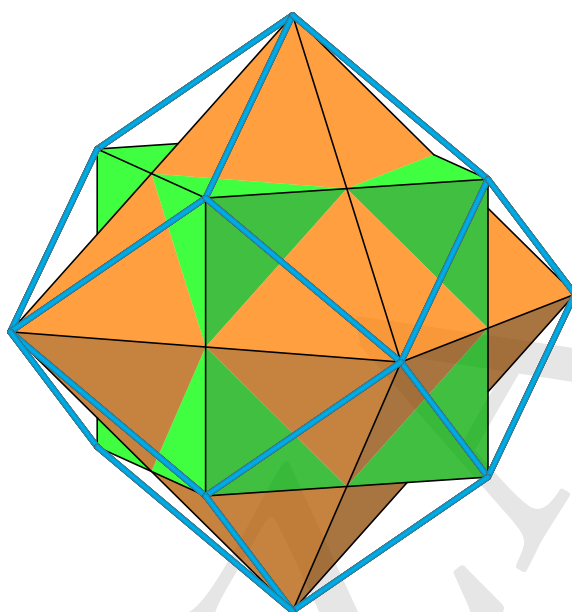


Figura 5.74.: *Il dodecaedro rombico costruito con i vertici di un cubo e un ottaedro duali rispetto all'intersfera*

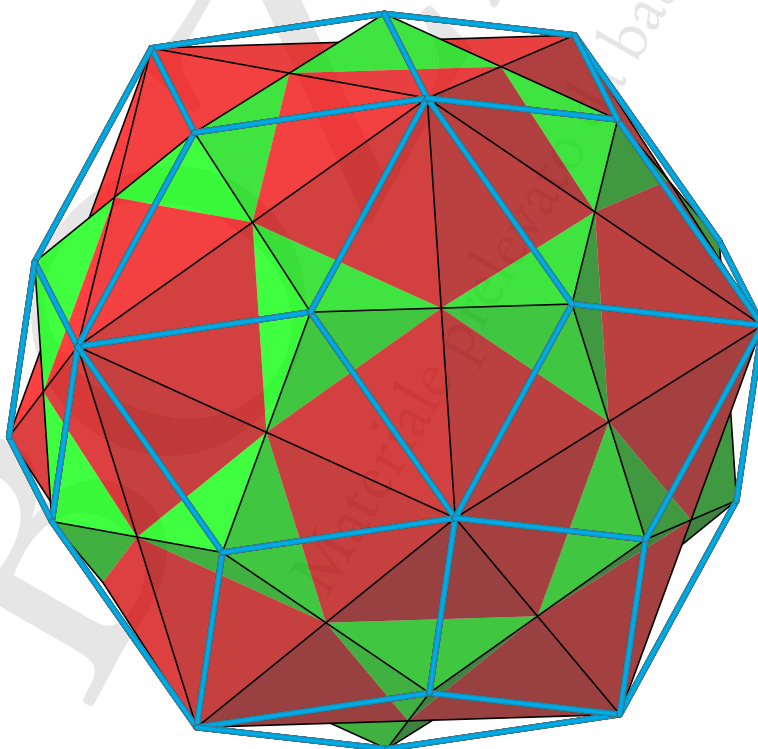


Figura 5.75.: *Il triacontaedro rombico costruito con i vertici di un dodecaedro e un icosaedro duali rispetto all'intersfera*

Keplero introduce una definizione di poliedro rombico (che in realtà chiama *semiregolare*) che sembra fatta apposta per concludere che solo il dodecaedro rombico e il triacontaedro rombico la soddisfano. Non entriamo nei dettagli di questo problema, abbastanza complesso. Ci limitiamo invece a segnalare che oltre a questi due poliedri (e al cubo, come caso limite) esistono altri poliedri formati da facce rombiche tutte uguali tra di loro: essi sono noti, in genere, con il nome di *poliedri rombici*. L'elenco completo di quelli convessi è il seguente.

1. Il *romboedro aureo in forma acuta*
2. Il *romboedro aureo in forma ottusa*
3. Il *dodecaedro rombico*
4. Il *dodecaedro rombico aureo*
5. L'*icosaedro rombico aureo*
6. Il *triacontaedro rombico* (aureo)

In tutti questi poliedri il rapporto delle diagonali coincide con il rapporto aureo, tranne che per il dodecaedro rombico dove, come già detto, il rapporto vale $\sqrt{2}$. Naturalmente nel cubo, che può essere considerato un caso limite, come già accennato, il rapporto vale ovviamente 1.

Oltre al dodecaedro e al triacontaedro anche i due romboedri erano noti a Keplero, l'icosaedro rombico aureo è stato scoperto da Evgraf Stephanovic Fedorov nel 1885, il dodecaedro rombico aureo da Stanko Bilinski nel 1960 e spesso è citato come *dodecaedro di Bilinski* o *dodecaedro rombico di seconda specie*. In realtà esso apparve già nell'opera *Geometry Made Easy* del matematico e cartografo inglese John Lodge Cowley del 1752, ma rimase sconosciuto alla comunità scientifica.

È interessante osservare che l'icosaedro, il dodecaedro di Bilinski e i due romboedri possono essere “generati” dal triacontaedro ed è per questo che le loro facce sono tutte rombi aurei. Mostreremo queste costruzioni nelle figure dalla 5.76 alla 5.84.

L'icosaedro può essere ottenuto a partire dal triacontaedro per soppressione di un opportuno nastro di dieci rombi contigui e a lati paralleli e successiva congiunzione delle due parti, come mostrato nelle figure 5.77 e 5.78.

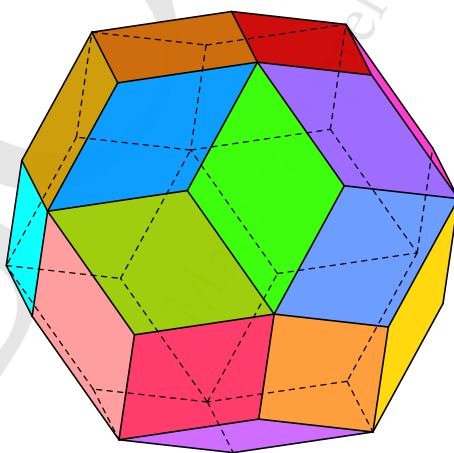


Figura 5.76.: *Il triacontaedro rombico*

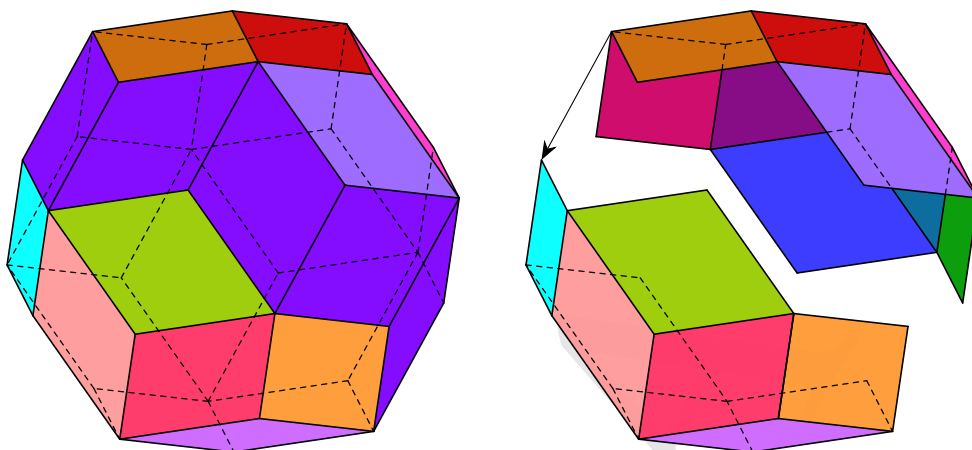


Figura 5.77.: *Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un nastro di dieci rombi da un triacontaedro rombico*

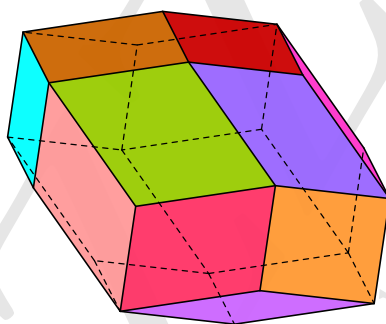


Figura 5.78.: *L'icosaedro rombico aureo ottenuto congiungendo le due parti di triacontaedro della figura 5.77*

Successivamente, con la soppressione di un opportuno nastro di otto rombi contigui e a lati paralleli dall'icosaedro e successiva congiunzione delle due parti, si ottiene il dodecaedro di Bilinski, come mostrato nelle figure 5.79 e 5.80.

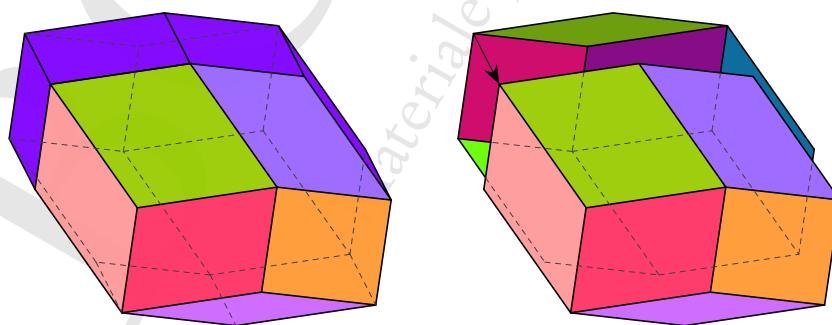


Figura 5.79.: *Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un nastro di otto rombi da un icosaedro rombico aureo*

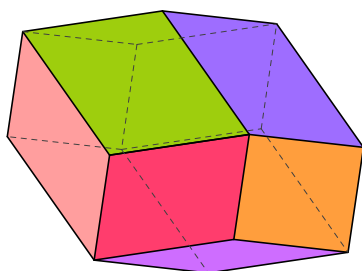


Figura 5.80.: Il dodecaedro rombico aureo, ottenuto congiungendo le due parti di icosaedro della figura 5.79

Infine dal dodecaedro si possono ottenere i due romboedri per soppressione di due diversi nastri di sei rombi contigui e a lati paralleli, come mostrato nelle figure 5.81, 5.82, 5.83 e 5.84.

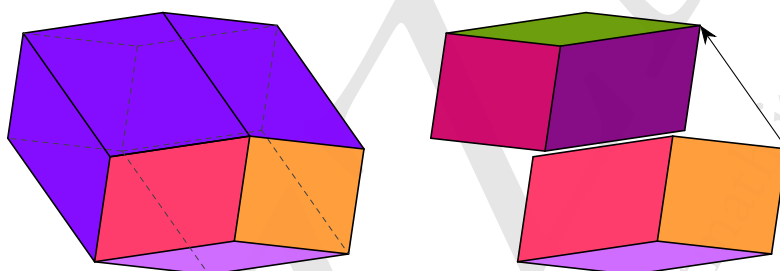


Figura 5.81.: Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un primo nastro di sei rombi da un dodecaedro rombico aureo

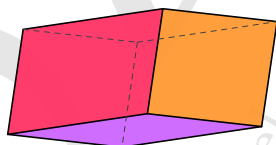


Figura 5.82.: Il romboedro aureo ottuso, ottenuto congiungendo le due parti di dodecaedro della figura 5.81

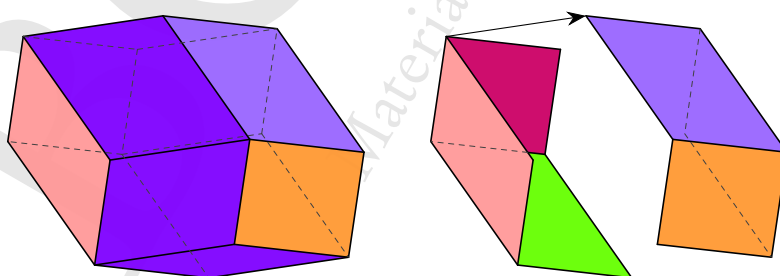


Figura 5.83.: Evidenziazione, a sinistra, e soppressione, a destra, di un secondo nastro di sei rombi da un dodecaedro rombico aureo

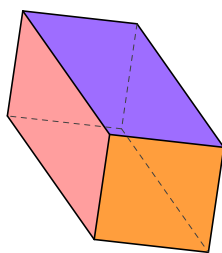


Figura 5.84.: *Il romboedro aureo acuto, ottenuto congiungendo le due parti di dodecaedro della figura 5.83*

La figura 5.85 illustra lo stesso icosaedro rombico aureo della figura 5.78, in una diversa proiezione, per meglio evidenziarne le caratteristiche.

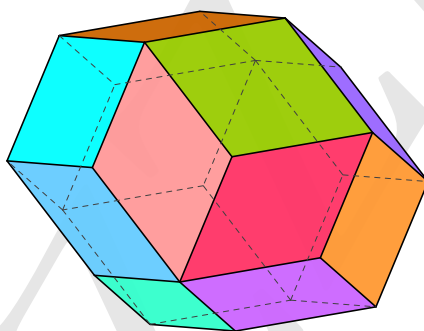


Figura 5.85.: *L'icosaedro rombico aureo, in una proiezione che ne evidenzia le proprietà*

La figura 5.86 mostra, a sinistra, il dodecaedro rombico ordinario, a destra lo stesso dodecaedro rombico aureo della figura 5.80, in una diversa proiezione. È interessante confrontare l'aspetto del dodecaedro aureo come appare nella figura 5.86 con quello della figura 5.80: sembrano quasi due solidi diversi! In generale è questa una caratteristica dei solidi rombici, evidenziata al massimo nei poliedri rombici.

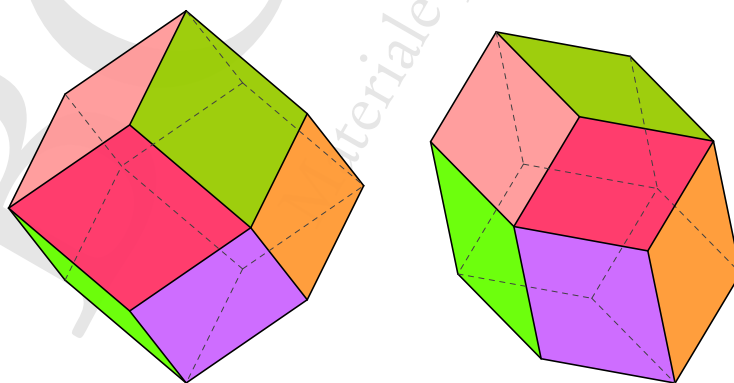


Figura 5.86.: *Il dodecaedro rombico "ordinario", a sinistra, e quello aureo, a destra*

Passiamo ora a confrontare i due romboedri aurei costruiti a partire dal dodecaedro di Bilinski. La differenza tra i due è costituita dal fatto che in quello acuto ci sono due vertici opposti in cui si incontrano tre angoli acuti delle facce rombiche, in quello ottuso invece in due vertici opposti si incontrano tre angoli ottusi delle facce rombiche: questo è il motivo per cui si chiamano rispettivamente *romboedro aureo acuto* e *romboedro aureo ottuso*. Negli altri quattro vertici sia dell'uno che dell'altro convergono invece sia angoli acuti che angoli ottusi. Anche in questo caso è utile un confronto tra le figure 5.87 e, rispettivamente, 5.82 e 5.84, confronto che mostra quanto diversi possano apparire questi solidi a seconda dell'angolo di visuale.

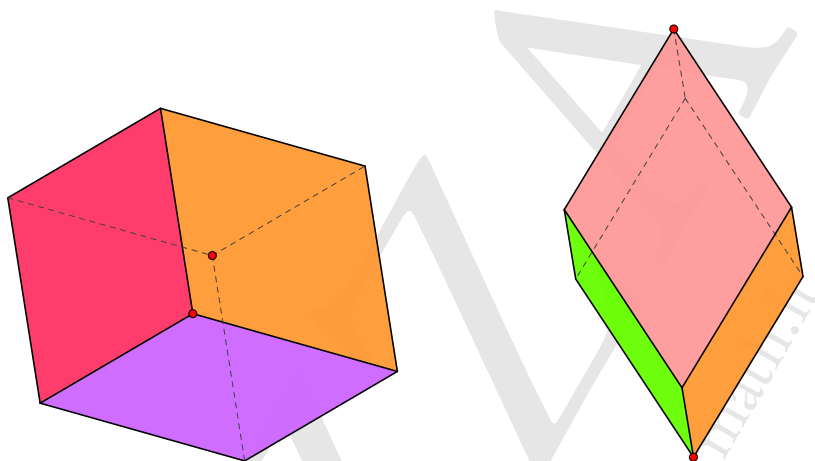


Figura 5.87.: Il romboedro aureo ottuso, a sinistra, e quello acuto, a destra

Per concludere questa lunga digressione sui poliedri rombici segnaliamo che il triacontaedro rombico è spesso citato solo come triacontaedro, in quanto è il più comune poliedro a trenta facce; esso è anche utilizzato come dado a trenta facce. Per quanto riguarda i dodecaedri è interessante osservare che essi possono essere usati per tassellare lo spazio: ne ripareremo nel capitolo 10.

Torneremo sul dodecaedro normale e sul triacontaedro nel capitolo 9 sui duali dei poliedri di Archimede, o solidi di Catalan.

5.11. I solidi di Steinmetz

Il solido che si ottiene come intersezione di tre cilindri tra di loro perpendicolari ha strette analogie con il dodecaedro rombico, come vedremo. Questo solido, e quello che si ottiene come intersezione di due cilindri, sono noti come *solidi di Steinmetz*, in onore dell'ingegnere e matematico tedesco Charles Proteus Steinmetz⁽²⁾ (1865-1923), naturalizzato americano, che li studiò. Tuttavia in particolare il caso dei due cilindri era già noto sia ad Archimede che al matematico e astronomo cinese Tsu Ch'ung-Chih (500 a.C.) che ne calcolarono la superficie e il volume rispettivamente in $16r^2$ e $16r^3/3$, dove r è il raggio comune dei cilindri.

Il solido ottenuto dall'intersezione di due cilindri è noto come *bicilindro* o *mouhefanggai*, nome cinese che significa "doppio ombrello quadrato". Esso è chiaramente equivalente strutturalmente a una

²Steinmetz è soprattutto noto per il suo contributo allo sviluppo e all'espansione dell'industria elettrica negli Stati Uniti e per le scoperte nel campo dell'isteresi magnetica.

tassellazione della sfera con quattro lune, o “digoni” sferici⁽³⁾. Il solido metà di un bicilindro è noto come *volta*, e in effetti in architettura le volte dei chiostri hanno questa forma. Il solido ottenuto come intersezione di tre cilindri è invece noto come *tricilindro*.

Per una corretta comprensione della struttura e delle caratteristiche di questi solidi cominciamo a considerare il caso più semplice di due cilindri tra di loro perpendicolari: si vedano le figure 5.88, dove sono rappresentati i due cilindri intersecantesi, e 5.89, dove è visualizzato il solido intersezione. Quest’ultima figura rende evidente il perché dei nomi “doppio ombrello quadrato” e “volta” utilizzati rispettivamente per l’intero solido a la sua metà.

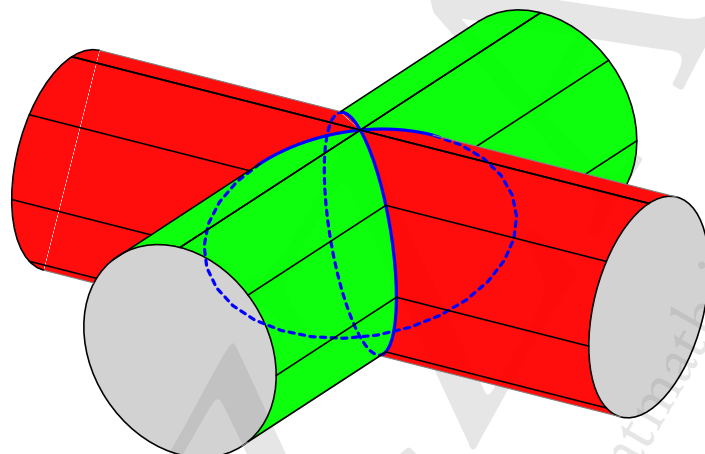


Figura 5.88.: *L'intersezione di due cilindri tra di loro perpendicolari*

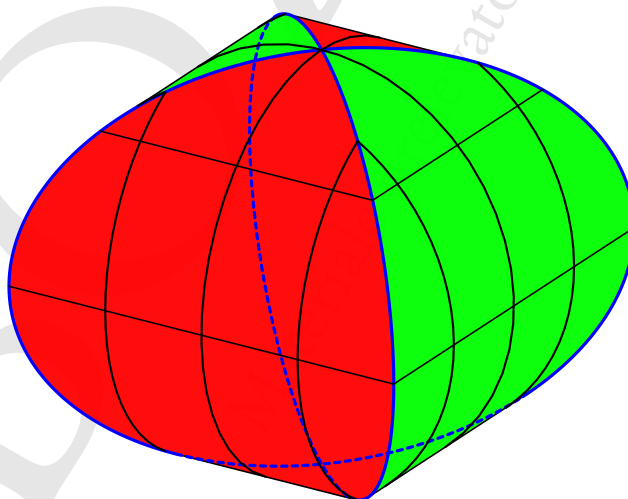


Figura 5.89.: *Il solido ottenuto come parte comune a due cilindri tra di loro perpendicolari*

³Una tassellazione della sfera con lune aventi i due vertici in comune in due poli opposti è nota anche con il nome, poco comune nella sua forma italiana, di *hosohedron*.

L'introduzione di un terzo cilindro perpendicolare ai primi due "sottrae" al bicilindro alcune porzioni, come evidenziato nella figura 5.90.

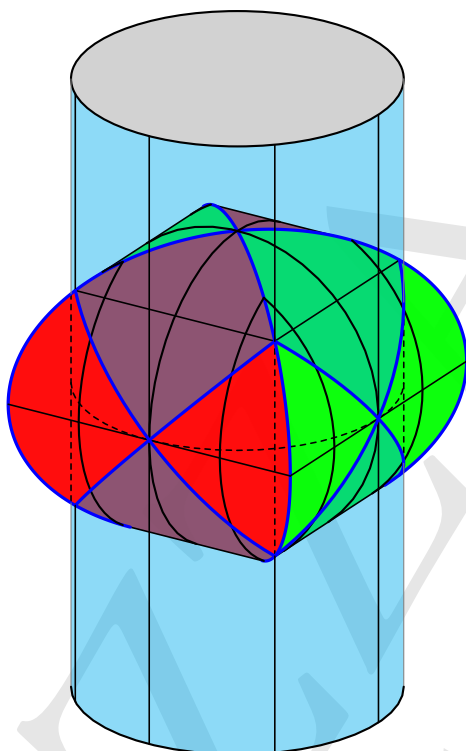


Figura 5.90.: *L'effetto della introduzione di un terzo cilindro, perpendicolare ai primi due, sul solido comune a due cilindri tra di loro perpendicolari*

Per ulteriore chiarezza proponiamo, nelle figure 5.91 e 5.92, l'illustrazione dell'effetto di ciascuno dei tre cilindri per ottenere la figura finale.

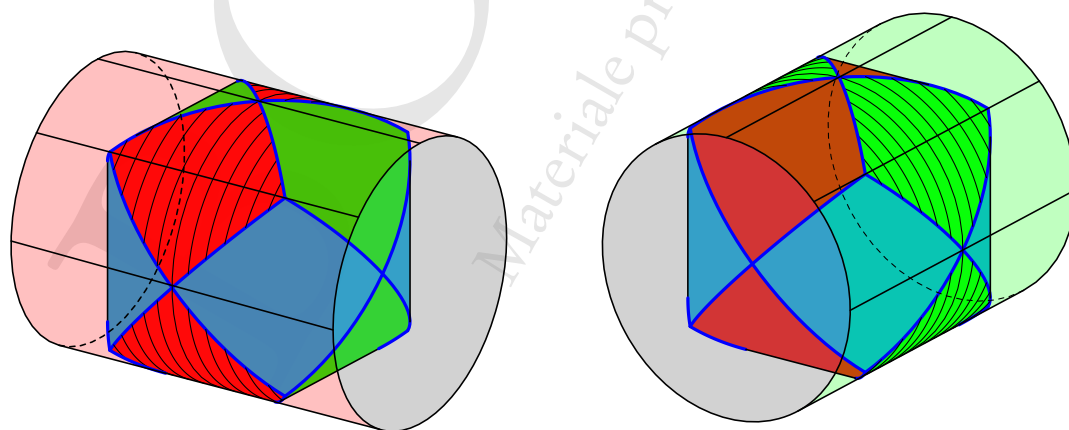


Figura 5.91.: *Evidenziazione di due cilindri perpendicolari per ottenere il solido della figura 5.93*

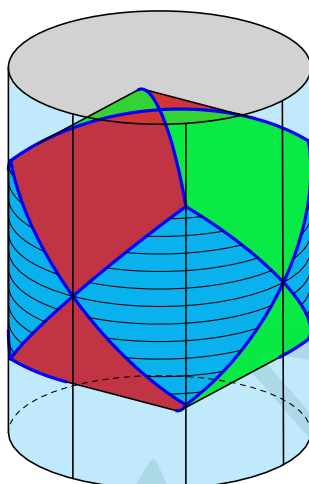


Figura 5.92.: *Evidenziazione del terzo cilindro perpendicolare ai precedenti per ottenere il solido della figura 5.93*

La figura 5.93 illustra il risultato finale della costruzione: da qui è evidente la coincidenza strutturale tra il tricilindro e il dodecaedro rombico: naturalmente qui le facce sono porzioni di cilindro e gli spigoli sono porzioni di ellissi.

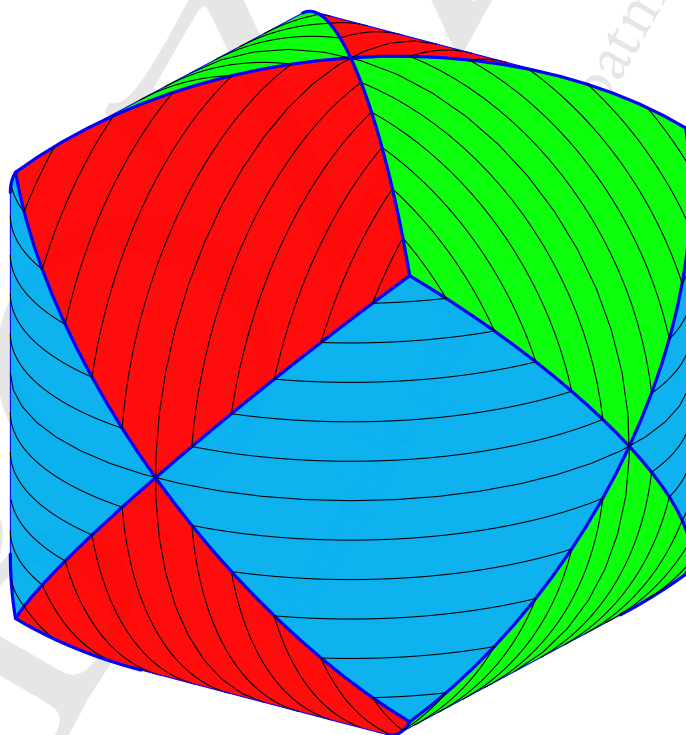


Figura 5.93.: *Il solido ottenuto come intersezione di tre cilindri perpendicolari*

La figura 5.94, ad evidenziare la coincidenza strutturale citata, mostra il tricilindro e il dodecaedro

rombico ad esso circoscritto con le facce tangenti alle facce del tricilindro nei rispettivi centri.

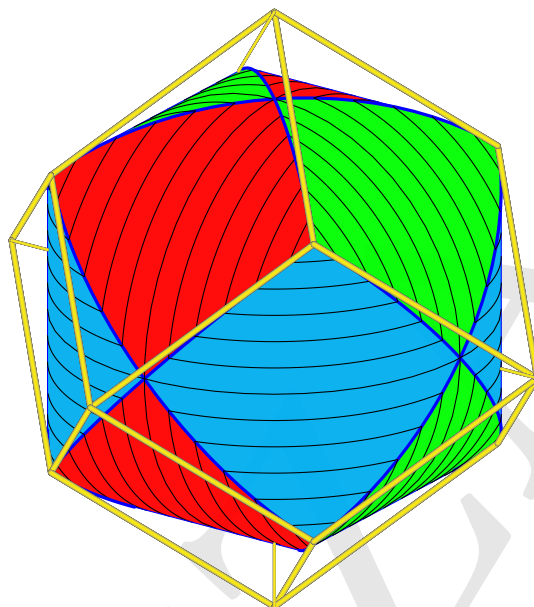


Figura 5.94.: *Il tricilindro con il dodecaedro rombico circoscritto*

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

6. Costruzione dei due solidi camusi

Il metodo delle troncature, seppure al limite possibile come spiegato in [46], non è efficiente per la costruzione dei due solidi archimedeei camusi: il cubo camuso e il dodecaedro camuso. Essi possono comunque essere ottenuti a partire dai solidi platonici mediante un processo che descriveremo in questo capitolo e che chiameremo di *levigatura* o, seguendo la nomenclatura francese, di *addolcimento*. Nella sostanza il processo consiste nel rimpiazzare un vertice di ordine d con un poligono regolare dello stesso ordine e ciascuno spigolo con due triangoli equilateri, mentre le facce originarie mantengono la stessa struttura.

Esaminiamo le situazioni possibili per i cinque solidi platonici.

Tetraedro I 4 vertici sono sostituiti da 4 triangoli, i 6 spigoli da 12 triangoli, per un totale, comprese le quattro facce triangolari di partenza, di 20 triangoli: la forma camusa del tetraedro è dunque l'icosaedro.

Cubo Si ottengono 8 triangoli dai vertici e 24 triangoli dagli spigoli, dunque 32 triangoli da aggiungere ai 6 quadrati delle facce originali.

Ottaedro Si ottengono 6 quadrati dai vertici e 24 triangoli dagli spigoli, per un totale di 6 quadrati e 32 triangoli, tenendo conto degli 8 triangoli delle facce originali: il risultato è lo stesso già ottenuto per il cubo.

Dodecaedro Si ottengono 20 triangoli dai vertici e 60 triangoli dagli spigoli, dunque 80 triangoli da aggiungere ai 12 pentagoni delle facce originali.

Icosaedro Si ottengono 12 pentagoni dai vertici e 60 triangoli dagli spigoli per un totale di 12 pentagoni e 80 triangoli, tenendo conto dei 20 triangoli delle facce originali: il risultato è lo stesso già ottenuto per il dodecaedro.

Questa tecnica produce dunque due poliedri archimedeei, il *cubo camuso*, o anche *cubo simo*, e il *dodecaedro camuso*, o anche *dodecaedro simo*. In ragione di quanto detto e delle costruzioni che vedremo si potrebbero anche usare i nomi di *ottaedro camuso* e *icosaedro camuso*.

L'aggettivo *camuso* deriva forse da *muso*, con prefisso peggiorativo e significa “piatto”, “schiacciato”, di solito riferito al naso. L'aggettivo *simo* deriva dal latino *simus* o, meglio, dal greco $\sigma\mu\acute{o}\varsigma$, “smussato”. In francese si usa l'aggettivo *adouci*, “addolcito”, in inglese *snub*, “camuso” o “tronco”, in tedesco *abgeschrägter*, “smussato”, “molato”.

6.1. Il caso speciale del tetraedro

Ci sono diversi modi per implementare la tecnica della levigatura: ne descriveremo uno in dettaglio per ciascuna situazione, cominciando dal caso del tetraedro, che è speciale in quanto il poliedro che si ottiene non è un nuovo solido archimedeo, ma l'icosaedro regolare.

L'idea di base è quella di sottoporre ciascuna faccia a una rotazione, nello stesso verso orario o antiorario, attorno all'asse passante per il suo centro e orientata verso l'esterno del poliedro, e contemporaneamente a una contrazione: ogni vertice dà origine a tre nuovi vertici (come anche nel quadrato e nel dodecaedro, quattro nel caso dell'ottaedro, cinque nel caso dell'icosaedro), che congiunti formano un triangolo equilatero (rispettivamente un quadrato o un pentagono). Gli spigoli delle facce ruotate formano un quadrilatero non piano, che può essere diviso in due triangoli: si prosegue nella rotazione-contrazione fin quando questi triangoli diventano equilateri, mentre le facce originali mantengono la loro forma riducendo sempre di più le dimensioni. Come già detto, nel caso in esame del tetraedro, quando i triangoli sugli spigoli diventano equilateri si ottiene l'icosaedro. Si veda la figura 6.2, dove abbiamo scelto il verso orario di rotazione.

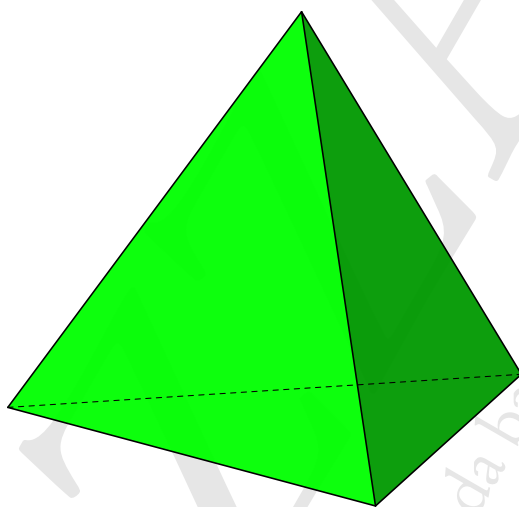


Figura 6.1.: Costruzione del tetraedro camuso: il tetraedro di partenza

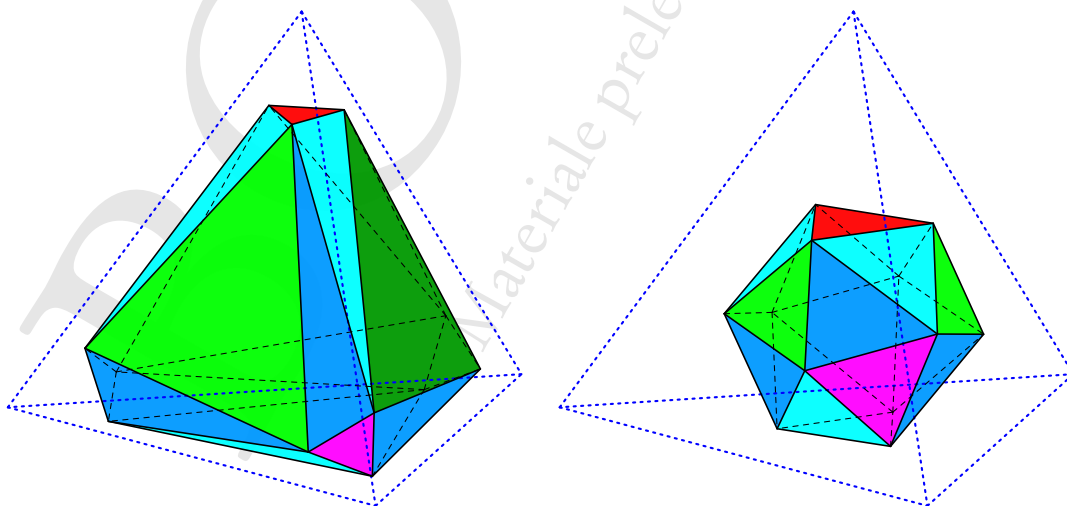


Figura 6.2.: Dal tetraedro all'icosaedro per levigatura

Se si procede ulteriormente con la levigatura fin quando le facce originali si riducono a un punto si ottiene il tetraedro duale di quello originale, come mostrato nella figura 6.3.

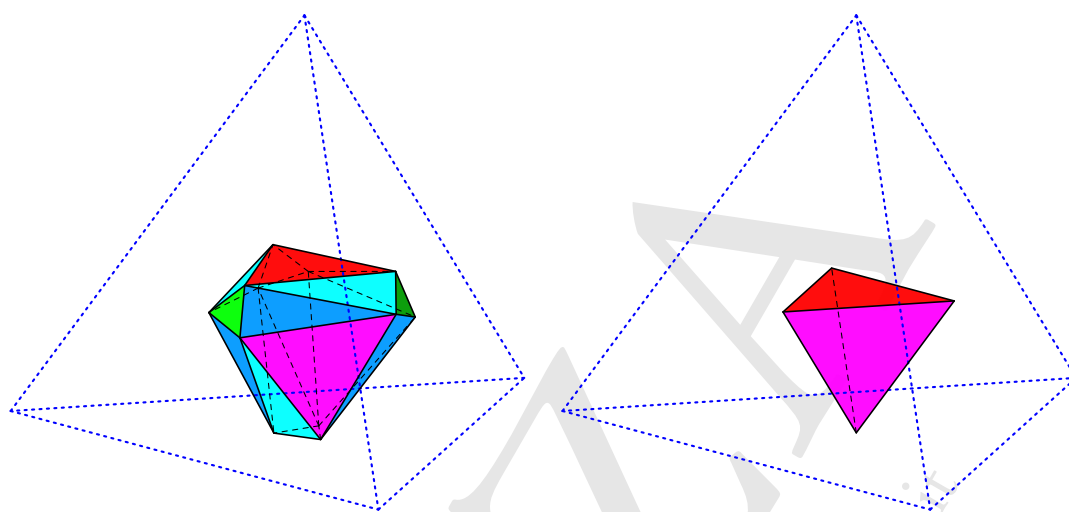


Figura 6.3.: Oltre l'icosaedro e fino al tetraedro duale, per levigatura

6.2. Poliedri chirali

Un poliedro (o anche un generico oggetto tridimensionale) ha un piano di simmetria se l'immagine speculare del poliedro rispetto al piano riproduce lo stesso poliedro.

In una proiezione parallela in due dimensioni si può facilmente riconoscere l'esistenza di piani di simmetria considerando la figura ottenuta per riflessione rispetto ad una retta (che si può vedere come la sezione di un piano perpendicolare al foglio da disegno) e verificando se l'immagine speculare coincide, a meno di una rotazione, con la figura originale: il piano di simmetria sarà un piano ruotato dell'angolo opposto rispetto al piano perpendicolare al foglio da disegno. La figura 6.4 illustra questo fatto per il cubottaedro.

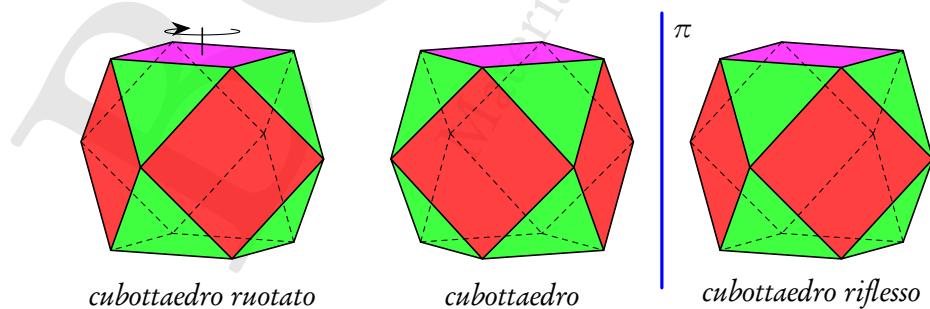


Figura 6.4.: Verifica dell'esistenza di simmetrie planari per il cubottaedro

I poliedri intermedi ottenuti durante la costruzione del tetraedro camuso non hanno nessun piano di simmetria, come si può constatare esaminando la figura 6.5.

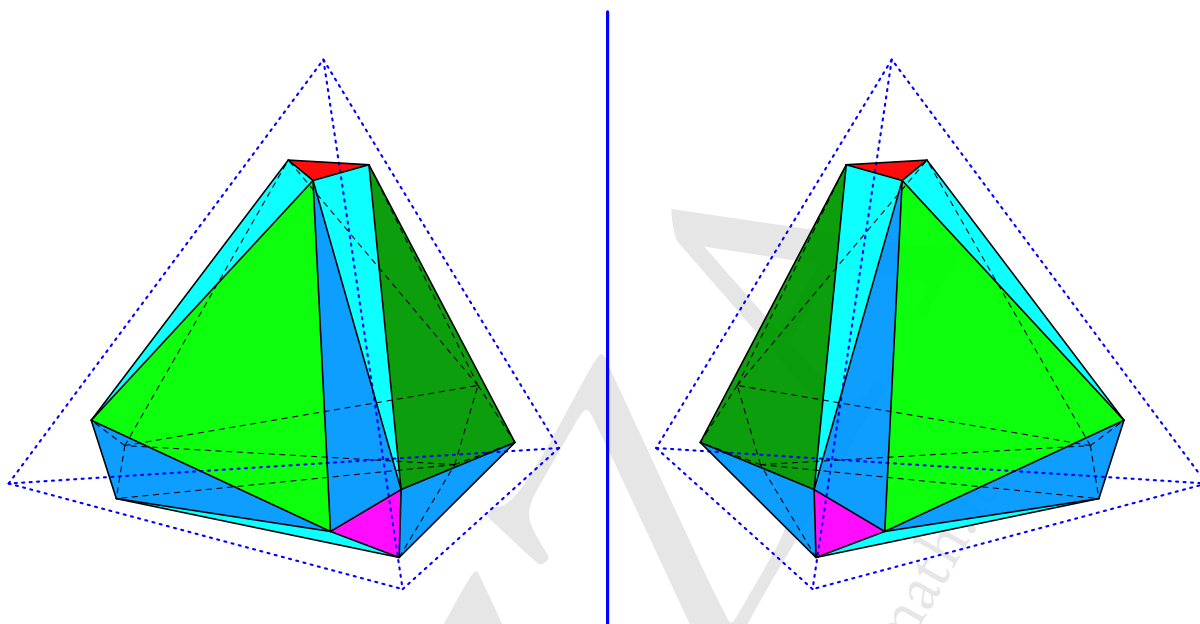


Figura 6.5.: Verifica della mancanza di simmetria assiale nel poliedro della figura 6.2

Poliedri che non hanno piani di simmetria sono detti *chirali*.

Nel caso del tetraedro il poliedro ottenuto per levigatura è l'icosaedro e dunque ha numerosi piani di simmetria. Come vedremo invece il cubo o ottaedro camuso e il dodecaedro o icosaedro camuso non hanno piani di simmetria e sono gli unici due poliedri semiregolari chirali. La differenza tra i due poliedri è legata alla rotazione oraria o antioraria delle facce

6.3. Il cubo o ottaedro camuso

Passiamo ora a trattare il caso della coppia di poliedri duali cubo e ottaedro.

Applichiamo ancora la tecnica di sottoporre ciascuna faccia a una rotazione, nello stesso verso orario o antiorario, attorno all'asse passante per il suo centro e orientata verso l'esterno del poliedro, e contemporaneamente a una contrazione: ogni vertice dà origine a tre nuovi vertici nel caso del quadrato, a quattro nuovi vertici nel caso dell'ottaedro. Gli spigoli delle facce ruotate formano un quadrilatero non piano, che può essere diviso in due triangoli: si prosegue nella rotazione-contrazione fin quando questi triangoli diventano equilateri, mentre le facce originali mantengono la loro forma rispettivamente di quadrati o triangoli riducendo sempre di più le dimensioni.

Nel caso in esame, quando i triangoli sugli spigoli diventano equilateri si ottiene il cubo camuso o ottaedro camuso. Si vedano le figure 6.6, 6.7 e 6.8, dove abbiamo scelto il verso orario di rotazione.

L'esame delle figure 6.6, 6.7 e 6.8 rende evidente che il processo a partire dal cubo o dall'ottaedro è perfettamente simmetrico, tanto che a partire da uno dei due poliedri si può ottenere il duale se si procede nel processo di levigatura.

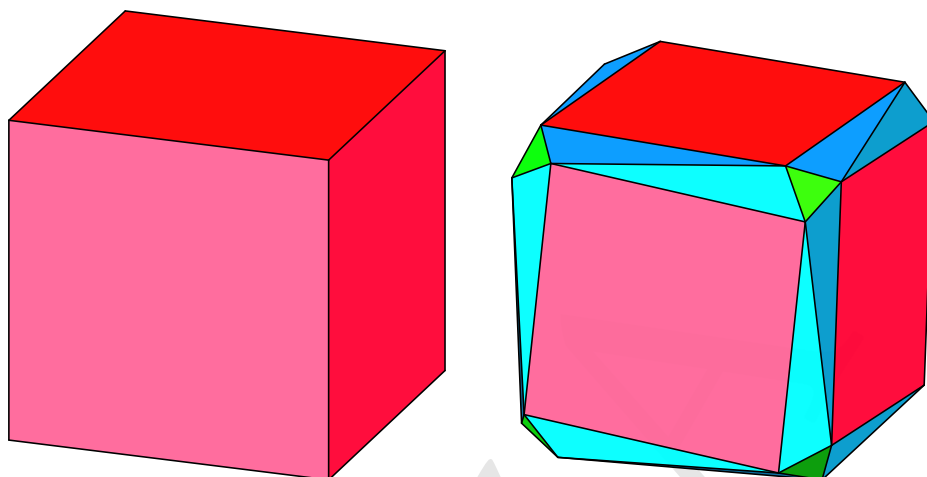


Figura 6.6.: Il cubo, a sinistra, e un primo passo verso la costruzione del cubo-ottaedro camuso, a destra

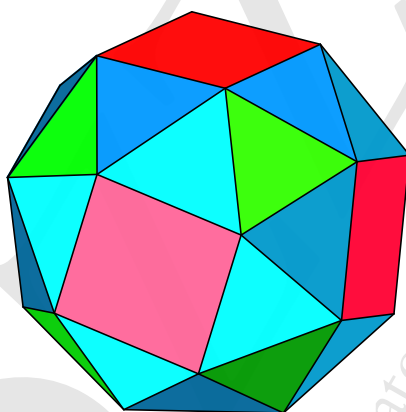


Figura 6.7.: Il cubo-ottaedro camuso

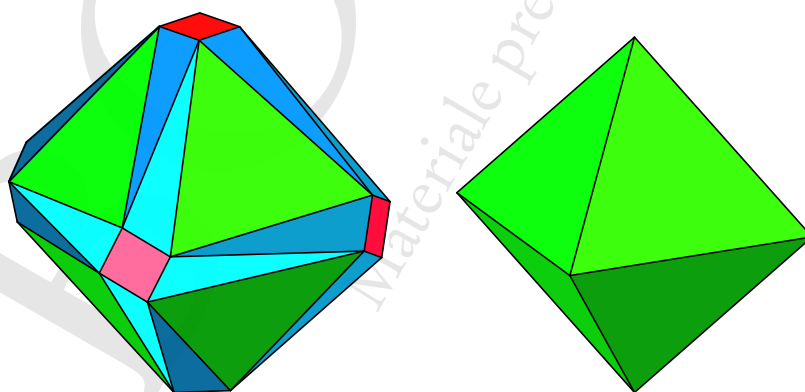


Figura 6.8.: Oltre il cubo-ottaedro camuso, a sinistra, e fino all'ottaedro, a destra

Come già accennato, il cubo camuso è un poliedro chirale, in quanto non ha piani di simmetria: lo si può constatare esaminando la figura 6.9.

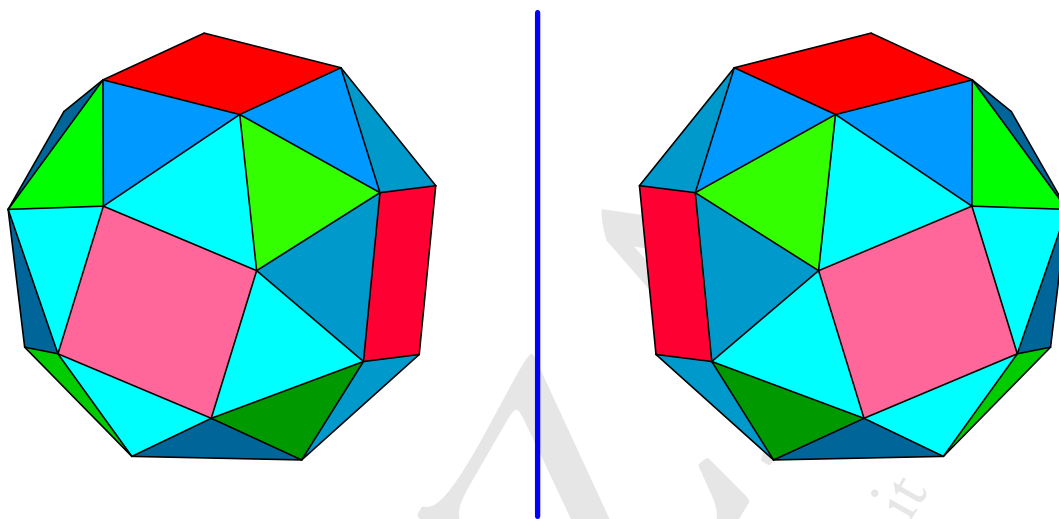


Figura 6.9.: *Chiralità del cubo camuso*

6.4. Il dodecaedro o icosaedro camuso

Passiamo infine al caso della coppia dodecaedro-icosaedro. Si procede esattamente con la stessa tecnica già considerata per il tetraedro e la coppia cubo-ottaedro. Questa volta abbiamo scelto il verso di rotazione antiorario. Sia in questo caso che nei due precedenti se si sceglie di partire dal poliedro duale le figure proposte si ottengono scegliendo l'opposto verso di rotazione.

Anche il dodecaedro camuso è chirale e questo fatto è visualizzato nella figura 6.13.

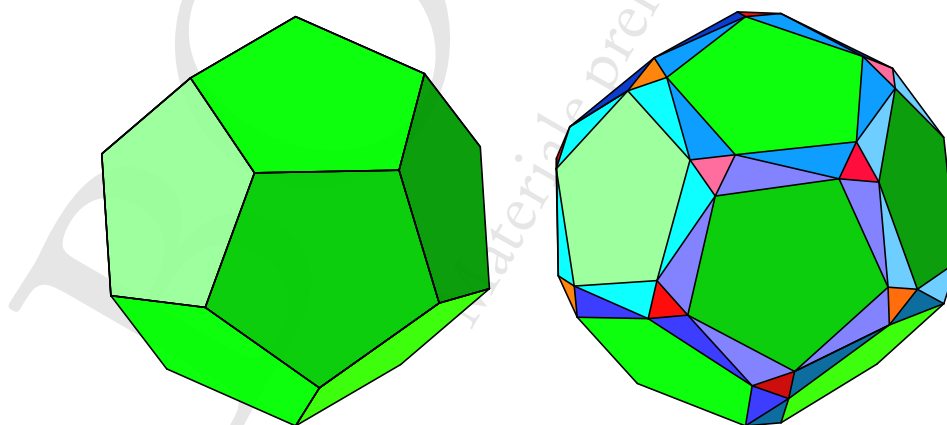


Figura 6.10.: *Il dodecaedro, a sinistra, e un primo passo verso la costruzione del dodecaedro-icosaedro camuso, a destra*

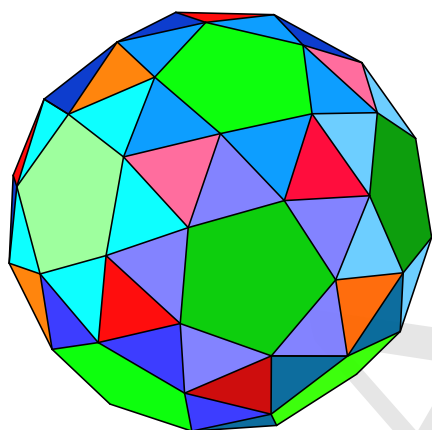


Figura 6.11.: *Il dodecaedro-icosaedro camuso*

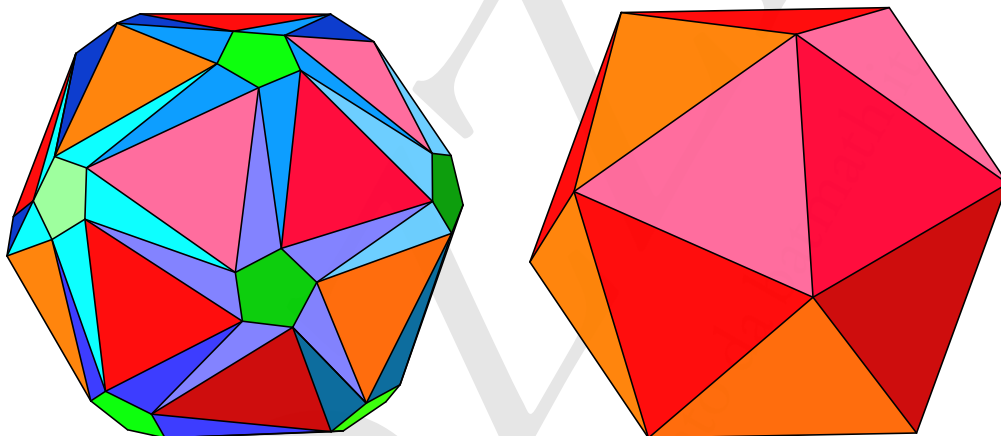


Figura 6.12.: *Oltre il dodecaedro-icosaedro camuso, a sinistra, e fino all'icosaedro, a destra*

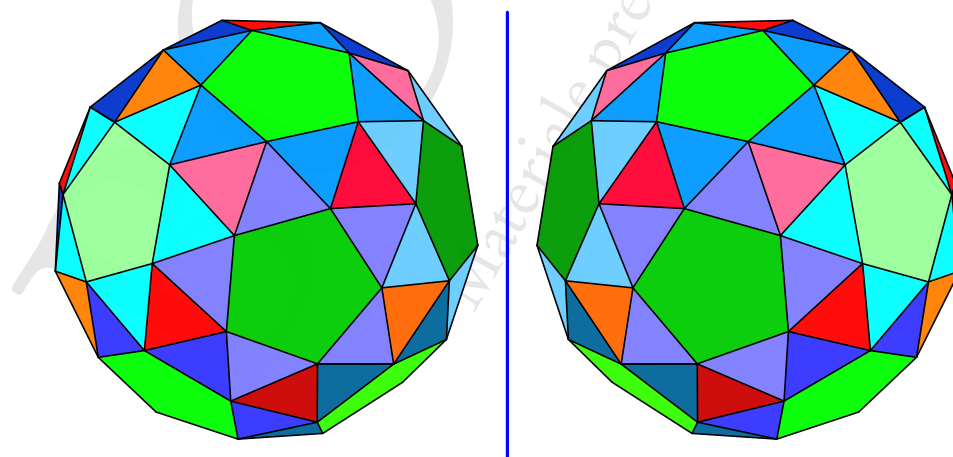


Figura 6.13.: *Chiralità del dodecaedro camuso*

6.5. Una costruzione alternativa

Una costruzione alternativa del cubo camuso si può ottenere dal rombicubottaedro suddividendo i quadrati, esclusi quelli residui delle originali facce del cubo, in due triangoli rettangoli isosceli e sottoponendo le facce quadrate residue ad una rotazione fin quando i triangoli rettangoli isosceli diventano equilateri. Si può equivalentemente sottoporre i triangoli (residui delle facce originali dell'ottaedro) ad una rotazione in senso inverso. Si veda la figura 6.14.

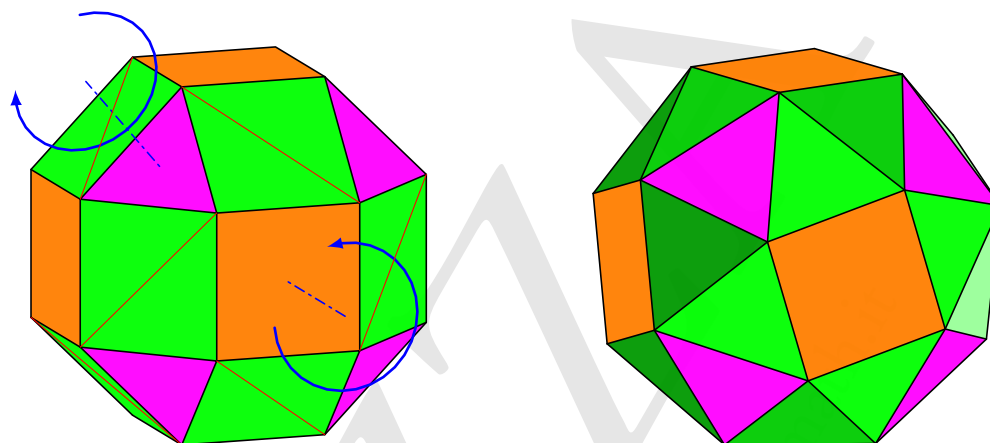


Figura 6.14.: *Dal rombicubottaedro al cubo camuso*

In maniera perfettamente analoga si può procedere per ottenere il dodecaedro camuso dal rombicododecaedro: si veda la figura 6.15.

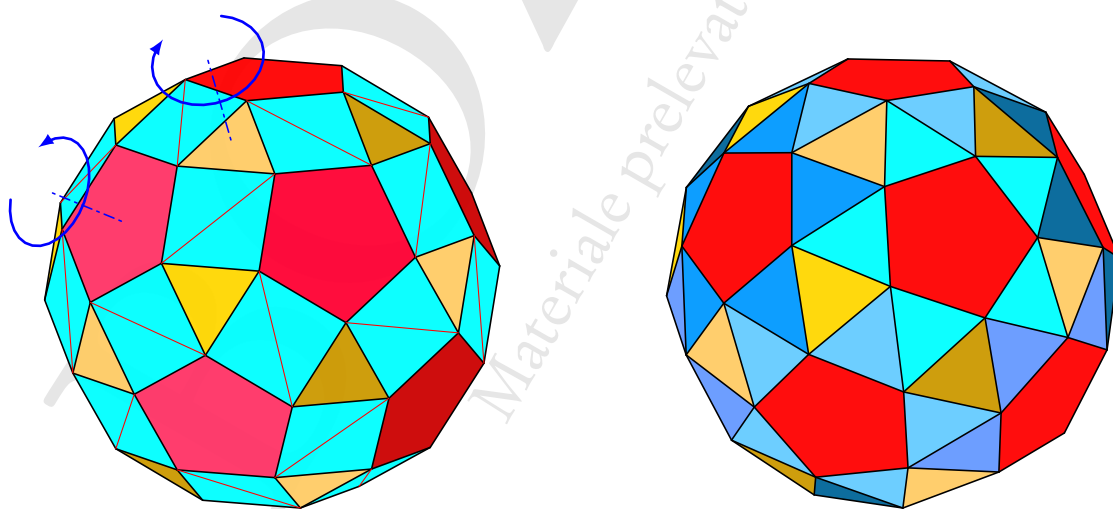


Figura 6.15.: *Dal rombicododecaedro al dodecaedro camuso*

In entrambi i casi le rotazioni in senso inverso producono i due solidi inversamente orientati.

Queste costruzioni sono particolarmente significative: come vedremo nel capitolo 7, il rombicubottaedro e il rombicosidodecaedro possono essere costruiti a partire dal cubo o ottaedro e, rispettivamente, dal dodecaedro o icosaedro con il metodo di *espansione*. Ne segue che i due solidi camusi possono essere costruiti come combinazione di una espansione e di una rotazione. Ritourneremo a suo tempo sul problema.

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

7. Il metodo di espansione

7.1. Introduzione

Il procedimento di troncatura dei poliedri platonici per ottenere i solidi di Archimede risale sostanzialmente a Keplero. Un metodo alternativo⁽¹⁾ per ottenere gli stessi poliedri è il *metodo di espansione* descritto da Alicia Boole Stott⁽²⁾ in [51]. Questo metodo non richiede alcuna deformazione del poliedro di partenza e le lunghezze dei lati del poliedro finale sono le stesse di quelle del poliedro di partenza.

Il procedimento consiste nell'*espandere*, ovvero nell'allontanare perpendicolarmente dal centro di un poliedro gli spigoli o le facce, mantenendone forma e dimensioni, fin quando gli interstizi che si creano non sono riempiti da nuove facce poligonali regolari. Il processo inverso si chiama *contrazione*, ma generalmente si usa sempre il termine espansione, prendendo eventualmente il rapporto di espansione negativo. Le combinazioni possibili sono molto numerose, come con le troncature: tratteremo solo alcune delle situazioni possibili, senza particolari commenti, in quanto i solidi archimedei sono già stati ampiamente descritti.

Per ciascuno dei solidi abbiamo scelto la via sostanzialmente più semplice e, in un certo senso, “più naturale”, per ottenere il corrispondente solido archimedeo. Più precisamente:

- l'espansione degli spigoli per ottenere il tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro o icosaedro troncato;
- l'espansione delle facce per ottenere il rombicubottaedro (dal cubo e dall'ottaedro) e il rombicosidodecaedro (dal dodecaedro e dall'icosaedro);
- la contrazione dei triangoli del cubo troncato o dei quadrati dell'ottaedro troncato per ottenere il cubottaedro;
- la contrazione dei triangoli del dodecaedro troncato o dei pentagoni dell'icosaedro troncato per ottenere l'icosidodecaedro;
- l'espansione degli ottagoni del cubo troncato o degli esagoni dell'ottaedro troncato per ottenere il grande rombicubottaedro;
- l'espansione dei decagoni del dodecaedro troncato o degli esagoni dell'icosaedro troncato per ottenere il grande rombicosidodecaedro.

Come già accennato, i due solidi camusi si possono ottenere combinando l'espansione delle facce di un cubo (o di un ottaedro) e di un dodecaedro (o di un icosaedro) con una rotazione successiva, tanto che da alcuni il processo di espansione è ritenuto un caso particolare di quello di levigatura o addolcimento.

¹Molto più elegante, secondo quanto afferma Coxeter in [13].

²Alicia Boole Stott (1860-1940) è una matematica irlandese, figlia del noto matematico George Boole, ritenuto il fondatore della logica matematica. A lei è dovuto il termine *politopo* per indicare un solido convesso a tre o più dimensioni. Scopri per esempio che in uno spazio a quattro dimensioni esistono solo sei politopi regolari, che descrisse accuratamente. È da segnalare che studiò la matematica da autodidatta, ricevendo una laurea ad honorem nel 1914 dall'Università di Groningen, dove aveva lavorato per una ventina d'anni con Pieter Hendrik Schoute. Dagli anni '30 fino alla morte collaborò con Coxeter. Una curiosità: sua madre era Mary Everest, in onore del cui zio, George Everest, la Royal Geographic Society diede il nome al Monte Everest.

7.2. Espansione degli spigoli dei solidi platonici

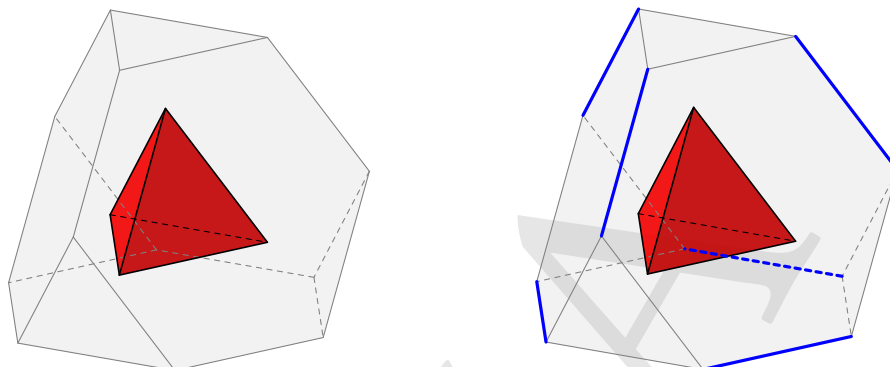


Figura 7.1.: *Espansione degli spigoli di un tetraedro per ottenere il tetraedro troncato*

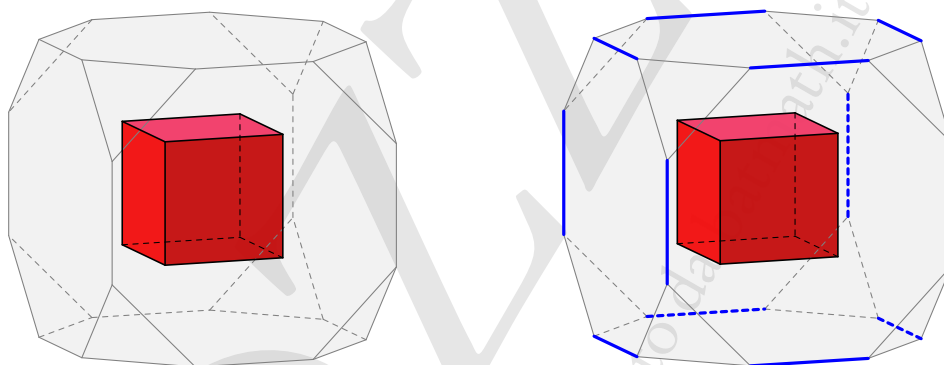


Figura 7.2.: *Espansione degli spigoli di un cubo per ottenere il cubo troncato*

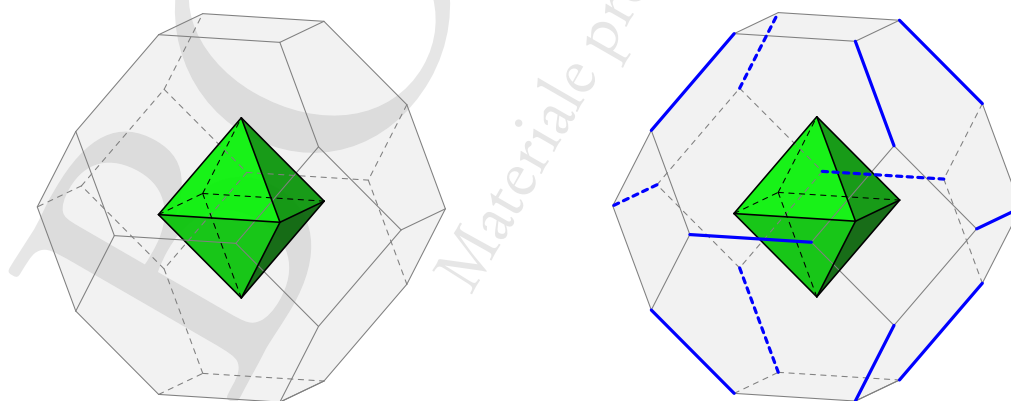


Figura 7.3.: *Espansione degli spigoli di un ottaedro per ottenere l'ottaedro troncato*

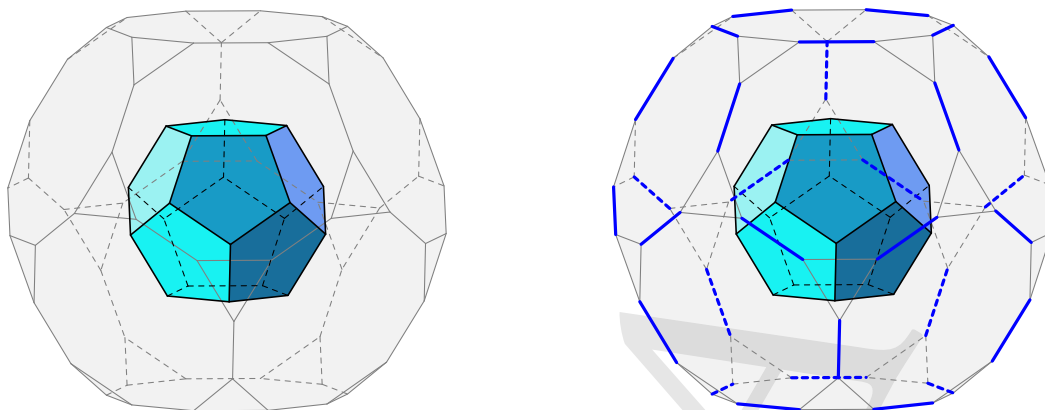


Figura 7.4.: *Espansione degli spigoli di un dodecaedro per ottenere il dodecaedro troncato*

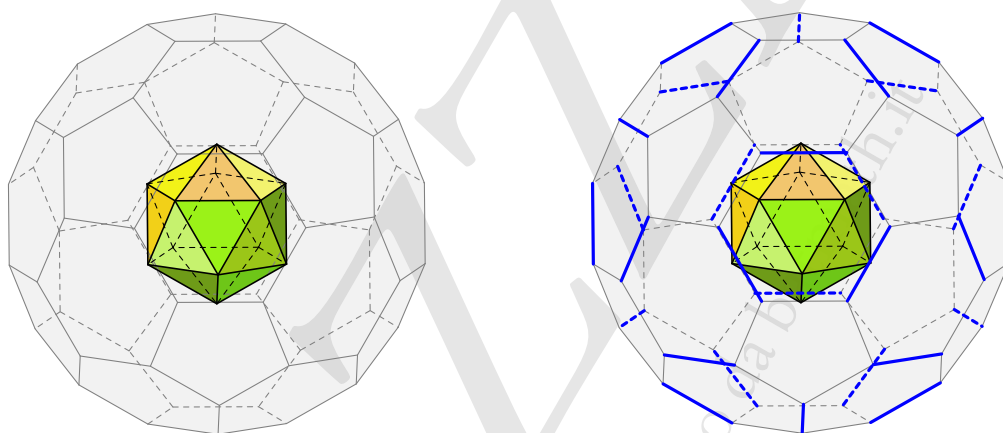


Figura 7.5.: *Espansione degli spigoli di un icosaedro per ottenere l'icosaedro troncato*

7.3. Espansione delle facce dei solidi platonici

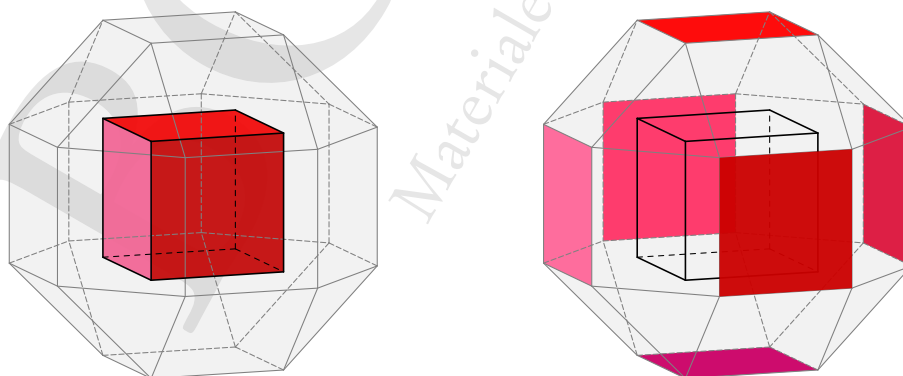


Figura 7.6.: *Espansione delle facce di un cubo per ottenere il rombicubottaedro*

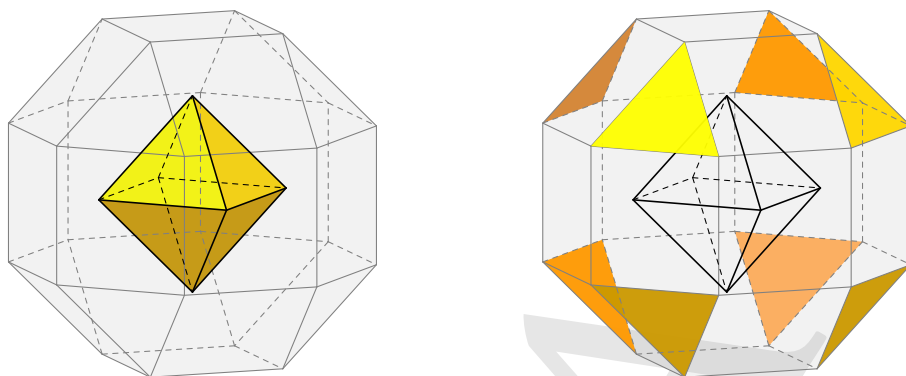


Figura 7.7.: *Espansione delle facce di un ottaedro per ottenere il rombicubottaedro*

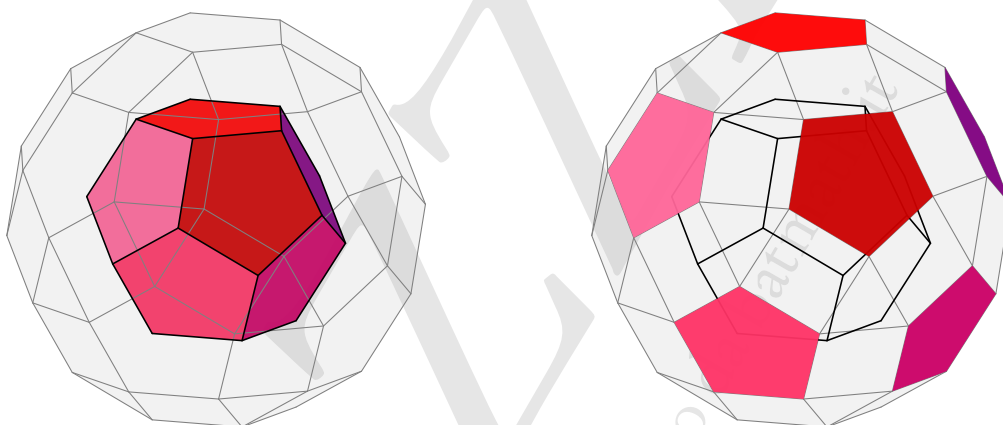


Figura 7.8.: *Espansione delle facce di un dodecaedro per ottenere il rombicosidodecaedro*

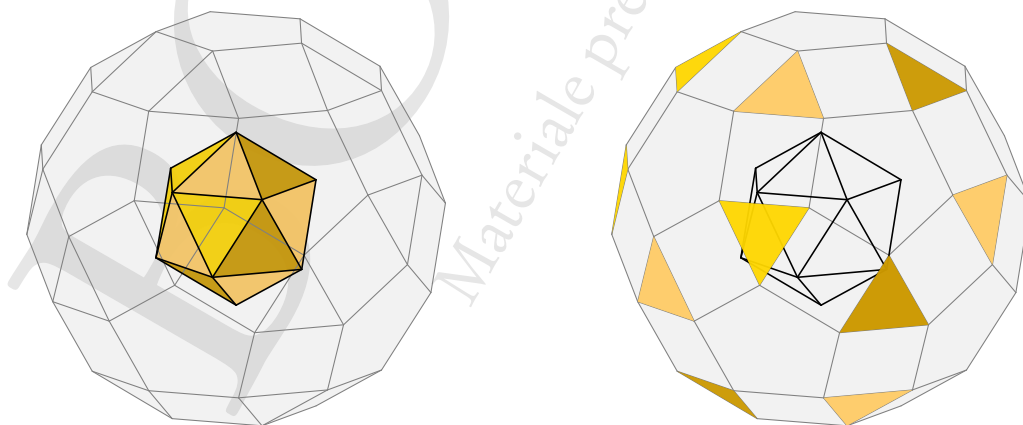


Figura 7.9.: *Espansione delle facce di un icosaedro per ottenere il rombicosidodecaedro*

7.4. Contrazione di facce nei poliedri troncati

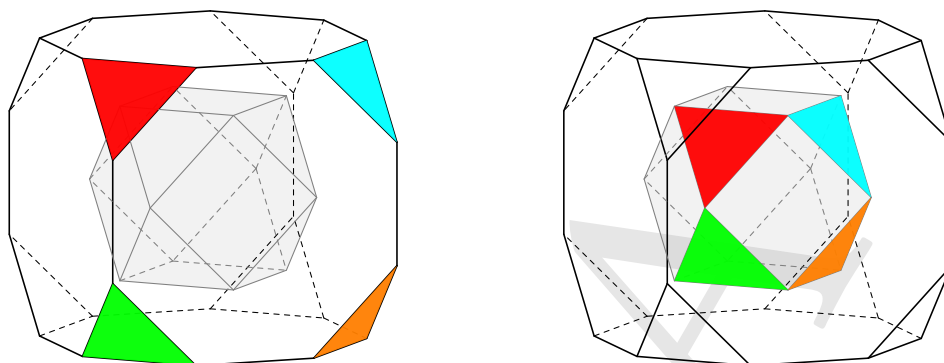


Figura 7.10.: Contrazione delle facce triangolari di un cubo troncato per ottenere il cubottaedro

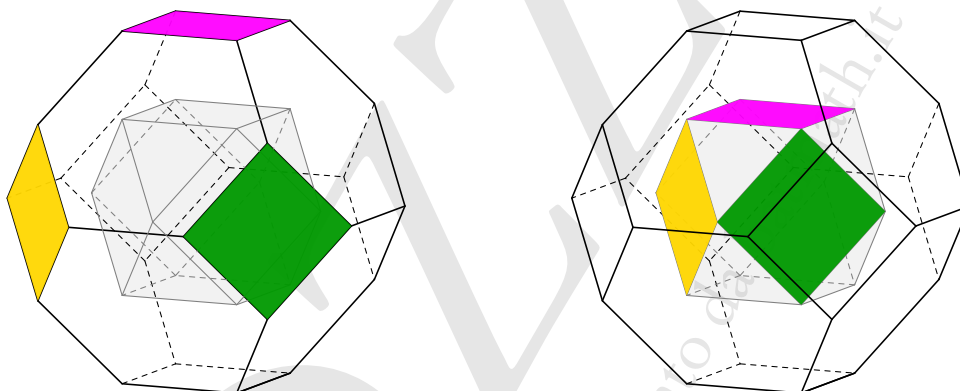


Figura 7.11.: Contrazione delle facce quadrate di un ottaedro troncato per ottenere il cubottaedro

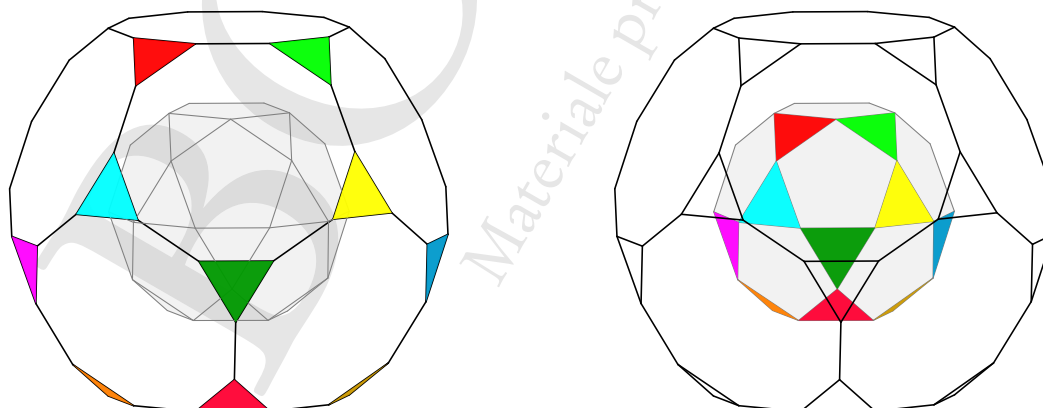


Figura 7.12.: Contrazione delle facce triangolari di un dodecaedro troncato per ottenere l'icosidodecaedro

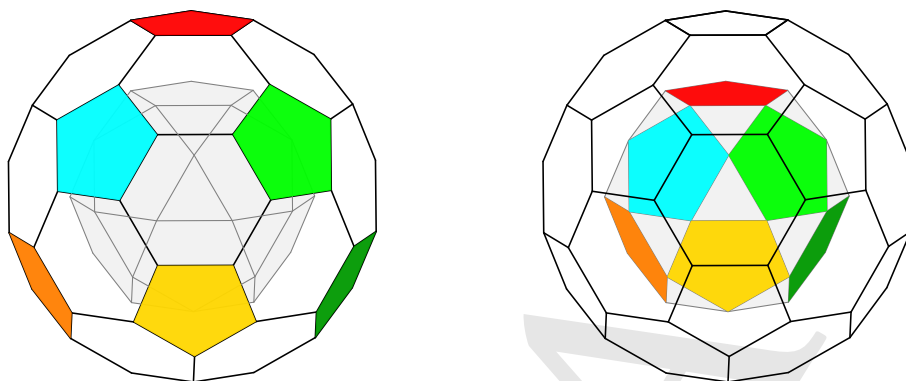


Figura 7.13.: *Contrazione delle facce pentagonali di un icosaedro troncato per ottenere l'icosidodecaedro*

7.5. Espansione di facce nel rombicubottaedro e nel rombicododecaedro

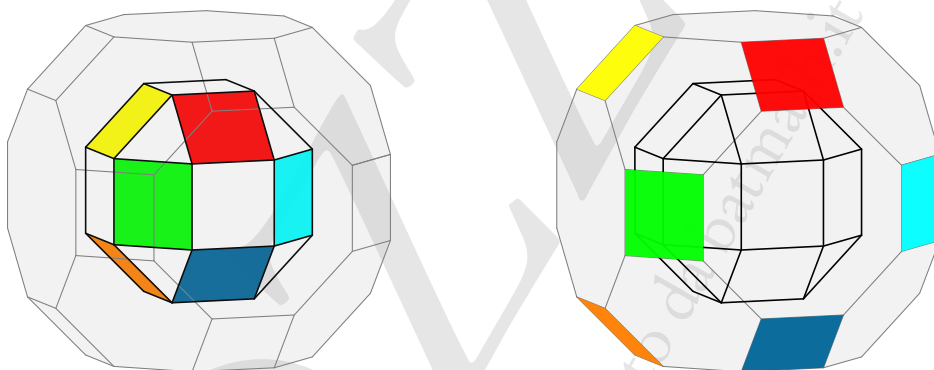


Figura 7.14.: *Espansione delle facce quadrate non assiali di un rombicubottaedro per ottenere il grande rombicubottaedro*

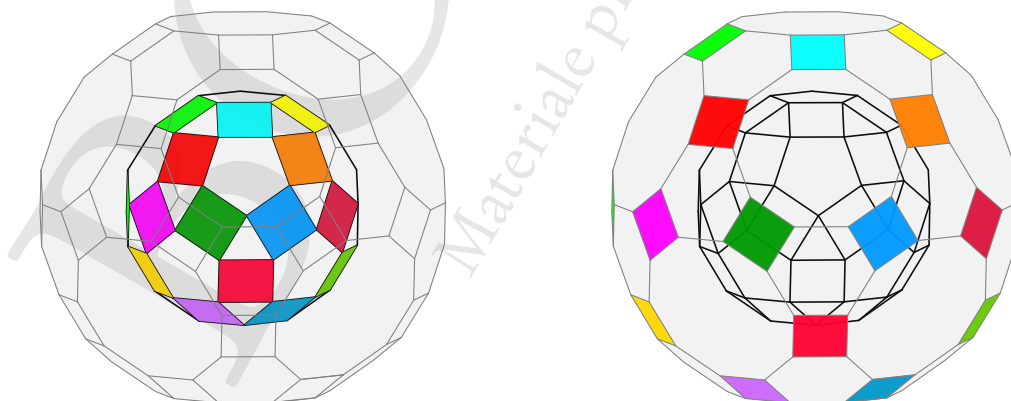


Figura 7.15.: *Espansione delle facce quadrate di un rombicododecaedro per ottenere il grande rombicododecaedro*

7.6. Osservazioni

L'esame delle costruzioni proposte con il metodo di espansione rivela ancora una volta i profondi legami che esistono tra un poliedro platonico e il suo duale. Per esempio il cubottaedro può essere ottenuto in maniera simmetrica per contrazione dal cubo o dall'ottaedro troncati, e analogamente l'icosidodecaedro può essere ottenuto in maniera simmetrica per contrazione dal dodecaedro o dall'icosaedro troncati.

Come al solito il tetraedro gioca un ruolo particolare in questo discorso, in quanto duale di se stesso. Per ragioni di completezza proponiamo anche l'illustrazione del risultato dell'espansione delle facce del tetraedro, espansione che produce il cubottaedro. I due tetraedri duali producono ciascuno quattro delle otto facce triangolari del cubottaedro: si vedano le figure 7.16 e 7.17.

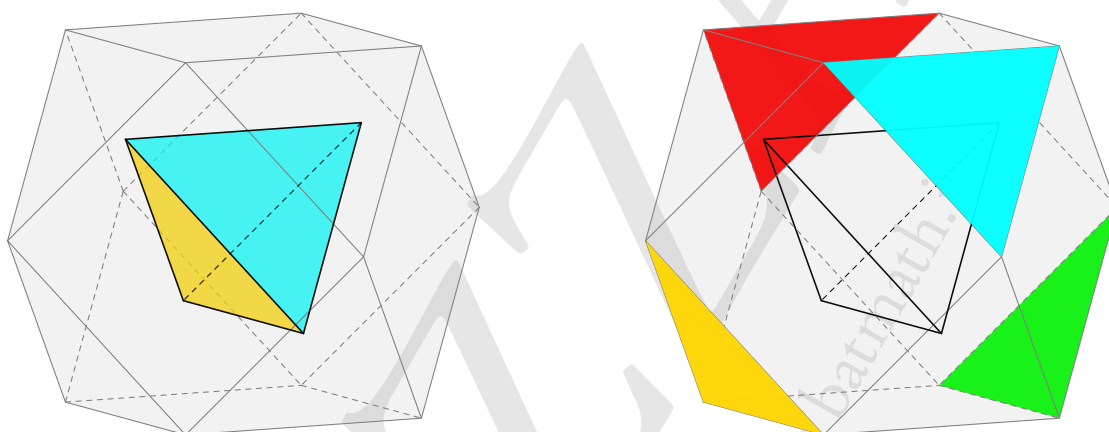


Figura 7.16.: *Espansione delle facce di un tetraedro per ottenere il cubottaedro*

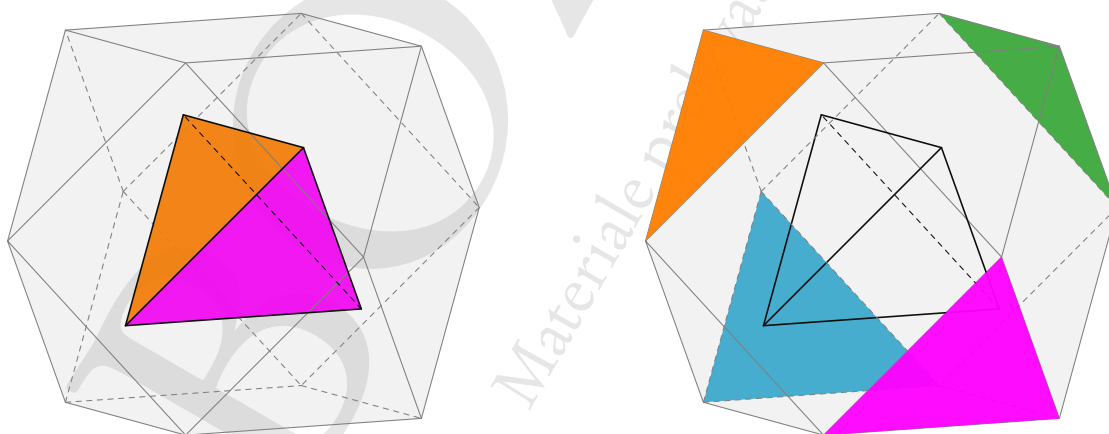


Figura 7.17.: *Espansione delle facce del tetraedro duale rispetto alla figura 7.16 per ottenere il cubottaedro*

Come già segnalato, in questo capitolo abbiamo esaminato solo alcune delle situazioni possibili relative all'applicazione del metodo di espansione ai solidi platonici e derivati per ottenere i poliedri archimedei: numerose altre sono le costruzioni possibili.

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

8. Sviluppi piani

8.1. Considerazioni generali

Gli sviluppi piani dei poliedri sono molto importanti nelle applicazioni, anche industriali, per esempio nelle piegature delle lamiere metalliche.

Come già accennato, probabilmente l'interesse per questo tipo di rappresentazione ha origine con Dürer che li introduce nel suo *Underweysung der Messung*.

In contrasto con l'apparente semplicità dell'idea, il problema di dispiegare un poliedro su un piano, tagliandolo opportunamente lungo certi spigoli, è tutt'altro che banale, tranne in casi semplici, se si vuole evitare che lo sviluppo abbia parti che si sovrappongono e naturalmente se si vuole che ogni faccia rimanga collegata almeno per uno spigolo ad un'altra faccia, in modo da non rimanere isolata.

La cosa non è sempre possibile per i poliedri concavi, mentre per i poliedri convessi una congettura in tal senso è stata formulata da Geoffrey Colin Shephard nel 1975. Tuttavia non esiste a tutt'oggi alcuna prova della validità dell'ipotesi di sviluppabilità piana di un generico poliedro convesso e il problema è noto, appunto, come *congettura di Shephard*. La comunità dei matematici è propensa a ritenere che la congettura sia vera.

Un ulteriore interessante problema relativo agli sviluppi piani è il loro numero per un dato poliedro: una interessante trattazione di questo problema relativamente ai politopi regolari fino a dimensione 4 si può trovare in [9]. Anche in questo campo i poliedri regolari riservano sorprese: un poliedro e il suo duale hanno lo stesso numero di sviluppi piani (come c'era da aspettarsi!) e il numero di questi sviluppi diventa enorme per la coppia icosaedro-dodecaedro. Precisamente ci sono

- 2 sviluppi diversi per il tetraedro;
- 11 sviluppi diversi per la coppia cubo-ottaedro;
- 43380 sviluppi diversi per la coppia dodecaedro-icosaedro.

Gli undici sviluppi possibili del cubo sono proposti nella figura 8.1.

Ancora un altro problema è quello che, in un certo senso, può essere chiamato un “problema di unicità”: un dato sviluppo piano può essere ripiegato fino ad ottenere un ben determinato poliedro o ci sono più possibilità? La risposta è, purtroppo, la mancanza di unicità e un esempio famoso è quello dei due deltaedri formati da triangoli equilateri, uno concavo a forma di barchetta e il noto ottaedro regolare, illustrati nelle figure 8.2 e 8.3 rispettivamente.

Dunque, tranne casi elementari, nello sviluppo piano andrebbero anche evidenziati quali sono gli spigoli che devono essere congiunti per ricostruire il poliedro, come si è fatto nelle figure 8.2 e 8.3.

Un'ultima osservazione relativamente agli sviluppi piani⁽¹⁾: una piccola modifica in uno sviluppo può portare ad un sostanziale cambiamento dell'oggetto tridimensionale da cui esso deriva. Addirittura si può passare da una normale superficie poliedrica chiusa ad un oggetto che non è più un poliedro.

¹Vedi Weisstein, Eric W. “Net”. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Net.html>

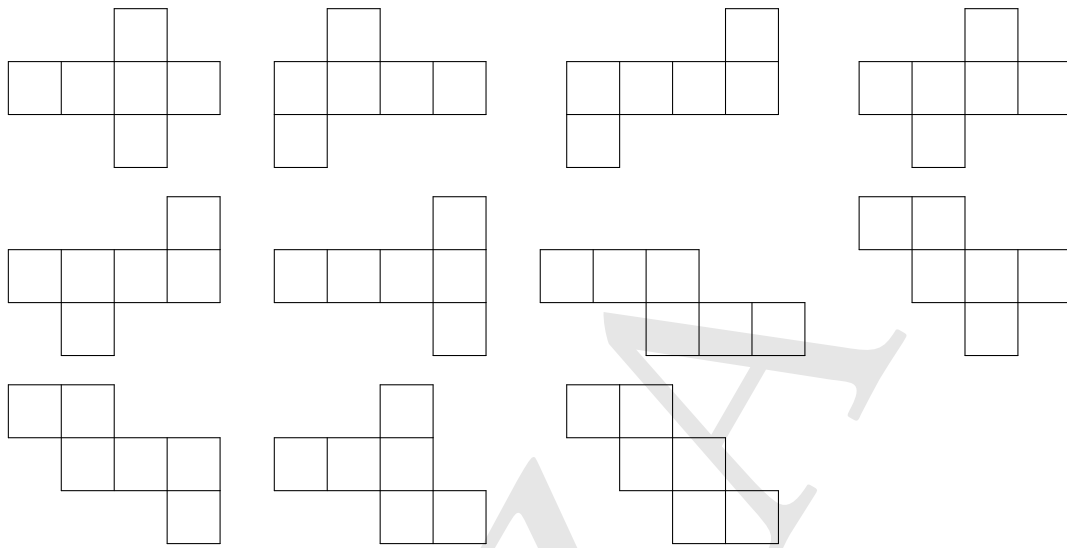


Figura 8.1.: Gli undici diversi sviluppi piani di un cubo

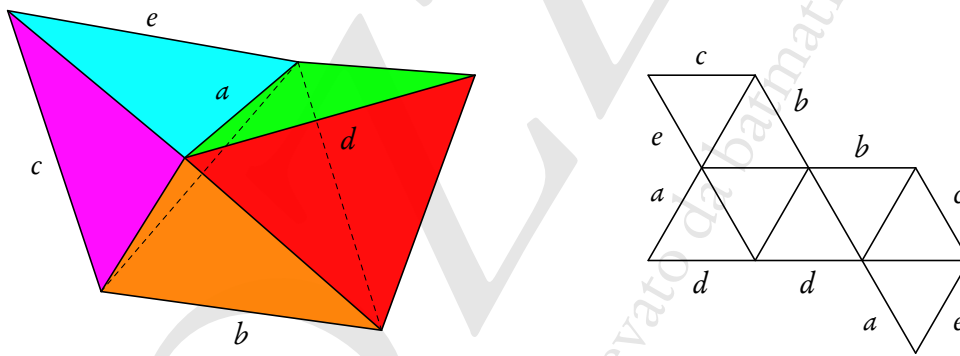


Figura 8.2.: Un ottaedro concavo "a barchetta", a facce regolari, e un suo sviluppo piano

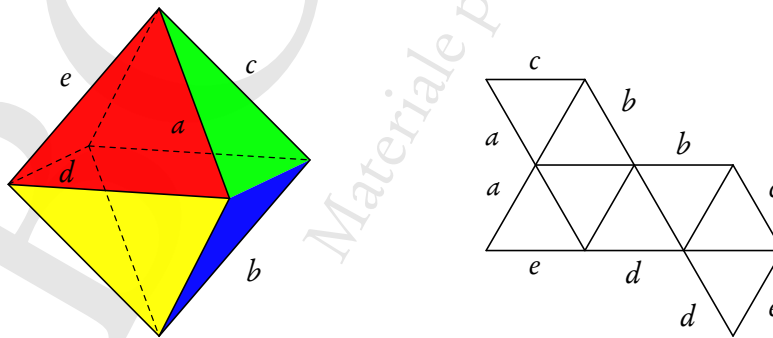


Figura 8.3.: L'ottaedro regolare e un suo sviluppo piano

Nella figura 8.4 è mostrato un cestino con manico, quindi una figura non chiusa, il cui sviluppo piano è estremamente simile al primo di quelli del cubo, con la sostituzione di quadrati con rettangoli.

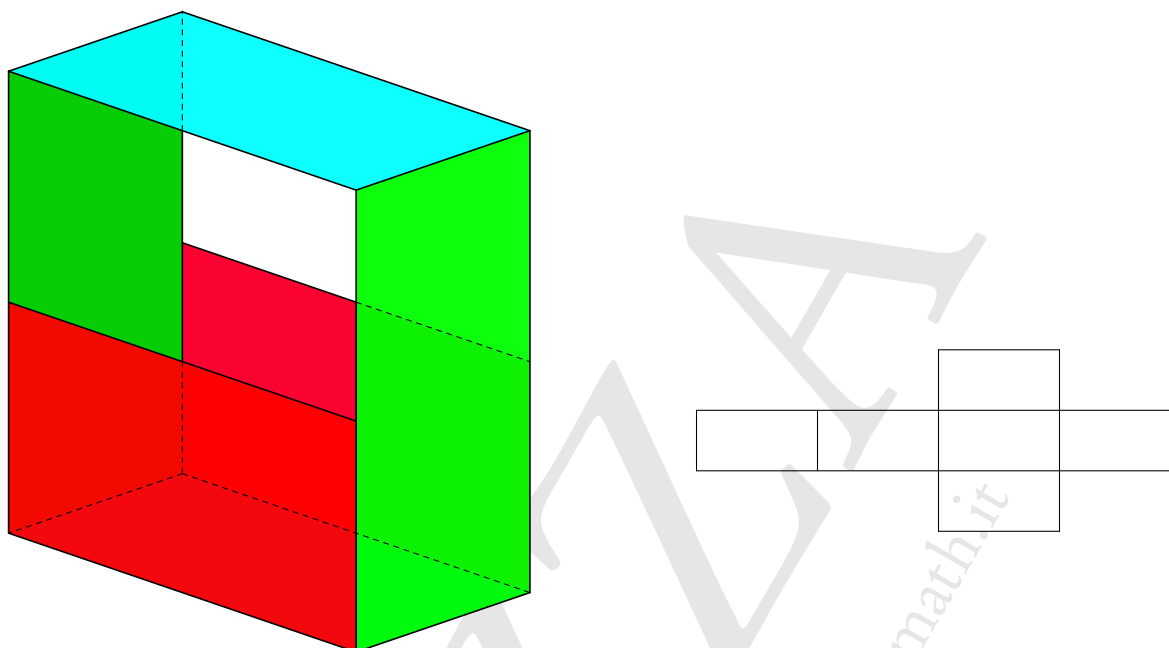


Figura 8.4.: *Sviluppo piano di un cestino*

8.2. Gli sviluppi dei poliedri archimedei

Passiamo ora a illustrare gli sviluppi dei poliedri archimedei: per ognuno di essi abbiamo scelto uno dei possibili sviluppi, nella maggior parte dei casi prendendo spunto da quelli proposti in *Mathworld* o direttamente in *Mathematica*.

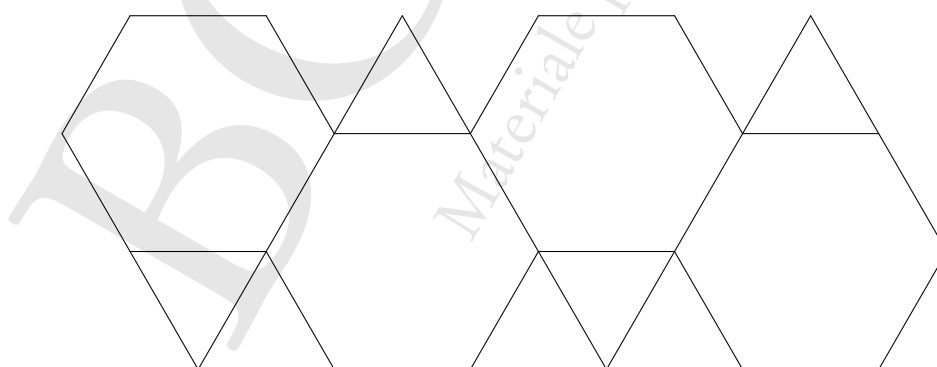
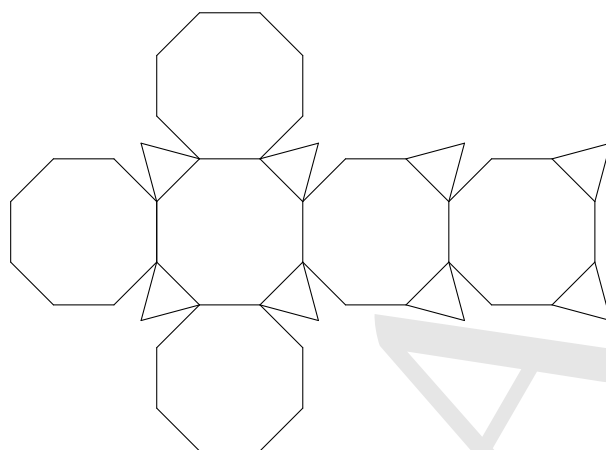
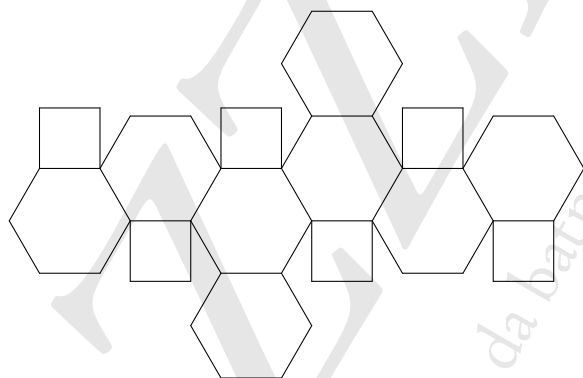
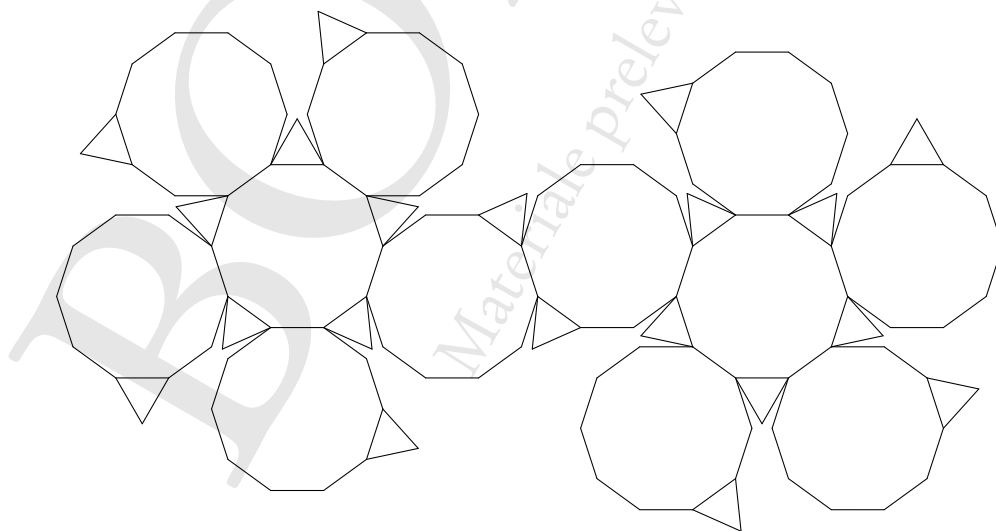


Figura 8.5.: *Sviluppo piano del tetraedro troncato*

Figura 8.6.: *Sviluppo piano del cubo troncato*Figura 8.7.: *Sviluppo piano dell'ottaedro troncato*Figura 8.8.: *Sviluppo piano del dodecaedro troncato*

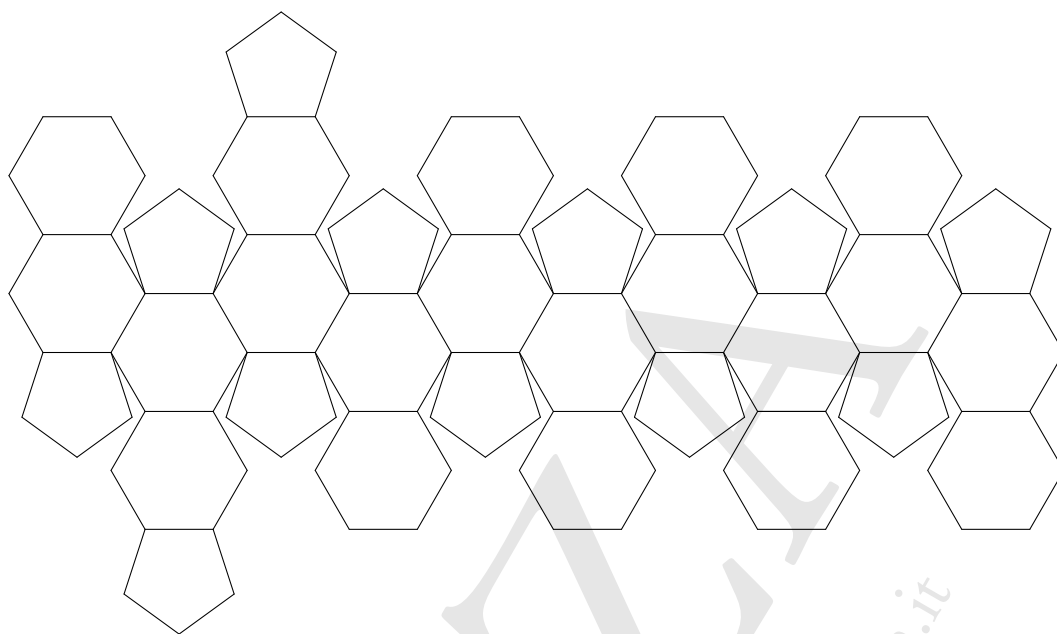


Figura 8.9.: *Sviluppo piano dell'icosaedro troncato*

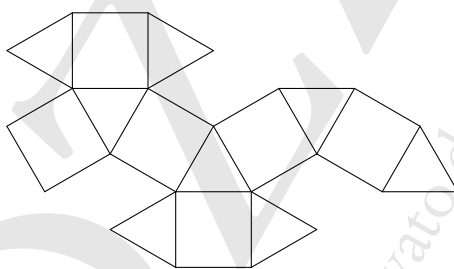


Figura 8.10.: *Sviluppo piano del cubottaedro*

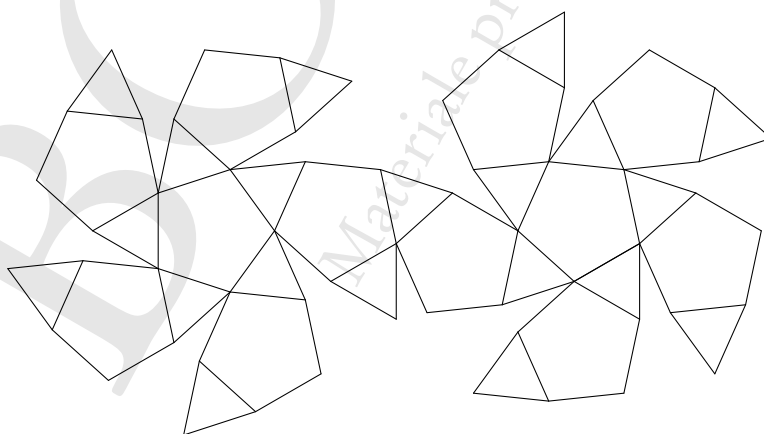


Figura 8.11.: *Sviluppo piano dell'icosidodecaedro*

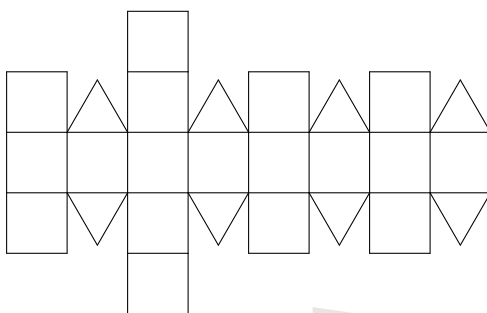


Figura 8.12.: *Sviluppo piano del rombicubottaedro*

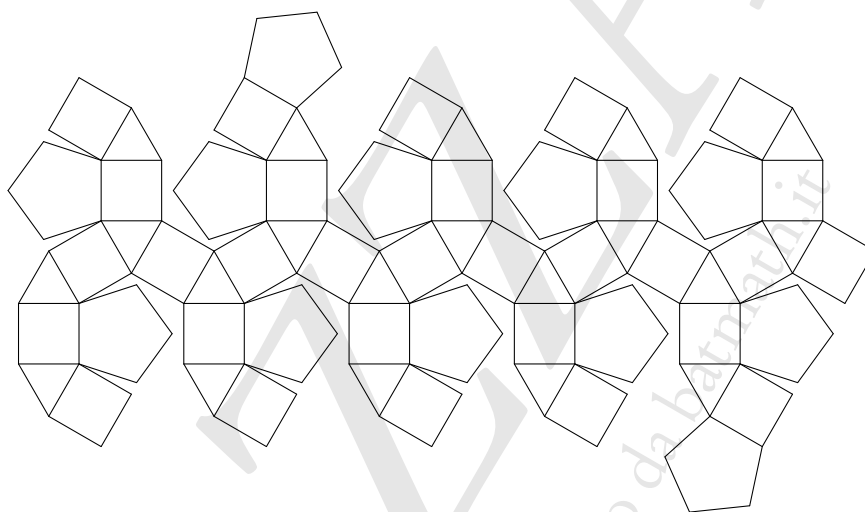


Figura 8.13.: *Sviluppo piano del rombicododecaedro*

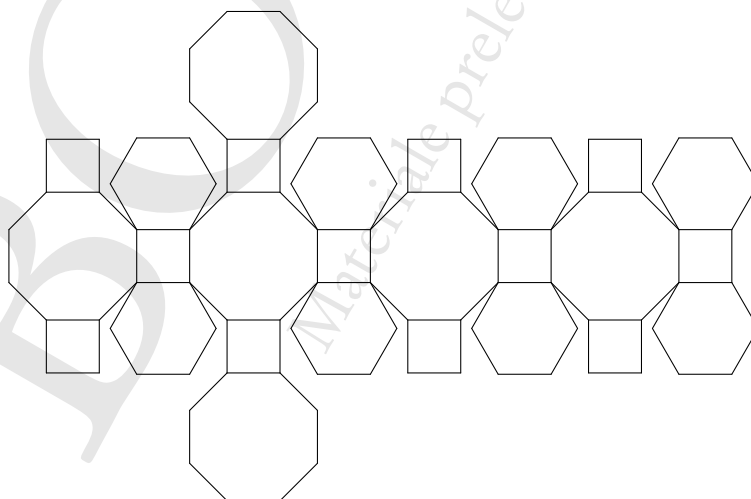


Figura 8.14.: *Sviluppo piano del grande rombicubottaedro*

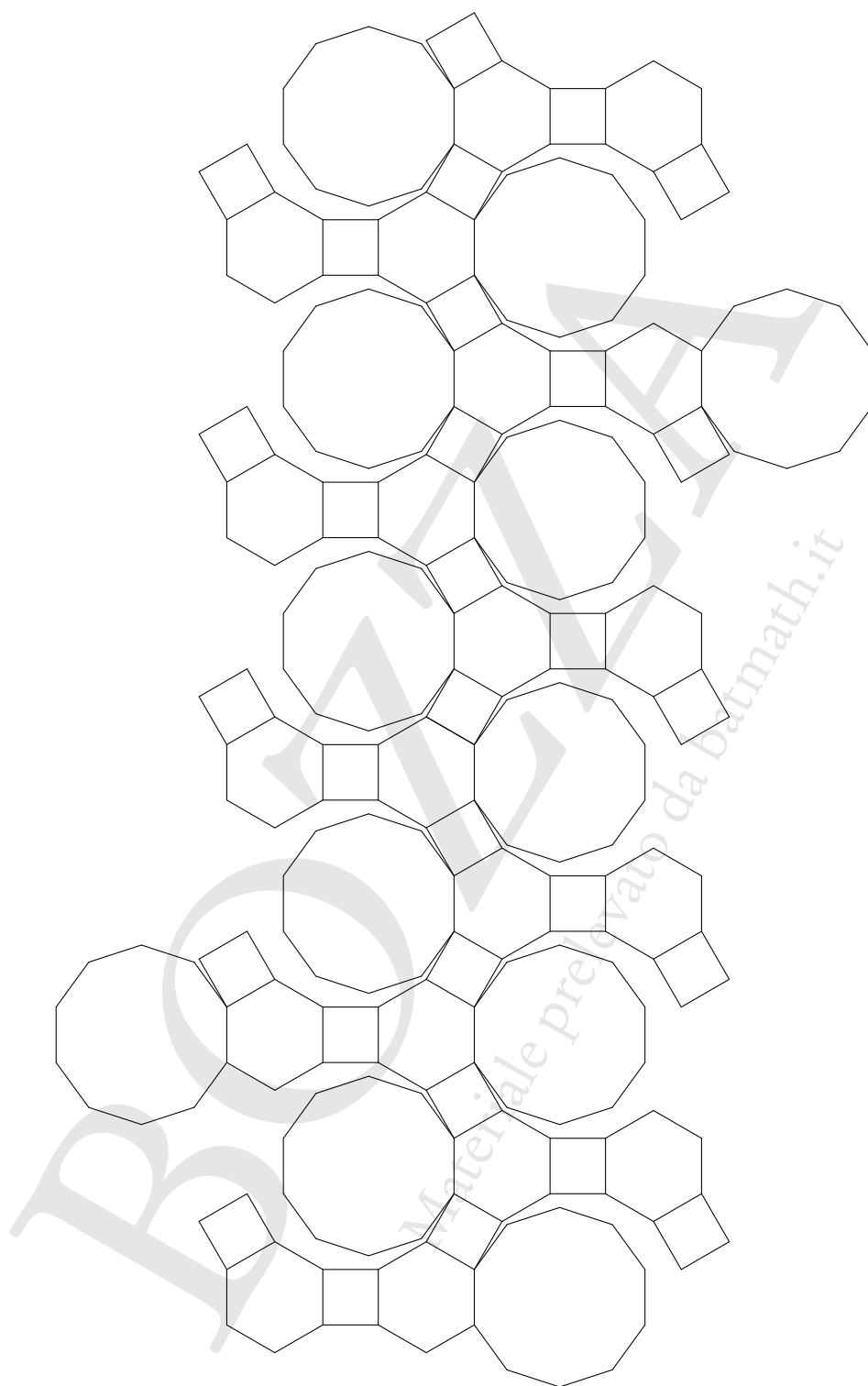
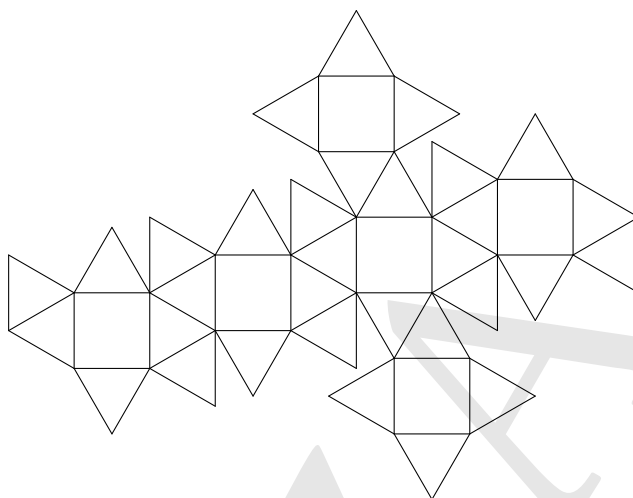
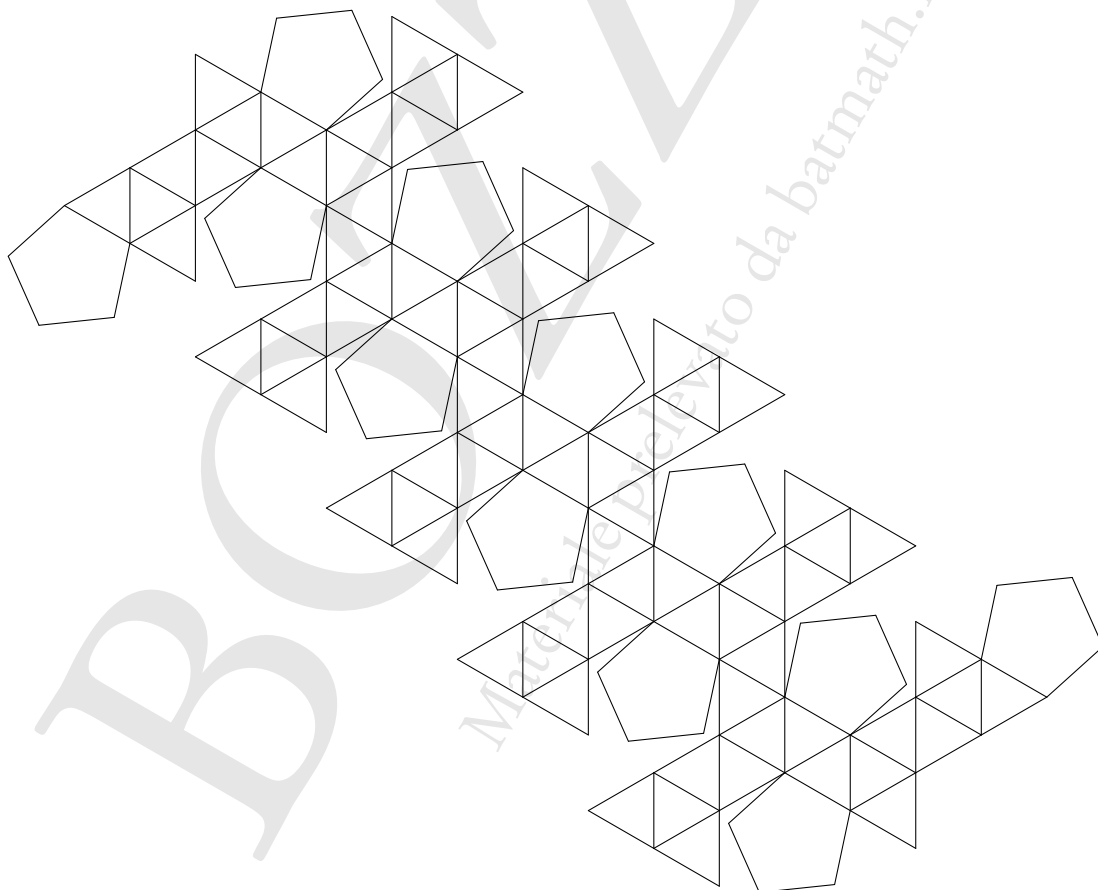


Figura 8.15.: *Sviluppo piano del grande rombicosidodecaedro*

Figura 8.16.: *Sviluppo piano del cubo camuso*Figura 8.17.: *Sviluppo piano del dodecaedro camuso*

9. Solidi di Catalan

9.1. Introduzione

Benché i solidi di Archimede siano noti da molto tempo, i loro duali sono stati descritti in tempi relativamente recenti, precisamente da Eugene Charles Catalan nel 1865, in cui onore si chiamano appunto *solidi di Catalan*, con l'eccezione del dodecaedro rombico e del triacontaedro rombico descritti da Keplero e di cui abbiamo già ampiamente parlato.

Poiché i poliedri di Archimede hanno tutti un'intersfera, il metodo più semplice per costruire i duali è il metodo di Dorman-Luke: la figura 9.1 illustra nel dettaglio questa costruzione per il tetraedro troncato.

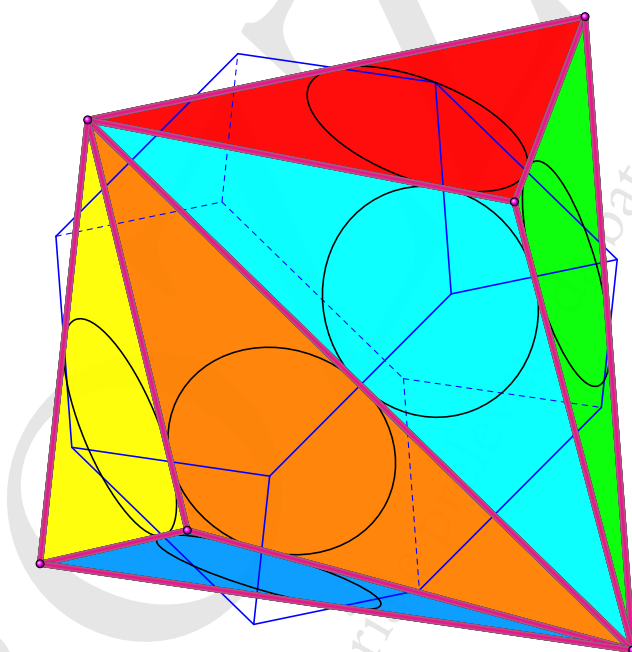


Figura 9.1.: Costruzione del duale del tetraedro troncato con il metodo di Dorman-Luke

Nel passaggio da un poliedro al suo duale si scambiano le proprietà dei vertici con quelle delle facce: poiché i poliedri di Archimede sono uniformi sui vertici, quelli di Catalan sono uniformi sulle facce, cioè hanno tutte le facce congruenti, mentre i vertici non hanno tutti la stessa valenza. Essi fanno parte del gruppo dei *poliedri semiregolari di seconda specie* assieme ai diamanti e agli antidiamenti.

La tabella 9.1 mostra i nomi e le caratteristiche essenziali dei tredici poliedri di Catalan. Gli ultimi due sono, come i corrispondenti poliedri di Archimede, chirali, cioè esistono in due forme: destrogiro e levogiro, non sovrapponibili.

Tabella 9.1.: *I poliedri di Catalan e le loro caratteristiche essenziali*

Nome	Duale	Tipo di facce	Spigoli	Vertici
triacistetraedro	tetraedro troncato	12 triangoli isosceli	18	8
triacisottaedro	cubo troncato	24 triangoli isosceli	36	14
tetracisesaedro	ottaedro troncato	24 triangoli isosceli	36	14
triacisicosaedro	dodecaedro troncato	60 triangoli isosceli	90	32
pentacisdodecaedro	icosaedro troncato	60 triangoli isosceli	90	32
dodecaedro rombico	cubottaedro	12 rombi	24	14
triacontaedro rombico	icosidodecaedro	30 rombi	60	32
icositetraedro trapezoidale	rombicubottaedro	24 aquiloni	48	26
esacisottaedro	grande rombicubottaedro	48 triangoli scaleni	72	26
esacontaedro trapezoidale	rombicosidodecaedro	60 aquiloni	120	62
esacisicosaedro	grande rombicosidodecaedro	120 triangoli scaleni	180	62
icositetraedro pentagonale	cubo camuso	24 pentagoni irreg.	60	38
esacontaedro pentagonale	dodecaedro camuso	60 pentagoni irreg.	150	92

Come abbiamo visto, i solidi di Archimede (tranne i poliedri camusi) possono essere ottenuti per troncatura dai solidi platonici. In maniera “duale”, i primi undici solidi di Catalan possono essere ottenuti per *elevazione* a partire dai solidi platonici (sette poliedri) o dal cubottaedro e dall’icosidodecaedro (due poliedri), incollando opportune piramidi sulle facce, oppure dal cubo-ottaedro e dodecaedro-icosaedro poggiando dei solidi a punta tipo piramidi sulle facce: nelle figure che seguono illustreremo in dettaglio queste costruzioni.

I nomi dei poliedri tengono conto del numero di facce o del modo come essi sono ottenuti per elevazione, e hanno origini greche. Alcuni prefissi sono quelli già usati per i solidi platonici, alcuni altri sono riportati nell’elenco che segue:

- *triacis* deriva dal greco τριάκις, “tre volte”;
- *tetracis* deriva dal greco τετράκις, “quattro volte”; analogo per *pentacis* ed *esacis*;
- *triaconta* deriva dal greco τριάκ, “trenta”;
- *esaconta* deriva dal greco ἑξήκοντα, “sessanta”.

Un'ultima osservazione prima di passare alle figure che illustrano questi poliedri: tutti rivestono grande importanza in cristallografia. Per esempio il triacistetraedro e il triacisottaedro rappresentano una delle forme semplici dei cristalli del sistema monometrico, altri si riferiscono alle forme dei cristalli delle classi esacisottaedrica, esacistetraedrica, icositetraedrica-pentagonale, e così via.

9.2. Prima elevazione dei solidi platonici

A partire dai solidi platonici si può “incollare” su ciascuna delle loro facce una piramide, avente quelle facce come base e altezza tale che il poliedro ottenuto abbia angoli diedri uguali: possiamo chiamare questa elevazione “elevazione di primo livello”. Essa consente di ottenere i duali dei cinque poliedri archimedei troncati.

È interessante notare che il duale di ognuno dei cinque poliedri troncati si ottiene per elevazione del solido platonico duale. Anche da qui derivano i nomi di questi primi cinque solidi di Catalan.

1. *Triacistetraedro*, duale del tetraedro troncato: solido a 12 facce (tre volte quattro) ottenuto incollando piramidi a base triangolare su ciascuna faccia di un tetraedro, che è autoduale).
2. *Triacisottaedro*, duale del cubo troncato: solido a 24 facce (tre volte otto) ottenuto incollando piramidi a base triangolare su ciascuna delle facce di un ottaedro, che è il duale del cubo.
3. *Tetracisesaedro*, duale dell'ottaedro troncato: solido a 24 facce (quattro volte sei) ottenuto incollando piramidi a base quadrata su ciascuna delle facce di un cubo, che è il duale dell'ottaedro.
4. *Triacisicosaedro*, duale del dodecaedro troncato: solido a 60 facce (tre volte venti) ottenuto incollando piramidi a base triangolare su ciascuna delle facce di un icosaedro, che è il duale del dodecaedro.
5. *Pentacisdodecaedro*, duale dell'icosaedro troncato: solido a 60 facce (cinque volte dodici) ottenuto incollando piramidi a base pentagonale su ciascuna delle facce di un dodecaedro, che è il duale dell'icosaedro.

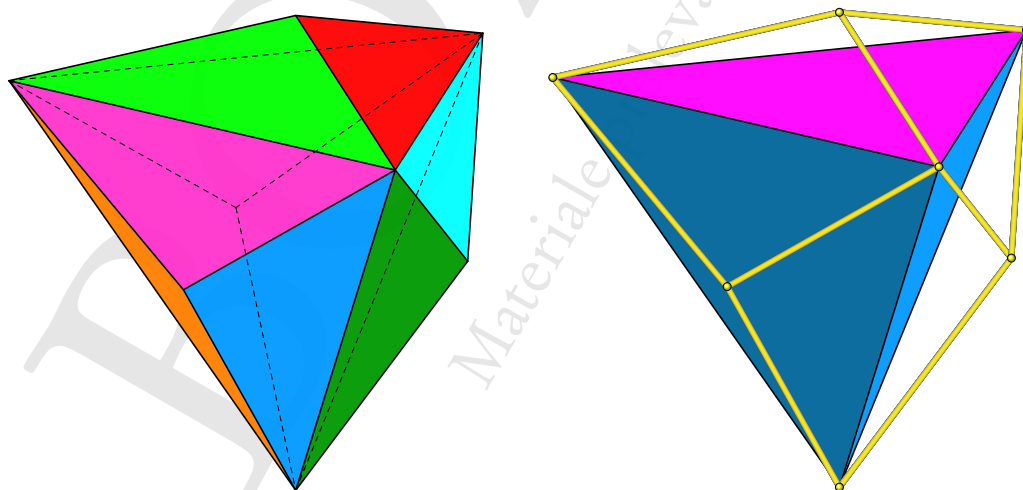


Figura 9.2.: *Il triacistetraedro, duale del tetraedro troncato, e il tetraedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base triangolare*

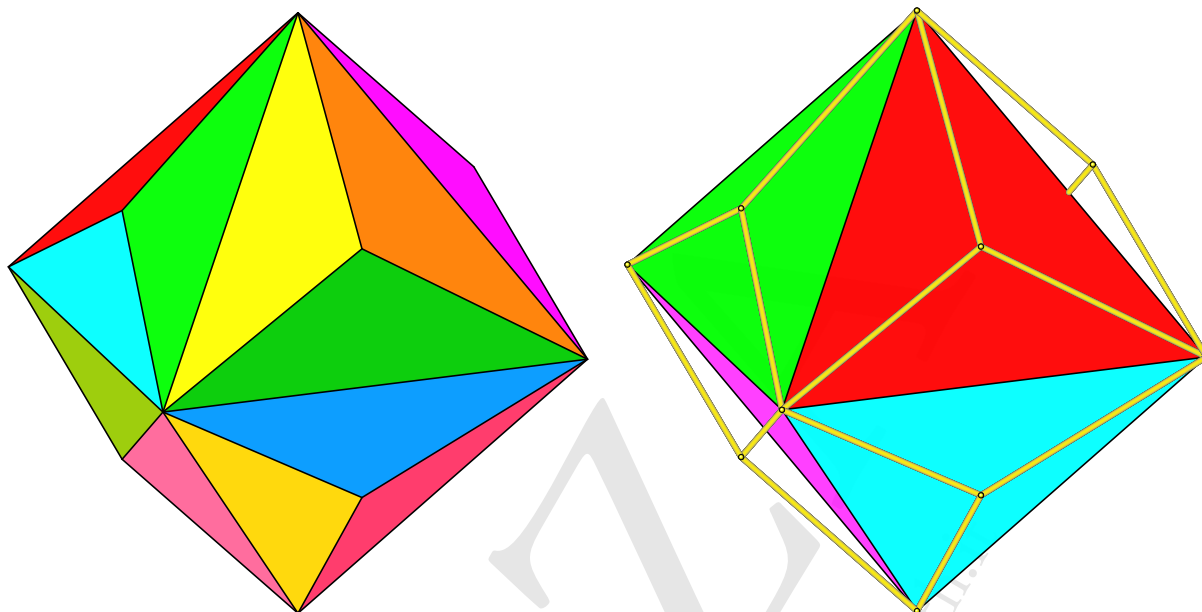


Figura 9.3.: *Il triacisottaedro, duale del cubo troncato, e l'ottaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante l'aggiunta di piramidi a base triangolare*

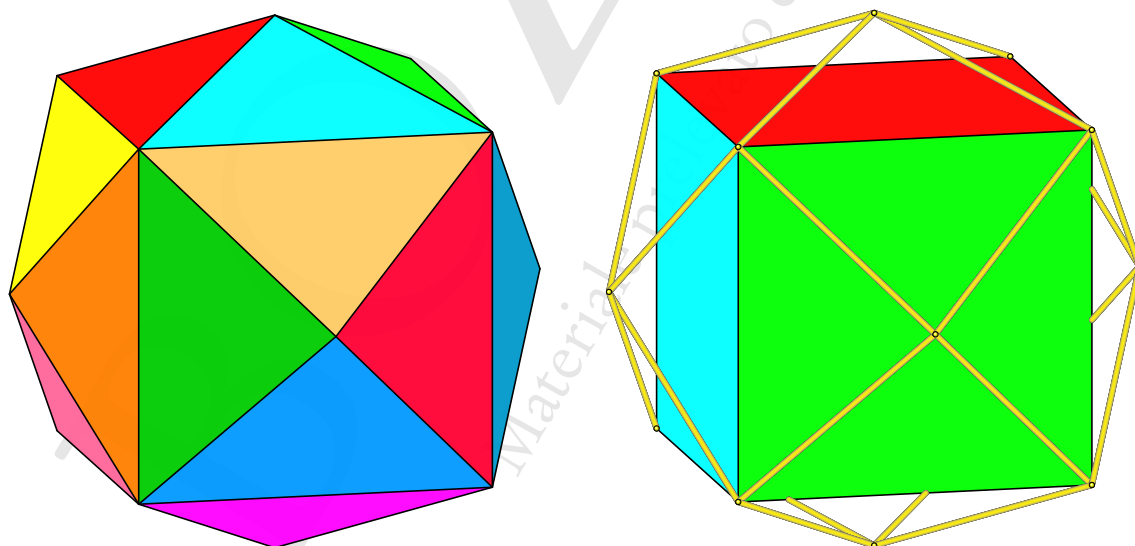


Figura 9.4.: *Il tetracisesaedro, duale dell'ottaedro troncato, e il cubo (esaedro) da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base quadrata*

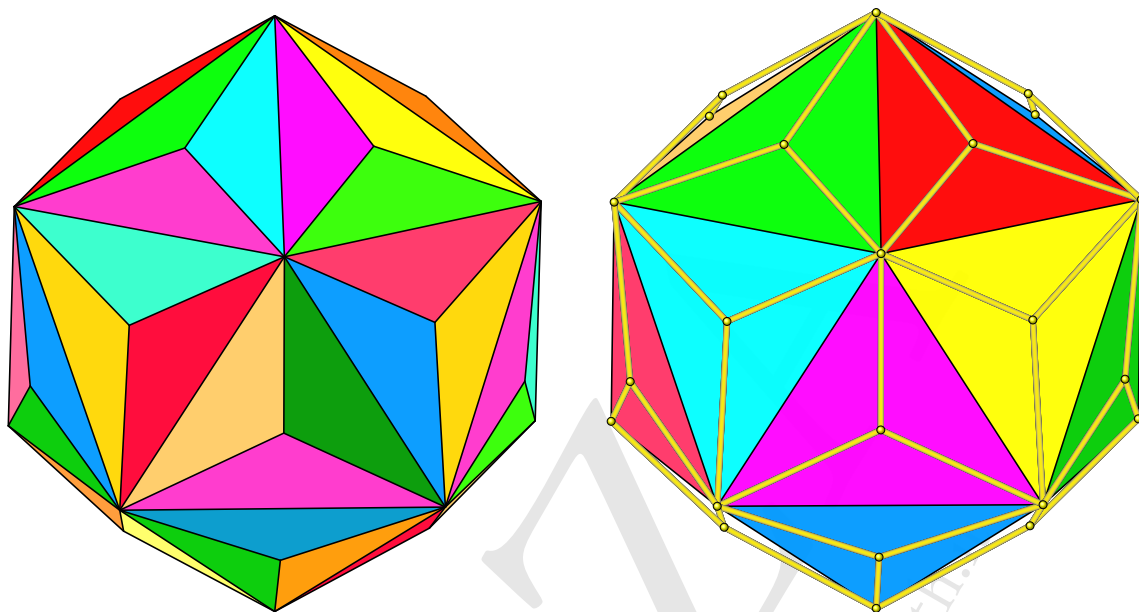


Figura 9.5.: *Il triacisicosaedro, duale del dodecaedro troncato, e l'icosaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base triangolare*

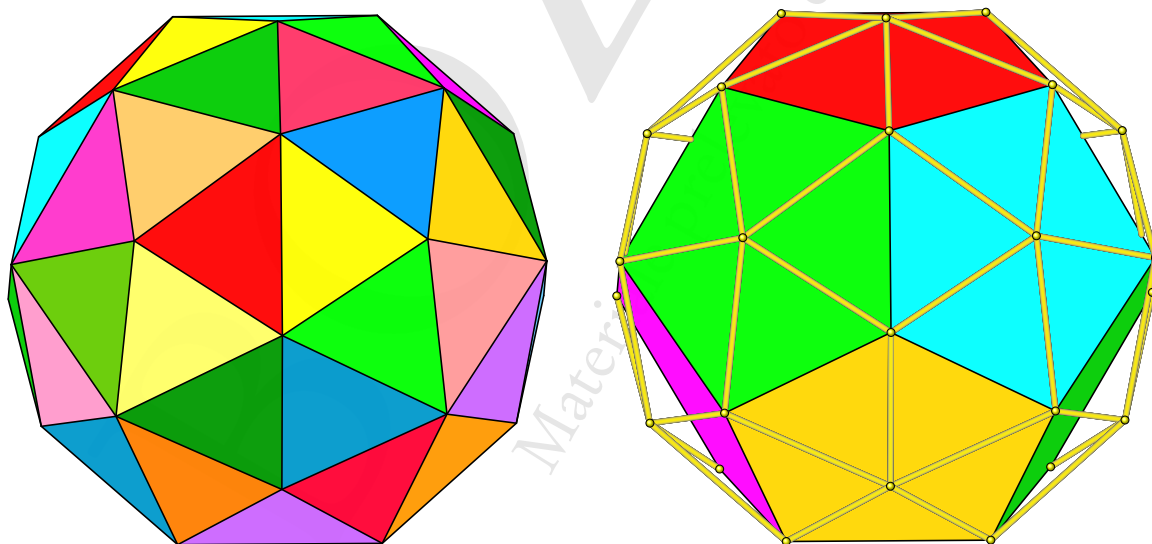


Figura 9.6.: *Il pentacisdodecaedro, duale dell'icosaedro troncato, e il dodecaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base pentagonale*

9.3. Seconda elevazione dei solidi platonici

Il secondo livello di elevazione dei solidi platonici si ottiene aumentando ulteriormente l'altezza delle piramidi da incollare sulle facce in modo che riunendo due facce contigue delle piramidi di elevazione si ottenga un rombo ogni due facce: nel caso dei due tetraedri tra di loro duali si passa da 12 a 6 facce, addirittura quadrate, e si ottiene il cubo; nel caso del cubo o ottaedro si passa da 24 facce a 12 e si ottiene il dodecaedro rombico; nel caso del dodecaedro o icosaedro si passa da 60 a 30 facce e si ottiene il triacontaedro rombico. Questo processo è il duale della troncatura ai lati, trattata nel paragrafo 5.3 del capitolo 5.

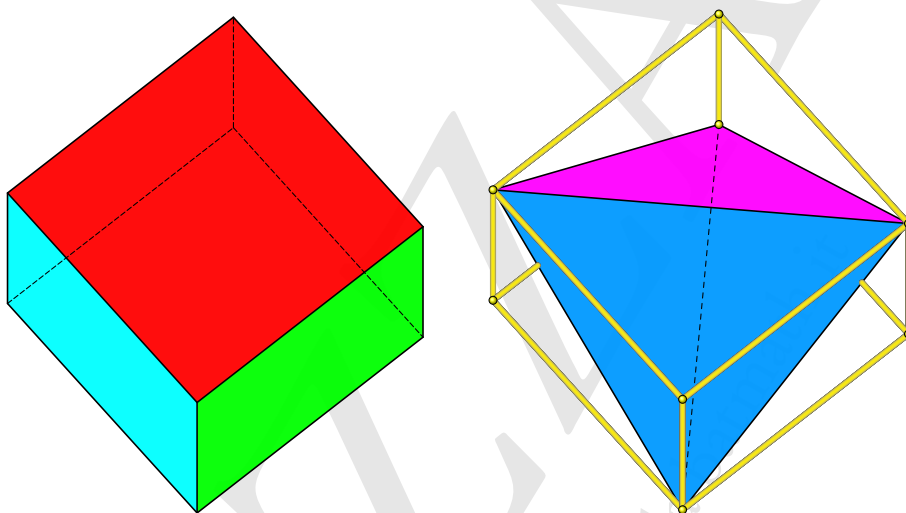


Figura 9.7.: *Il cubo, qui visto come esaedro rombico, e uno dei due tetraedri duali da cui esso è ottenuto come seconda elevazione*

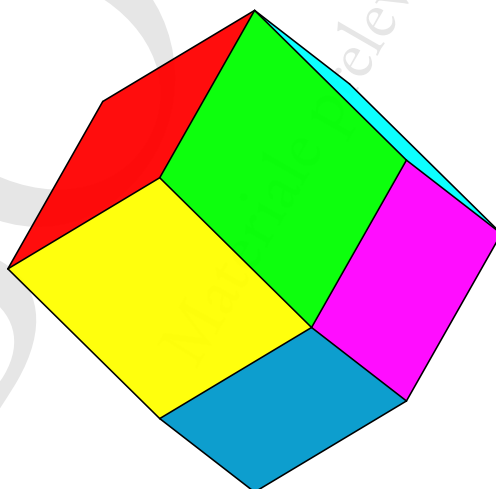


Figura 9.8.: *Il dodecaedro rombico, duale del cubottaedro*

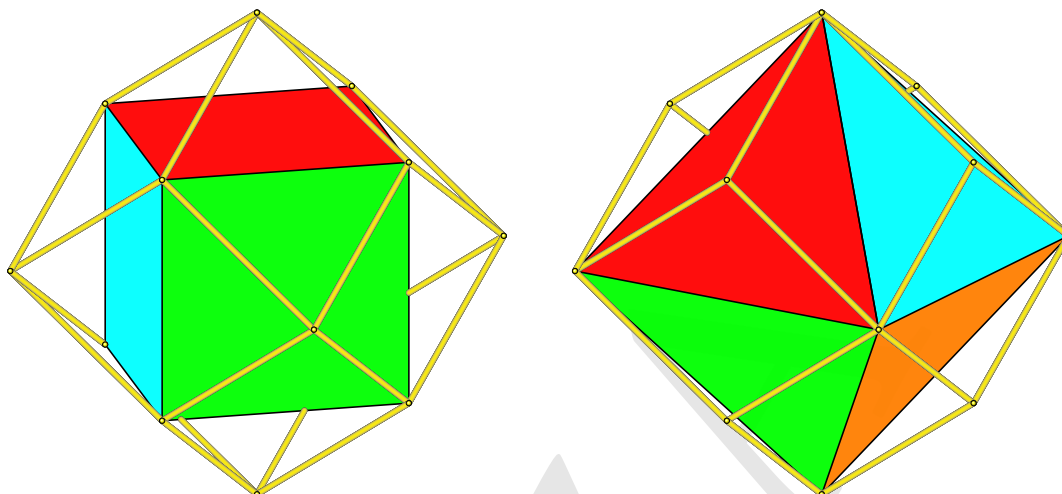


Figura 9.9.: Seconda elevazione del cubo e dell'ottaedro per ottenere il dodecaedro rombico

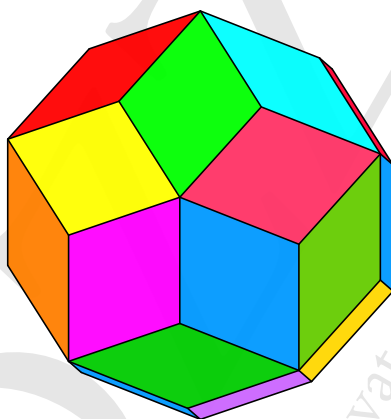


Figura 9.10.: Il triacontaedro rombico, duale dell'icosidodecaedro

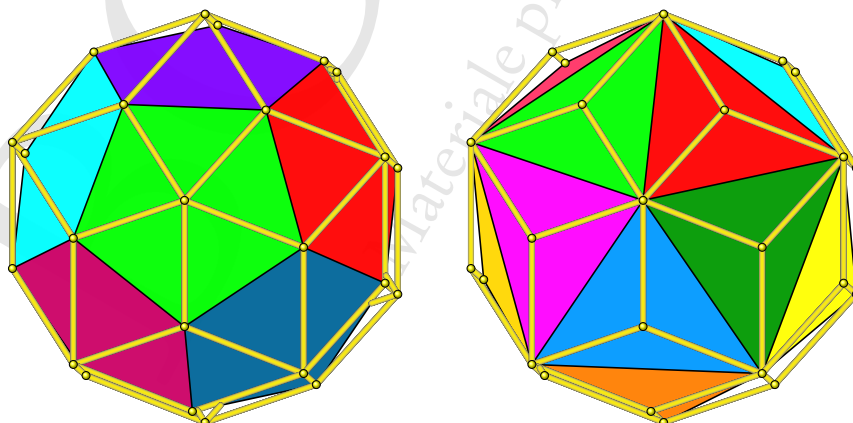


Figura 9.11.: Seconda elevazione del dodecaedro e dell'icosaedro per ottenere il triacontaedro rombico

9.4. Elevazione del cubottaedro e dell'icosidodecaedro

Il modo più semplice per ottenere i due solidi di Catalan a facce trapezoidali o, meglio, a deltoide, è quello di partire dal cubottaedro e, rispettivamente, dall'icosidodecaedro, elevando le facce con piramidi a base diversa a seconda del tipo di facce su cui poggiano (quadrato o triangolari per il cubottaedro, triangolari e pentagonali per l'icosidodecaedro), con altezza tale che due facce contigue delle piramidi siano complanari e formino una faccia deltoideale dei due solidi di Catalan.

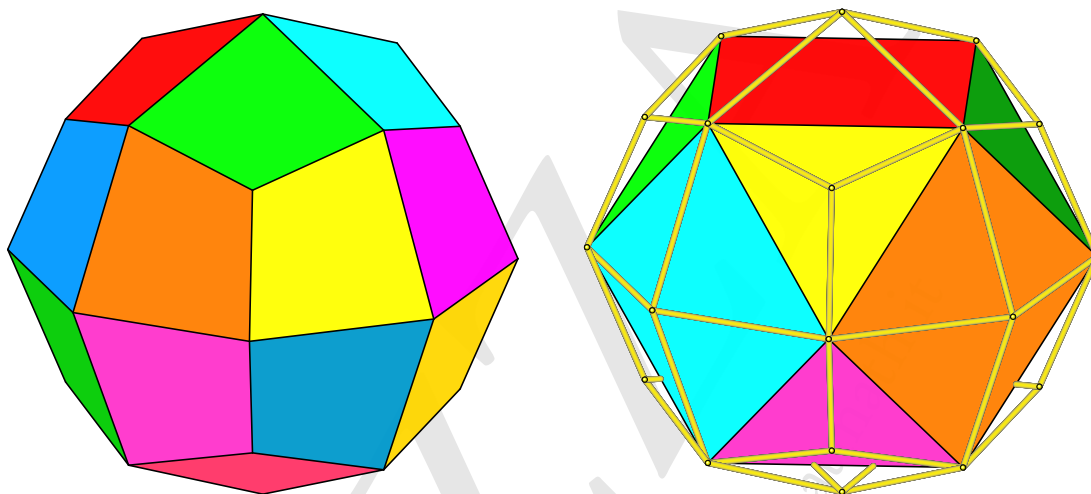


Figura 9.12.: *L'icositetraedro trapezoidale, duale del rombicubottaedro, e il cubottaedro da cui esso è ottenuto per elevazione mediante aggiunta di piramidi a base triangolare e quadrata*

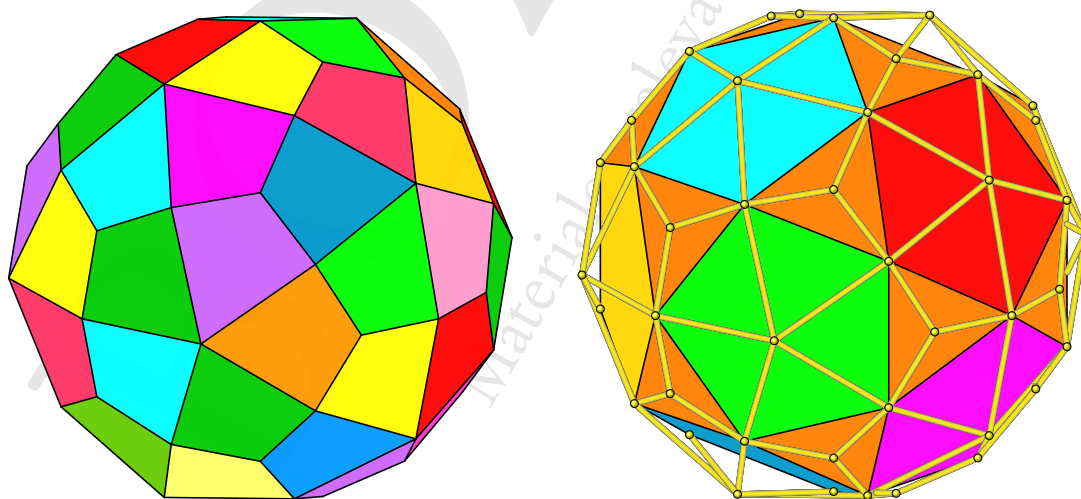


Figura 9.13.: *L'esacontaedro trapezoidale, duale del rombicoidodecaedro, e l'icosidodecaedro da cui esso è ottenuto per elevazione con aggiunta di piramidi a base triangolare e pentagonale*

9.5. L'esacisottaedro e l'esacisicosaedro

Particolarmente interessanti le tecniche per costruire i duali del grande rombicubottaedro e del grande rombicosidodecaedro. Essi possono essere costruiti a partire dalle coppie cubo-ottaedro o dodecaedro-icosaedro con una tecnica di “elevazione” un po’ particolare. Si tratta di “poggiare” sulle facce dei solidi platonici dei solidi a forma di “piramide a punte”, che dunque non poggiano sull’intera faccia del solido platonico, ma solo sui vertici. Nella figura 9.14 è mostrato uno di questi solidi, adatto ad essere poggiato sulle sei facce del cubo. Questi solidi hanno “facce laterali” triangolari (che saranno le facce del solido di Catalan) e, rispettivamente avranno sei facce se poggiano su un triangolo (nel caso di ottaedro e icosaedro), otto facce se poggiano su un quadrato (nel caso del cubo), dieci facce se poggiano su un pentagono (nel caso del dodecaedro).

Per questo motivo questi solidi di Catalan, pur se universalmente noti con il nome di *esacisottaedro* (otto piramidi a punte a sei facce poggiate sulle facce di un ottaedro) e *esacisicosaedro* (venti piramidi a punte a sei facce poggiate sulle facce di un icosaedro), potrebbero anche essere chiamati, rispettivamente, *octacisesaedro* (sei piramidi a punte a otto facce poggiate sulle facce di un cubo) o *decacisdodecaedro* (dodici piramidi a punte a dieci facce poggiate sulle facce di un dodecaedro). Questi nomi, pur se saltuariamente, sono comunque utilizzati.

In tutti i casi i nomi tengono anche conto del numero di facce: 48, ovvero 6 volte 8 o 8 volte 6 per l'esacisottaedro, e 120 ovvero 6 volte 20 o 10 volte 12 per l'esacisicosaedro.

Questi solidi inoltre possono anche essere ottenuti per “normale” elevazione del dodecaedro rombico e del triacontaedro rombico mediante piramidi di opportuna altezza incollate sulle facce del dodecaedro o triacontaedro. Nei nomi italiani non si trova traccia di questa costruzione, mentre i nomi inglesi si riferiscono esattamente a questa tecnica costruttiva: *disdyakis dodecabedron* e *disdyakis triacontahedron*.

Tutte queste tecniche costruttive sono illustrate nelle figure che seguono.

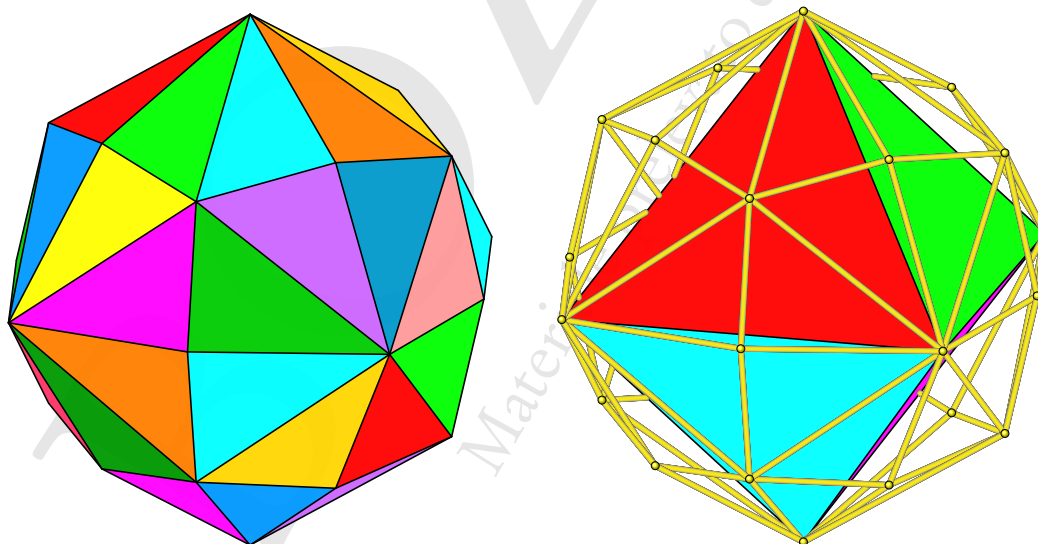


Figura 9.14.: L'esacisottaedro, duale del grande rombicubottaedro, e l'ottaedro da cui esso è ottenuto poggiando sui vertici delle facce otto solidi a forma di piramide a punte con sei facce laterali

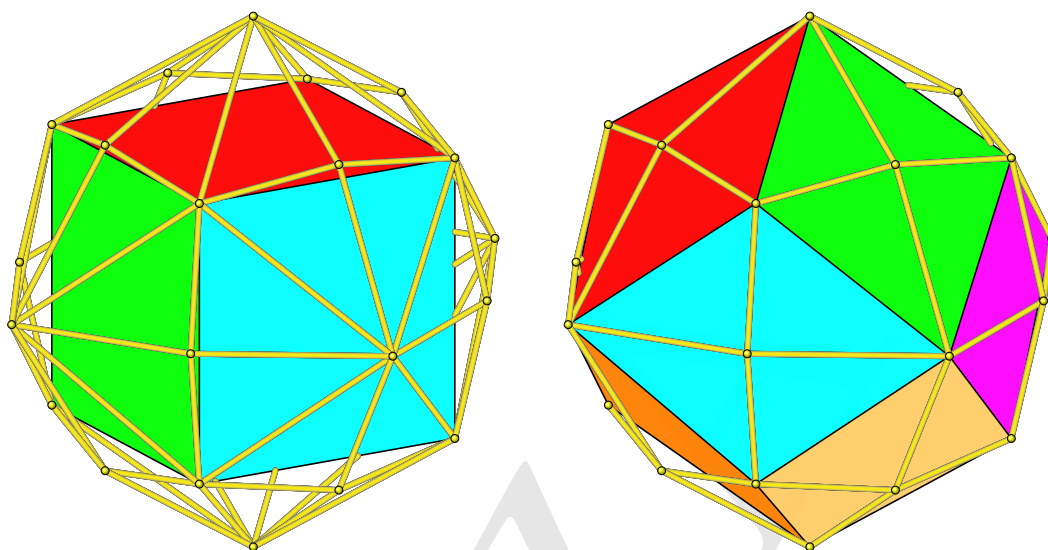


Figura 9.15.: *Costruzione dell'esacisottaedro ottenuto poggiando sui vertici della facce di un cubo sei solidi a forma di piramide a punte con otto facce, oppure elevando le dodici facce di un dodecaedro rombico con piramidi a base rombica*

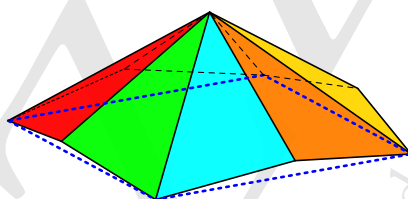


Figura 9.16.: *Uno dei solidi a forma di piramide a punte poggiato sui vertici di una faccia di un cubo per ottenere l'esacisottaedro*

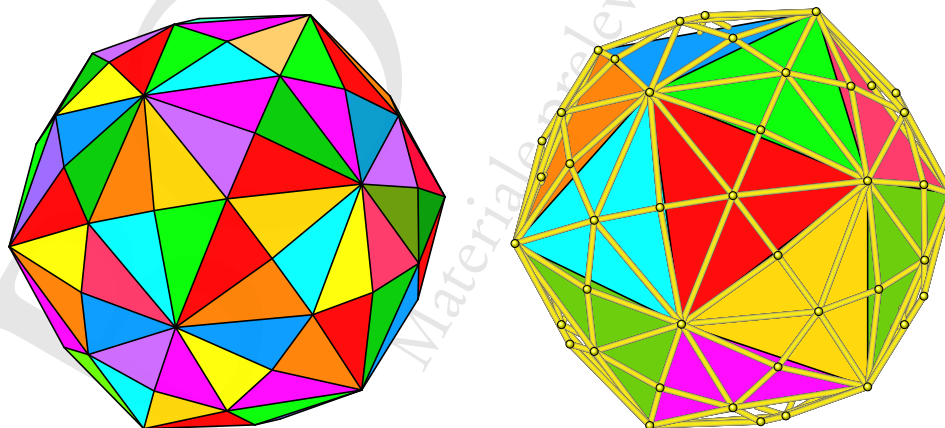


Figura 9.17.: *L'esacisosaedro, duale del grande rombicoidodecaedro, e l'icosaedro da cui esso è ottenuto poggiando sui vertici delle facce venti solidi a forma di piramide a punte con sei facce laterali*

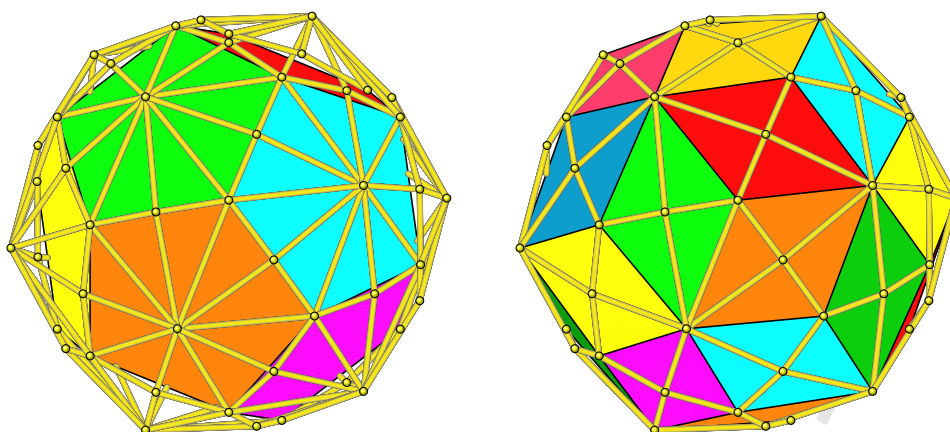


Figura 9.18.: *Costruzione dell'esakisicosaedro ottenuto poggiando sui vertici della facce di un dodecaedro dodici solidi a forma di piramide a punte con dieci facce, oppure elevando le trenta facce di un triacontacaedro rombico con piramidi a base rombica*

9.6. L'icositetraedro e l'esacontaedro pentagonali

Concludiamo l'illustrazione dei solidi di Catalan con i duali dei due solidi camusi di Archimede. Essi hanno facce pentagonali non regolari, ma naturalmente tra di loro congruenti, come per tutti gli altri.

Mentre i primi undici solidi possono essere costruiti, oltreché per dualità come è nella loro definizione, anche mediante le tecniche di elevazione che abbiamo illustrato, questi ultimi due si costruiscono naturalmente solo per dualità, per esempio rispetto all'intersfera con il metodo di Dorman-Luke.

Come già i corrispondenti solidi di Archimede, anche questi ultimi due solidi di Catalan non hanno simmetrie di riflessione: i due solidi levogiro e destrogiro non sono sovrapponibili, come illustrato nelle figure 9.19 e 9.20.

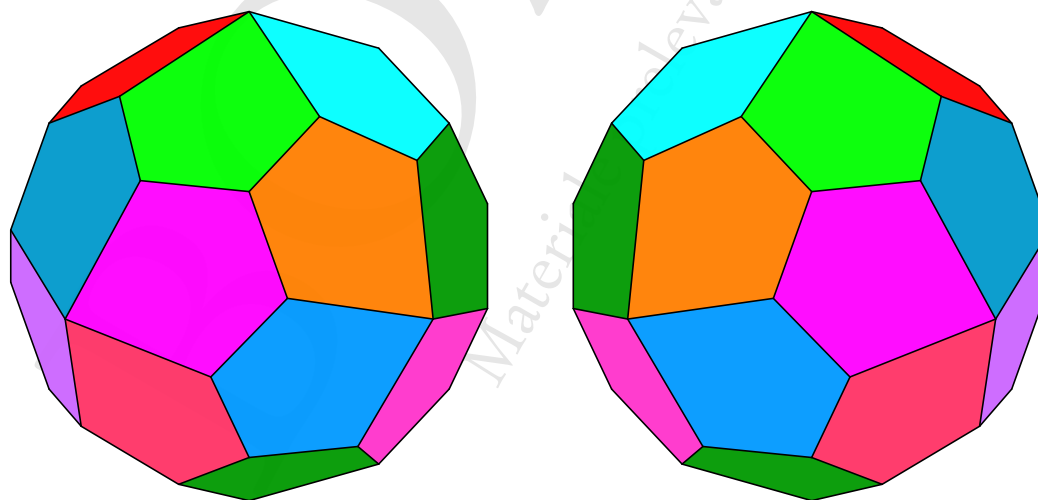


Figura 9.19.: *L'icositetraedro pentagonale, duale del cubo camuso, nelle due versioni chiral non sovrapponibili*

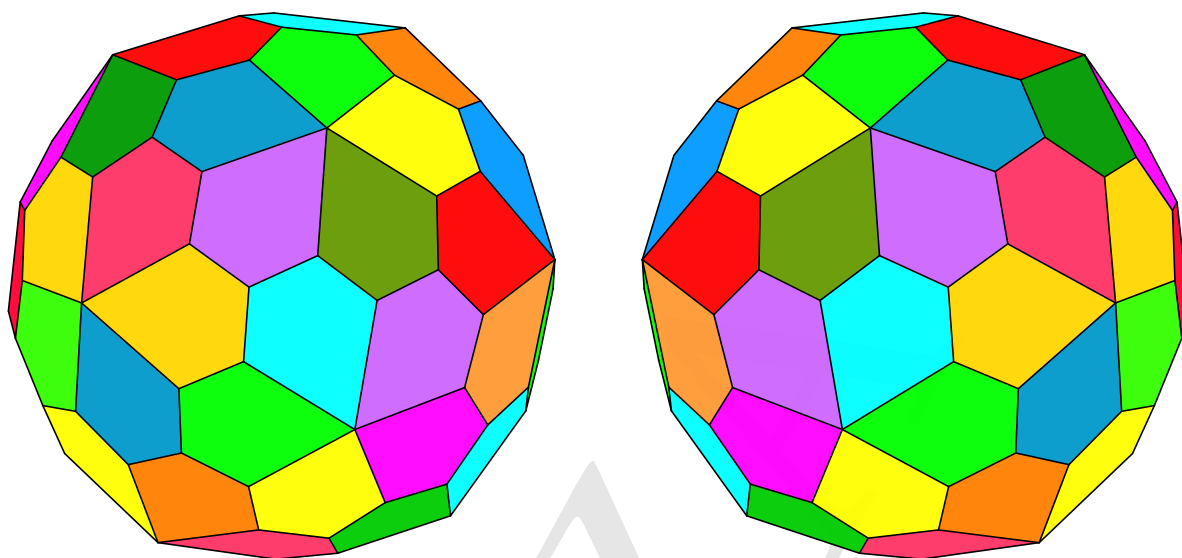


Figura 9.20.: *L'esacontaedro pentagonale, duale del dodecaedro camuso, nelle due versioni chirali non sovrapponibili*

9.7. Conclusioni

I poliedri di Catalan non godono di una particolare “fama” in quanto sono spesso ritenuti poco interessanti e attraenti. In effetti la prima cosa che si nota è la mancanza di regolarità nelle facce: triangoli isosceli, rombi, deltoidi, triangoli scaleni o pentagoni non regolari. I vertici inoltre sono di diversa valenza, come conseguenza del fatto che nei poliedri di Archimede le facce sono poligoni regolari, ma di diverso tipo. Inoltre, come i solidi di Archimede non hanno sfera inscritta, quelli di Catalan non hanno sfera circoscritta: dunque i vertici sono a distanze diverse dal centro di simmetria dei poliedri.

Tuttavia essi mantengono le stesse simmetrie dei poliedri di Archimede e il fatto che siano uniformi sulle facce costituisce comunque motivo di interesse. Si aggiunge a ciò la loro importanza, già citata, in cristallografia. Come curiosità segnaliamo anche il fatto che, oltre al triacontaedro che abbiamo già citato, anche l'esacontaedro pentagonale è usato come dado da gioco.

10. Tassellazioni semiregolari della sfera e dello spazio

10.1. Tassellazioni archimedee

I poliedri di Archimede hanno tutti una sfera circoscritta, quindi è possibile proiettare su di essa tutte le loro facce, ottenendo una tassellazione semiregolare della sfera, in cui i lati diventano archi di cerchio massimo.

Nelle figure che seguono proponiamo, per ciascuno dei tredici poliedri archimedeei, un'immagine del poliedro stesso, seguito dalla sua proiezione sulla sfera circoscritta.

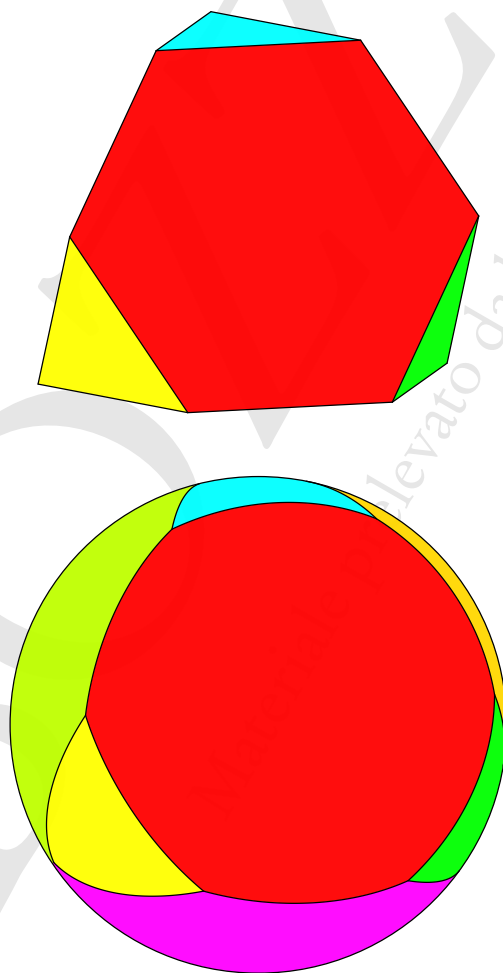


Figura 10.1.: *Il tetraedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

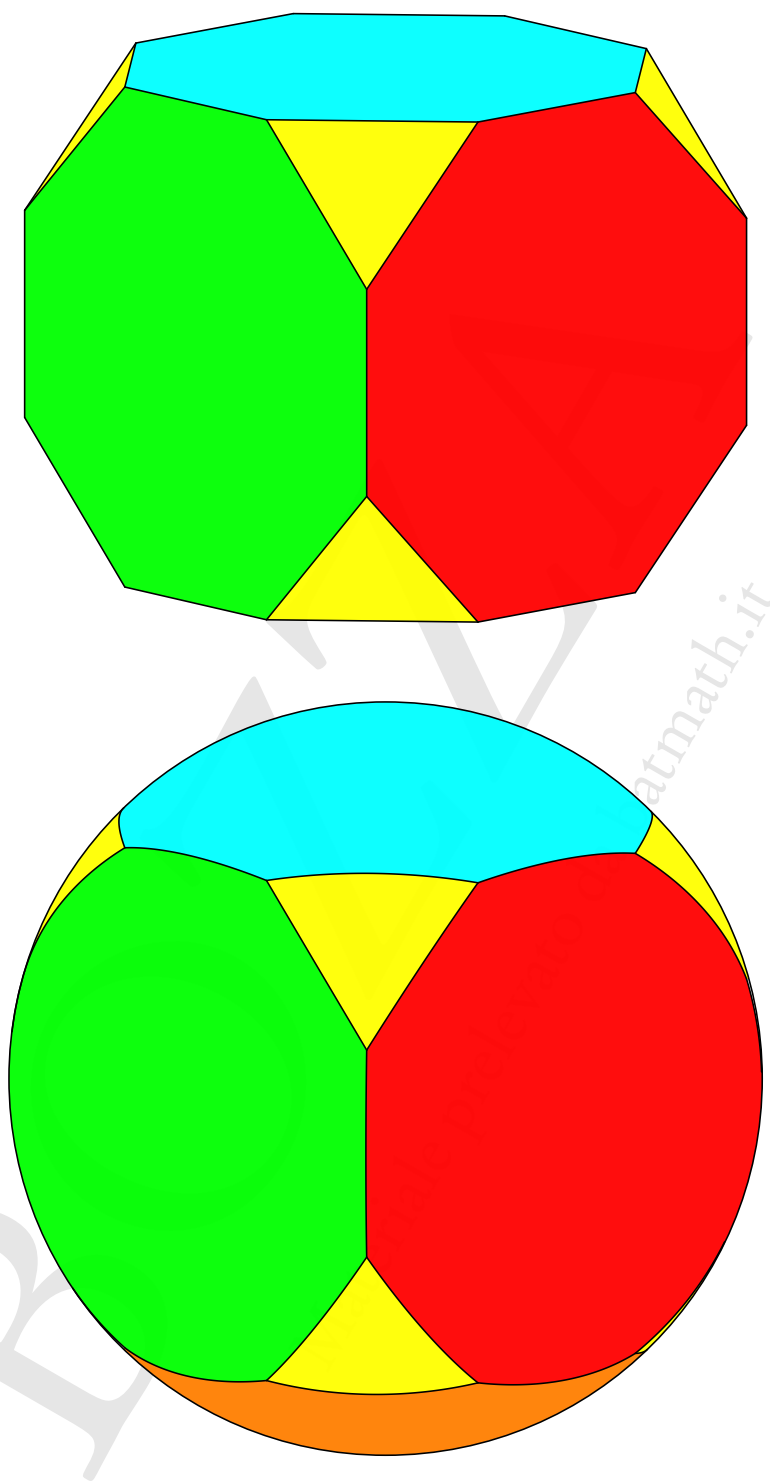


Figura 10.2.: *Il cubo troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

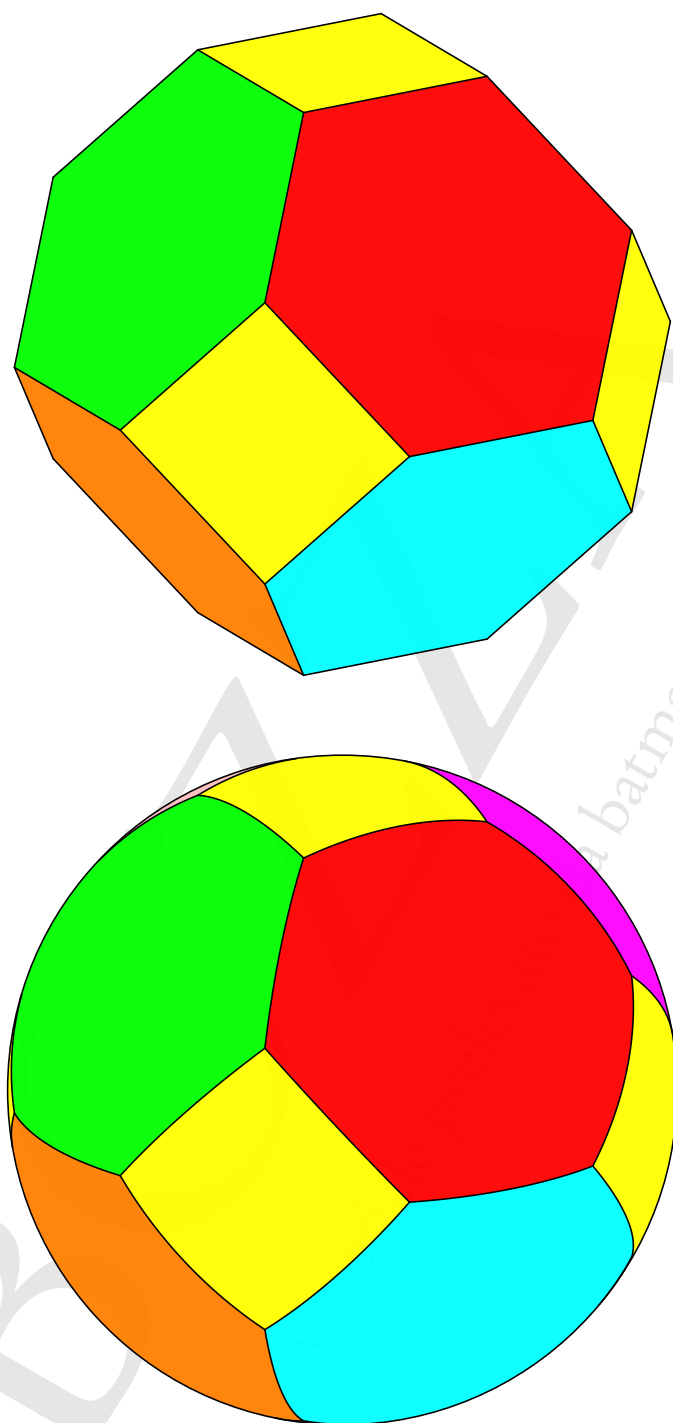


Figura 10.3.: *L'ottaedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

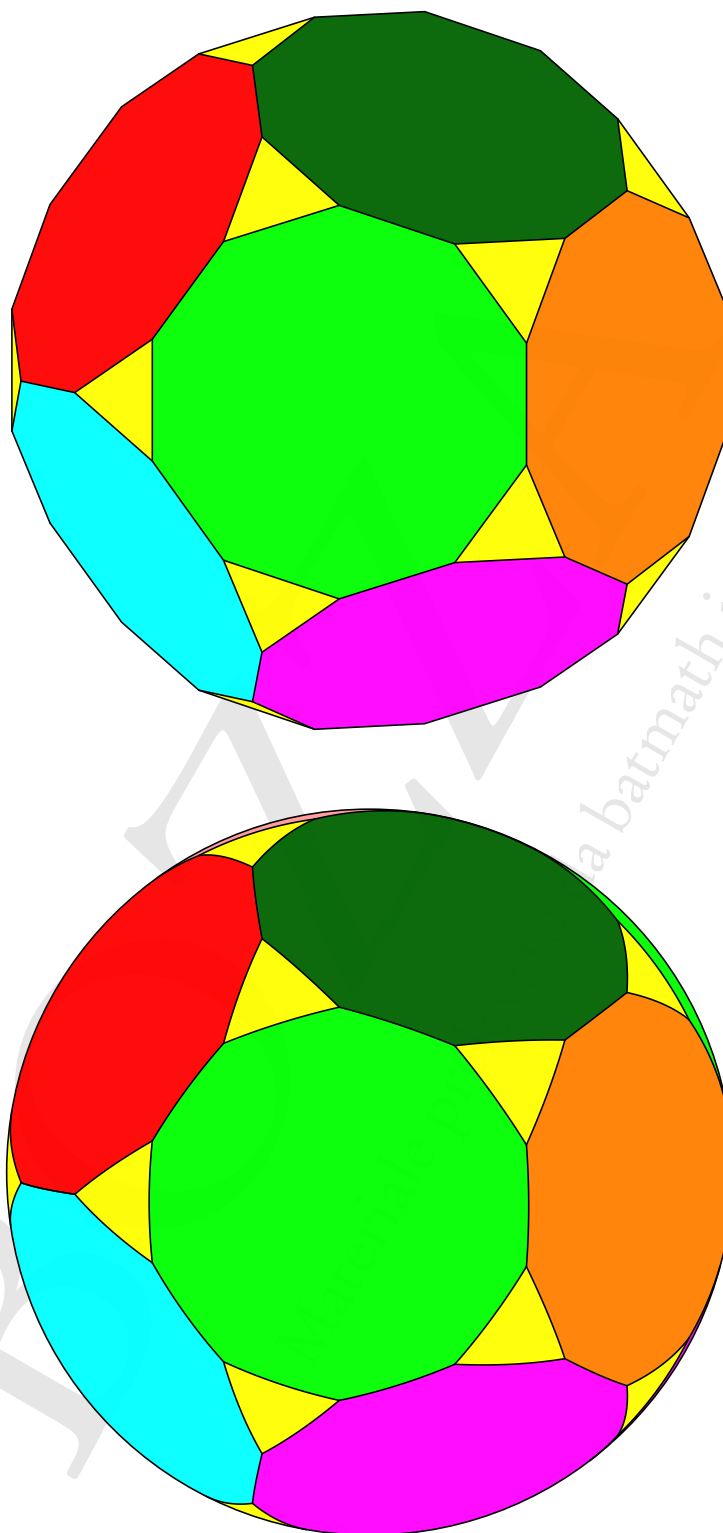


Figura 10.4.: *Il dodecaedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

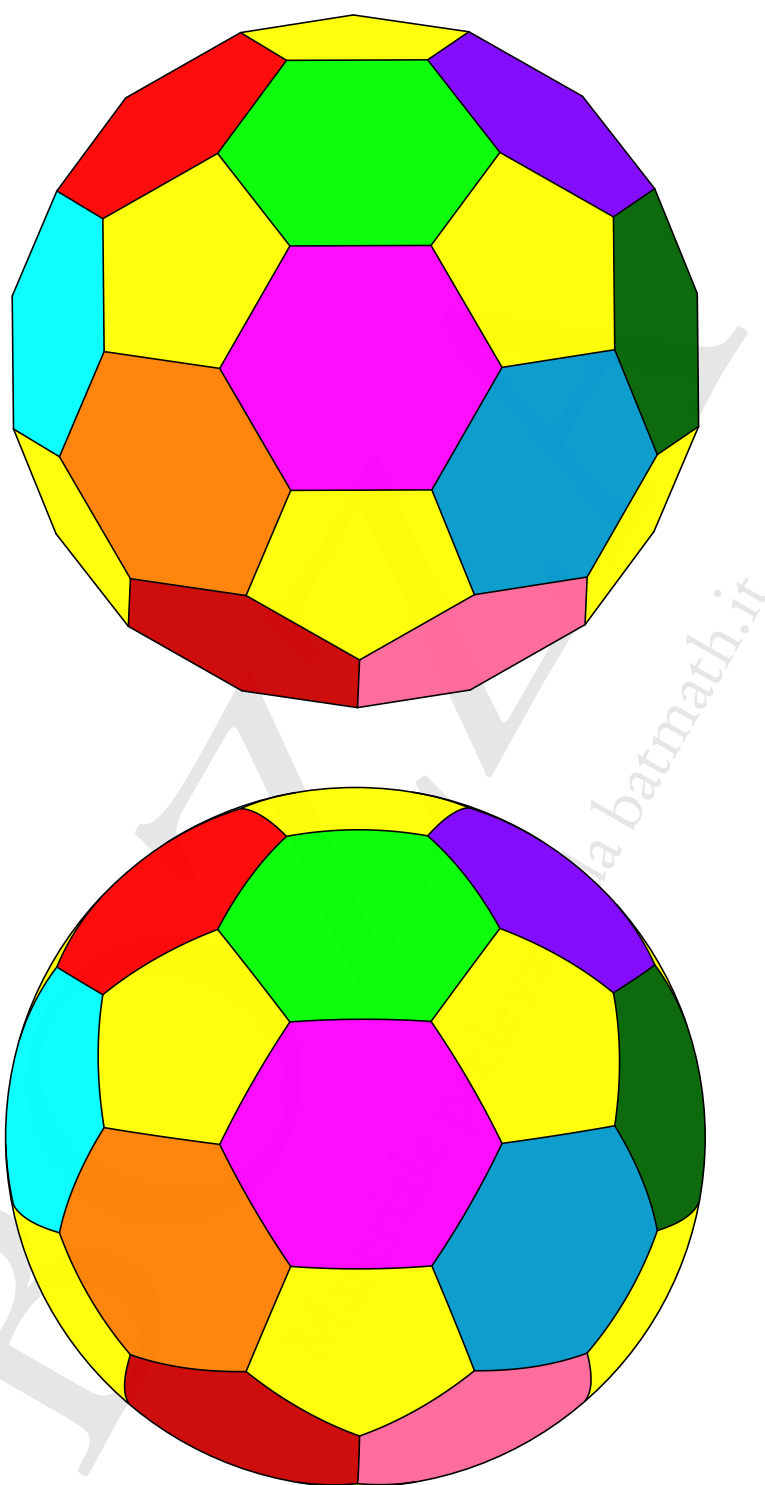


Figura 10.5.: *L'icosaedro troncato e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta, ovvero il pallone da calcio*

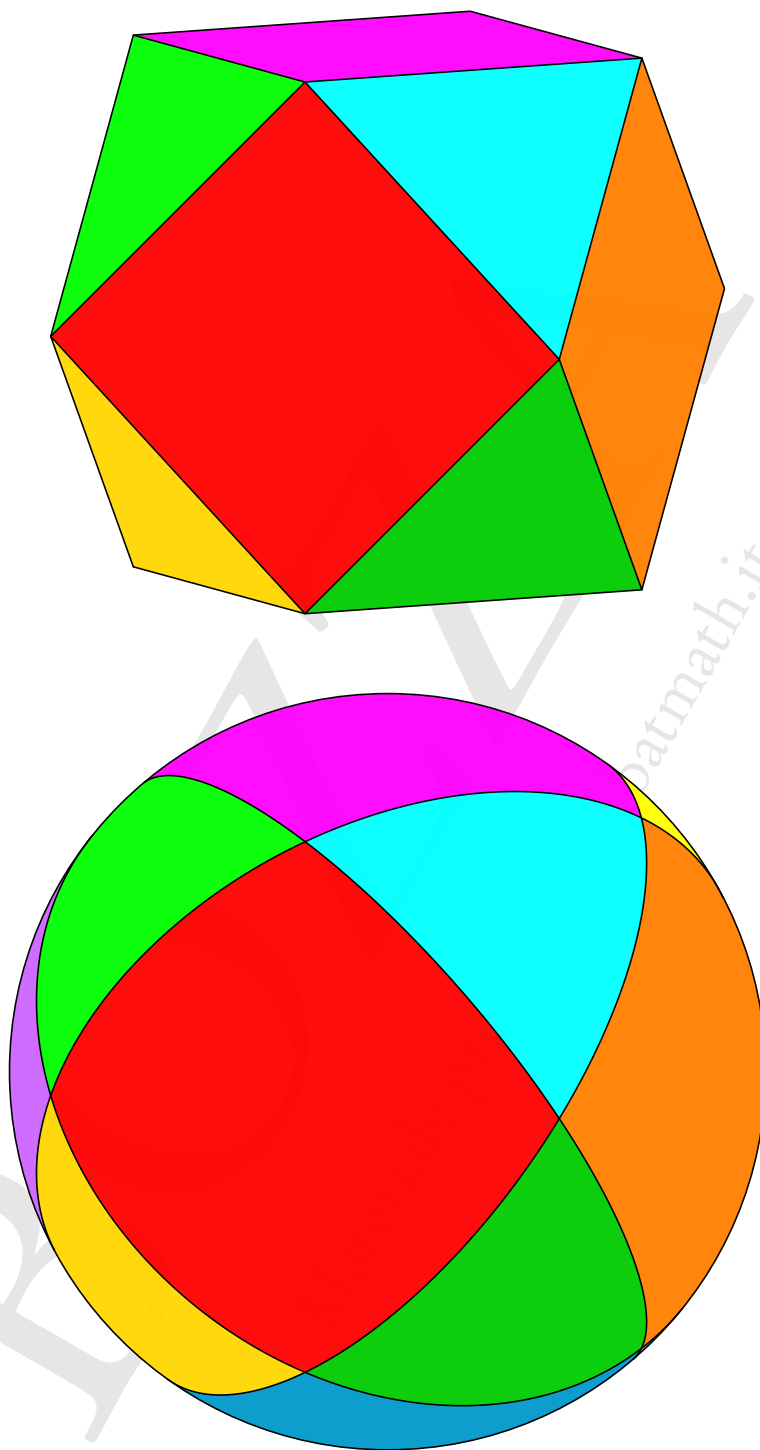


Figura 10.6.: *Il cubottaedro e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

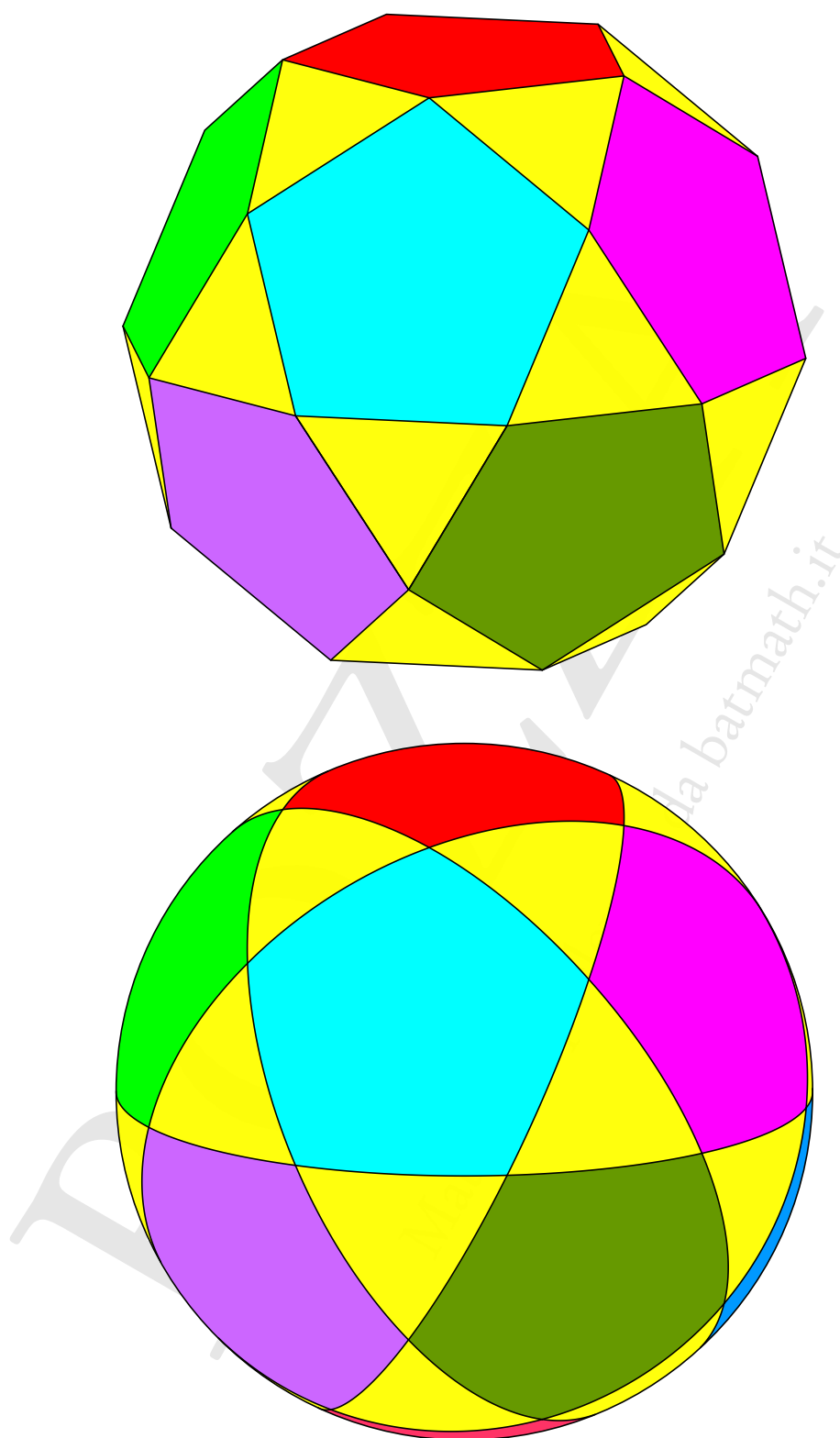


Figura 10.7.: *Licosidodecaedro e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

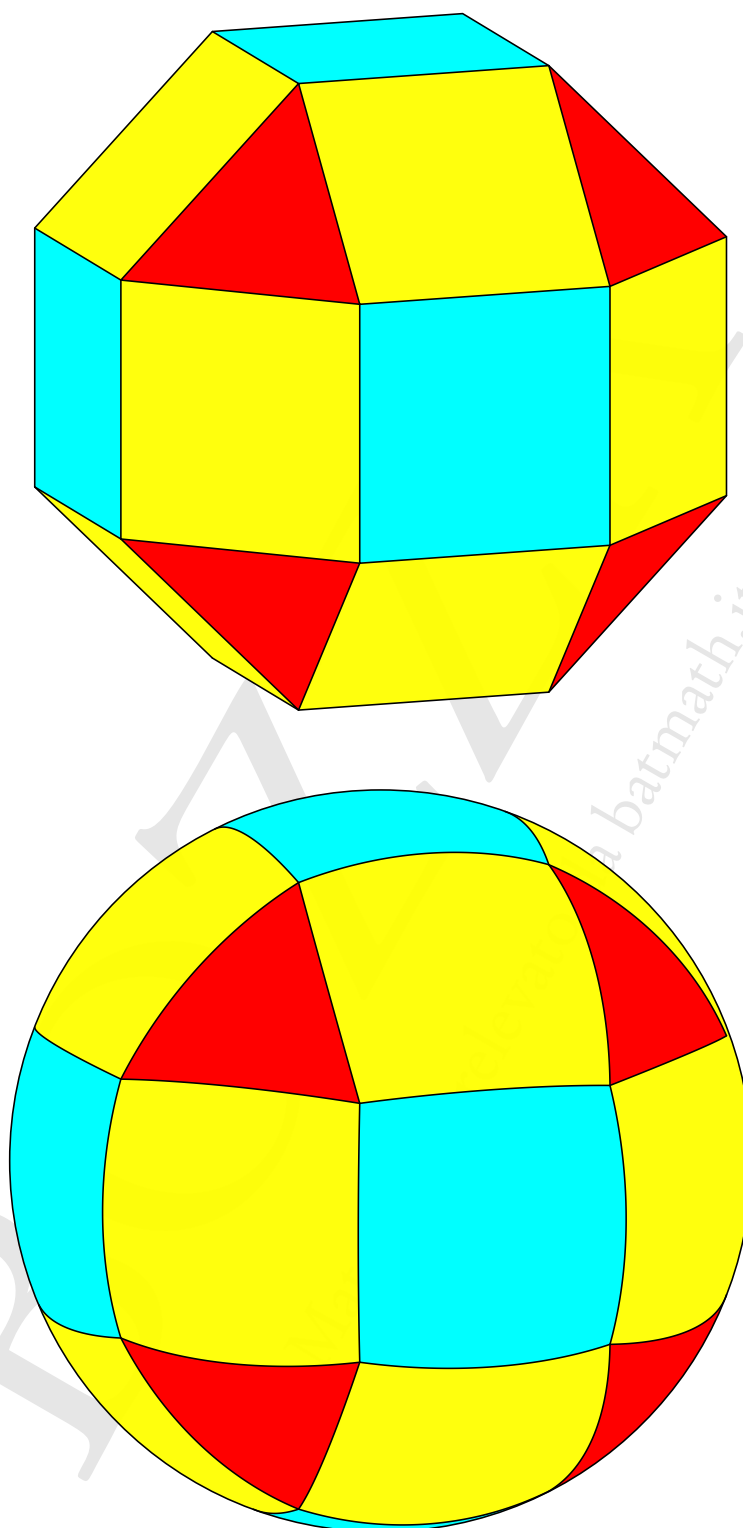


Figura 10.8.: *Il rombicubottaedro e la tassellazione semiregolare ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

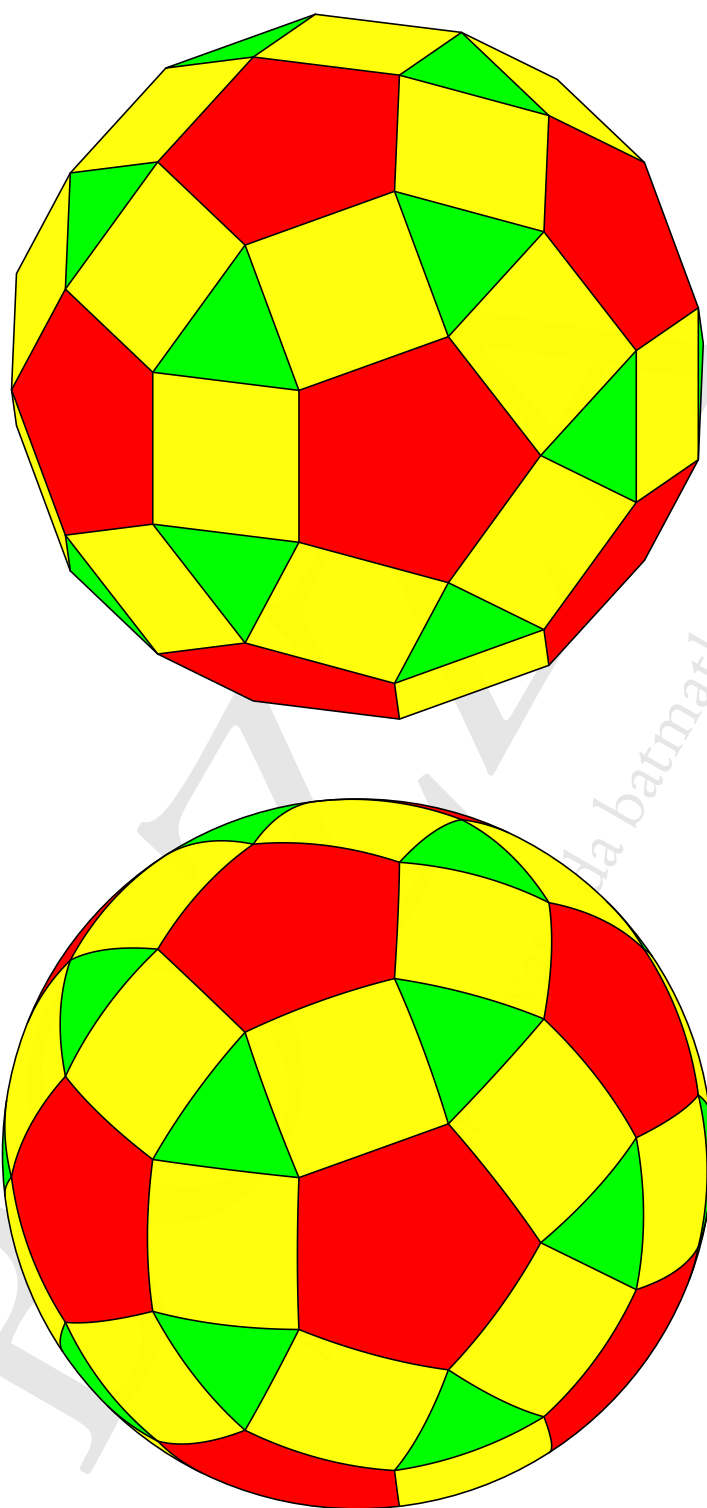


Figura 10.9.: *Il rombicosidodecaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

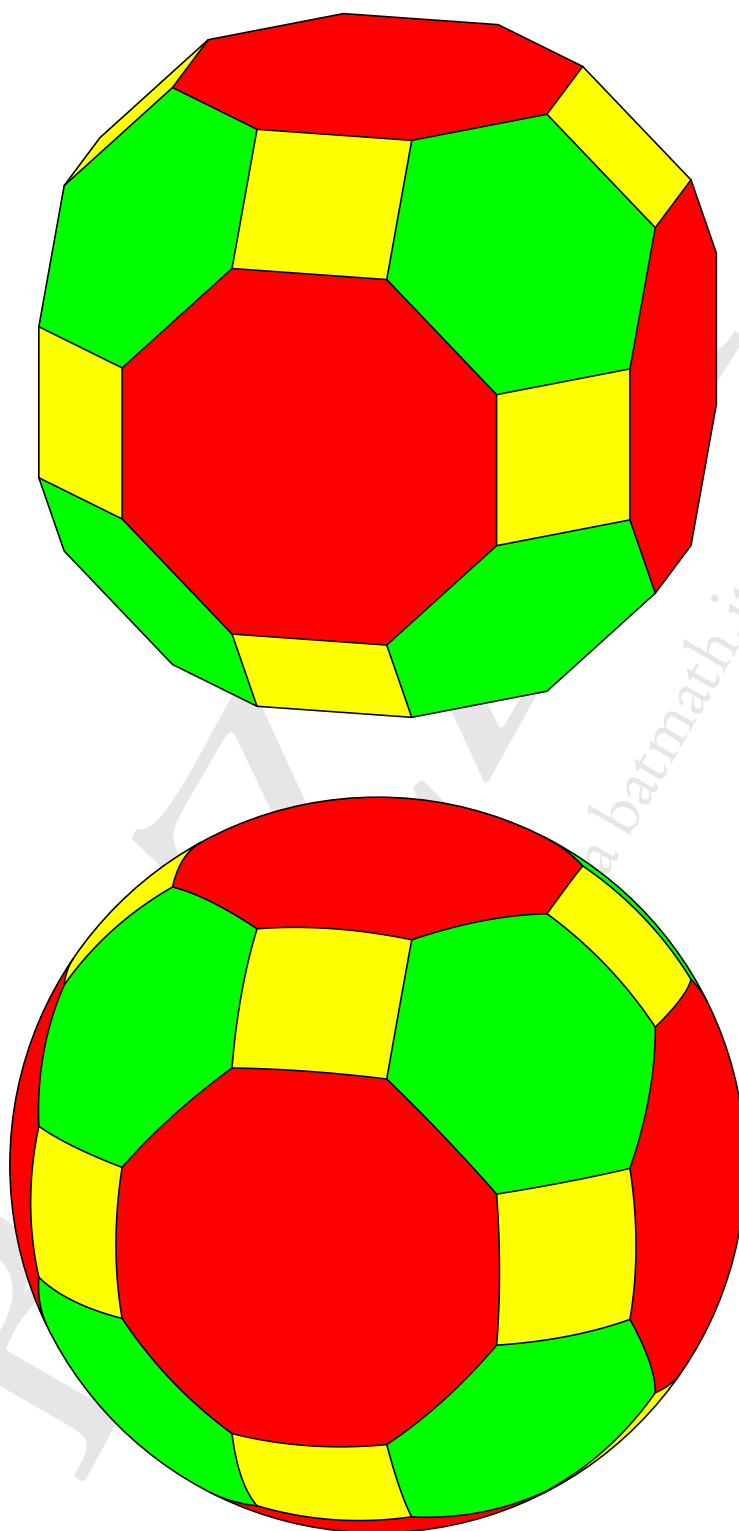


Figura 10.10.: *Il grande rombicubottaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

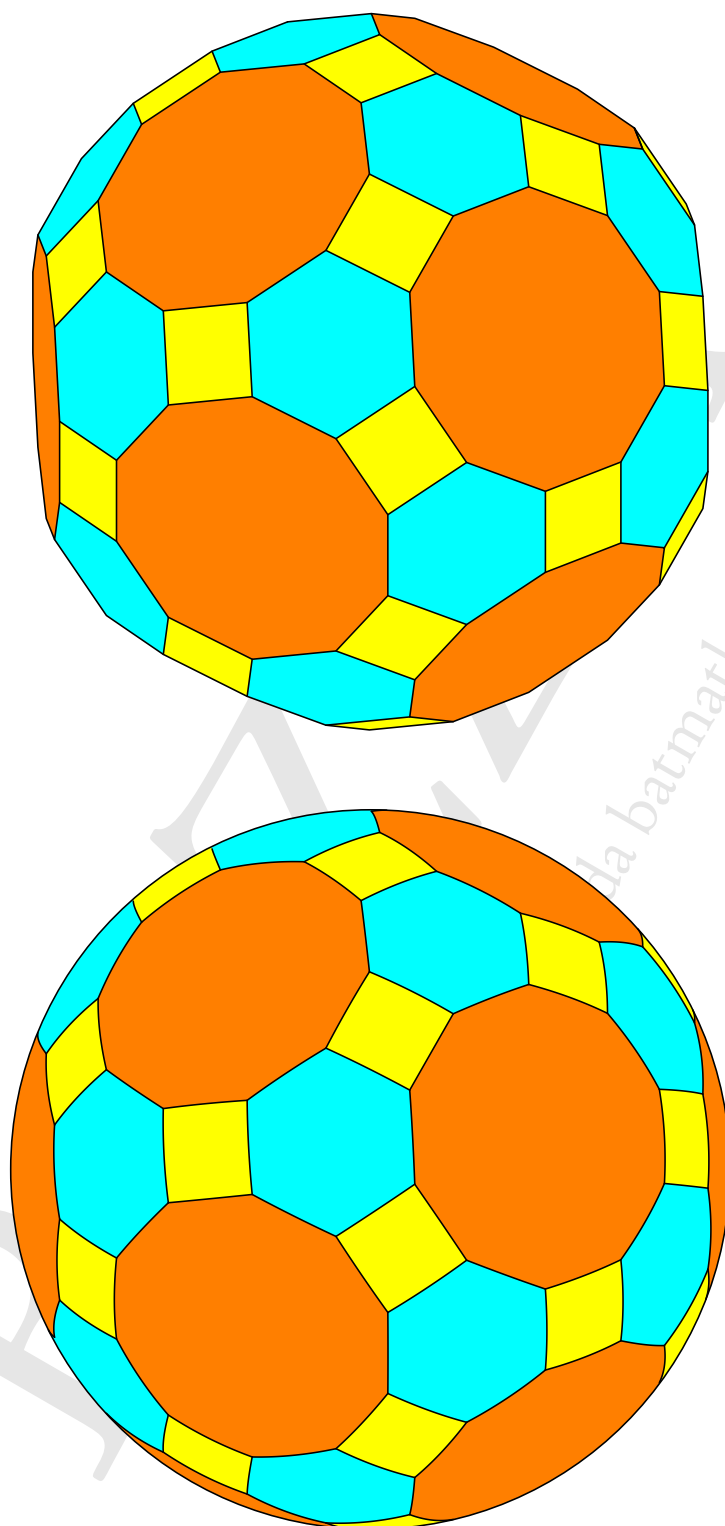


Figura 10.11.: *Il grande rombicosidodecaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

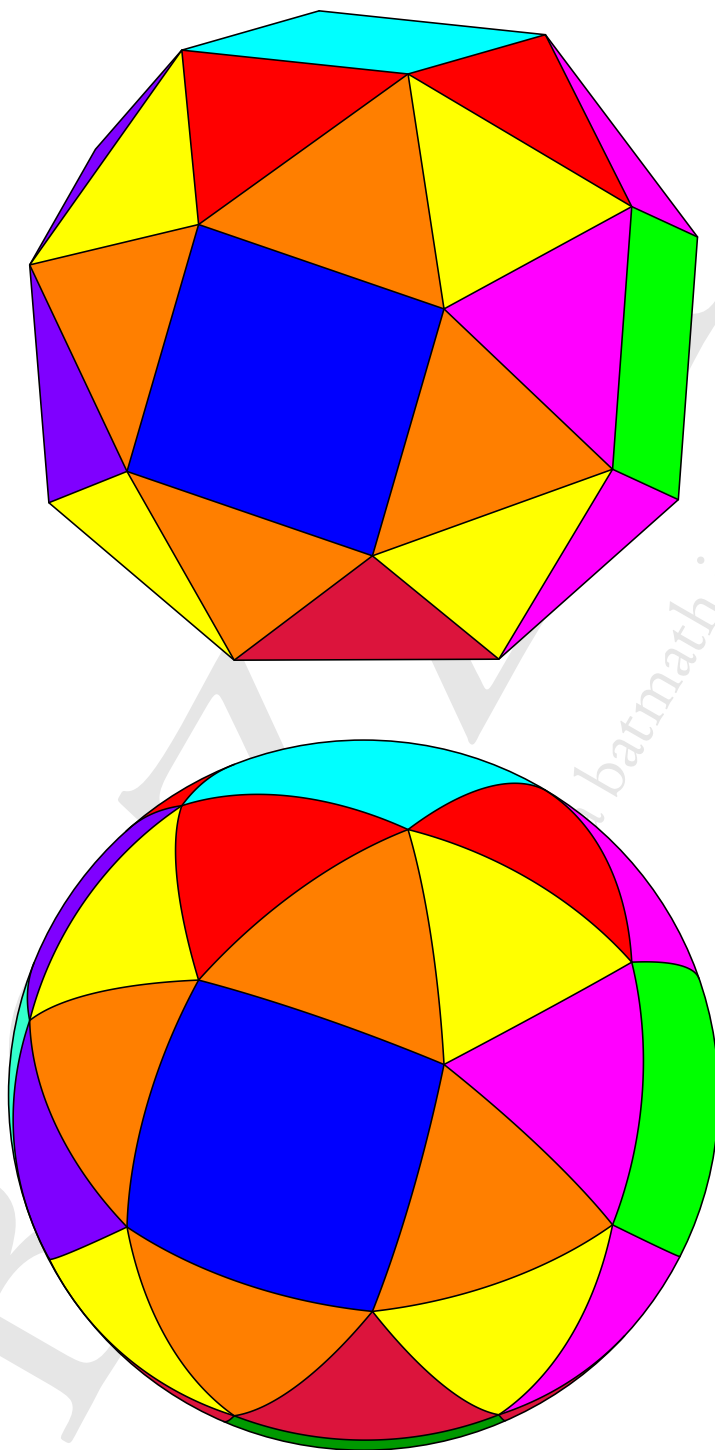


Figura 10.12.: *Il cubo camuso e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

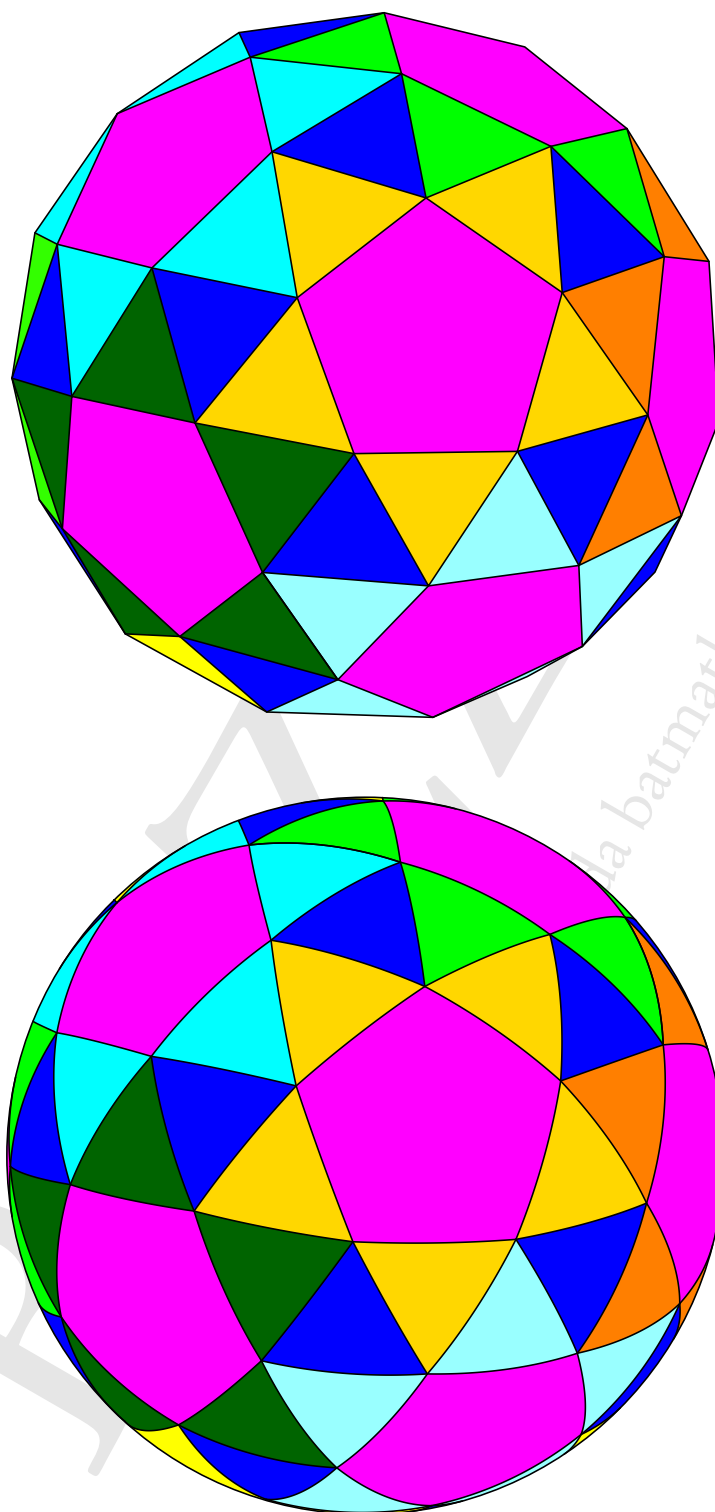


Figura 10.13.: *Il dodecaedro camuso e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera circoscritta*

10.2. Tassellazioni di Catalan

I poliedri di Catalan hanno una sfera inscritta anziché una sfera circoscritta: si può ottenere una tassellazione della sfera mediante proiezione dei poliedri su questa sfera inscritta. Si potrebbe anche scegliere la sfera medio inscritta (che è la stessa del duale archimedeo) o la sfera circoscritta al duale.

Nelle figure che seguono proponiamo, per ciascuno dei tredici poliedri di Catalan, un'immagine del poliedro stesso, seguito dalla sua proiezione sulla sfera inscritta, leggermente ingrandita.

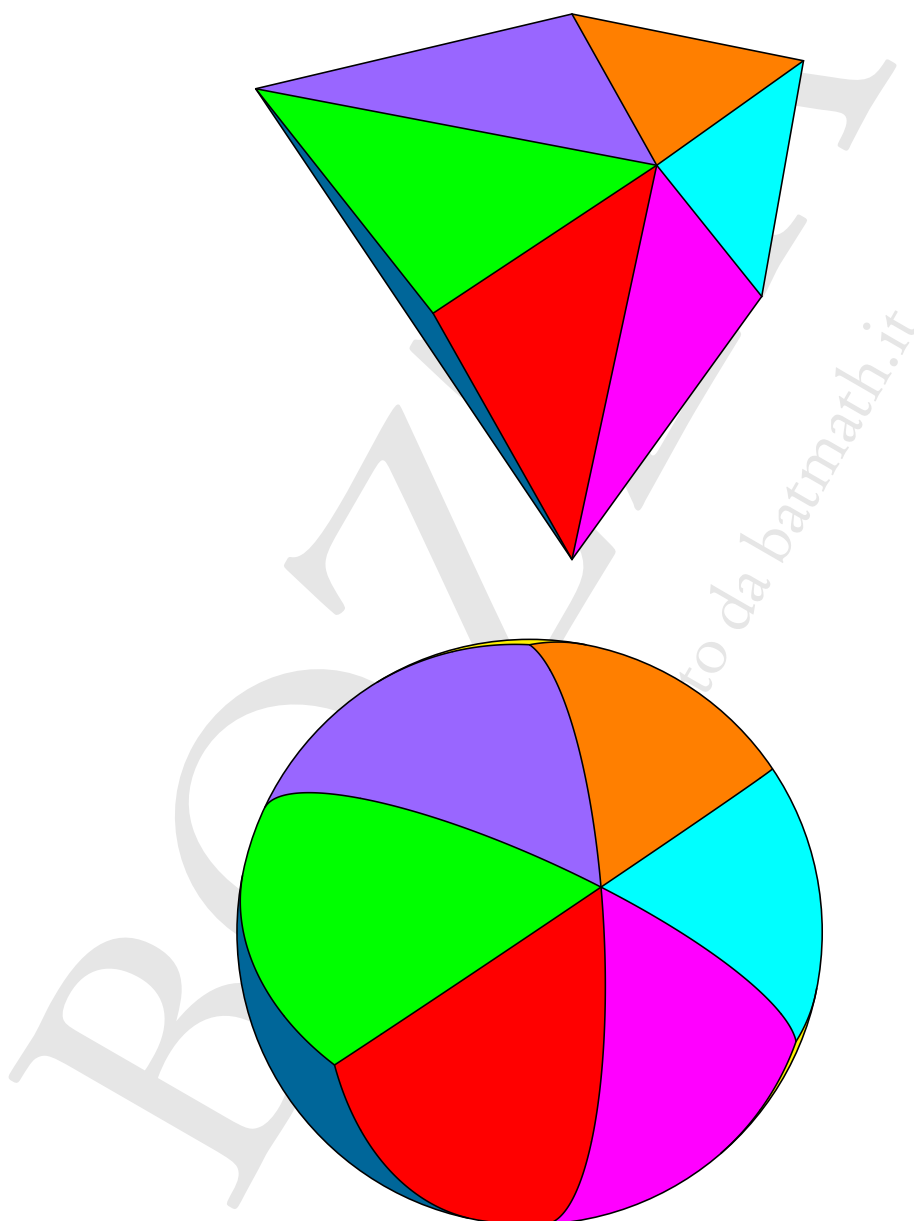


Figura 10.14.: *Il triacistetraedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

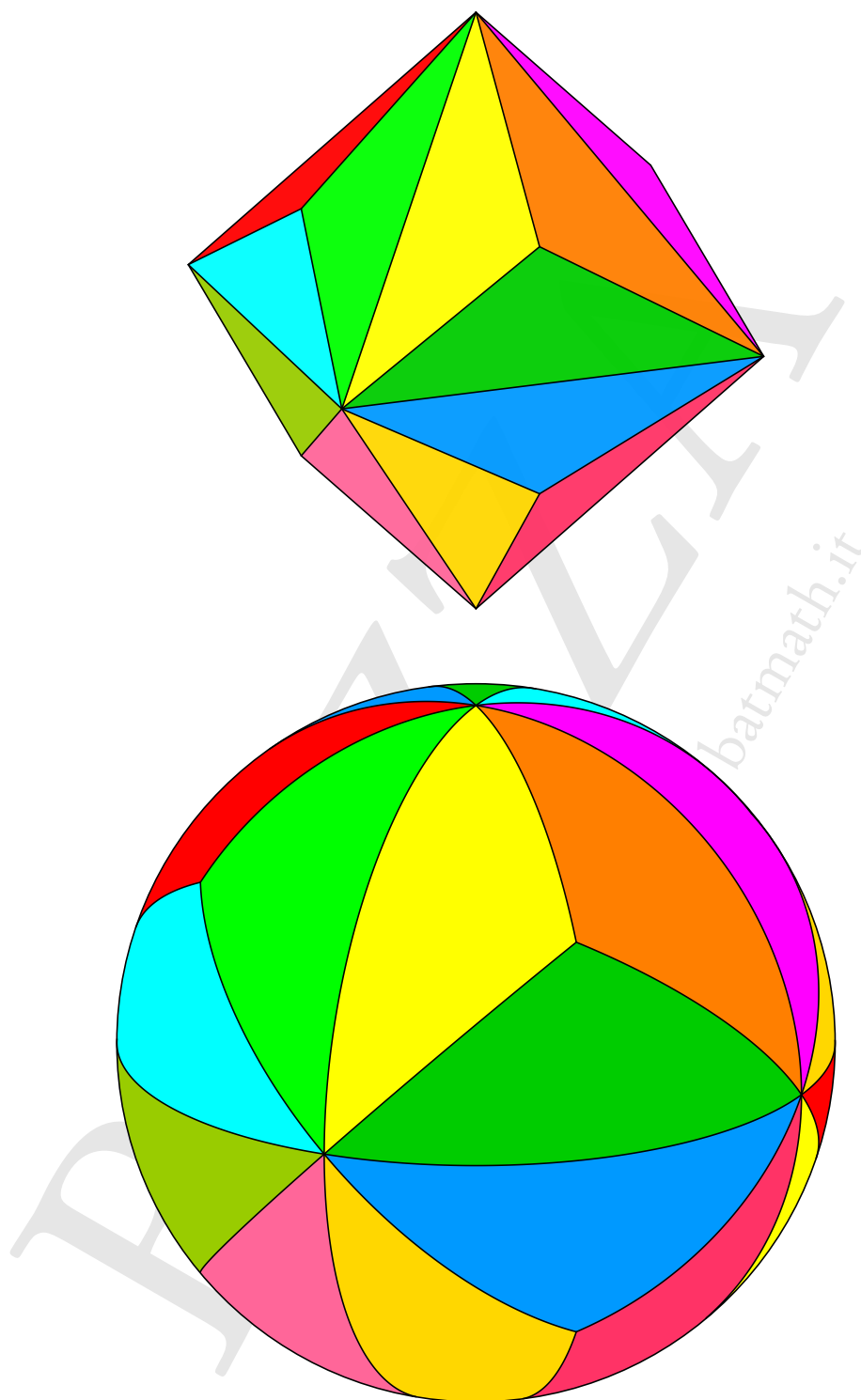


Figura 10.15.: *Il triacisottaedro e la tassellazione ottenuta mediante proiezione sulla sfera inscritta*

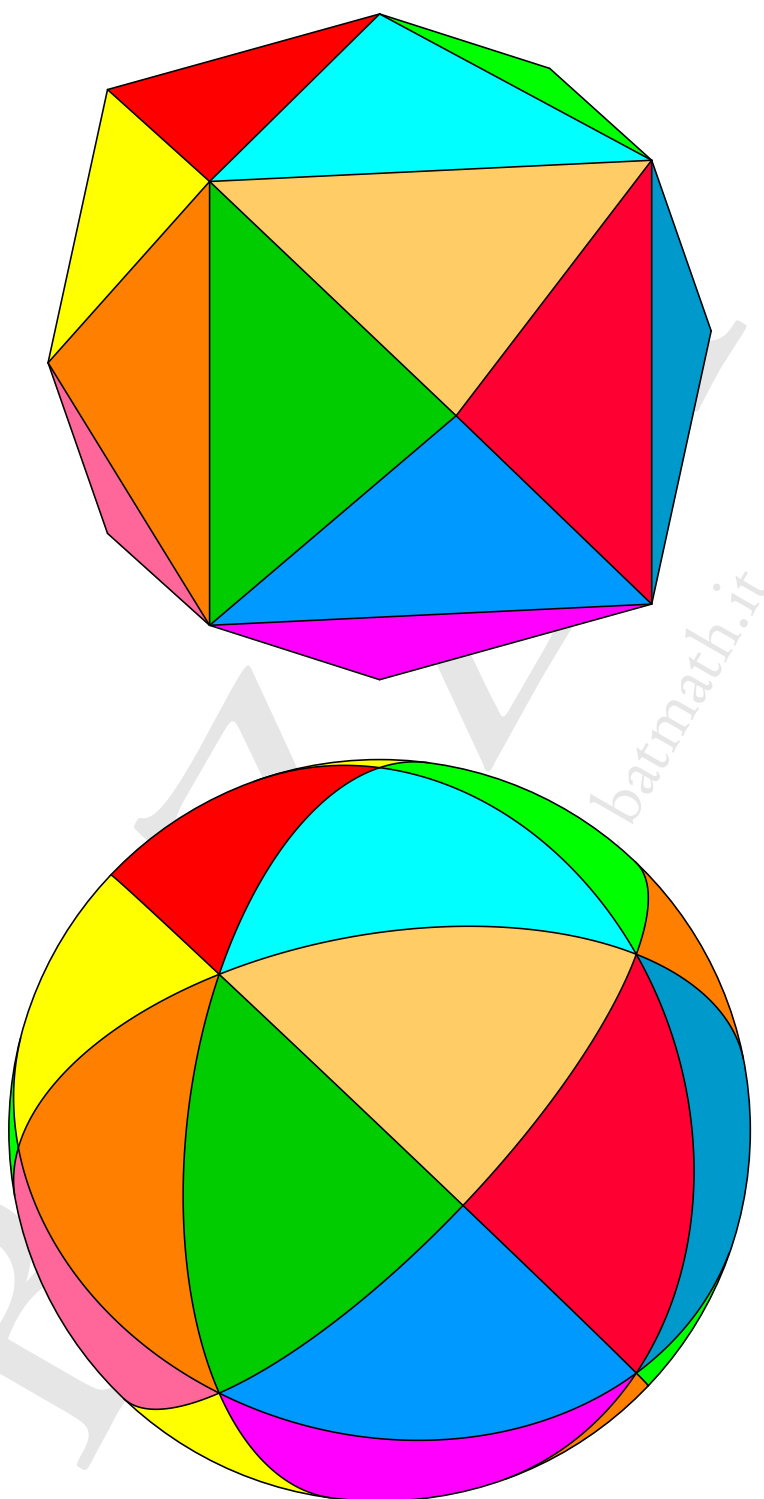


Figura 10.16.: *Il tetracisesaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

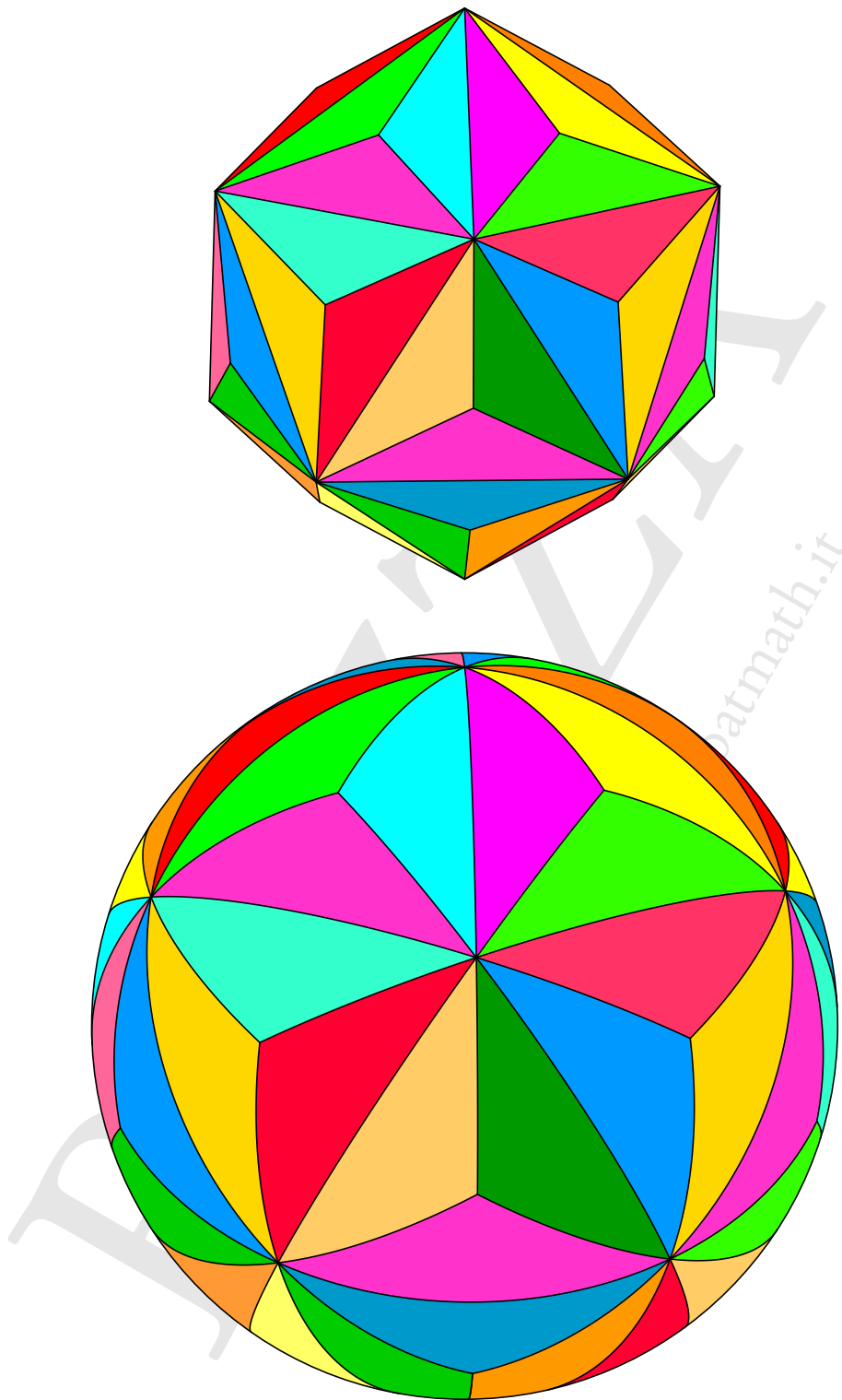


Figura 10.17.: *Il triacisicosaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

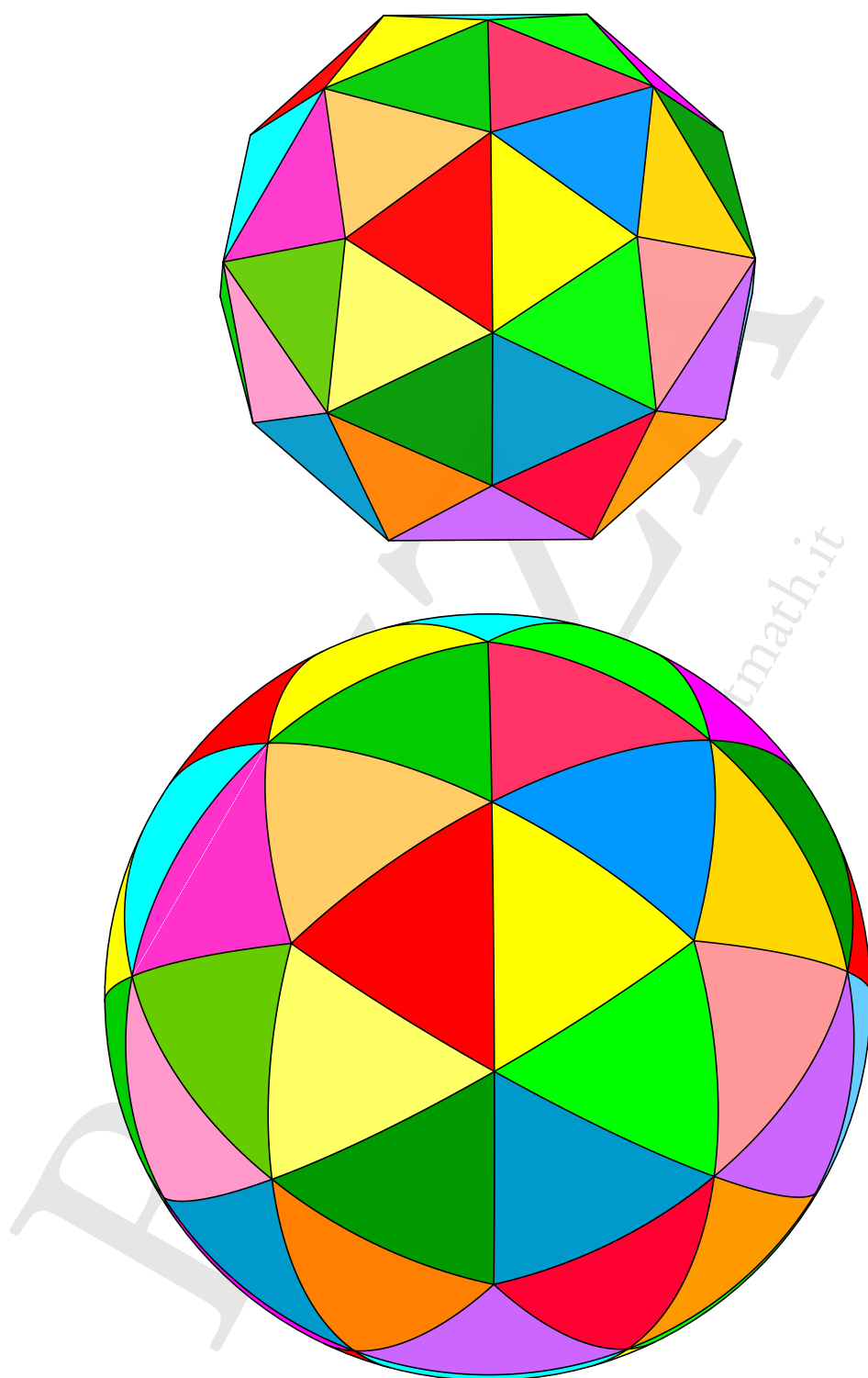


Figura 10.18.: *Il pentacisdodecaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

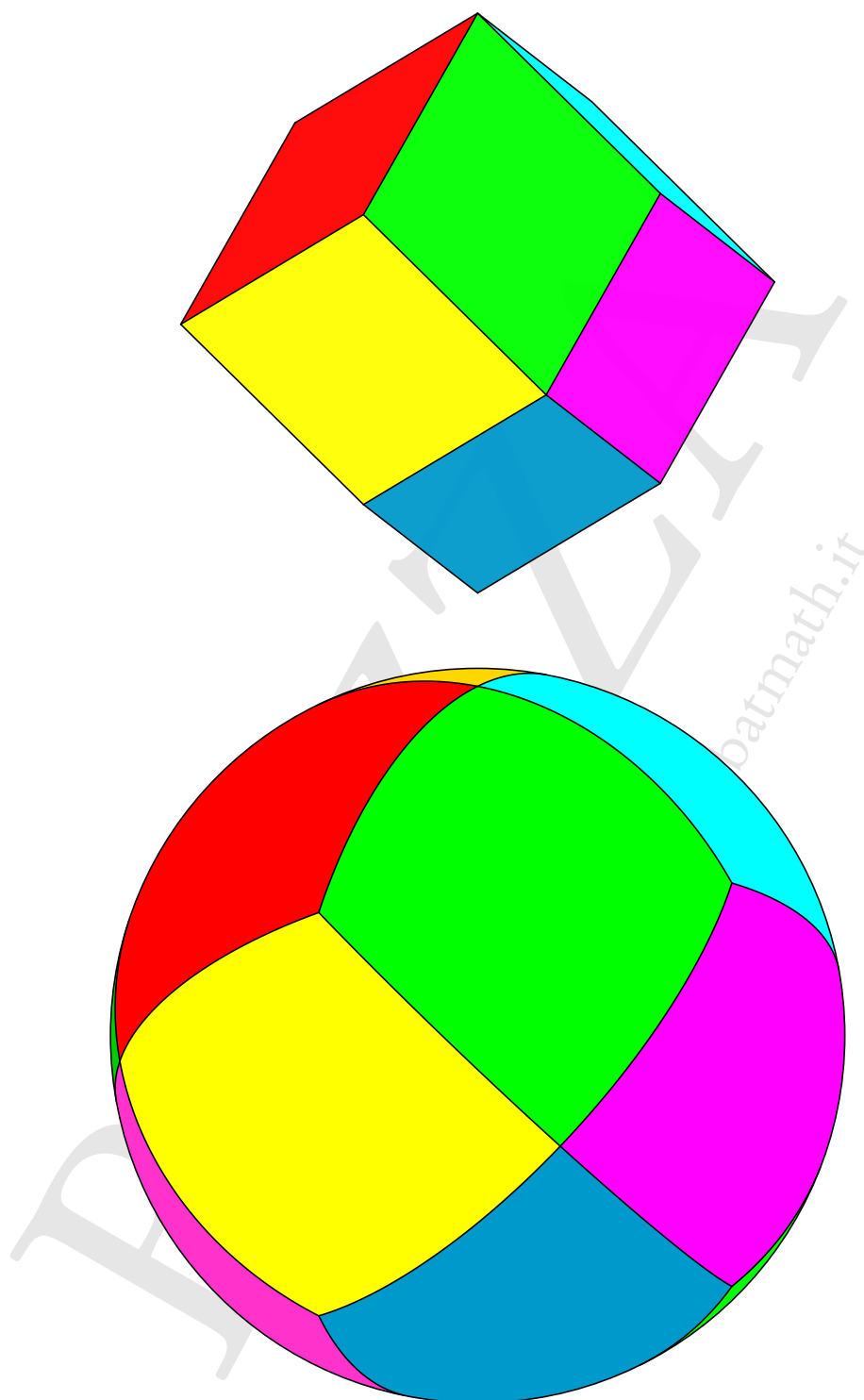


Figura 10.19.: *Il dodecaedro rombico e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

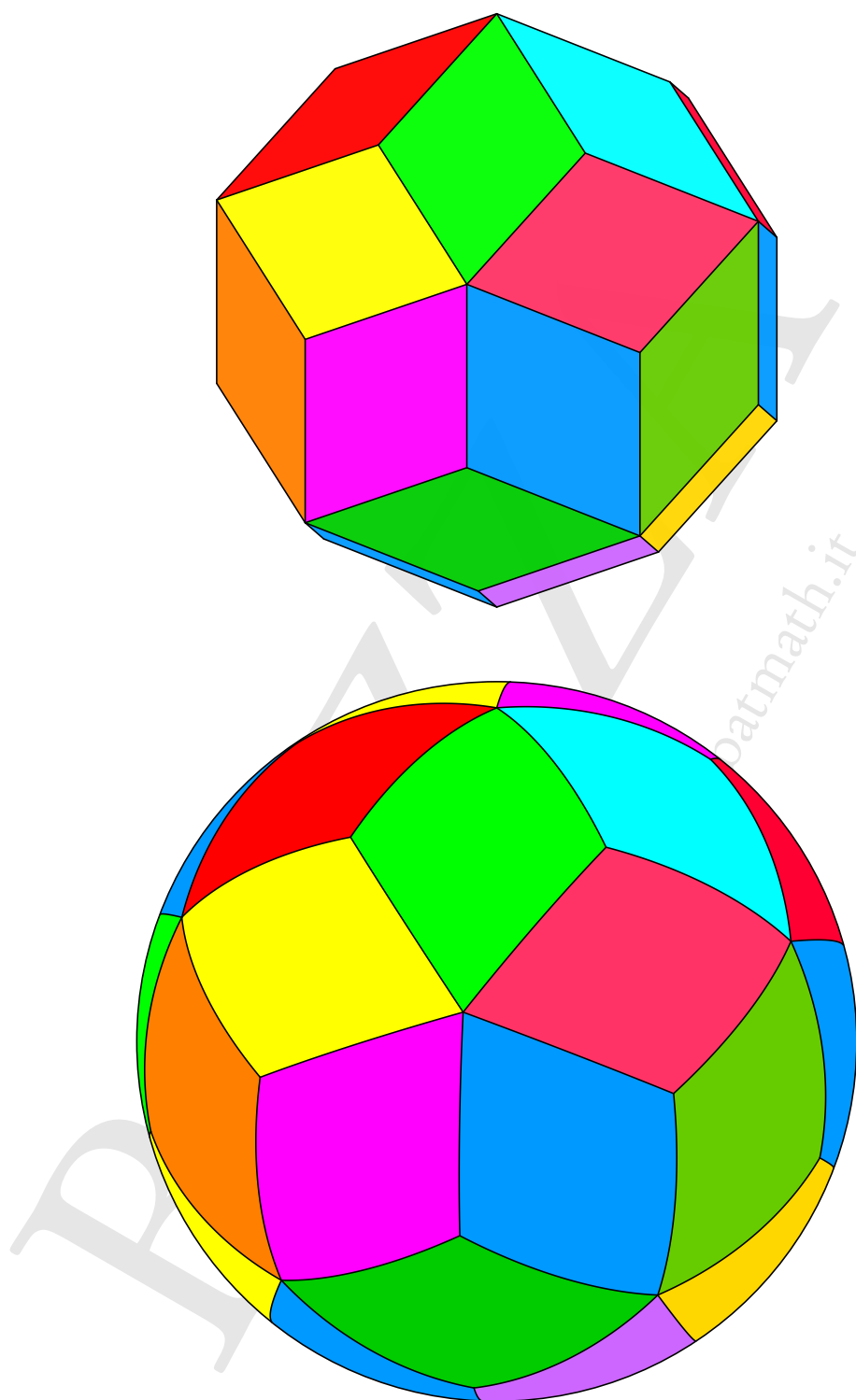


Figura 10.20.: *Il triacontaedro rombico e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

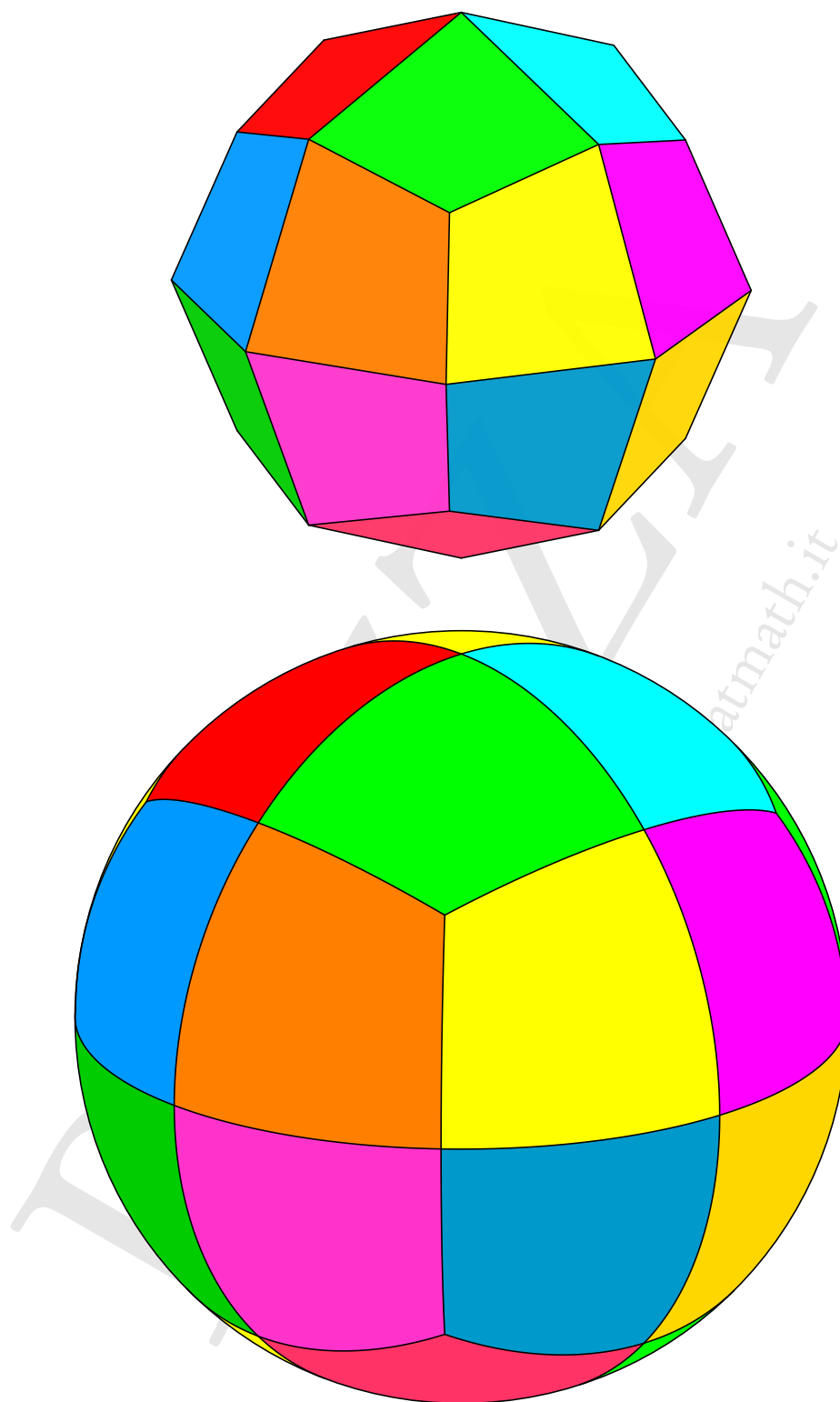


Figura 10.21.: *L'icositetraedro trapezoidale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

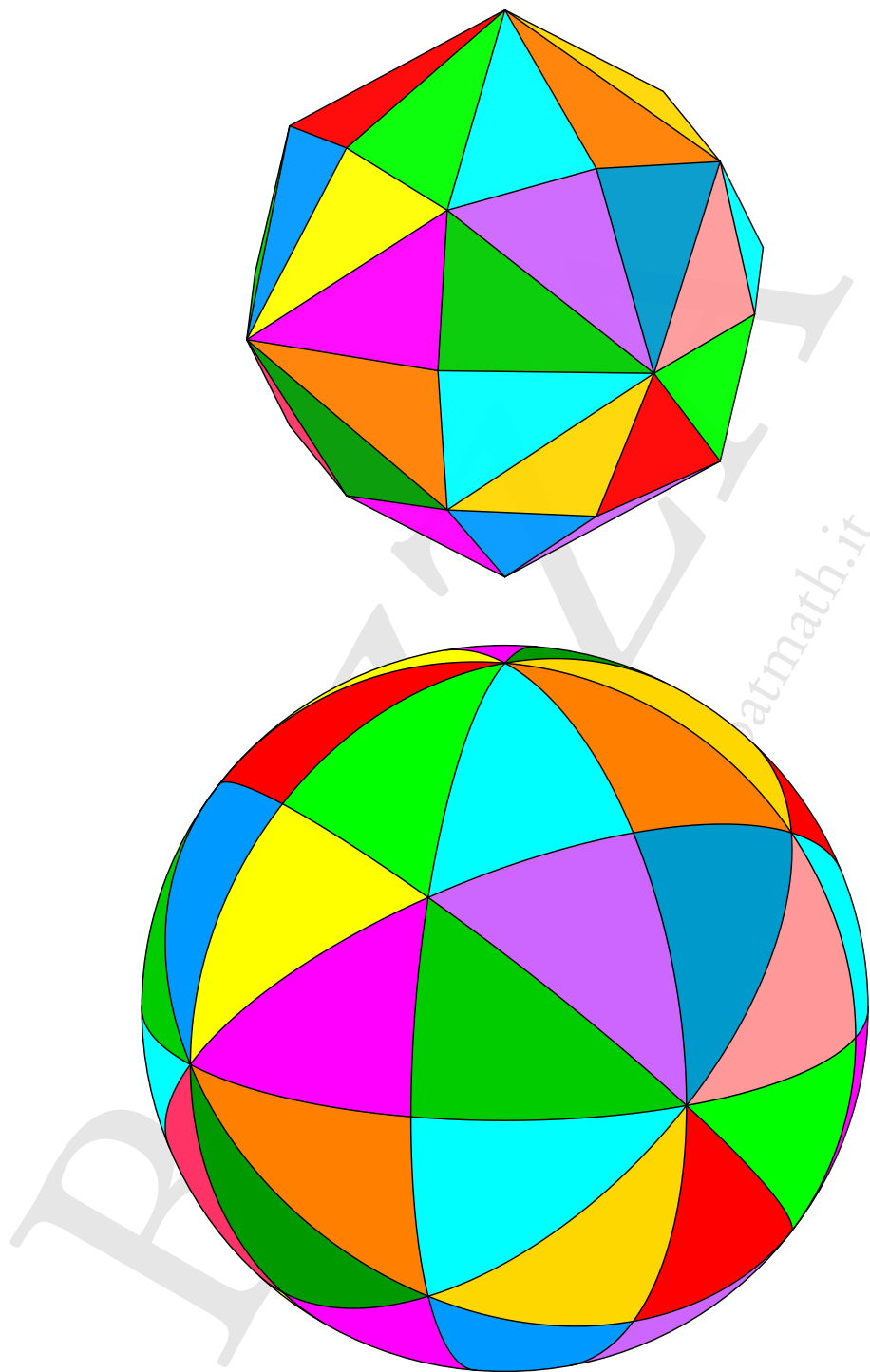


Figura 10.22.: *L'esacisottaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

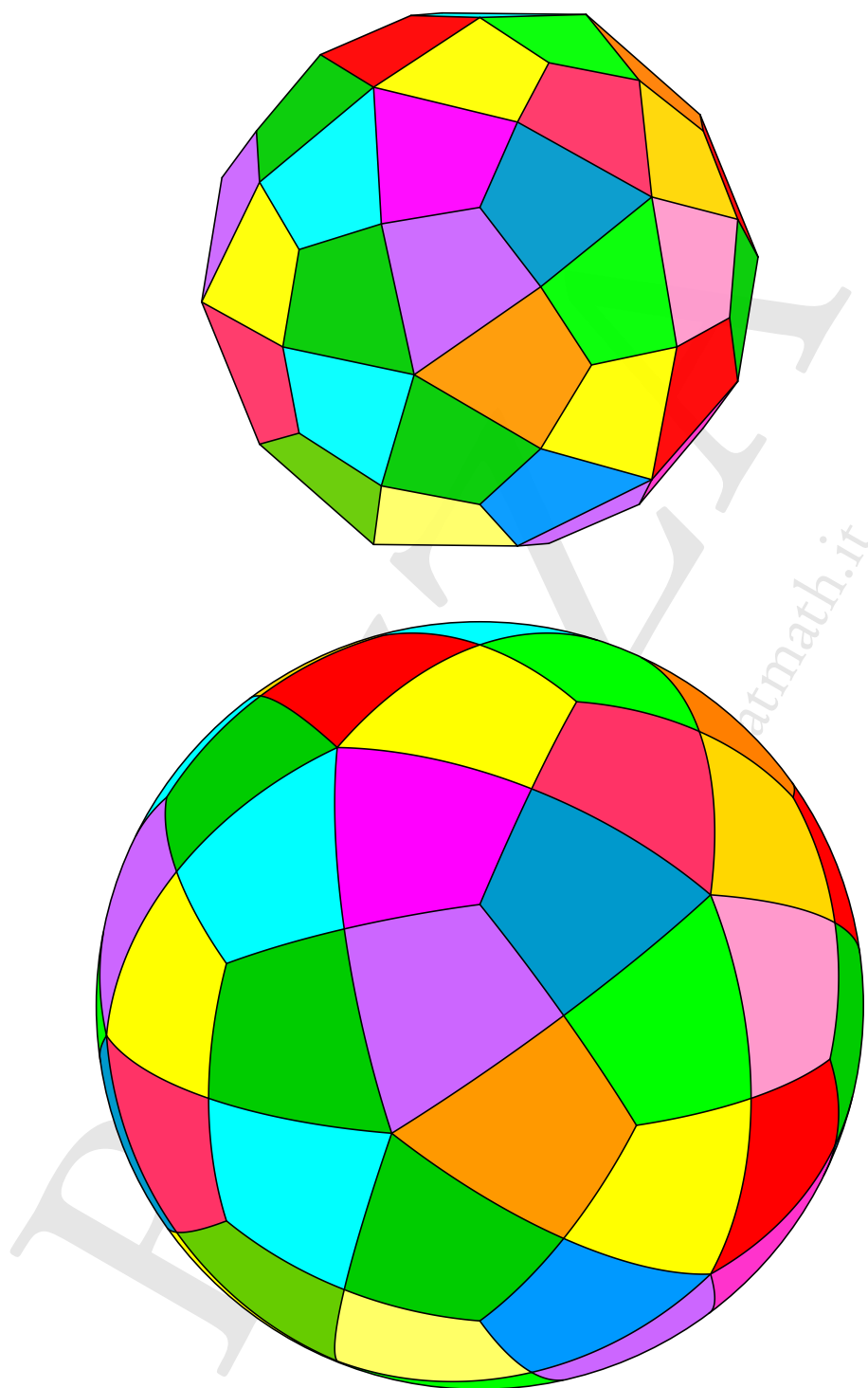


Figura 10.23.: *L'esacontaedro trapezoidale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

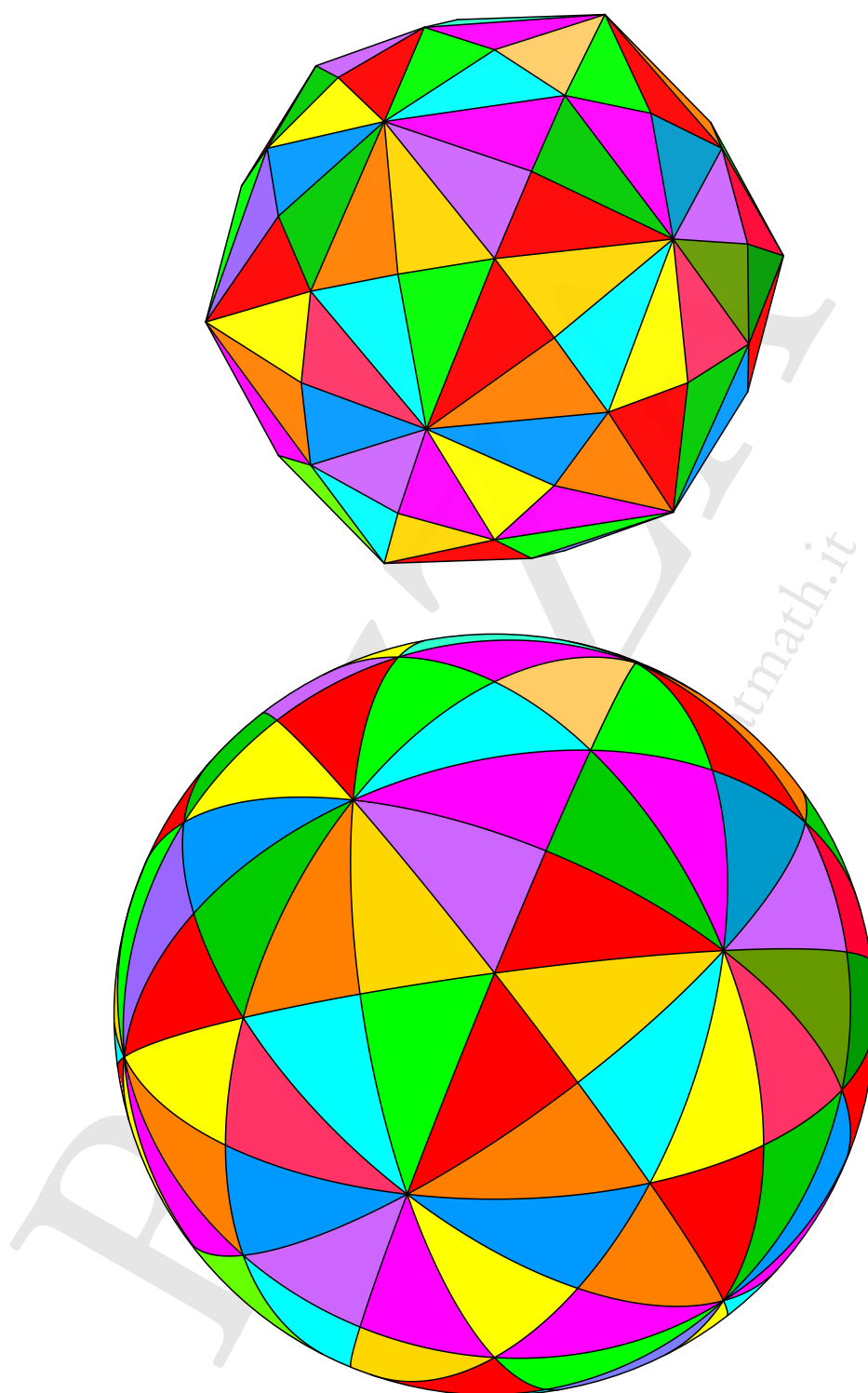


Figura 10.24.: *L'esacicosaedro e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

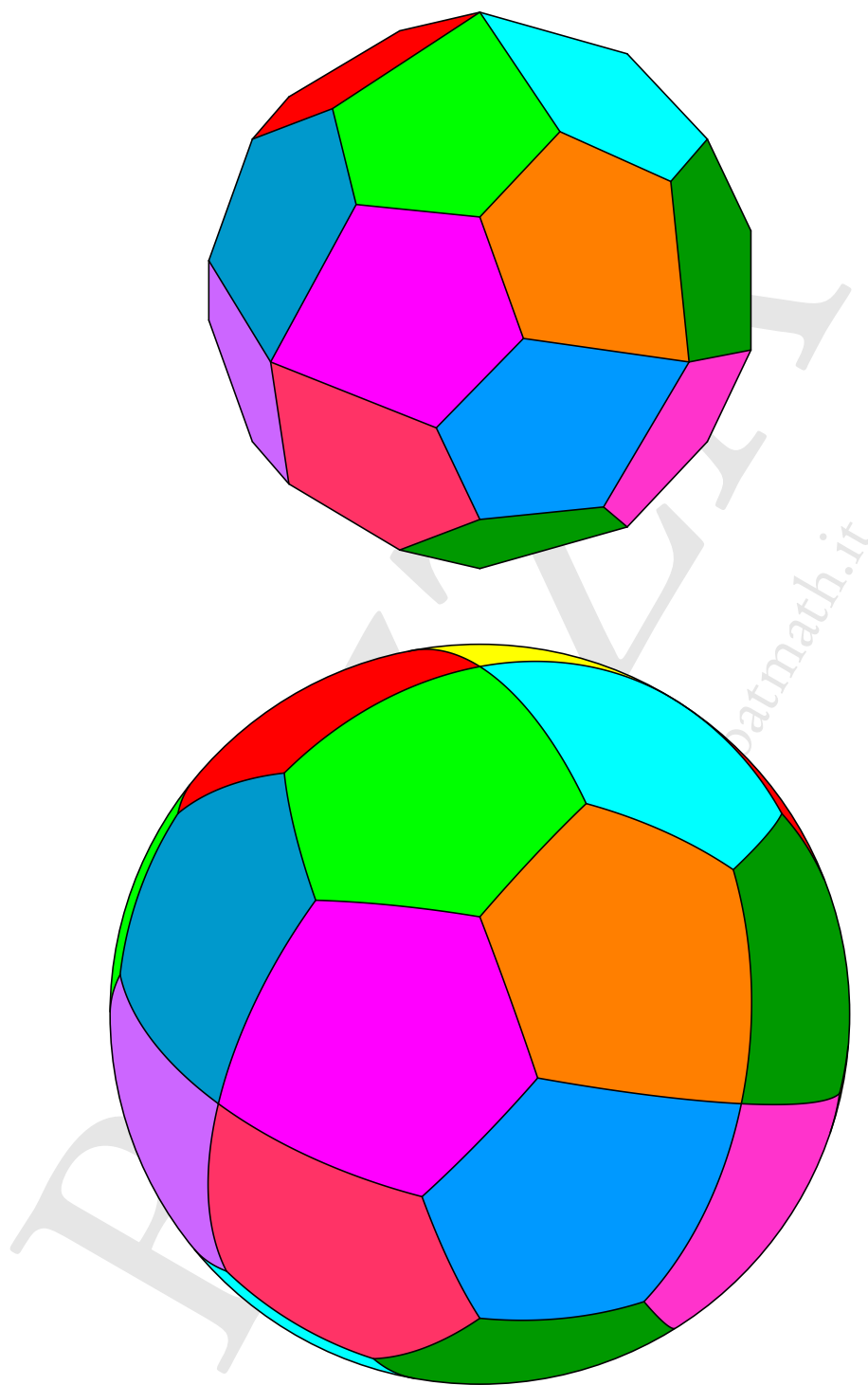


Figura 10.25.: *L'icositetraedro pentagonale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

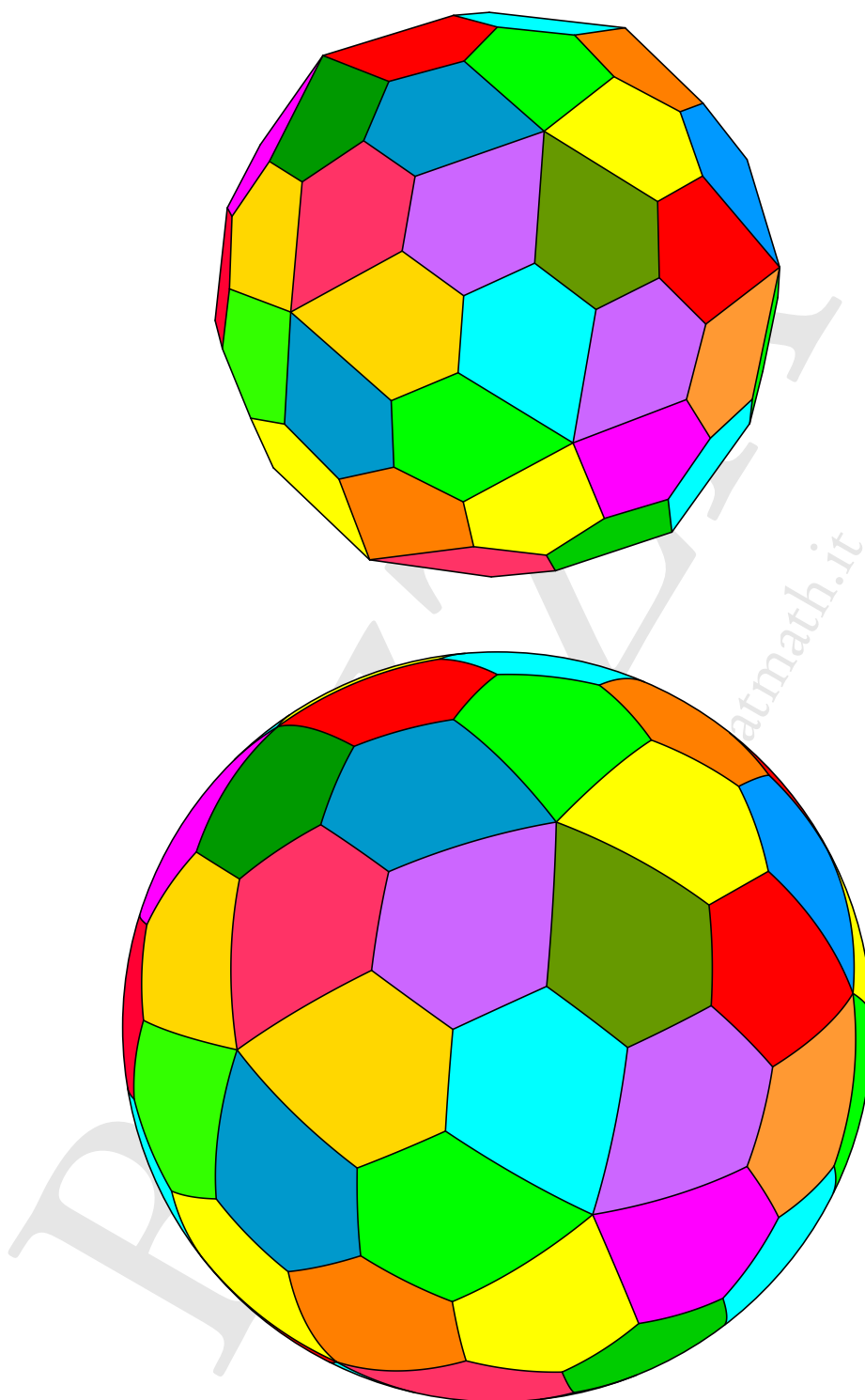


Figura 10.26.: *L'esacontaedro pentagonale e la tassellazione ottenuta per proiezione sulla sfera inscritta*

10.3. Dualità e tassellazioni sulla sfera

Come già osservato nel caso dei solidi Platonici, la tassellazione ottenuta per proiezione di un poliedro di Archimede contiene anche quella ottenibile per proiezione del duale, e viceversa: basta suddividere le facce in triangoli rettangoli e poi raggruppare opportunamente i triangoli. Lo illustreremo in dettaglio nel caso del tetraedro troncato e del triacistetraedro.

La figura 10.27 mostra il tetraedro troncato e il suo duale, il triacistetraedro, con le facce suddivise in triangoli rettangoli.

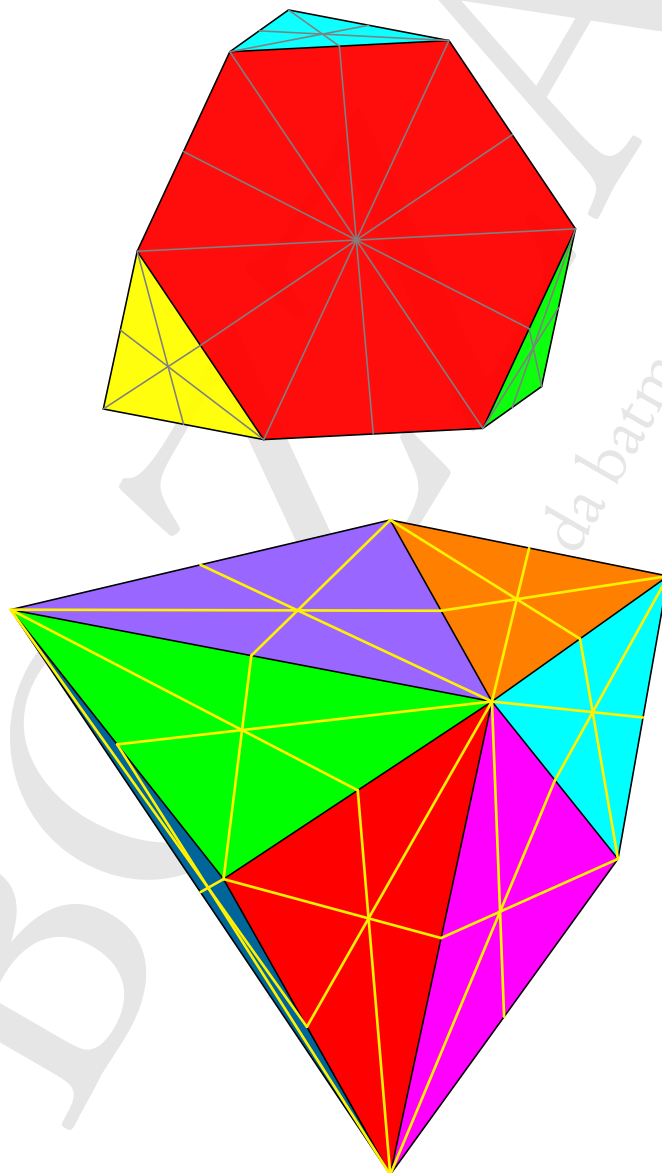


Figura 10.27.: *Il tetraedro troncato e il triacistetraedro con le facce divise in triangoli*

Il confronto tra le due immagini della figura 10.28 mostra chiaramente come le due tassellazioni duali proiettate sulla sfera si possano ottenere una dall'altra mediante triangolazione delle facce relative.

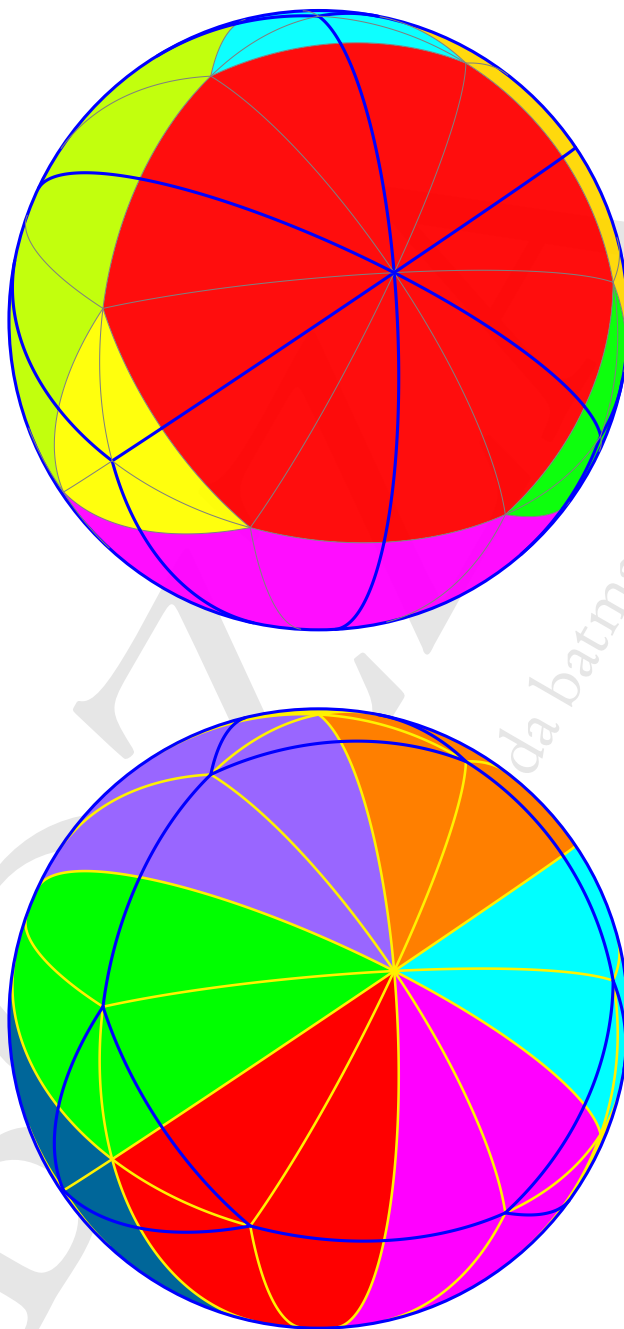


Figura 10.28.: *Proiezione sull'intersfera del tetraedro troncato e del triacistedraedro, con facce divise in triangoli, con evidenziazione, per ciascuno, dei lati della proiezione del duale*

10.4. Tassellazioni di Catalan e tassellazioni regolari

Come abbiamo visto nel capitolo 9, i primi undici solidi di Catalan si possono ottenere, in maniera duale rispetto ai solidi di Archimede, per elevazione a partire dai cinque solidi regolari. Questo fatto ha come conseguenza che le tassellazioni di Catalan sulla sfera si possono ottenere mediante opportune triangolazioni a partire dalle tassellazioni regolari o, detto in altri termini, i poliedri sferici di Catalan si possono ottenere dai poliedri sferici regolari mediante opportune triangolazioni. In particolare si ha quanto segue.

- I poliedri sferici ottenuti dai duali dei cinque solidi archimedei troncati, cioè il triacistetraedro, il triacisottaedro, il triacisesaedro, il triacisicosaedro e il pentacisdodecaedro si ottengono per triangolazione centrale dei cinque poliedri sferici regolari.
- I due poliedri rombici, il dodecaedro e il triacontaedro, si ottengono rispettivamente dalla coppia cubo-ottaedro o dalla coppia dodecaedro-icosaedro per triangolazione centrale e successiva soppressione degli spigoli originali.
- I due poliedri trapezoidali, l'icositetraedro e l'esacontaedro, si ottengono rispettivamente dalla coppia cubo-ottaedro o dalla coppia dodecaedro-icosaedro congiungendo i centri delle facce con i centri degli spigoli.
- L'esacisottaedro e l'esacisicosaedro si ottengono dalla coppia cubo-ottaedro o dalla coppia dodecaedro-icosaedro congiungendo i centri delle facce con i centri degli spigoli e con i vertici, cioè combinando le due triangolazioni precedenti.

Nelle figure che seguono illustreremo queste proprietà per i poliedri sferici di Catalan coinvolti.

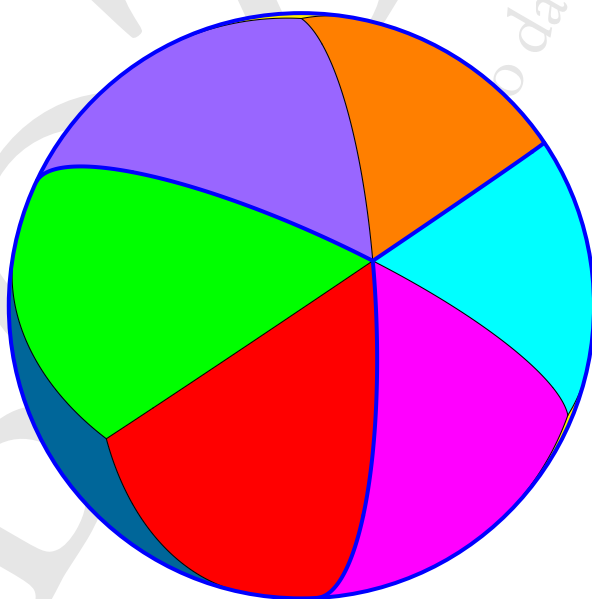


Figura 10.29.: *Il triacistetraedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del tetraedro regolare sferico*

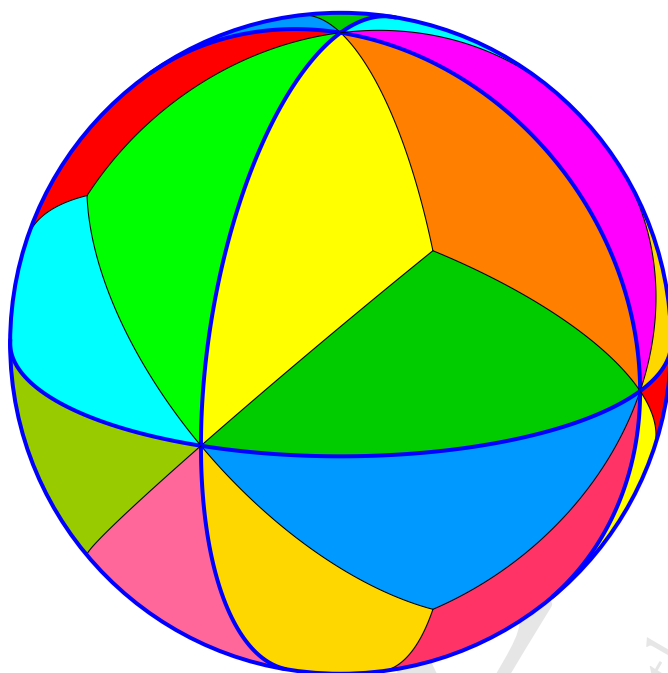


Figura 10.30.: *Il triacosottaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale dell'ottaedro regolare sferico*

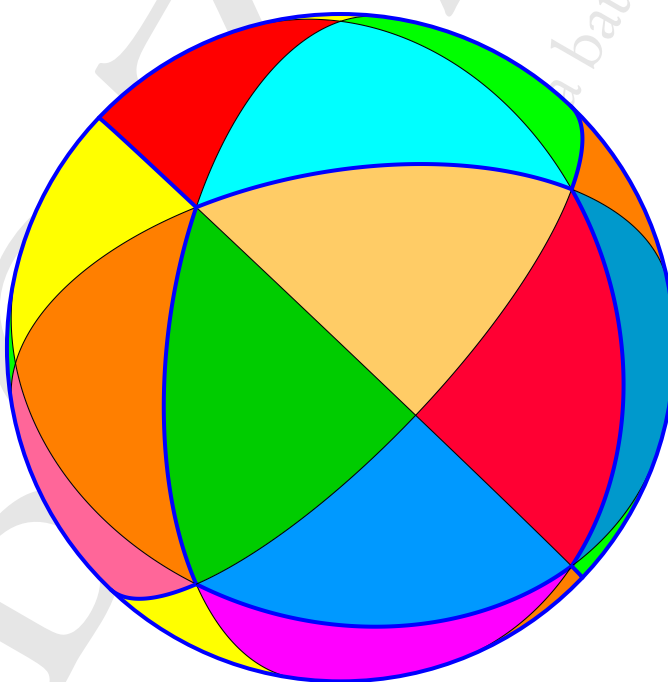


Figura 10.31.: *Il tetracosaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del cubo sferico*

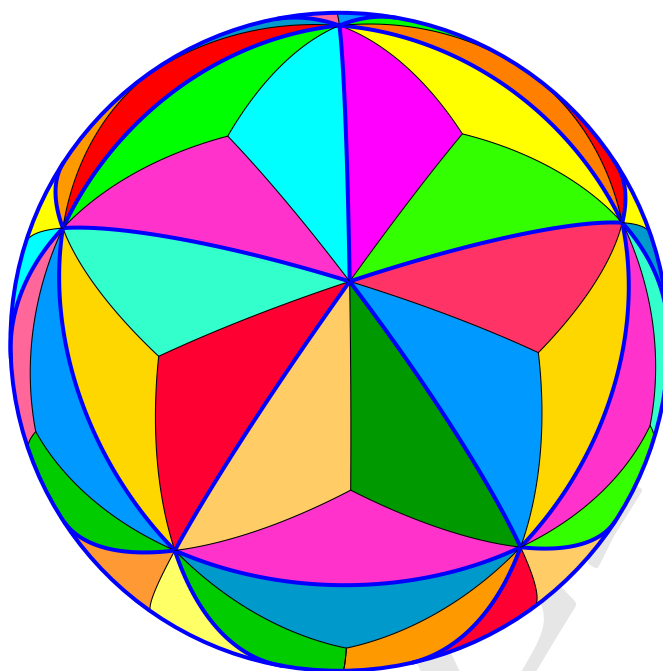


Figura 10.32.: *Il triacisicosaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale dell'icosaedro regolare sferico*

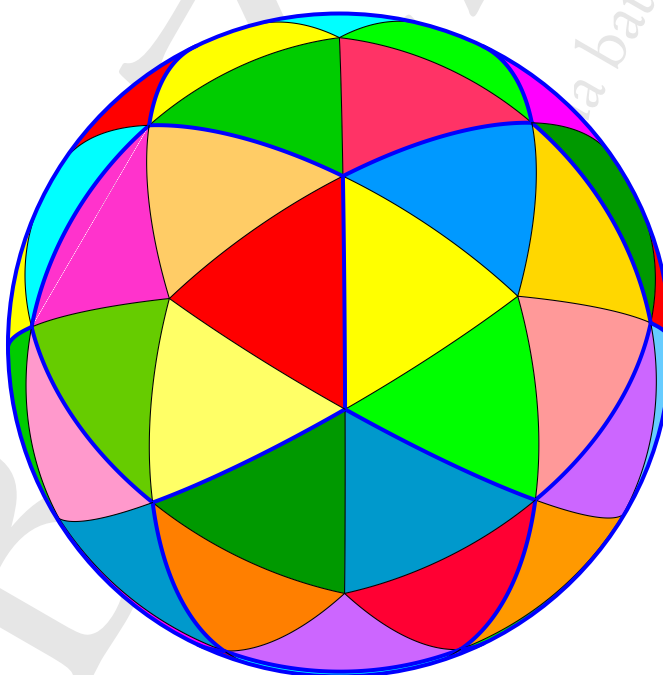


Figura 10.33.: *Il pentacisdodecaedro sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del dodecaedro regolare sferico*

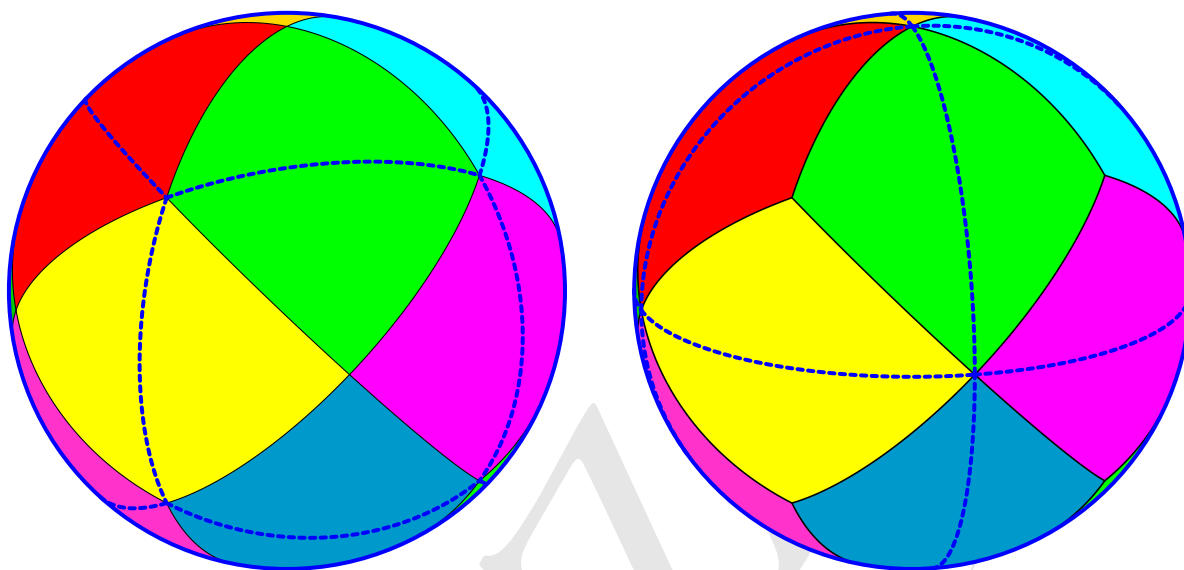


Figura 10.34.: *Il dodecaedro rombico sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del cubo sferico, a sinistra, e dell'ottaedro regolare sferico, a destra, e successiva soppressione degli spigoli originali*

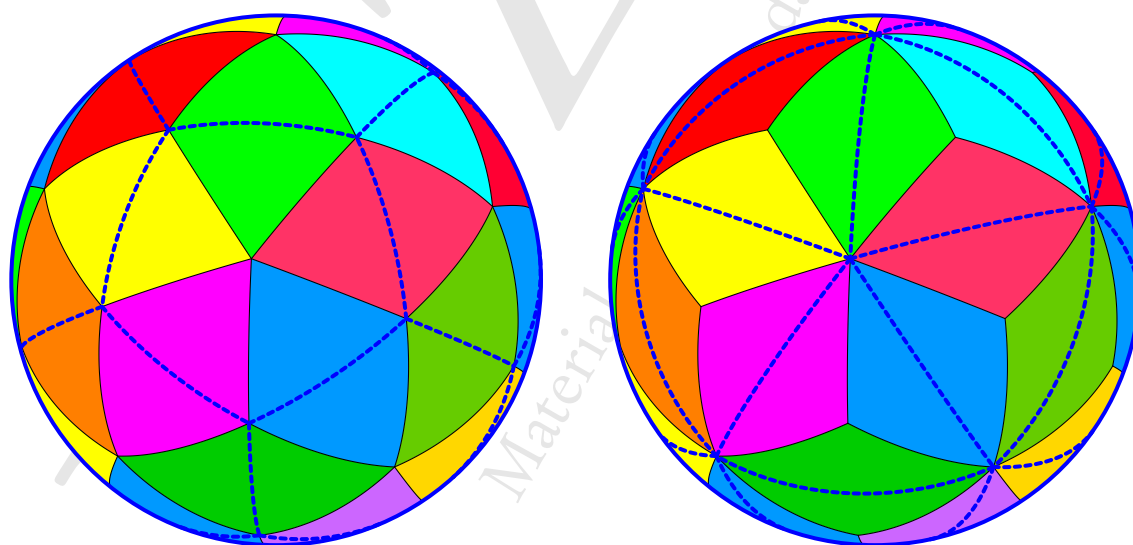


Figura 10.35.: *Il triacontaedro rombico sferico, ottenuto mediante triangolazione centrale del dodecaedro regolare sferico, a sinistra, e dell'icosaedro regolare sferico, a destra, e successiva soppressione degli spigoli originali*

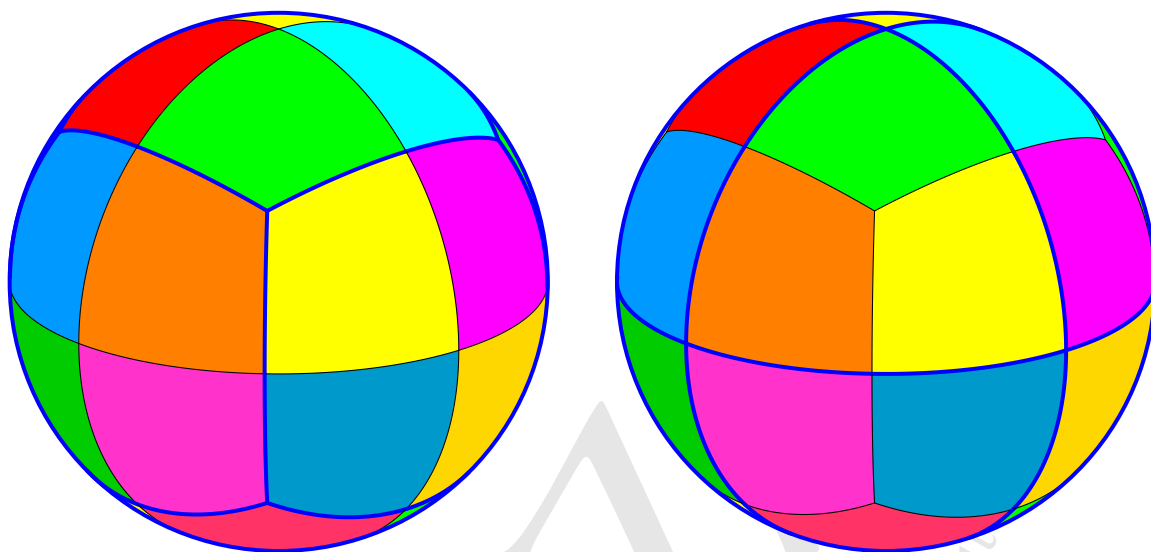


Figura 10.36.: *L'icositetraedro trapezoidale sferico, ottenuto dal cubo sferico, a sinistra, e dall'ottaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i punti medi degli spigoli*

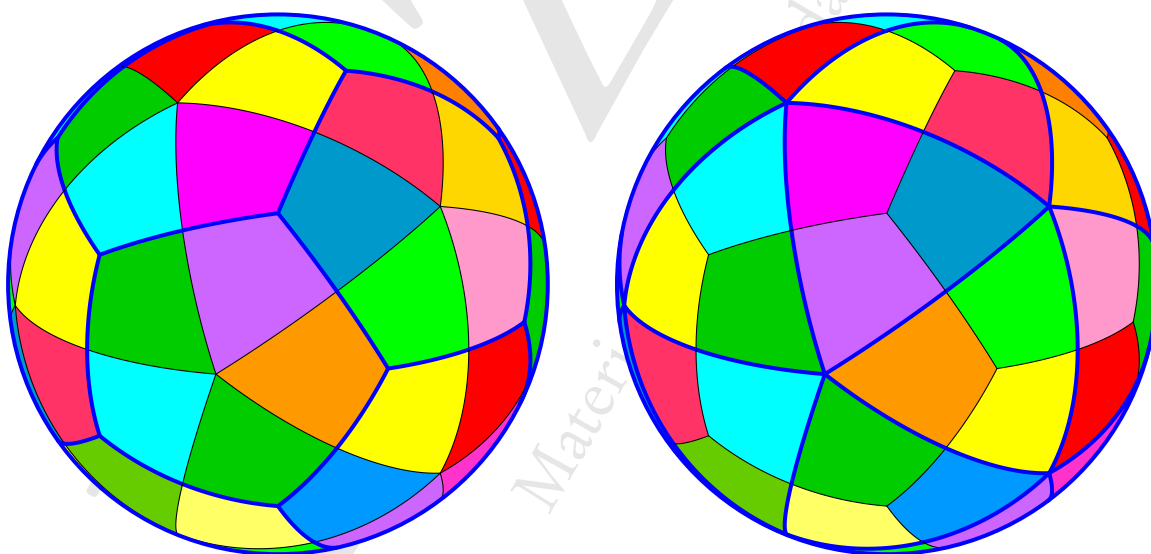


Figura 10.37.: *L'esacontaedro trapezoidale sferico, ottenuto dal dodecaedro regolare sferico, a sinistra, e dall'icosaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i punti medi degli spigoli*

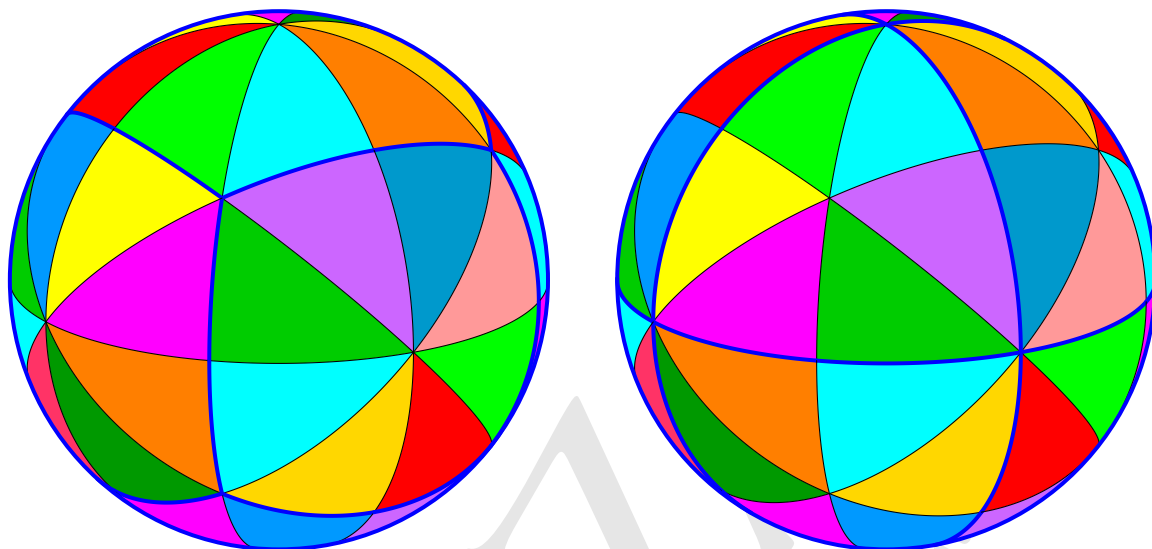


Figura 10.38.: *L'esacisottaedro sferico, ottenuto dal cubo sferico, a sinistra, e dall'ottaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i vertici e i punti medi degli spigoli*

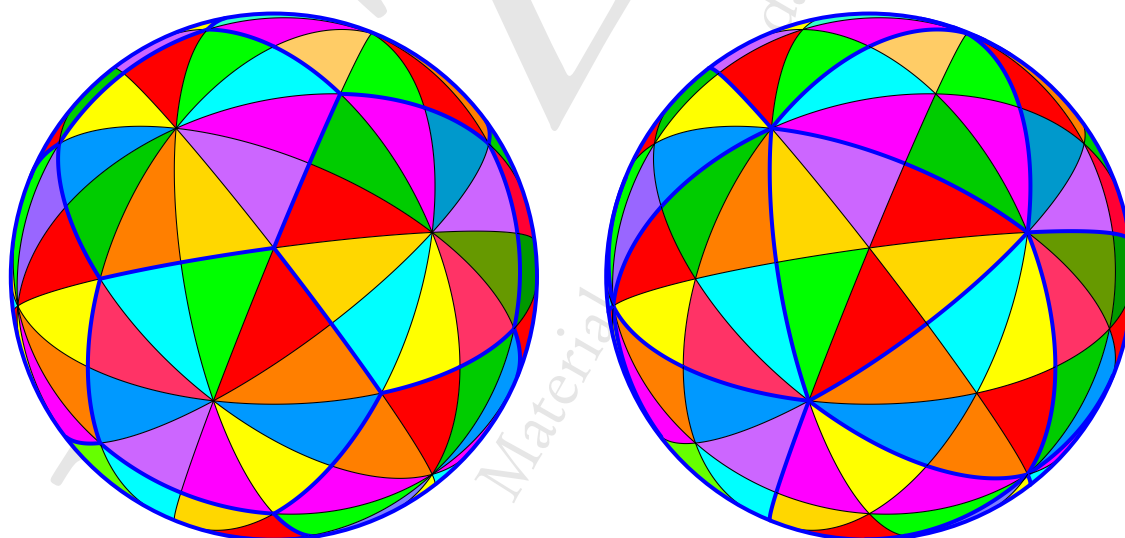


Figura 10.39.: *L'esacicosaedro sferico, ottenuto dal dodecaedro regolare sferico, a sinistra, e dall'icosaedro regolare sferico, a destra, congiungendo i centri delle facce con i vertici e i punti medi degli spigoli*

10.5. Tassellazioni dello spazio

L'uso dei poliedri archimedeei e di Catalan per tassellare lo spazio, seppure sempre limitandosi alle tassellazioni in cui i poliedri si congiungono “faccia a faccia”, consente numerose ulteriori possibilità, rispetto a quanto già visto con i poliedri regolari.

Ci occuperemo innanzitutto delle tassellazioni con un unico tipo di poliedro, rispettivamente con ottaedri troncati per quanto riguarda le tassellazioni archimedee e con dodecaedri rombici per quanto riguarda le tassellazioni di Catalan: sono le uniche due possibili e come vedremo si tratta in sostanza di tassellazioni con cubi opportunamente decomposti.

10.5.1. Tassellazione con ottaedri troncati

Per comprendere appieno come sia possibile tassellare lo spazio con ottaedri troncati cominciamo ad esaminare una costruzione dell'ottaedro troncato a partire dal cubo.

Consideriamo un cubo e una sua diagonale congiungente due vertici opposti. Un piano perpendicolare a questa diagonale, per un punto interno alla stessa, seziona il cubo in due parti. La sezione è inizialmente un triangolo equilatero, poi un esagono che diventa regolare solo quando gli spigoli opportuni sono tagliati a metà, e infine nuovamente un triangolo. Le diverse situazioni sono illustrate nelle figure 10.40 e 10.41. In particolare la 10.41 mostra il cubo tagliato esattamente a metà, con le due parti separate: da qui risulta evidente la possibilità di tassellare l'intero spazio con ottaedri troncati, come mostrato nelle figure 10.42, 10.43, 10.44 e 10.45.

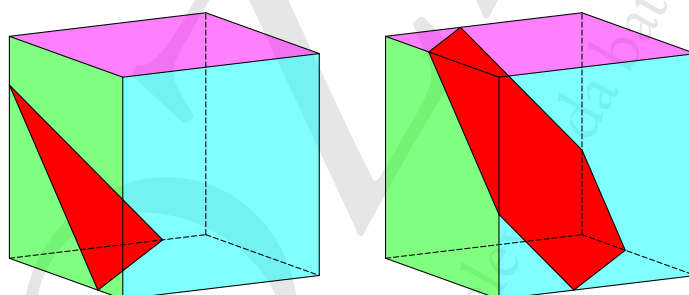


Figura 10.40.: Sezioni di un cubo con un piano perpendicolare a una diagonale

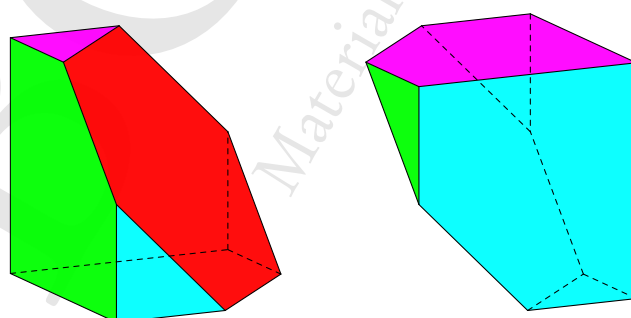


Figura 10.41.: Cubo spezzato con sezione esagonale regolare

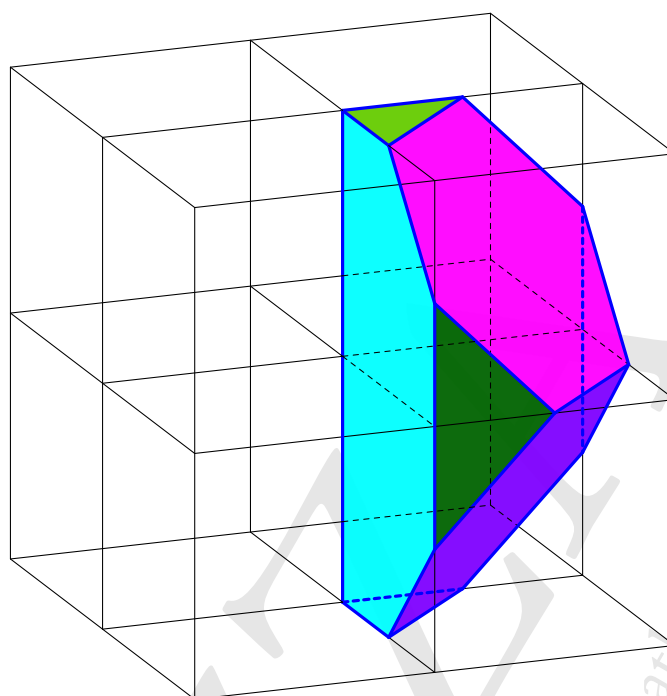


Figura 10.42.: Sovrapposizione dei due “mezzi cubi” della figura 10.41 per ottenere un quarto di ottaedro troncato

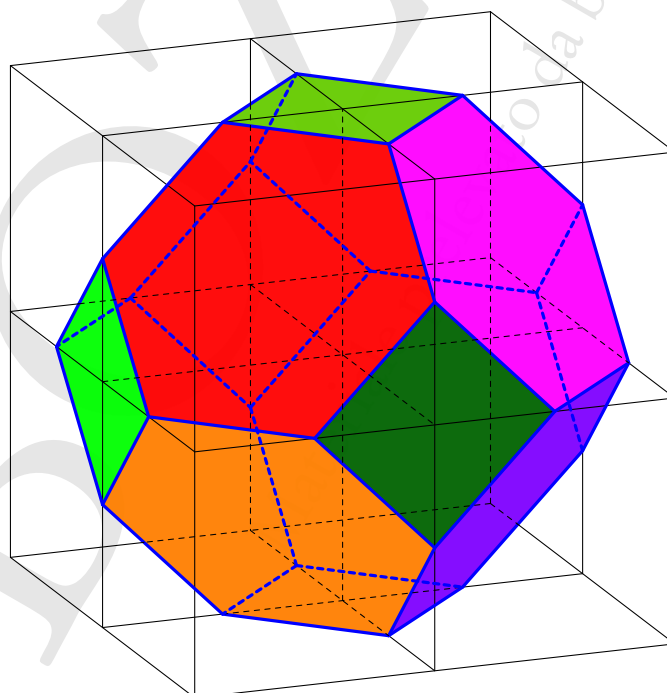


Figura 10.43.: Ottaedro troncato costruito a partire da otto cubi

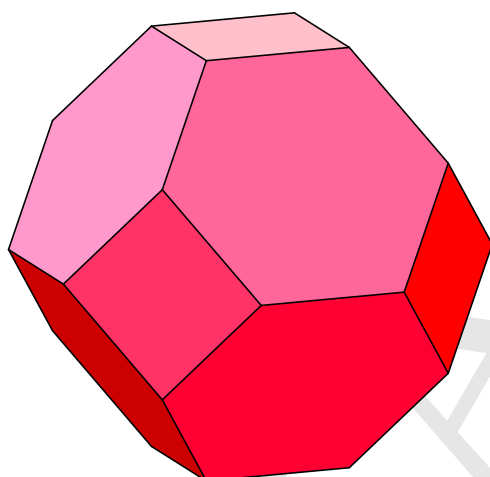


Figura 10.44.: Tassellazione mediante ottaedri troncati: il primo poliedro

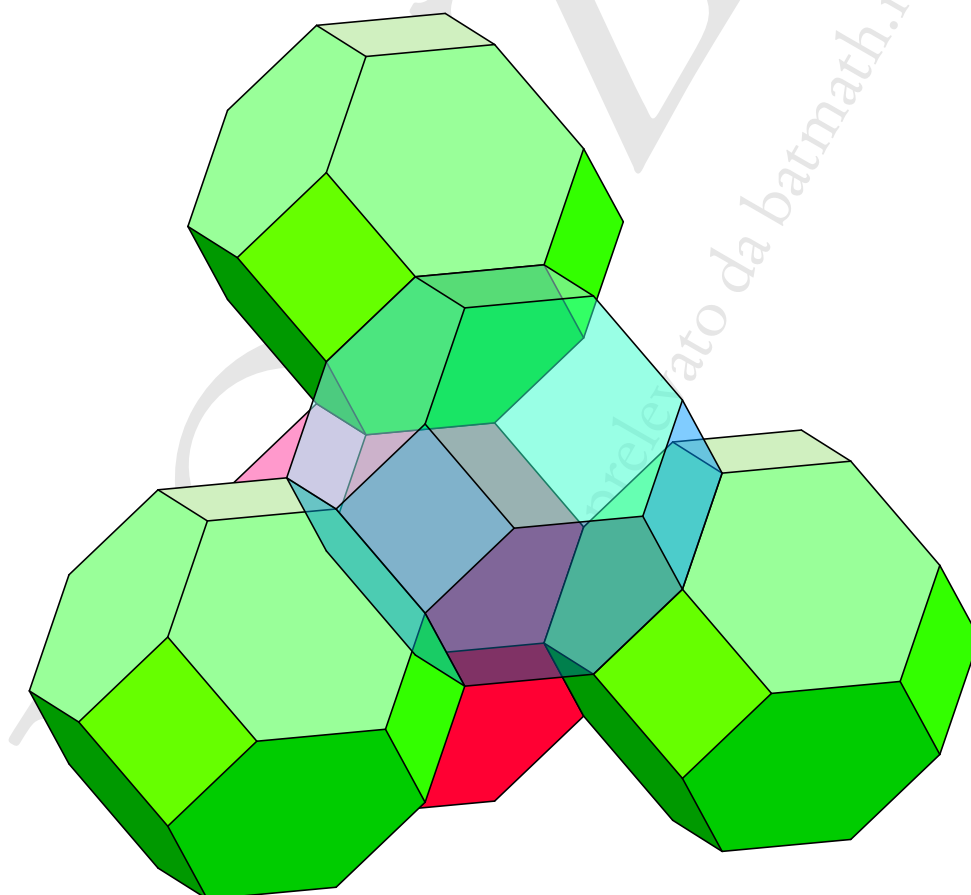


Figura 10.45.: Tassellazione mediante ottaedri troncati: aggiunta progressiva di altri poliedri

10.5.2. Tassellazione con dodecaedri rombici

Come abbiamo visto nel paragrafo 9.3 del capitolo 9, il dodecaedro rombico può essere ottenuto per elevazione dal cubo, incollando sulle facce piramidi a base quadrata di opportuna altezza: queste piramidi, come è facile verificare, sono ciascuna un sesto di cubo, per cui in una tassellazione con cubo sezionando un cubo ogni due con queste piramidi si ottiene esattamente una tassellazione mediante dodecaedri rombici. La figura 10.46 mostra il dodecaedro rombico “nucleo” della tassellazione, la 10.47 mostra l'accostamento di due poliedri, mentre la 10.48 illustra la tecnica costruttiva complessiva.

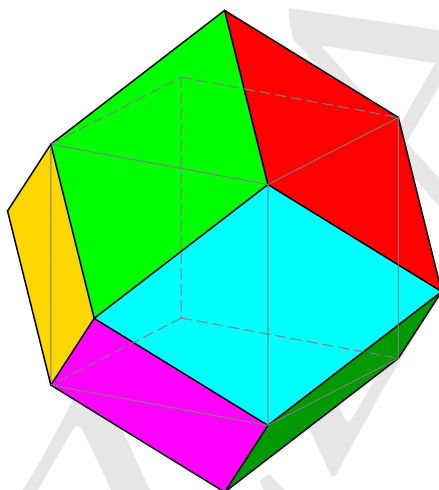


Figura 10.46.: Tassellazione mediante dodecaedri rombici: il primo poliedro

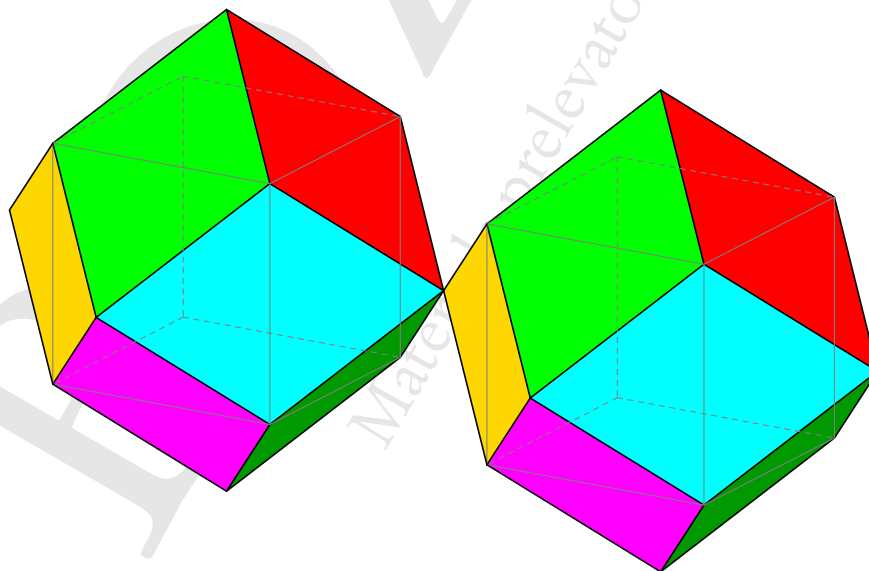


Figura 10.47.: Tassellazione mediante dodecaedri rombici: accostamento di due poliedri

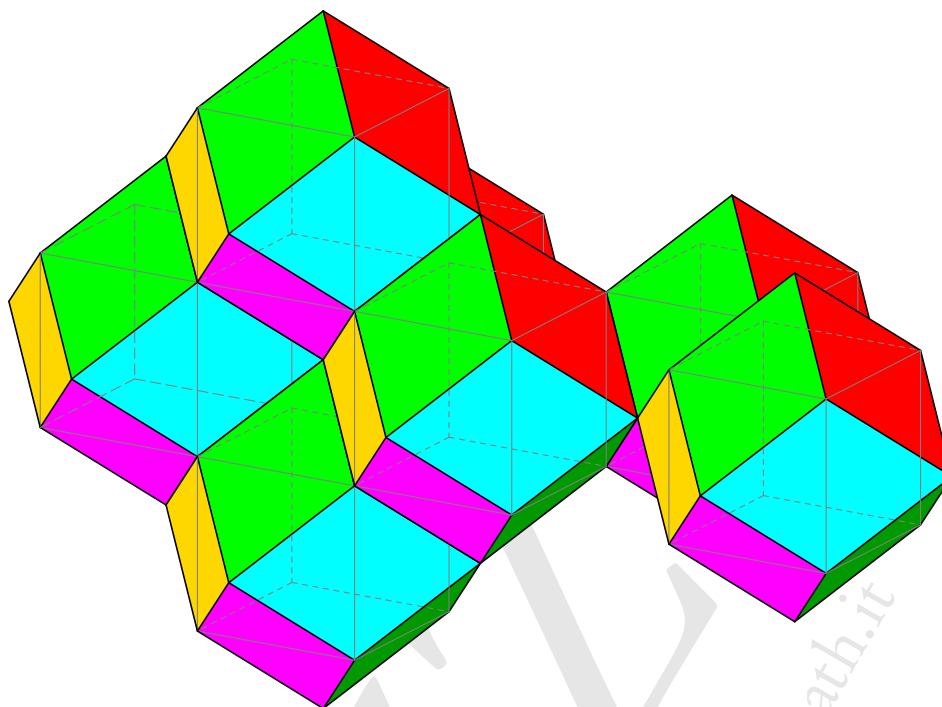


Figura 10.48.: *Tassellazione mediante dodecaedri rombici: aggiunta di poliedri*

La struttura della tassellazione con dodecaedri rombici può essere ancora meglio compresa esaminando la figura 10.49, dove è mostrata la costruzione di un dodecaedro rombico a partire da una croce di sette cubi.

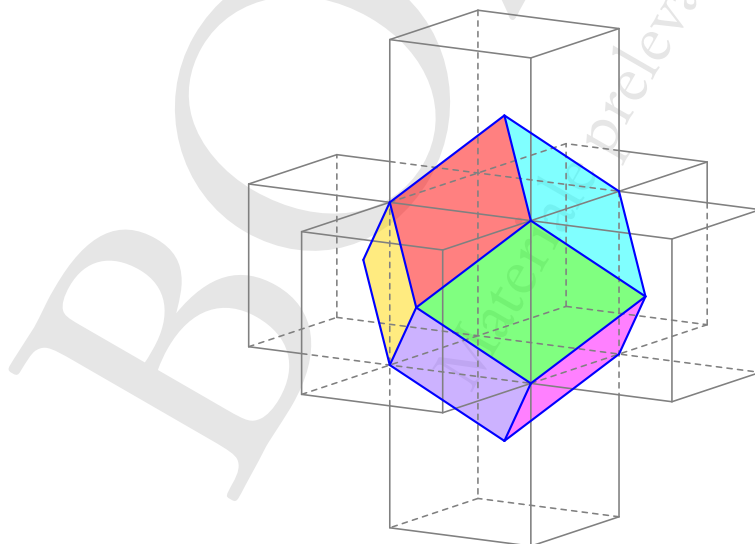


Figura 10.49.: *Il dodecaedro rombico costruito con sette cubi*

Particolarmente interessante il fatto che la tassellazione regolare realizzata con il dodecaedro rombico è collegata al problema dell'impacchettamento ottimale di sfere: se consideriamo delle sfere deformabili, disposte in maniera ottimale in modo da minimizzare gli spazi vuoti, e le comprimiamo fino a eliminare questi spazi vuoti, esse assumeranno esattamente la forma di dodecaedri rombici.

Di questo problema (originato dal problema della disposizione delle palle di cannone) si era occupato, sollecitato da Sir Walter Raleigh, il matematico Thomas Harriot negli anni tra il 1585 e 1586. Harriot espose le sue idee a Keplero nel 1611 e quest'ultimo le pubblicò (senza però una dimostrazione) nel suo, più volte citato, *De Nive Sexangula*. Per completezza segnaliamo che il problema dell'impacchettamento ottimale di sfere è stato risolto solo recentemente da Thomas Hales nel 2014.

La figura 10.50 mostra, come esempio, la base di un impacchettamento ottimale esagonale, mentre la figura 10.51 mostra una piramide costruita su questo impacchettamento.

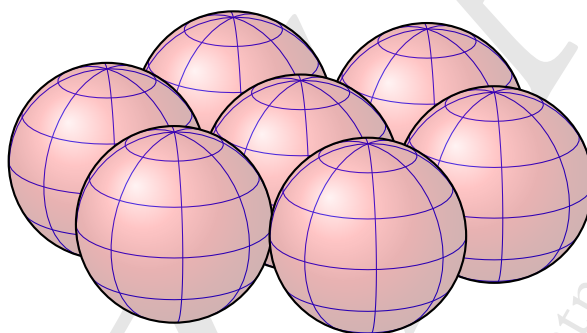


Figura 10.50.: Base di un impacchettamento esagonale di sfere

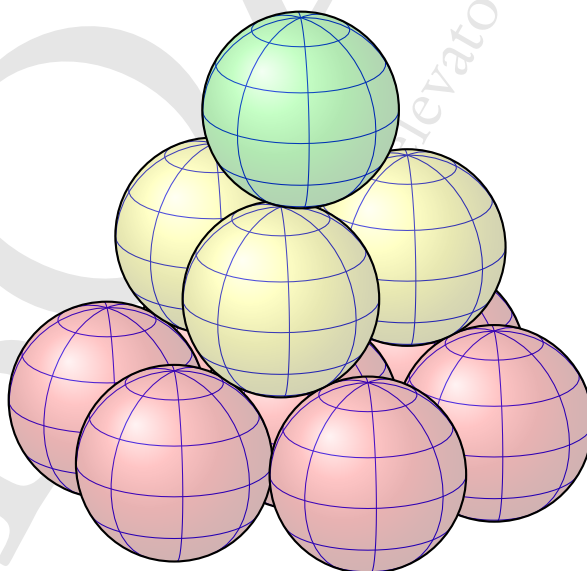


Figura 10.51.: Piramide ottenuta con un impacchettamento a base esagonale di sfere

10.5.3. Tassellazioni con più poliedri

Già con i poliedri regolari abbiamo visto che è possibile costruire una tassellazione alternativa a quella cubica utilizzando due poliedri diversi, precisamente ottaedri e tetraedri. Il numero di tassellazioni possibili, sempre rimanendo nell'ambito delle tassellazioni "faccia a faccia", aumenta considerevolmente se si considerano quelle costruite da più di un poliedro di cui almeno uno sia un poliedro archimedeo. Nelle figure che seguono considereremo le varie situazioni possibili, a partire da quelle con due poliedri.

Le varie situazioni sono riassunte nel seguente schema.

- Tetraedri e tetraedri troncati;
- ottaedri e cubi troncati;
- ottaedri e cubottaedri;
- cubottaedri, rombicubottaedri, cubi;
- tetraedri, rombicubottaedri, cubi;
- cubi, ottaedri troncati, cubottaedri troncati (grandi rombicubottaedri);
- cubottaedri, tetraedri troncati, ottaedri troncati;
- tetraedri troncati, cubi troncati, cubottaedri troncati (grandi rombicubottaedri).

Oltre a queste combinazioni, che coinvolgono solo poliedri archimedei e poliedri regolari, esistono altre possibilità, coinvolgenti anche prismi: ce ne occuperemo nel paragrafo 10.5.4.

La tassellazione con tetraedri e tetraedri troncati è costruita utilizzando come nucleo due tetraedri troncati, in posizione "rovesciata", affiancati, come mostrati nella figura 10.52. Successivamente si riempiono i fori rimasti con tetraedri.

Con due tetraedri troncati e due tetraedri è possibile costruire un parallelepipedo obliquo con cui la tassellazione dell'intero spazio è realizzata facilmente. La figura 10.53 mostra il solido ottenuto affiancando due di questi parallelepipedi. Il rapporto di questa tassellazione è 1 : 1, nel senso che il numero dei due solidi utilizzati è identico.

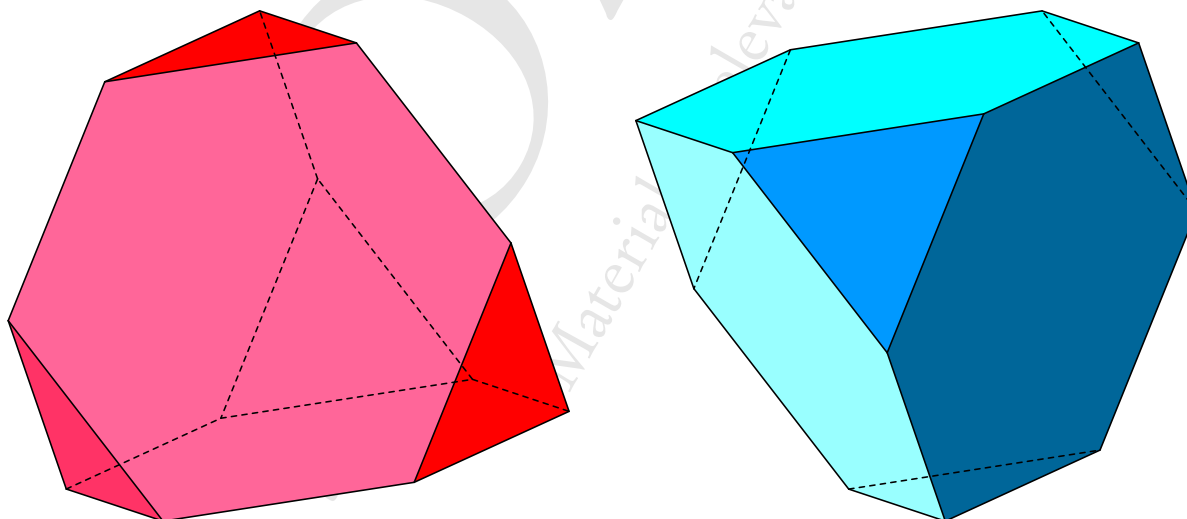


Figura 10.52.: *Due tetraedri troncati in posizione "rovesciata", utilizzati come nucleo della tassellazione con tetraedri troncati e tetraedri*

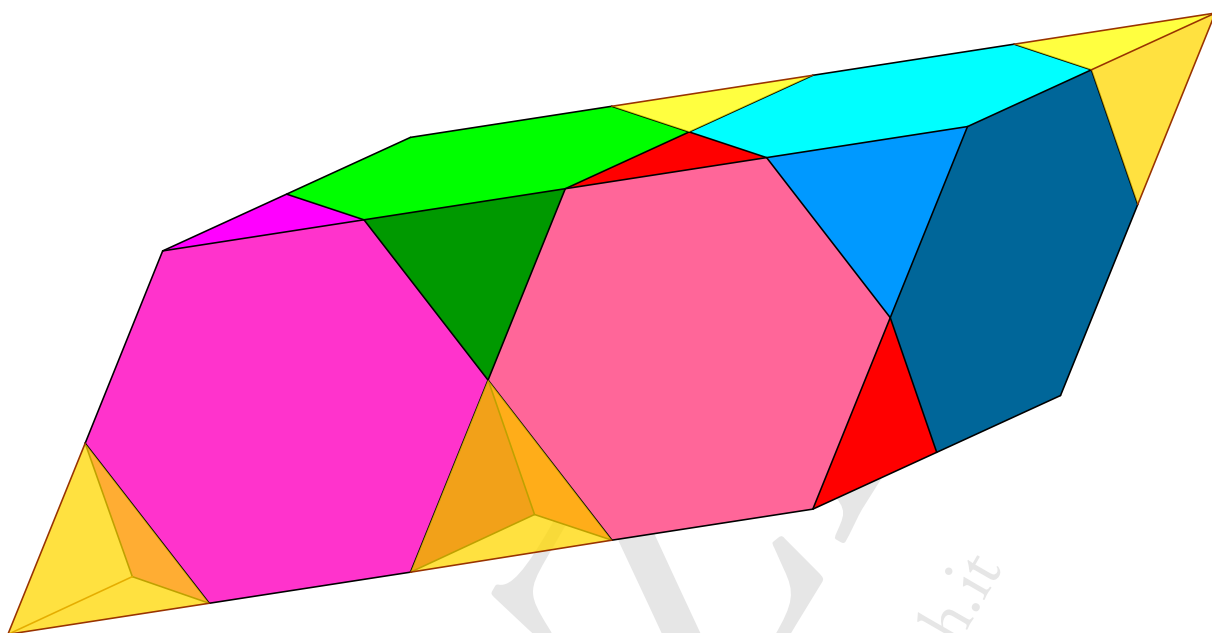


Figura 10.53.: *Tassellazione dello spazio mediante tetraedri e tetraedri troncati*

La tassellazione mediante ottaedri e cubi troncati è estremamente semplice da comprendere ed è illustrata nella figura 10.54. Anche in questo caso il rapporto è 1 : 1.

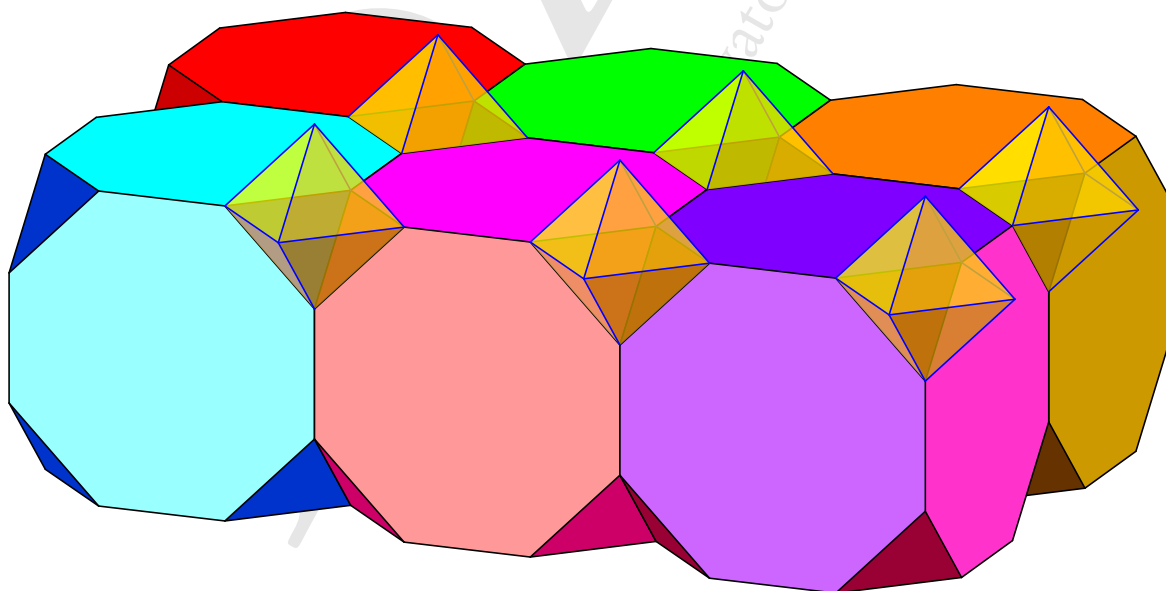


Figura 10.54.: *Tassellazione dello spazio mediante cubi troncati e ottaedri*

La tassellazione con ottaedri e cubottaedri mantiene il rapporto 1 : 1 delle due precedenti ed è illustrata nella figura 10.55.

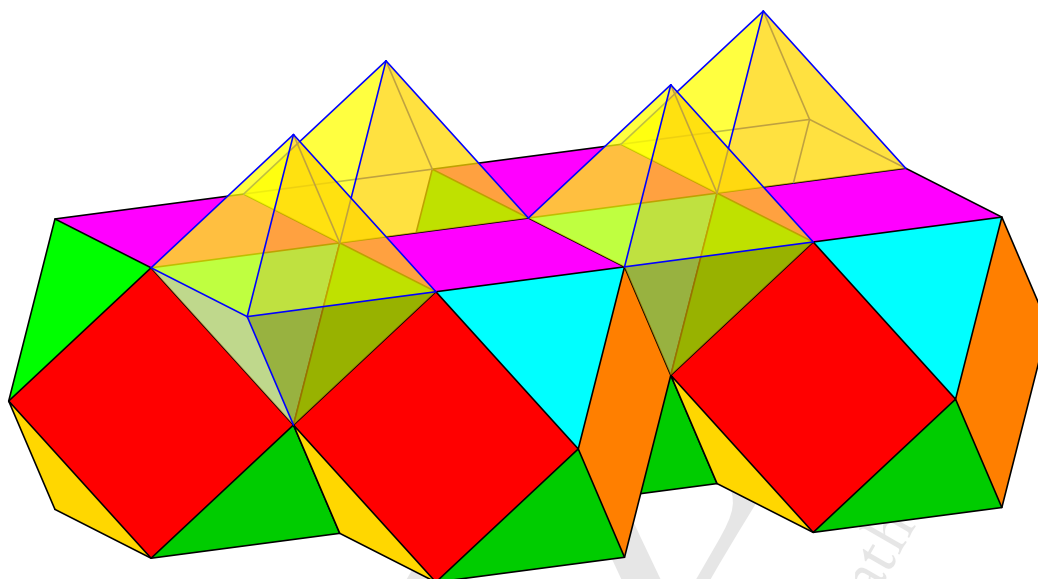


Figura 10.55.: Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e cubottaedri

Il passaggio da due a tre poliedri rende la comprensione delle strutture decisamente più complessa: per questo proporremo, nelle varie situazioni, figure che riproducono diversi stadi verso la tassellazione completa. Per il caso di rombicubottaedri, cubottaedri e cubi, conviene iniziare con uno strato di rombicubottaedri, come proposto nella figura 10.56.

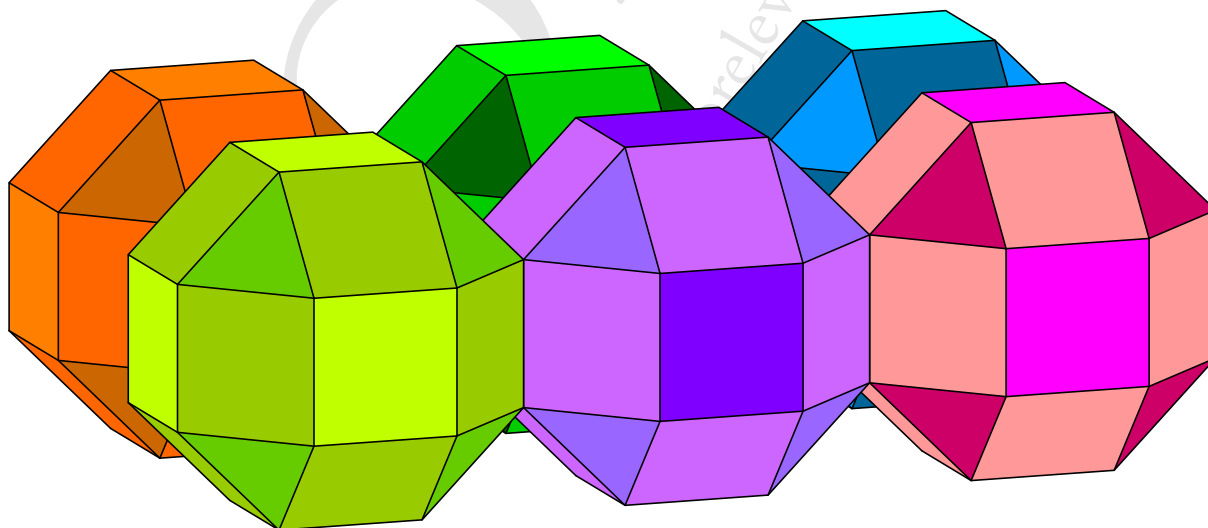


Figura 10.56.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: uno strato di rombicubottaedri

Nello spazio vuoto individuato da quattro rombicubottaedri inseriamo un cubottaedro come mostrato nella figura 10.57, dove, per maggiore chiarezza, abbiamo mostrato solo tre dei quattro rombicubottaedri.

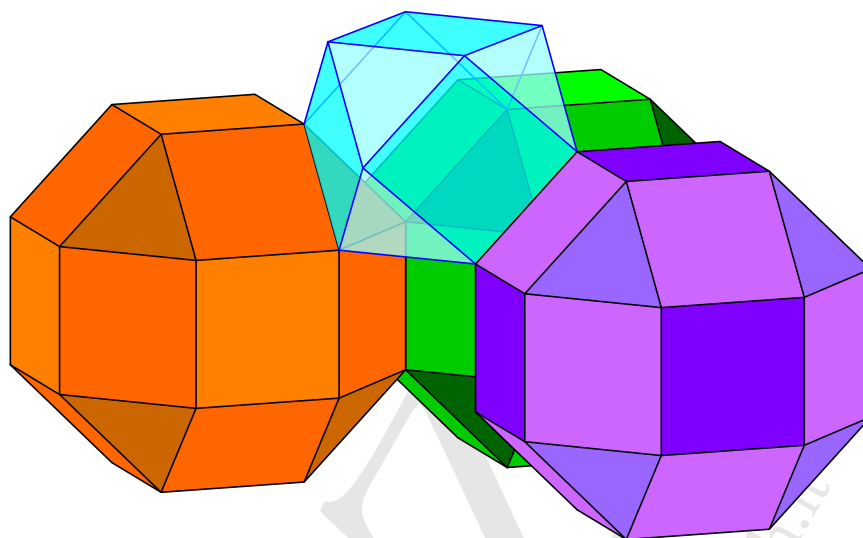


Figura 10.57.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: inserimento di un cubottaedro

Successivamente, sempre nello stesso spazio vuoto, inseriamo dei cubi, come mostrato nella figura 10.58.

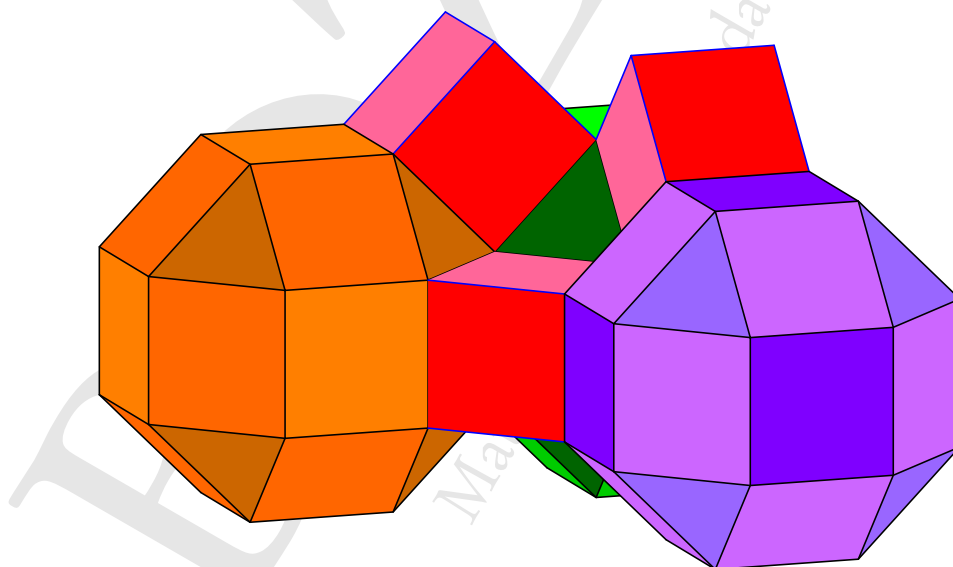


Figura 10.58.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: inserimento di cubi

La figura 10.59 mostra, infine, lo schema complessivo della tassellazione. In questa tassellazione il rapporto rombicubottaedri:cubottaedri:cubi è di 1 : 1 : 3.

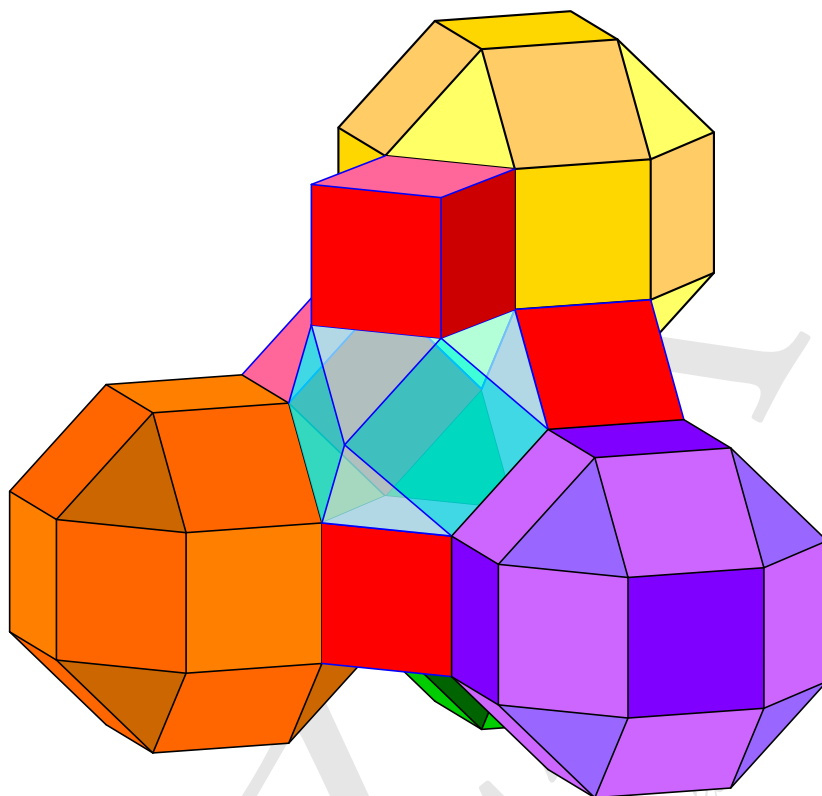


Figura 10.59.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubottaedri, cubi: la struttura complessiva

Per il caso che coinvolge rombicubottaedri, cubi e tetraedri, iniziamo nuovamente con uno strato di rombicubottaedri, sfasati rispetto alla situazione precedente, come mostrato nella figura 10.60.

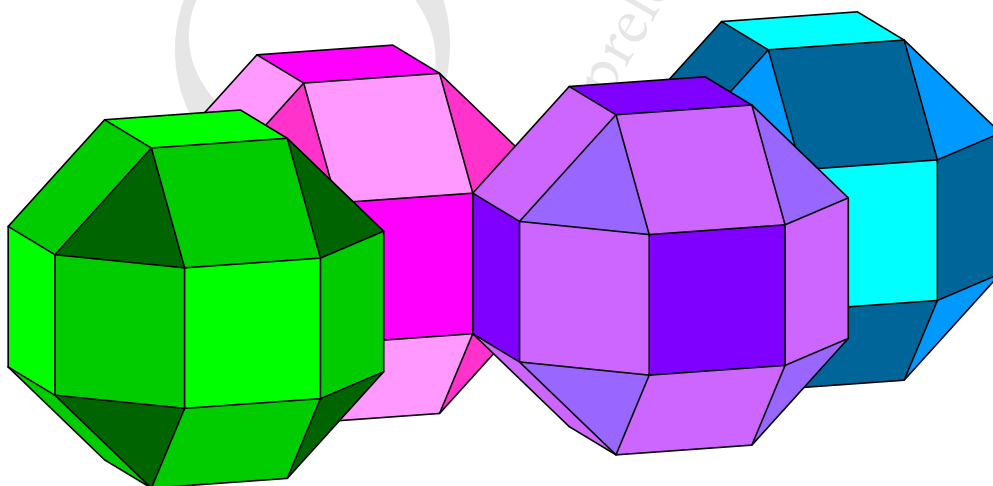


Figura 10.60.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubi e tetraedri: uno strato di rombicubottaedri

Nello spazio vuoto individuato da quattro rombicubottaedri inseriamo un cubo e alcuni tetraedri come mostrato nella figura 10.61.

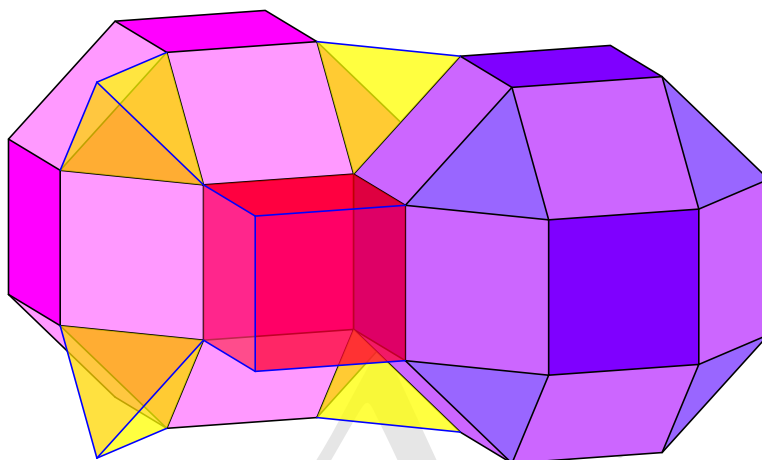


Figura 10.61.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubi e tetraedri: inserimento di un cubo e di tetraedri

Possiamo ora procedere iniziando un secondo strato di rombicubottaedri, come mostrato nella figura 10.62. Seguendo poi lo stesso schema si potrà completare totalmente la tassellazione, nella quale il rapporto rombicubottaedri:cubi:tetraedri è di 1 : 1 : 2.

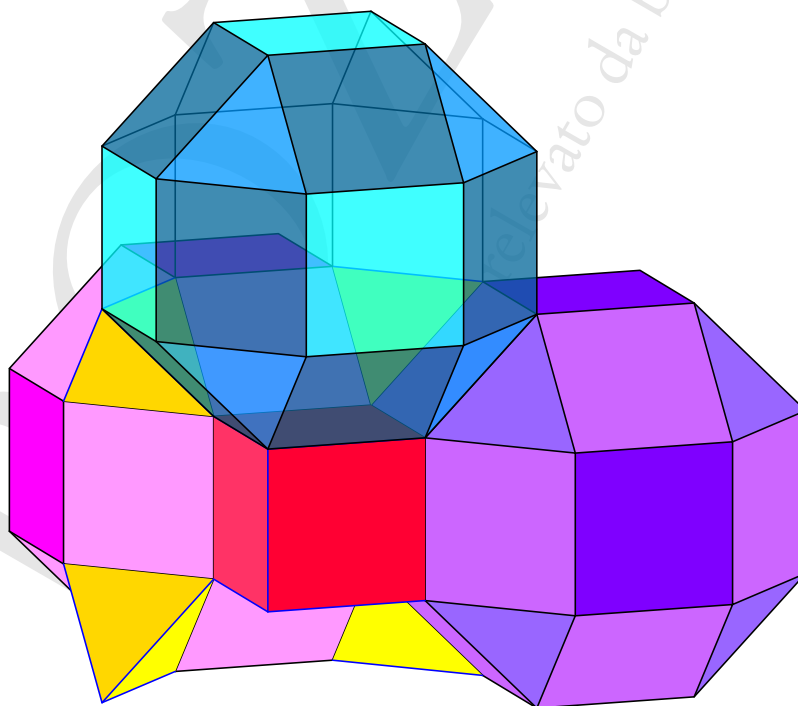


Figura 10.62.: Tassellazione con rombicubottaedri, cubi e tetraedri: inizio di un secondo strato di rombicubottaedri

Il caso successivo coinvolge grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati. Cominciamo a costruire uno strato di grandi rombicubottaedri, come mostrato nella figura 10.63.

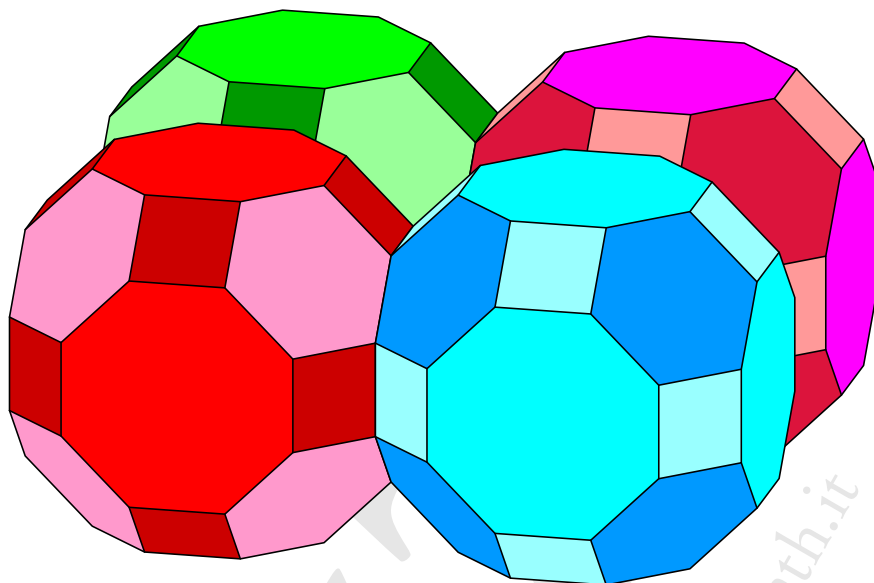


Figura 10.63.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati: uno strato di grandi rombicubottaedri

Nello spazio vuoto individuato da quattro grandi rombicubottaedri cominciamo ad aggiungere dei cubi, come mostrato nella figura 10.64.

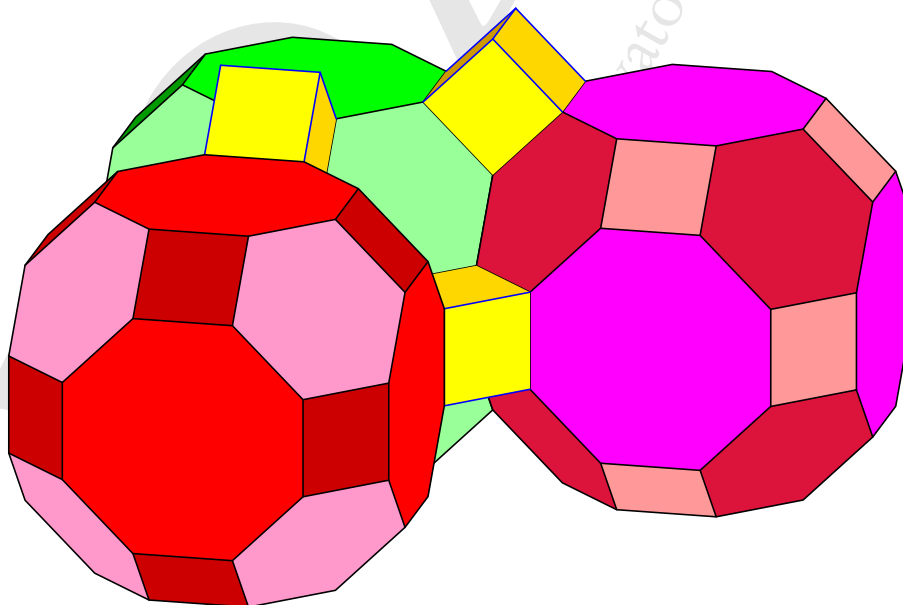


Figura 10.64.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati: aggiunta di cubi

Aggiungiamo infine un ottaedro troncato, come mostrato nella figura 10.65. Questo completa lo schema di questa tassellazione in cui il rapporto grandi rombicubottaedri:cubi:ottaedri troncati è di $1:3:1$.

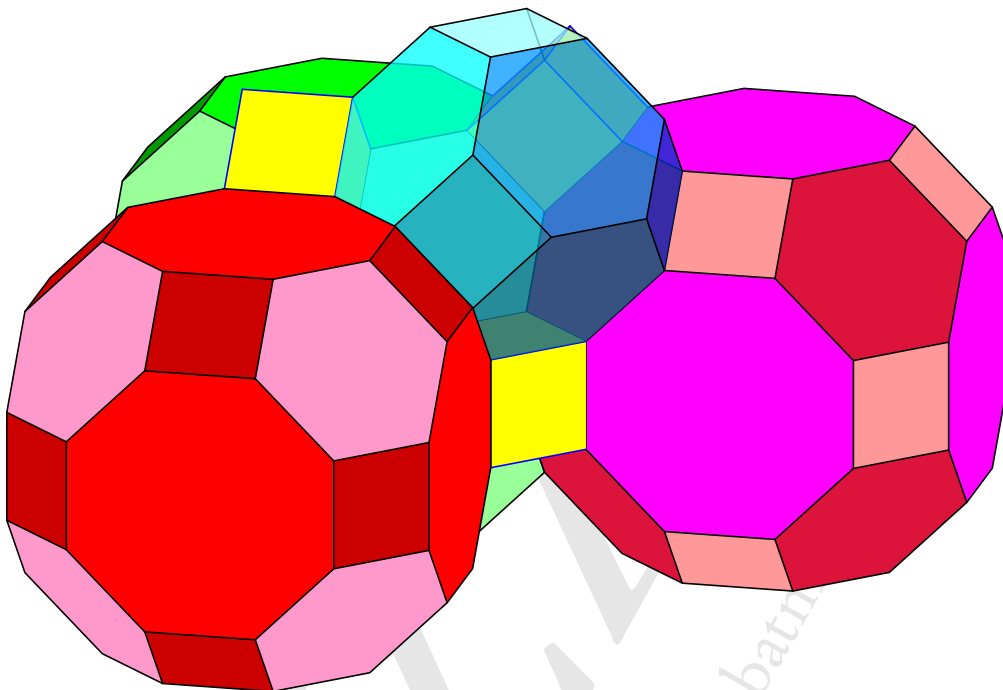


Figura 10.65.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi, ottaedri troncati: aggiunta di un ottaedro troncato

Le due ultime tassellazioni del tipo indicato coinvolgono solo poliedri archimedeei. Nella prima compaiono ottaedri troncati, cubottaedri e tetraedri troncati. Per renderci conto della sua tecnica costruttiva riprendiamo in esame un ottaedro troncato, mostrato nella figura 10.66: esso costituirà il nucleo da cui partire per costruire la tassellazione.

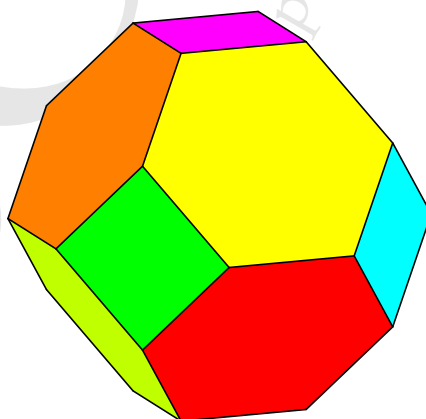


Figura 10.66.: Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: un ottaedro iniziale

Inseriamo successivamente dei cubottaedri incollandoli sulle facce quadrate dell'ottaedro troncato, come mostrato nella figura 10.67.

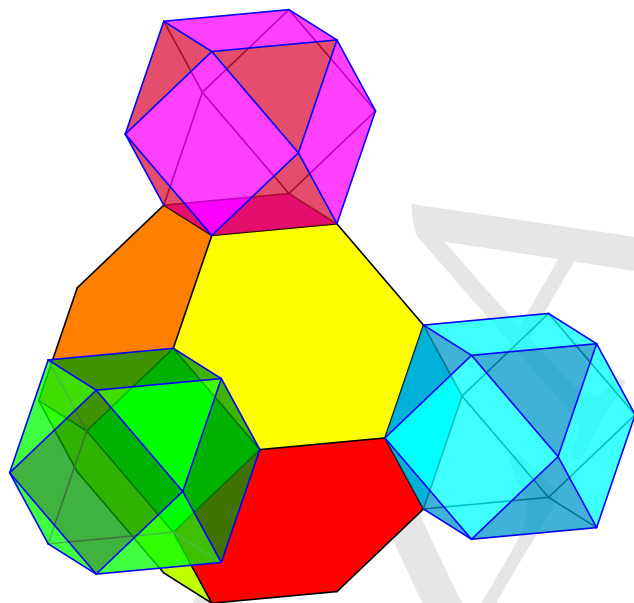


Figura 10.67.: Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: aggiunta di cubottaedri

Sulle facce esagonali dell'ottaedro troncato incolliamo dei tetraedri troncati, come mostrato nella figura 10.68.

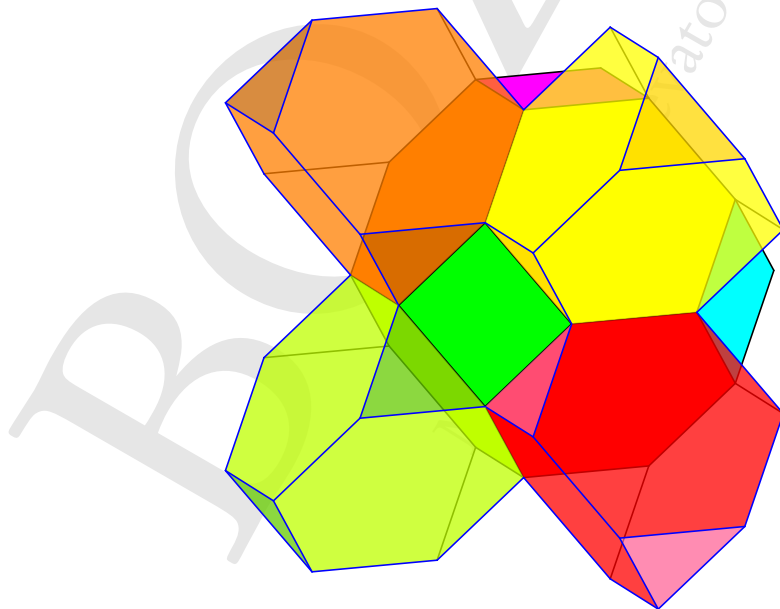


Figura 10.68.: Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: aggiunta di tetraedri troncati

Possiamo ora proseguire inserendo di nuovo degli ottaedri troncati, e seguendo poi lo stesso schema. Il rapporto ottaedri troncati: cubottaedri:tetraedri troncati è $1 : 1 : 2$.

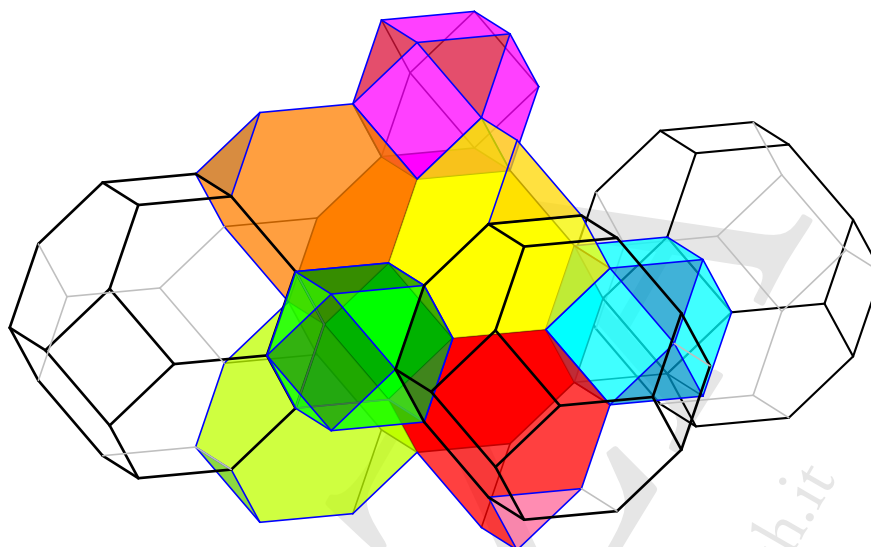


Figura 10.69.: Tassellazione con ottaedri troncati, cubottaedri, tetraedri troncati: aggiunta di cubottaedri, tetraedri troncati e di altri ottaedri troncati

Nell'ultima tassellazione della serie sono coinvolti, come nella precedente, solo poliedri archimedei, precisamente grandi rombicubottaedri, cubi troncati e tetraedri troncati. Cominciamo a considerare uno strato di grandi rombicubottaedri, incollati in modo da avere una faccia quadrata in comune, come mostrato nella figura 10.70.

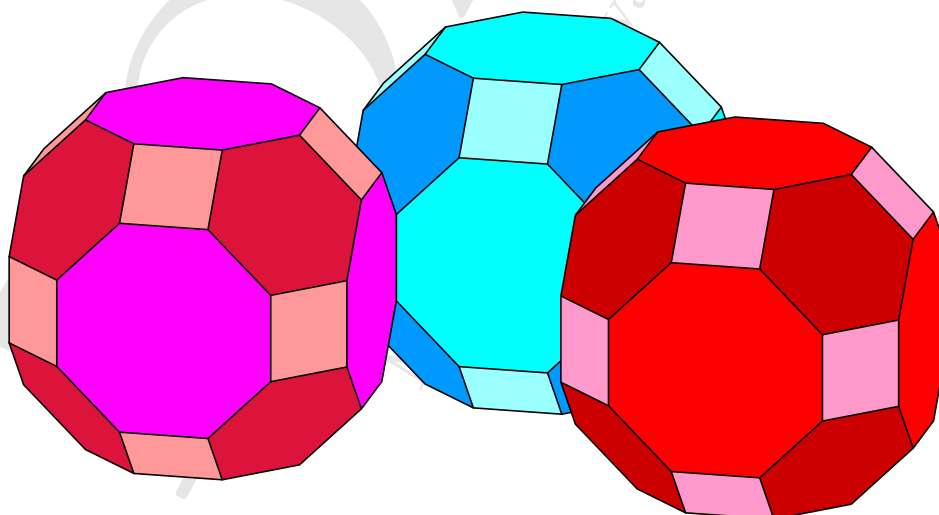


Figura 10.70.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: un primo gruppo di grandi rombicubottaedri

Aggiungiamo poi dei tetraedri troncati come mostrato nella figura 10.71, in modo da cominciare a riempire lo spazio vuoto individuato da tre grandi rombicubottaedri.

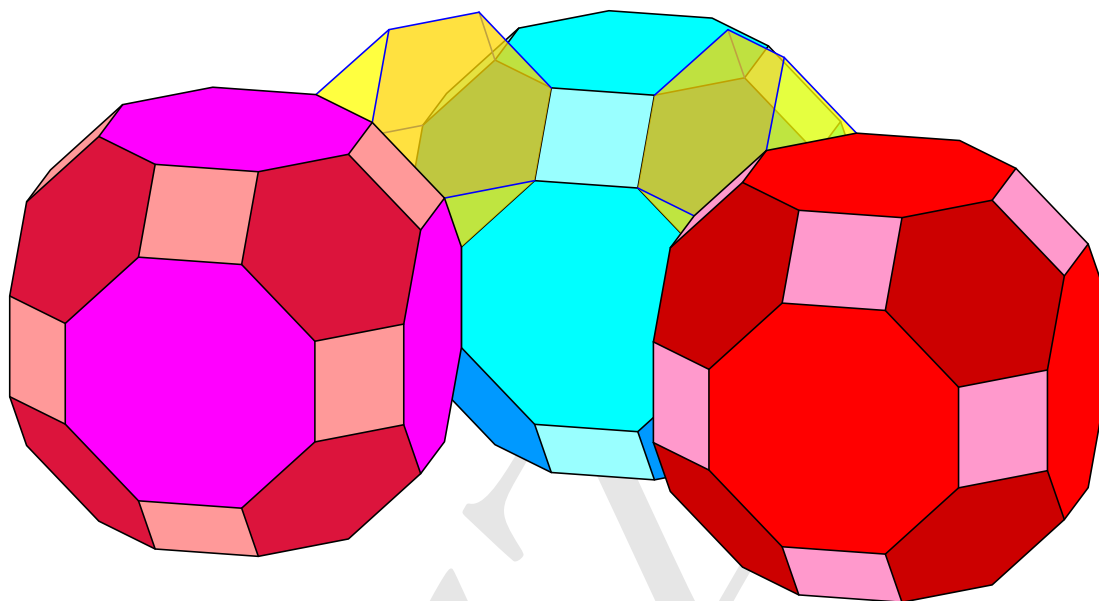


Figura 10.71.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: aggiunta di tetraedri troncati

Nello stesso spazio vuoto inseriamo un cubo troncato, come mostrato nella figura 10.72

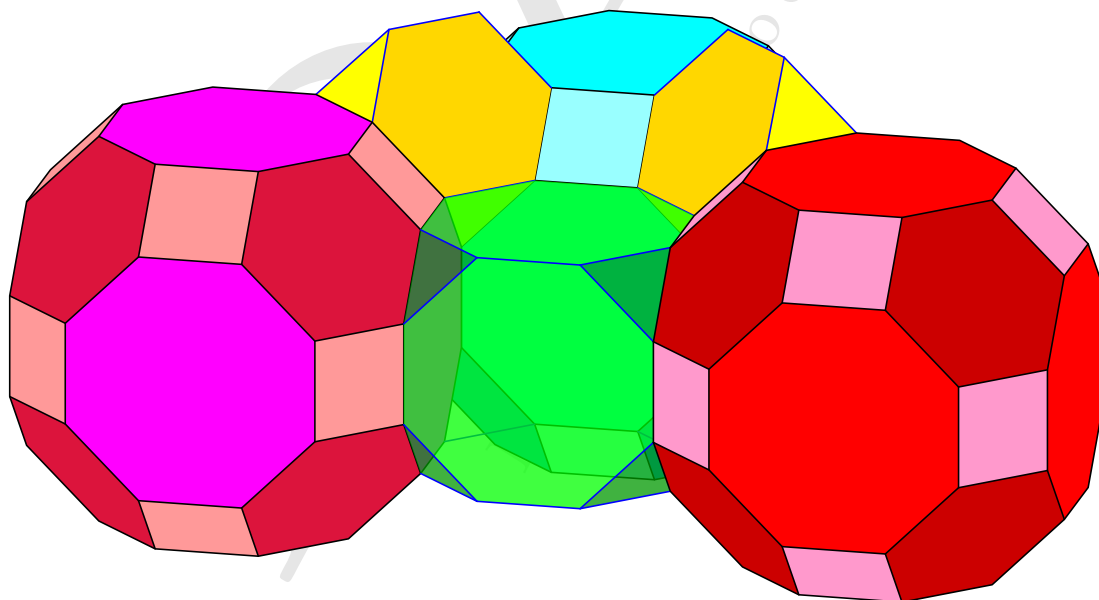


Figura 10.72.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: aggiunta di un cubo troncato

Possiamo ora completare la tassellazione aggiungendo altri grandi rombicubottaedri e proseguendo poi con lo stesso schema. Il rapporto grandi rombicubottaedri:cubi troncati:tetraedri troncati è, in questa tassellazione, di $1 : 1 : 2$.

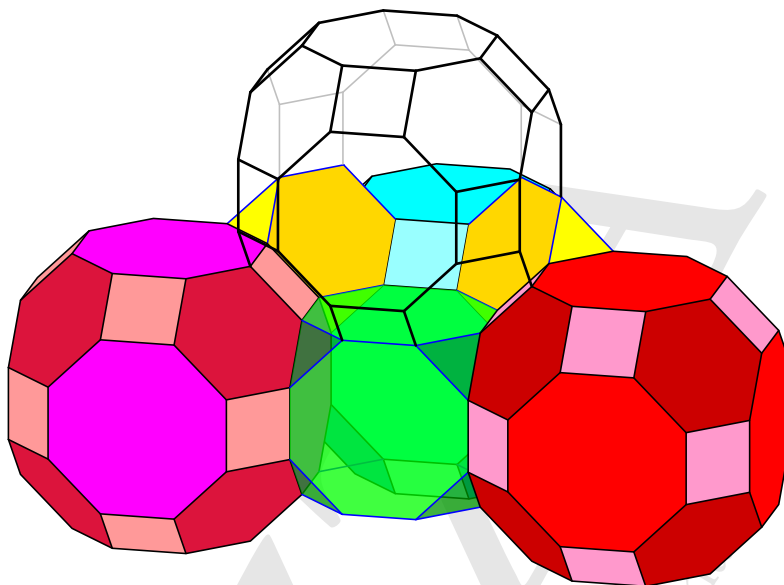


Figura 10.73.: *Tassellazione con grandi rombicubottaedri, cubi troncati, tetraedri troncati: aggiunta di un ulteriore grande rombicubottaedro*

10.5.4. Tassellazioni coinvolgenti prismi

L'aggiunta di prismi uniformi, cioè prismi retti a basi poligonali regolari e facce laterali quadrate aumenta ancora le tassellazioni possibili, sia considerando la possibilità di mescolare prismi e altri poliedri regolari o semiregolari, sia quella di usare solo prismi. Proponiamo solo due esempi.

Il primo coinvolge grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale, come mostrato nelle figure 10.74, 10.75 e 10.76.

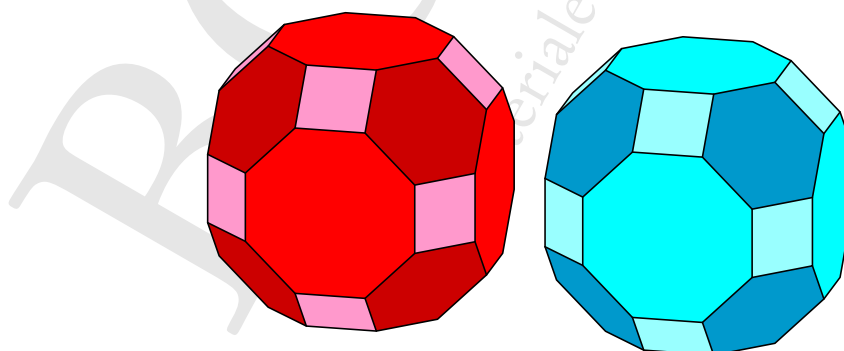


Figura 10.74.: *Tassellazione con grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale: due grandi rombicubottaedri affiancati*

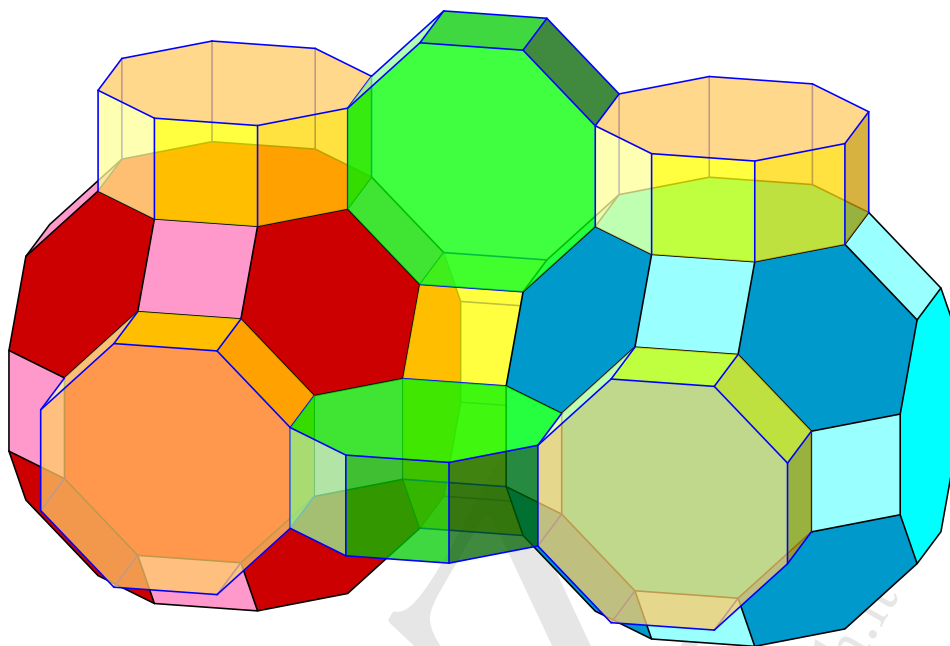


Figura 10.75.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale: aggiunta di prismi a base ottagonale

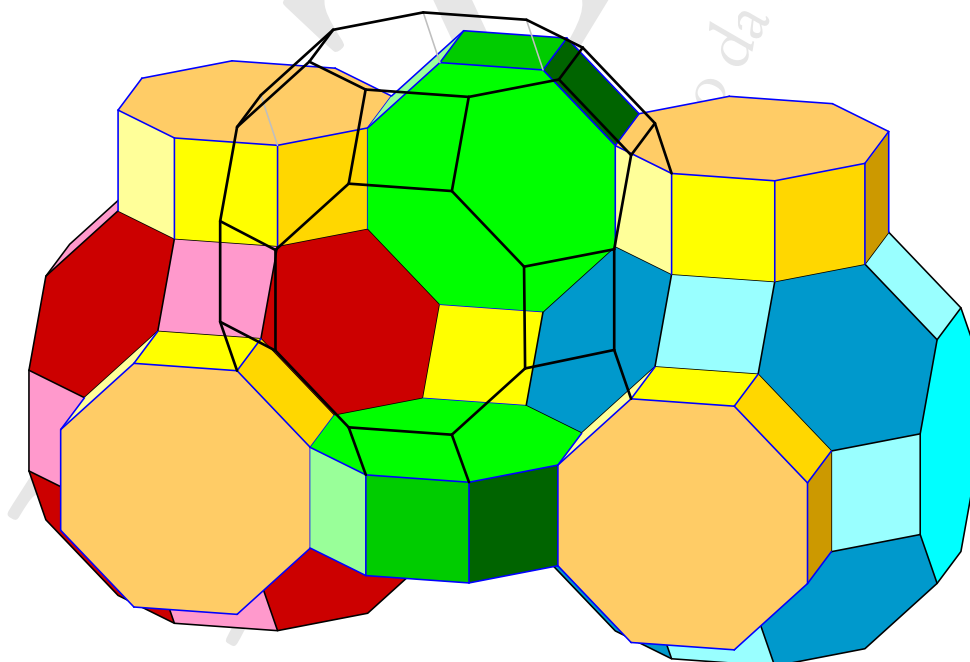


Figura 10.76.: Tassellazione con grandi rombicubottaedri e prismi a base ottagonale: aggiunta di un ulteriore grande rombicubottaedro

Il secondo esempio coinvolge prismi a base esagonale e a base triangolare. Come si può vedere dalla figura 10.77 si tratta in sostanza di una tassellazione piana, estrusa in modo da ottenere prismi uniformi. Con lo stesso principio si possono ottenere molte altre tassellazioni con soli prismi.

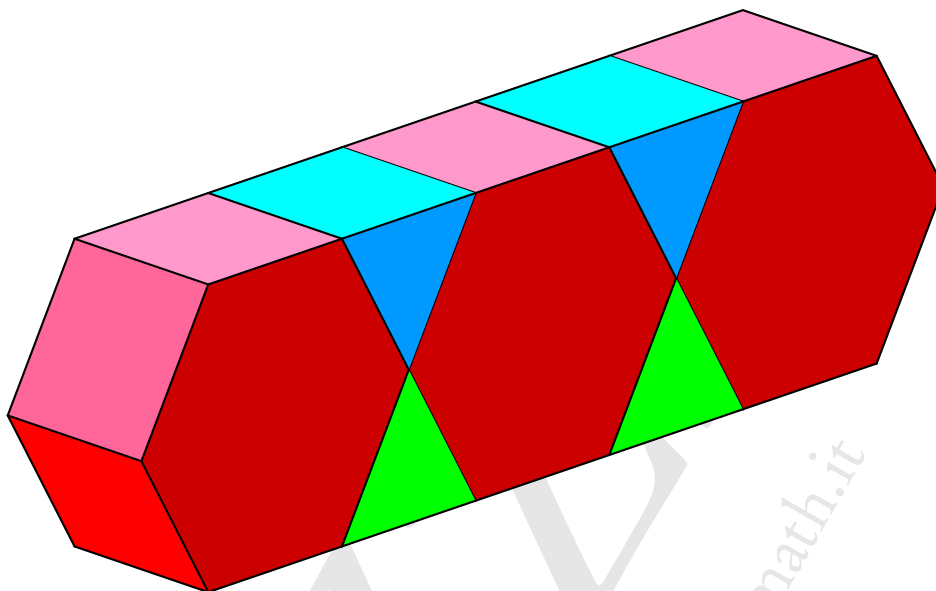


Figura 10.77.: Una possibile tassellazione con prismi a base esagonale e triangolare

A. I dittatori nemici

I grani di polline di molte specie vegetali hanno forma grossolanamente sferica e il polline esce da fori distribuiti sulla superficie: questi fori sono disposti in posizione abbastanza regolare e il loro numero varia da specie a specie. Nel 1930 il biologo olandese Pieter Merkus Lambertus Tammes (1903-1980) descrisse il numero e la disposizione di questi “exit points” per numerose specie, verificando che i numeri 4, 6, 8, 12 sono i numeri più frequenti, il 5 non compare mai, i numeri 7, 9, 10 sono alquanto rari, mentre l’11 non compare quasi mai. Tammes verificò anche che la distanza tra questi fori è approssimativamente costante e che il loro numero è proporzionale alla superficie della sfera.

In sostanza la disposizione ottimale dei fori può essere vista matematicamente come il problema di sistemare sulla superficie sferica un certo numero di calotte sferiche identiche in modo che esse non si sovrappongano: i fori di uscita del polline saranno i centri delle calotte.

È appunto come risultato di queste ricerche e di questa considerazione che Tammes propose una questione, detta *Problema di Tammes*, che in termini matematici si può riassumere come segue: *qual è il massimo diametro di N cerchi uguali (calotte sferiche) che si possono disporre sulla superficie di una sfera unitaria senza che ci sia sovrapposizione? Come devono essere distribuiti i cerchi? Esiste un’unica soluzione?*

Una formulazione più suggestiva ed equivalente del problema di Tammes può essere espressa come segue.

Su un pianeta abitavano dei dittatori che si detestavano. Ubriachi di potere, desideravano possedere un grande territorio, essenzialmente per essere l’uno alla massima distanza dall’altro. Dopo aspre lotte finirono per arrivare ad un accordo: ciascuno avrebbe conservato come proprio territorio tutti i punti, sulla sfera, più vicini a lui che a un altro dittatore. Restava da far in modo che ciascun castello fosse alla massima distanza possibile dall’altro. L’accordo era che ciascun dominio fosse il più grande possibile.

Questa formulazione è detta *Problema dei dittatori nemici*. È evidente che i territori di ciascun dittatore dovranno essere a forma di calotta sferica centrata sui castelli, con la condizione che la distribuzione dei castelli sia ottimale.

La letteratura sulla questione è sterminata e noi qui vogliamo occuparci solo di un particolare aspetto connesso con i poliedri.

Il problema ha soluzioni esatte per $N \leq 14$ e per $N = 24$, mentre ha soluzioni approssimate, costruite al computer, per molti altri casi. Alcune di queste soluzioni, precisamente quelle relative ai numeri 4, 6, 8, 12 e 24, sono strettamente collegate ai poliedri, con alcune sorprese, e le tratteremo qui di seguito.

Sono interessanti i casi $N = 5$ e $N = 11$, che vedremo in dettaglio e che spiegano perché in natura queste disposizioni dei fori nei grani di polline non si presentino mai o quasi mai: è, al solito, un problema di efficienza.

La soluzione relativa al numero 2 è ovvia: basta prendere i due punti in posizione diametralmente opposta. Le due calotte sferiche saranno in questo caso semplicemente due semisfere. È l’unico caso in cui i dittatori occuperanno l’intera superficie del pianeta: in tutti gli altri casi rimarranno dei “territori di nessuno”. In questo caso la soluzione è unica, a parte le ovvie rotazioni.

Altrettanto semplice la soluzione relativa al numero 3: poiché tre punti sono sempre complanari, essi dovranno stare in un piano equatoriale della sfera ed essere vertici di un triangolo equilatero di quel piano. Si veda la figura A.1.

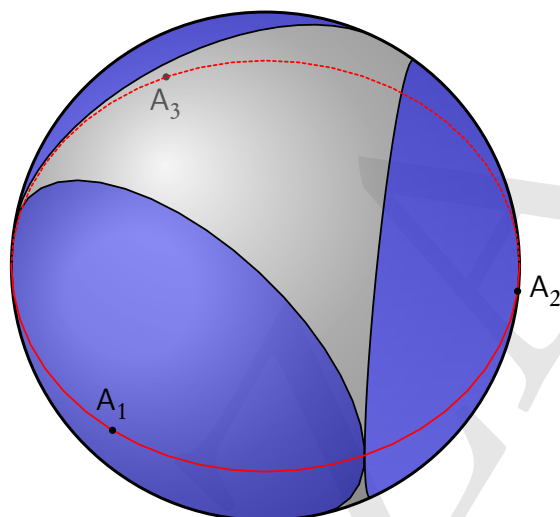


Figura A.1.: *Il problema di Tammes con tre punti*

La soluzione relativa al numero 4 coinvolge il tetraedro regolare, come era prevedibile: i quattro centri sono i vertici del tetraedro inscritto nella sfera. Si veda la figura A.2. Anche in questo caso la soluzione è unica, a parte le ovvie rotazioni.

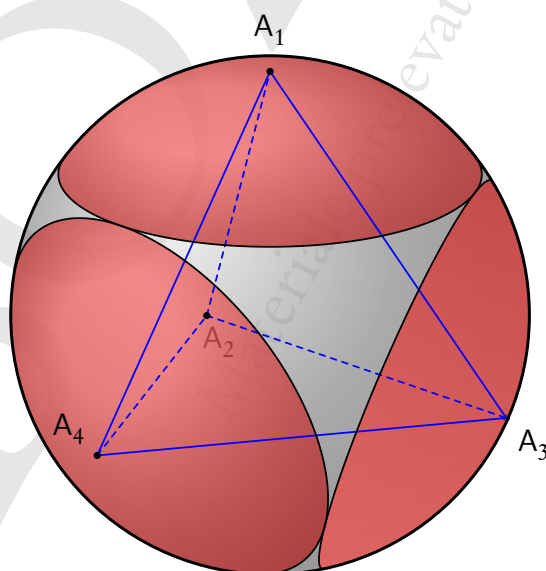


Figura A.2.: *Il problema di Tammes con quattro punti*

La soluzione corrispondente al numero 6 coinvolge l'ottaedro regolare, ancora una volta come era prevedibile: i sei centri sono i vertici dell'ottaedro inscritto nella sfera. Si veda la figura A.3. La soluzione è unica, a parte le ovvie rotazioni.

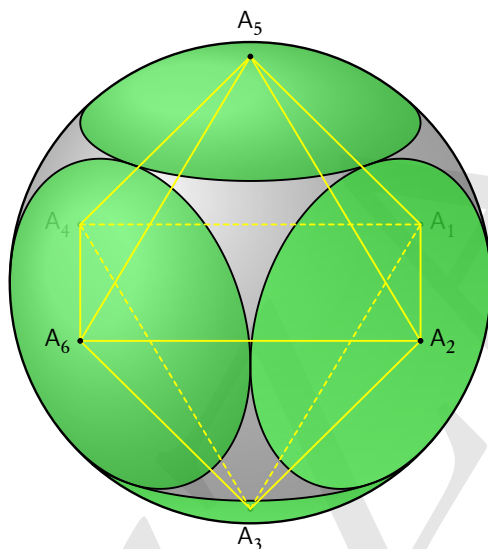


Figura A.3.: *Il problema di Tammes con sei punti*

Il caso $N = 8$ comporta la prima sorpresa per la soluzione del problema di Tammes: gli otto centri non si dispongono sui vertici di un cubo, ma su quelli di un antiprisma quadrato inscritto nella sfera, un poliedro con molte meno simmetrie. Si veda la figura A.4.

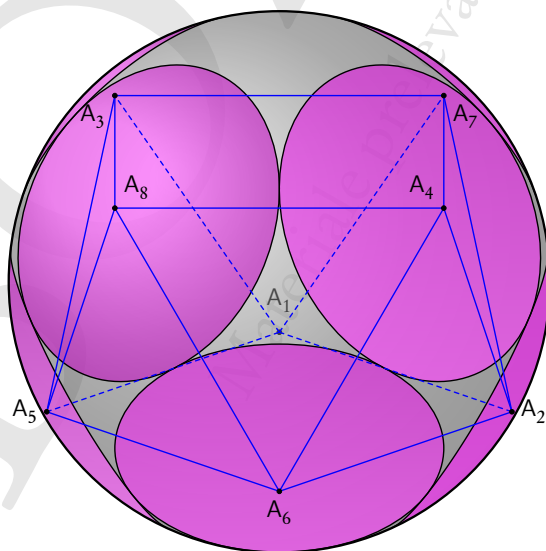


Figura A.4.: *Il problema di Tammes con otto punti*

Nella soluzione corrispondente al numero 12 ricompare nuovamente un poliedro regolare: i dodici centri si trovano sui vertici di un icosaedro regolare inscritto nella sfera. Si veda la figura A.5.

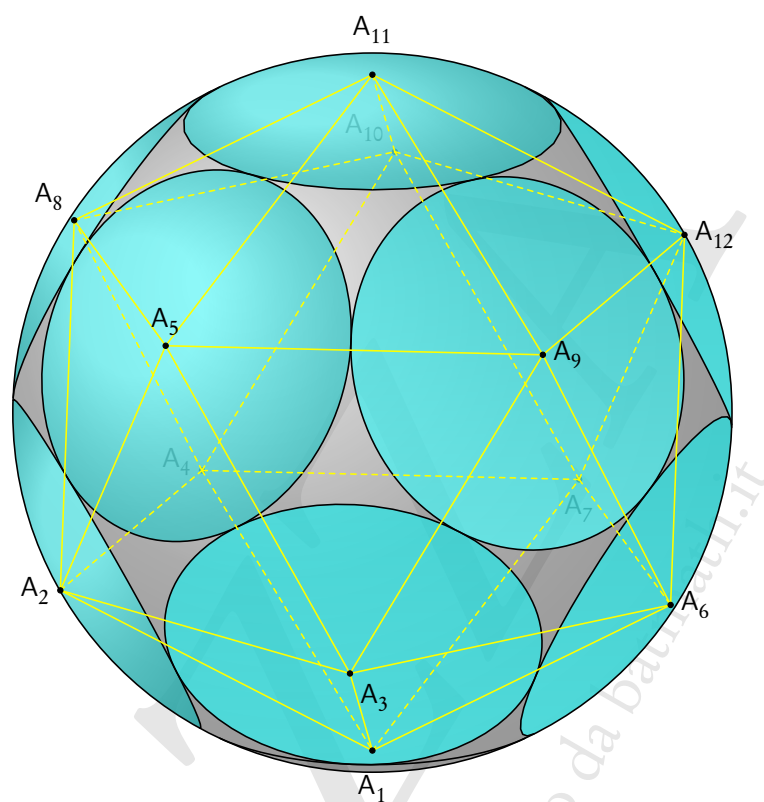


Figura A.5.: *Il problema di Tammes con dodici punti*

Con l'icosaedro regolare (dodici vertici) si chiude l'elenco dei poliedri platonici che forniscono la soluzione del problema di Tammes. I tre poliedri interessati sono i tre deltaedri regolari, ovvero i tre poliedri regolari a facce triangolari equilateri. Abbiamo già visto che il cubo (otto vertici) non risolve il relativo problema di Tammes. La stessa cosa succede per l'ultimo dei poliedri platonici, il dodecaedro, con venti vertici. Anzi, a tutt'oggi, il caso dei venti vertici non ha una soluzione esatta nota.

Il cubo, escluso dalle possibilità per il caso degli otto punti, si prende però una "rivincita" con il caso dei ventiquattro punti, dove la soluzione coinvolge i vertici del cubo camuso che sono, appunto ventiquattro. Si veda la figura A.6.

Come già accennato, i casi $N = 5$ e $N = 11$ sono particolarmente interessanti: la loro soluzione è infatti conseguenza della soluzione per il caso, rispettivamente, di sei e dodici punti, e si ottiene da questi ultimi per soppressione di un punto. C'è però una sostanziale differenza tra i due casi, che ora esamineremo.

Nel caso $N = 5$, partiamo dalla soluzione relativa al numero 6, che coinvolge l'ottaedro regolare, e consideriamo due centri antipodali. Gli altri quattro si dispongono sul relativo equatore: se si sopprime uno di questi centri e si dispongono gli altri tre in una posizione qualsiasi purché siano separati da un

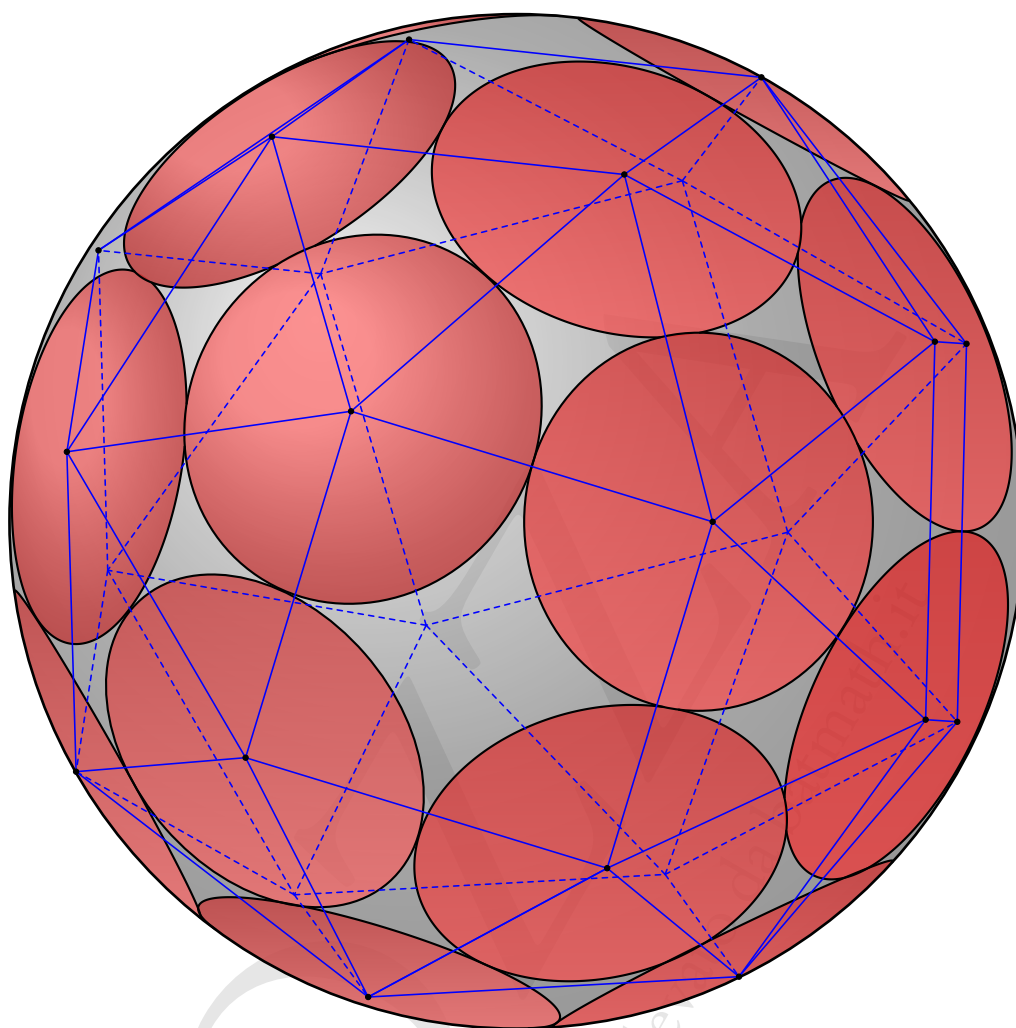


Figura A.6.: *Il problema di Tammes con ventiquattro punti*

angolo al centro non inferiore a 90° , si ottiene una configurazione ottimale per il caso dei cinque punti. Ci sono dunque infinite possibilità.

Per il caso $N = 11$ una soluzione ottimale si ottiene sopprimendo uno dei punti relativi alla configurazione con dodici punti, ma non si possono muovere gli undici centri rimasti. Considerate dunque le simmetrie rotazionali dell'icosaedro le soluzioni relative al caso degli undici punti differiscono tra di loro solo per rotazioni: sostanzialmente la soluzione si può ritenere unica.

Abbiamo già ricordato che la letteratura sul problema di Tammes è sterminata: qui menzioniamo solo che la soluzione esatta relativa al caso $N = 14$ è stata ottenuta solo recentemente, precisamente nel 2014 da Oleg R. Musin e Alexey S. Tarasov.

Per chiudere questa breve trattazione segnaliamo solo che il problema dei dittatori nemici è legato ad altri problemi molto interessanti dal punto di vista applicativo, per esempio quello della distribuzione di N cariche identiche sulla superficie di una sfera. Esso è collegato, almeno in parte, anche alla distribuzione

delle fossette nelle palline da golf (problema tutt'altro che banale nel quale intervengono anche i poliedri di Goldberg di cui parleremo nell'appendice B).

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

B. Goldberg e variazioni

In questo capitolo vogliamo proporre una breve introduzione ai *poliedri di Goldberg* e ai loro duali, le *sfere geodetiche*⁽¹⁾ o, anche, *cupole geodetiche*⁽²⁾, nome che è più appropriato per le semisfere geodetiche, che possono essere usate come strutture architettoniche, nonché alla struttura poliedrica dei *fullereni*.

Il titolo del capitolo è ovviamente suggerito dalle celeberrime *Variazioni Goldberg* di Johann Sebastian Bach, anche se ovviamente non c'è alcun legame tra il Goldberg⁽³⁾ del capolavoro di Bach e Michael Goldberg, matematico americano, (1902-1990) che definì i poliedri di cui vogliamo qui occuparci. In ogni caso un legame esiste: le *Variazioni*, come scrive Gian Mario Benzig sul Corriere della Sera (11 maggio 2016), non sono musica comune, hanno un'aura che le distingue, insieme sacra e pitagorica e la loro brillantezza e l'imponente struttura sono un continuo stimolo intellettuale. Lo stesso è vero per i poliedri di Goldberg, che, anche se per ora non molto conosciuti, hanno un grande fascino, non lontano da quello dei solidi platonici, per la loro bellezza, per le loro applicazioni e proprietà matematiche.

B.1. Introduzione

Un poliedro di Goldberg è un poliedro con le seguenti tre proprietà:

1. tutte le sue facce sono esagoni o pentagoni;
2. tutti i suoi vertici hanno valenza tre, ovvero in ogni vertice si incontrano tre facce;
3. il poliedro ha tutte le simmetrie rotazionali dell'icosaedro.

Il dodecaedro regolare è l'unico solido platonico che soddisfa a queste condizioni ed è il più semplice poliedro di Goldberg. L'icosaedro troncato è invece l'unico solido archimedeo con queste proprietà.

La formula di Eulero riguardante il legame tra Vertici, Spigoli e Facce di un poliedro,

$$V - S + F = 2,$$

impone un'importante restrizione alla struttura di un poliedro di Goldberg. Infatti, poichè le facce sono solo pentagoni ed esagoni, possiamo scrivere F come $F_5 + F_6$, ovvero facce pentagonali più facce esagonali. Il numero degli spigoli è dato da

$$S = \frac{5F_5 + 6F_6}{2},$$

¹È anche usato, seppure più raramente, il termine *geode*.

²*Geodesic Domes* in inglese, *Dômes géodésiques* in francese, *Geodätischer Dom* in tedesco.

³Come è noto, secondo un aneddoto del biografo bachiano Johann Forkel, le favolose *Variazioni* sarebbero state scritte per il conte von Keyserling, ambasciatore russo a Dresda, che desiderava farle suonare al suo clavicembalista Johann Gottlieb Goldberg per rasserenare le sue notti insonni. La cosa è poco verosimile visto che Goldberg all'epoca della pubblicazione aveva tredici anni ed è molto improbabile che riuscisse, per quanto bravo, a suonare musica così complessa.

in quanto ci sono rispettivamente 5 e 6 lati per i pentagoni e gli esagoni e ogni poligono condivide un lato con ciascuno dei poligoni adiacenti. Poiché poi i vertici sono trivalenti, si deve avere

$$V = \frac{5F_5 + 6F_6}{3}.$$

Inserendo questi dati nella formula di Eulero il tutto si semplifica in

$$F_5 = 12.$$

Dunque ci sono necessariamente 12 pentagoni, mentre non c'è alcuna indicazione sul numero degli esagoni. C'è però da soddisfare la condizione delle simmetrie rotazionali dell'icosaedro e questo implica, tra l'altro, che ogni pentagono deve essere circondato da esagoni nello stesso modo. Vedremo successivamente altre restrizioni per il numero di facce di questi poliedri.

Per le usuali regole, i duali dei poliedri di Goldberg avranno le seguenti proprietà:

1. tutti i suoi vertici hanno valenza cinque o sei;
2. tutte le sue facce sono triangoli;
3. permangono tutte le simmetrie rotazionali dell'icosaedro.

Questi duali sono usualmente chiamati, come già detto, *sfere geodetiche* o *cupole geodetiche* e furono intensamente studiati da Richard Buckminster Fuller (1895-1983), architetto e designer americano che incontreremo ancora nel paragrafo B.6 sui *fullereni* e nell'appendice C. In realtà a volte anche i poliedri di Goldberg sono chiamati sfere geodetiche, con una denominazione leggermente impropria e che quasi sicuramente Fuller non avrebbe accettato: noi riserveremo questa dicitura per i poliedri a facce triangolari.

L'unica sfera geodetica tra i poliedri regolari è lo stesso icosaedro, qui presente come duale del dodecaedro, mentre tra i poliedri di Catalan, duali degli archimedei, si trova solo il pentacisdodecaedro, duale dell'icosaedro troncato. Per esempio il triacisicosaedro, che pure ha sessanta facce triangolari isosceli e lo stesso numero di vertici e spigoli del pentacisdodecaedro, non soddisfa alla condizione sulla valenza dei vertici e quindi non possiede le richieste simmetrie dell'icosaedro.

Non ci sono, né per i poliedri di Goldberg, né per le sfere geodetiche, richieste di regolarità sulle facce. Per quanto riguarda i primi esistono solo i due poliedri già citati, cioè il dodecaedro e l'icosaedro troncato che hanno come facce poligoni regolari. Per quanto riguarda le seconde, solo l'icosaedro è una sfera geodetica con facce triangolari regolari. In effetti oltre ai poliedri regolari e archimedei (e ai prismi e antiprismi) gli unici altri solidi convessi a facce poligonali regolari sono i 92 solidi di Johnson, che tratteremo in un apposito fascicolo di questa raccolta: nessuno di essi ha solo facce pentagonali o esagonali, quindi nessuno può essere un poliedro di Goldberg; ci sono invece cinque deltaedri (poliedri a facce triangolari regolari), ma nessuno di essi soddisfa le altre condizioni per essere una sfera geodetica. Nemmeno il tetraedro e l'ottaedro, che pure sono deltaedri, soddisfano le condizioni per essere una sfera geodetica. Torneremo comunque brevemente sui casi del tetraedro e dell'ottaedro a proposito dei poliedri a simmetria tetraedrica e ottaedrica nel paragrafo B.5.

Una classe di poliedri di Goldberg con facce pentagonali regolari e facce esagonali decisamente irregolari si può ottenere facilmente per troncatura ai vertici di un icosaedro, tecnica che abbiamo già trattato nel paragrafo 5.2.6 del capitolo 5: basta considerare una troncatura intermedia tra l'icosaedro

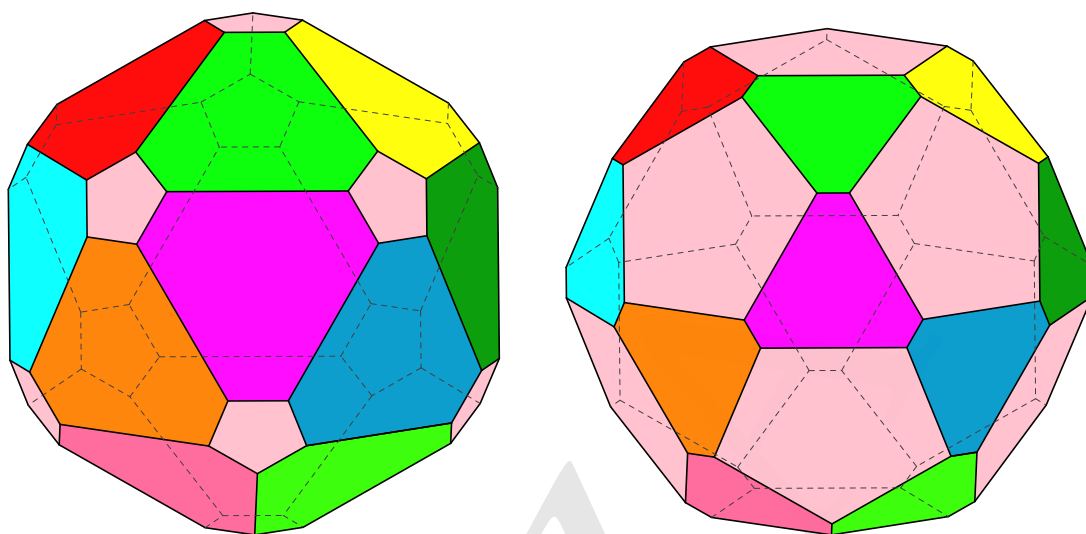


Figura B.1.: Due poliedri di Goldberg a facce esagonali molto irregolari, ottenuti per troncatura ai vertici dell'icosaedro

stesso e l'icosaedro troncato o tra l'icosaedro troncato e l'icosidodecaedro. La figura B.1 ripropone due situazioni già considerate nel citato paragrafo del capitolo 5.

Tuttavia abitualmente quando si parla di poliedri di Goldberg (e per dualità di sfere geodetiche) ci si riferisce sempre a situazioni con “la maggior regolarità possibile”: anche noi nel seguito faremo riferimento a queste situazioni, salvo diversa precisazione.

I poliedri di Goldberg (e quindi le sfere geodetiche) sono una classe infinita di poliedri ed esistono diverse strategie per ottenerli: un esempio è quello, già considerato, della troncatura ai vertici di un icosaedro. Non è l'unico caso dove si opera per troncatura: un secondo esempio è quello della troncatura ai vertici del solido di Catalan noto come triacontaedro rombico o della troncatura ai lati del dodecaedro regolare. Il solido che si ottiene quando gli esagoni diventano equilateri (i pentagoni sono sempre regolari) prende il nome di *Triacontaedro rombico pentatroncato*⁽⁴⁾ se si pensa ottenuto nel primo modo, oppure di *Dodecaedro smussato* se si pensa ottenuto nel secondo modo. La figura B.2 riproduce esattamente le analoghe figure presentate nel paragrafo 5.3.4 del capitolo 5: quella a sinistra si può chiaramente pensare ottenuta dal dodecaedro per “smussatura dei lati”, quella a destra dal triacontaedro rombico per troncatura dei vertici a valenza pentagonale.

In realtà le due immagini della figura B.2 possono essere pensate sia come stadi diversi della troncatura ai lati di un dodecaedro verso il triacontaedro rombico (da sinistra a destra), sia come stadi diversi della troncatura ai vertici di un triacontaedro rombico per ottenere il dodecaedro regolare (da destra a sinistra).

Il dodecaedro smussato o triacontaedro rombico pentatroncato obiettivo di queste troncature è illustrato nella figura B.3.

Il dodecaedro smussato ha l'aspetto di un “super pallone da calcio”, e la cosa è particolarmente evidente se si esamina la figura B.4 in bianco-nero, ma ha 42 facce invece di 32 e inoltre ha alcuni vertici dove si incontrano solo esagoni, mentre nel normale pallone da calcio in ogni vertice c'è un pentagono. Questo poliedro ha dunque una struttura più complessa del normale pallone da calcio (e quindi sarebbe più

⁴“Penta” perché si troncano solo i vertici di valenza cinque.

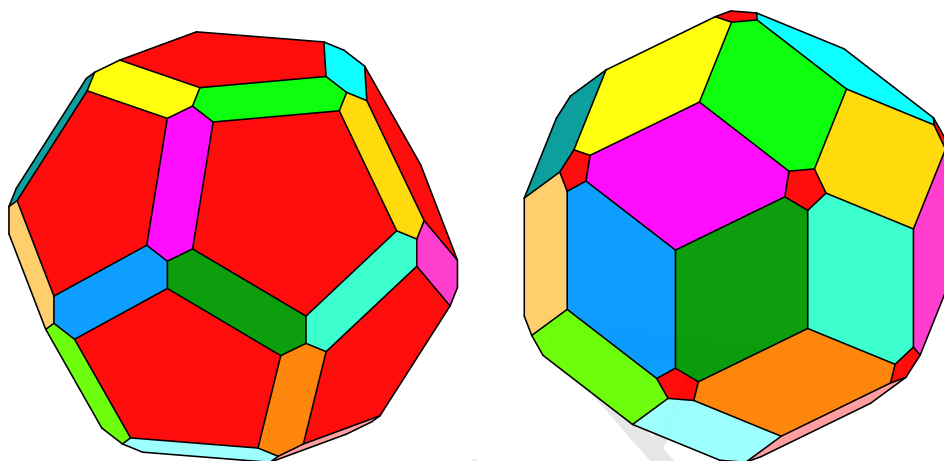


Figura B.2.: Troncatura ai lati di un dodecaedro, a sinistra, e troncatura ai vertici pentagonali di un triacontaedro rombico, a destra, per ottenere poliedri di Goldberg

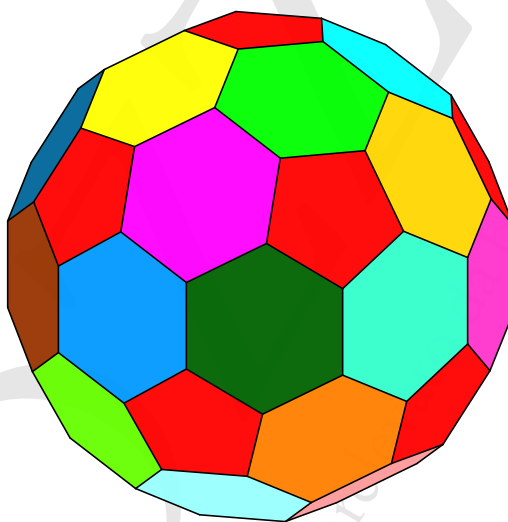


Figura B.3.: Il dodecaedro smussato o triacontaedro rombico pentatroncato

difficile da produrre su scala industriale) anche perchè i suoi trenta esagoni non sono regolari, ma solo equilateri e non equiangoli.

Un terzo esempio in cui si può procedere per troncatura di solidi già noti per ottenere poliedri di Goldberg è il caso della troncatura ai vertici di valenza 5 applicata all'esacontaedro pentagonale: il solido che si ottiene si potrebbe chiamare *esacontaedro pentagonale pentatroncato*, ma è più noto come *Hexpropello dodecaedro*, nome derivato da una particolare operazione, detta *propellor*, introdotta da George William Hart⁽⁵⁾ che si può applicare ai poliedri per ottenere altri poliedri. Un primo passo in questa troncatura e il poliedro che si ottiene quando gli esagoni diventano equilateri sono rappresentati

⁵George William Hart è uno scultore/designer matematico, come egli stesso si definisce, già docente alla Stony Brook University di New York.

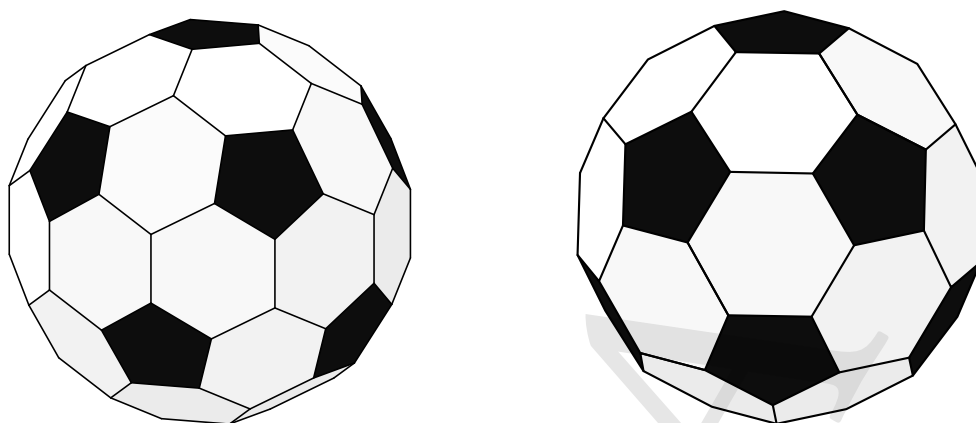


Figura B.4.: *Il dodecaedro smussato, ovvero un “super pallone da calcio”, a sinistra, e l’icosaedro troncato, ovvero il normale pallone da calcio, a destra*

nella figura B.5: nella figura di sinistra è ancora evidente la struttura dell’esacontaedro pentagonale, che risulta invece appena percettibile nella figura di destra. Ribadiamo che anche tutte le troncature intermedie producono poliedri di Goldberg, seppur con esagoni molto irregolari.

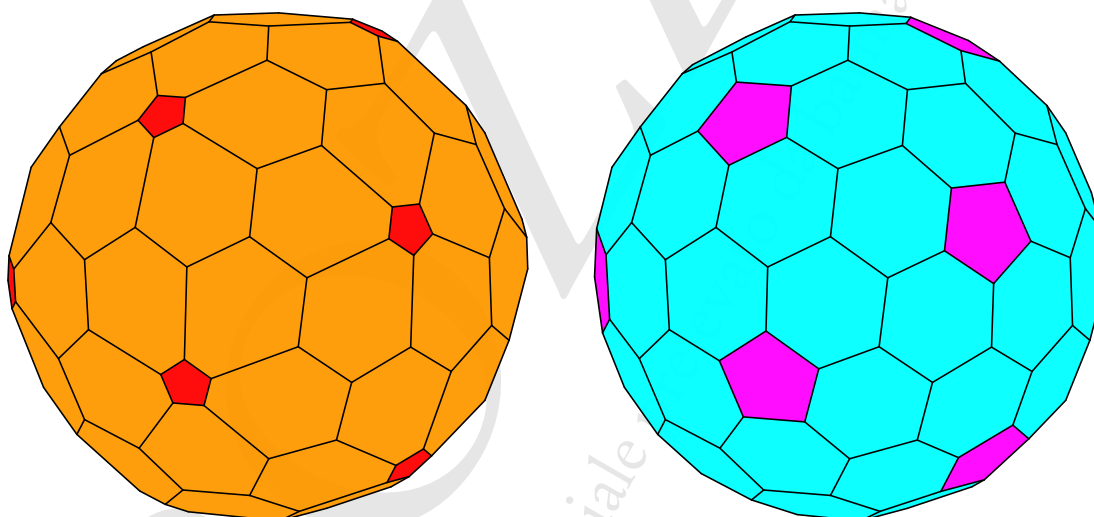


Figura B.5.: *Troncatura ai vertici di un esacontaedro pentagonale: un primo passo e il poliedro di Goldberg con il massimo di regolarità*

Torneremo in seguito su questo poliedro per rimarcarne altre proprietà, la più importante delle quali è la chiralità, ovvia perche di esacontaedri pentagonali (come già di dodecaedri camusi) ne esistono due forme, quella levogira e quella destrogira.

Si potrebbero considerare altri poliedri ottenuti per troncatura, ma a questo punto è opportuno esaminare invece una strategia generale, che produce sfere geodetiche e poliedri di Goldberg con la massima regolarità possibile, cioè quei poliedri che, come già detto, sono normalmente chiamati semplicemente sfere geodetiche e poliedri di Goldberg senza ulteriori specificazioni.

Per questo, con riferimento alla figura B.6, consideriamo nel piano una griglia triangolare equilatera, il cui lato possiamo assumere come unità. A partire da un punto qualunque A spostiamoci lungo la griglia di a unità orizzontalmente verso destra; successivamente, dopo una rotazione antioraria di 60° , spostiamoci sempre lungo la griglia di b unità, arrivando in un punto B ; dopo una nuova rotazione di 60° in senso antiorario ripetiamo lo spostamento di a e b unità come prima, arrivando in un punto C ; una nuova rotazione di 60° in senso antiorario e la ripetizione dello stesso percorso di a e b passi ci riporta nella posizione di partenza. Il triangolo ABC così ottenuto è sempre equilatero, con diversa disposizione rispetto alla griglia e con i vertici sempre posti sui punti del reticolo triangolare. Nella figura B.6 sono mostrate, a titolo di esempio, tre diverse costruzioni, con le seguenti scelte di a e b :

- nel caso del triangolo $A_1B_1C_1$ si ha $a = 3$ e $b = 0$;
- nel caso del triangolo $A_2B_2C_2$ si ha $a = 3$ e $b = 3$;
- nel caso del triangolo $A_3B_3C_3$ si ha $a = 3$ e $b = 1$.

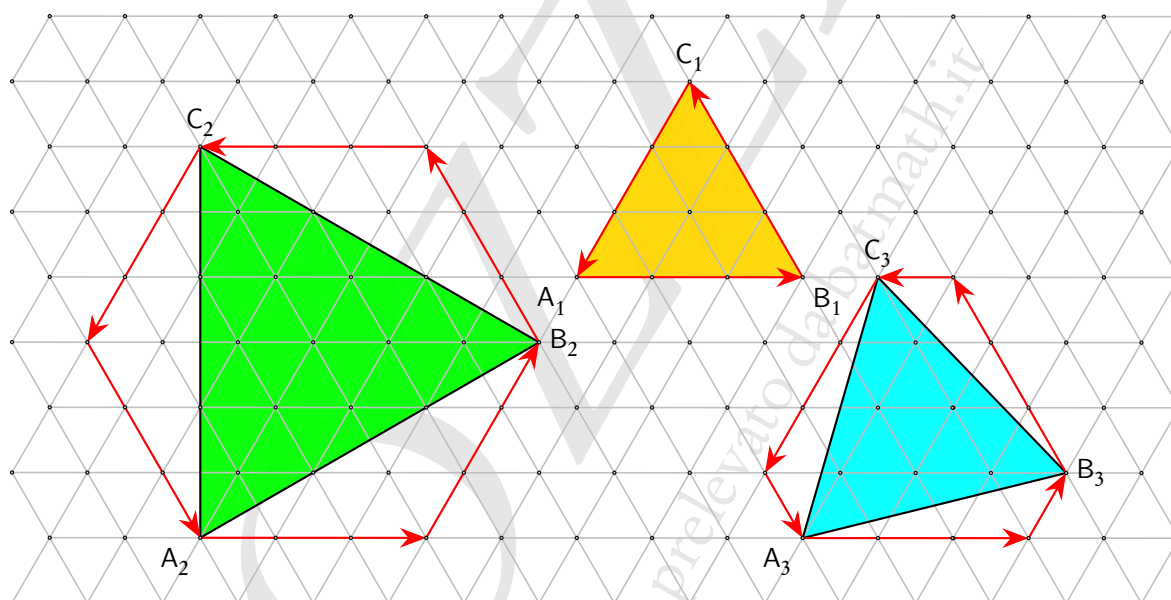


Figura B.6.: Griglia triangolare nel piano

In tutti i casi il triangolo ABC viene suddiviso (“tassellato”) dalla griglia, ma in un modo diverso a seconda dei valori di a e b . Precisamente:

- se $b = 0$ (come nel caso del triangolo $A_1B_1C_1$) la tassellazione è costituita da triangoli equilateri con i lati paralleli ai lati del triangolo grande, e lo stesso succederebbe con $a = 0$;
- se $a = b$ (come nel caso del triangolo $A_2B_2C_2$) la tassellazione è costituita da triangoli equilateri e semitriangoli equilateri con i lati perpendicolari a uno dei tre lati del triangolo grande;
- se $0 < b < a$ (come nel caso del triangolo $A_3B_3C_3$) la tassellazione è costituita da triangoli equilateri e parti di triangoli equilateri con i lati non paralleli né perpendicolari rispetto a quelli del triangolo grande; lo stesso si otterrebbe se $0 < a < b$.

La cosa si vede ancora meglio se rappresentiamo solo i triangoli grandi con la rispettiva tassellazione, meglio ancora se disposti con i lati paralleli, come nella figura B.7.

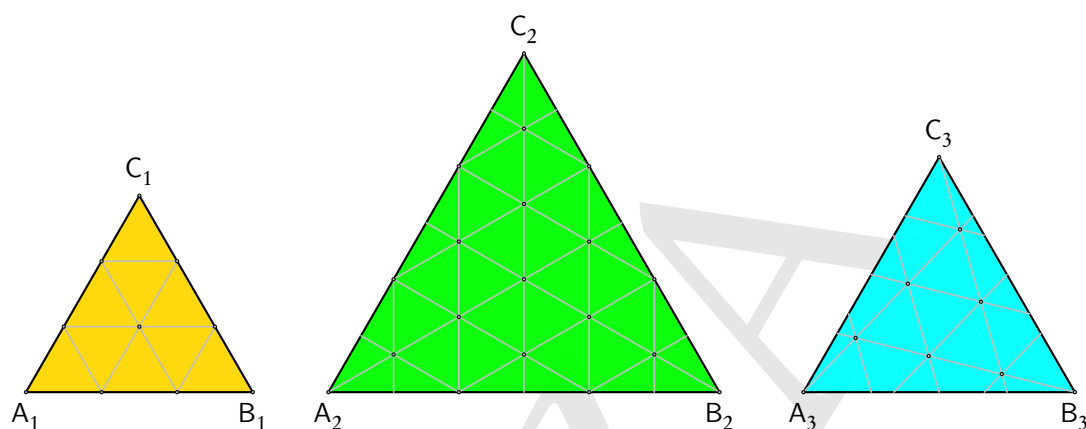


Figura B.7.: Particolare delle tassellazioni dei tre triangoli della figura B.6

Se consideriamo venti copie del triangolo tassellato e le assembliamo in un icosaedro, otteniamo un motivo continuo di triangoli piccoli, i quali però possono “piegarsi” sugli spigoli dell’icosaedro e far parte di due facce contigue dell’icosaedro stesso, escluso ovviamente il caso in cui $a = 0$ oppure $b = 0$.

Nella figura B.8 è evidenziato un esempio di tassellazione su due facce contigue di un icosaedro per ciascuno dei casi con $b = 0$, $a = b$, $0 < b < a$.

Si noti, sia esaminando la figura B.6 che la B.8 come, in particolare nel terzo caso in cui $a = 3$ e $b = 1$, per raggiungere il vertice B a partire dal vertice A si può sia seguire il percorso indicato, sia prima ruotare in senso antiorario di 60° per spostarsi di una unità lungo la griglia per poi ruotare in senso orario di 60° per spostarsi di tre unità lungo la griglia: questa osservazione ci sarà utile nel seguito quando esamineremo le proprietà dei poliedri che stiamo costruendo.

Una volta eseguita la tassellazione su tutte le facce dell’icosaedro, si può proiettare questa tassellazione sulla sfera circoscritta all’icosaedro stesso, tralasciando la proiezione dei lati dei triangoli grandi, tranne nel caso in cui $a = 0$, oppure $b = 0$. Si ottiene in questo modo una tassellazione triangolare della sfera: i triangoli piccoli che si trovavano in parte su una faccia e in parte su un’altra faccia contigua si “ricompongono” nella proiezione. Tuttavia i triangoli piccoli proiettati non saranno più equilateri, in quanto i loro vertici non stanno sulla sfera, come invece succede per i vertici dei triangoli grandi, cioè delle facce dell’icosaedro. La cosa risulta evidente anche dalla considerazione che, come mostrano i tre esempi di tassellazione proposti, attorno ai vertici dell’icosaedro di base si dispongono cinque triangoli, attorno a tutti gli altri vertici invece si dispongono sei triangoli.

Risulta evidente dagli esempi proposti che il numero di triangoli piccoli della tassellazione aumenta al crescere di a , di b , o di entrambi e, per elevati valori di questi numeri, avremo triangoli sempre più prossimi ad essere equilateri.

Il poliedro che si ottiene per proiezione è un poliedro sferico, ma se si congiungono i vertici con segmenti invece che con archi di cerchio massimo si ottiene un poliedro a facce piane soddisfacente le condizioni per essere una sfera geodetica: è esattamente questa la strategia generale (ma non è l’unica, e ci sono anche altre strategie oltre alle troncature) che si adotta di solito per costruire questo tipo di

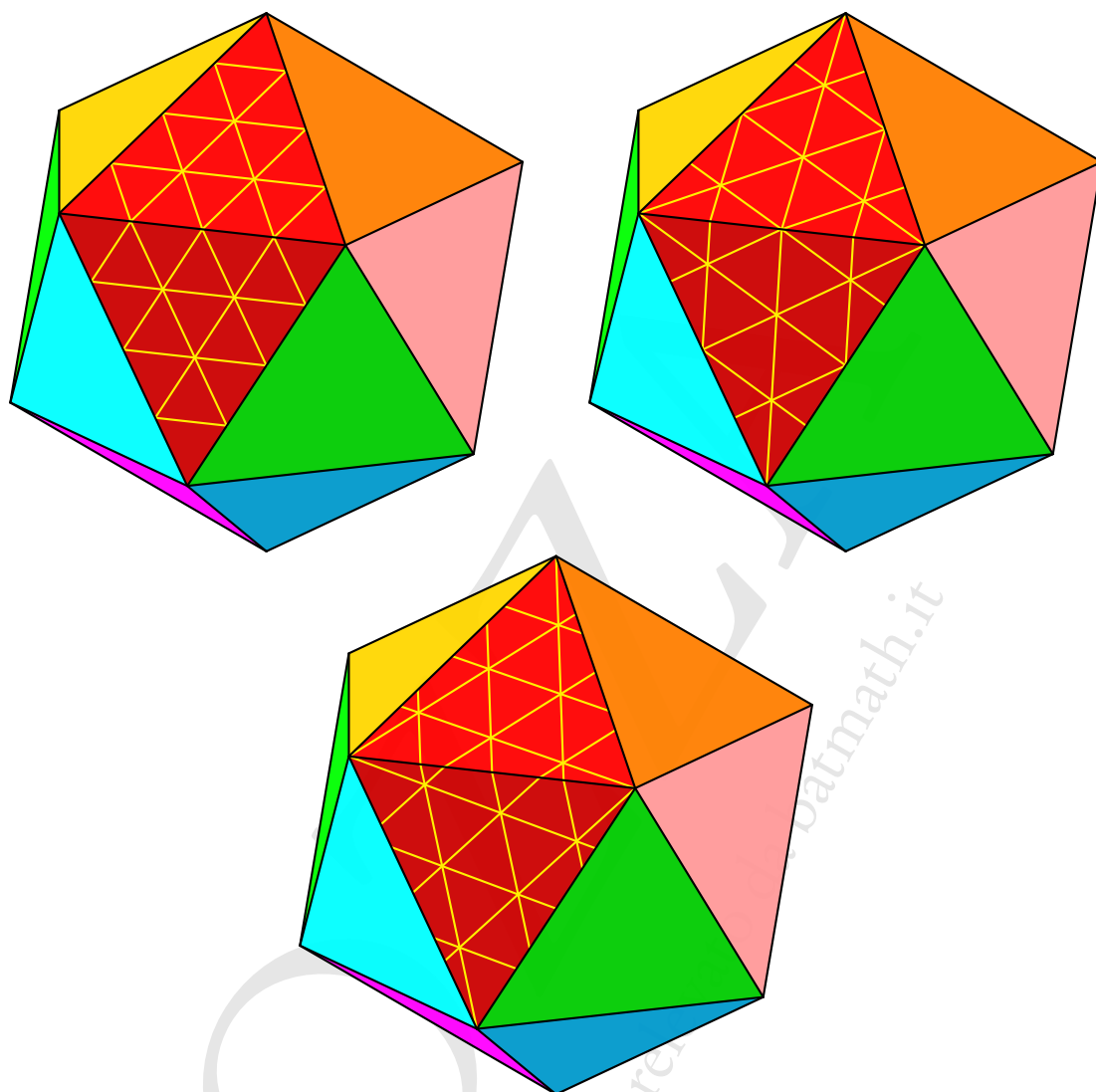


Figura B.8.: Tassellazione di due facce contigue di un icosaedro, nei casi $a = 4$ e $b = 0$, in alto a sinistra, $a = b = 2$, in alto a destra, $a = 3$ e $b = 1$, in basso

poliedri a facce triangolari e aventi le simmetrie rotazionali dell'icosaedro, strategia che permette infinite costruzioni diverse, a seconda della scelta dei valori di a e b .

La figura B.9 illustra, nel caso semplice di $a = 2$ e $b = 0$, la tassellazione di tutte le facce dell'icosaedro e la sfera geodetica ottenuta proiettando tutti i vertici sulla sfera circoscritta. La figura B.10 mostra la stessa sfera senza l'icosaedro tassellato sottostante, per maggiore chiarezza.

Da questa tecnica costruttiva ha origine una nomenclatura che possiamo definire naturale per identificare i diversi poliedri: in maniera compatta si scrive $GD(a, b)$, dove GD sta per *Geodesic Dome*. Per esempio l'icosaedro stesso si può identificare con la scrittura $GD(1, 0)$, mentre la sfera mostrata nella figura B.10 si può identificare con $GD(2, 0)$. Nel paragrafo B.5 faremo un cenno ad una costruzione

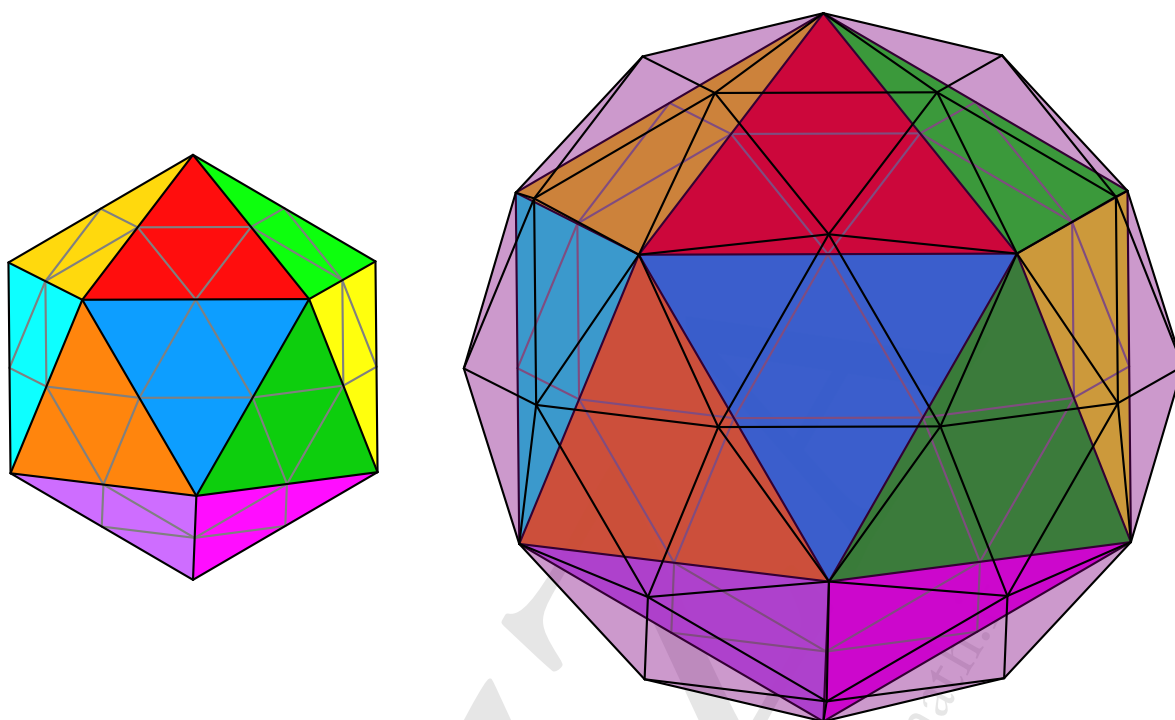


Figura B.9.: *Un esempio di tassellazione di tutte le facce dell'icosaedro nel caso $a = 2$ e $b = 0$, a sinistra, e la sfera geodetica ottenuta per proiezione dei vertici sulla sfera circoscritta, a destra*

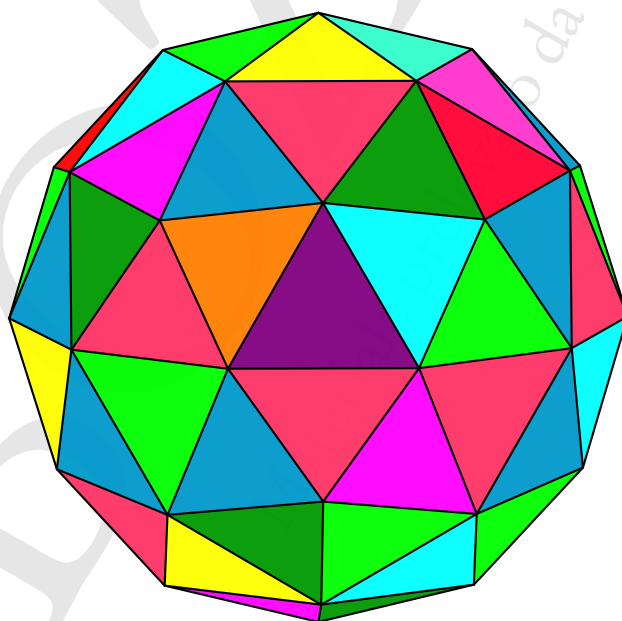


Figura B.10.: *Dettaglio della sfera geodetica ottenuta nella figura B.9*

dello stesso tipo, a partire però da un tetraedro o da un ottaedro. Per distinguere le diverse possibilità si può usare un simbolo un po' più complesso, che utilizza, modificandoli, i simboli di Schläfli usati per i poliedri regolari che sono: $\{3,3\}$ per il tetraedro, $\{3,4\}$ per l'ottaedro, $\{3,5\}$ per l'icosaedro, dove il 3 iniziale indica che le facce sono triangoli, mentre il secondo numero indica la valenza dei vertici (cioè quanti spigoli vi concorrono, o quante facce li circondano). Qui questi simboli sono modificati, rispettivamente per i tre casi, in $\{3,3+\}$, $\{3,4+\}$ o $\{3,5+\}$: il 3 iniziale indica sempre che si ha a che fare con facce triangolari, il + aggiunto alla valenza indica esattamente che la valenza di alcuni vertici viene aumentata. Si usa poi mettere a pedice la coppia a, b . Per esempio la sfera geodetica ottenuta a partire dall'icosaedro e con $a = 3$, $b = 1$ si indicherebbe con la scrittura

$$\{3,5+\}_{3,1}.$$

Tuttavia il caso dell'icosaedro è di gran lunga il più comune e quando si parla di sfera geodetica senza ulteriori specificazioni ci si riferisce ad esso. Si può allora usare la scrittura compatta prima indicata, particolarmente semplice. Successivamente vedremo anche come “leggere” i numeri a e b , direttamente dalla sfera geodetica.

Una volta costruita una sfera geodetica si può costruire il poliedro di Goldberg ad essa duale e si può usare per esso la notazione compatta⁽⁶⁾ $GP(a, b)$ (GP per *Geodesic Polyhedron*).

Le sfere geodetiche e i poliedri di Goldberg ottenuti in questo modo standard (e normalmente si fa riferimento solo a questi se non ci sono ulteriori precisazioni) sono di solito ripartiti in tre classi, a seconda dei valori di a e b . Precisamente sono poliedri di Classe I quelli in cui $a = 0$, oppure $b = 0$, di Classe II quelli in cui $a = b$, di Classe III quelli in cui $a \neq b$ (con nessuno dei due nullo). I poliedri della terza classe sono chirali, ovvero esistono in due forme: levogira e destrogira.

Se riesaminiamo le tassellazioni dei triangoli dell'icosaedro ottenute mediante la griglia triangolare, notiamo che nei casi $b = 0$ con a dispari e $a = b$ il centro di ogni triangolo è un vertice dei triangoli della tassellazione. Poiché nei poliedri regolari il duale può essere costruito considerando come vertici proprio i centri delle facce, se ne deduce che i dodici centri delle facce sono vertici del dodecaedro duale dell'icosaedro. Questo dodecaedro ha la sfera circoscritta concentrica a quella circoscritta all'icosaedro (anzi si tratta, come è noto, della sfera inscritta nell'icosaedro). Se ne deduce che questi vertici proiettati sulla sfera circoscritta all'icosaedro saranno anche vertici di un dodecaedro regolare “inscritto” nella sfera geodetica. Vedremo questa proprietà su un esempio nel paragrafo B.3.

B.2. Esempi di sfere geodetiche

Abbiamo già incontrato tre sfere geodetiche: l'icosaedro regolare (che potremmo chiamare la sfera geodetica di base), il pentacisdodecaedro e la sfera della figura B.10, che abbiamo identificato con il nome $GD(2,0)$. La tecnica costruttiva che abbiamo considerato garantisce che dodici tra i vertici di ogni sfera sono vertici di un icosaedro (nel caso dell'icosaedro stesso sono ovviamente gli unici), che possiamo chiamare “inscritto” nella sfera stessa. I numeri a e b che abbiamo usato per tassellare i triangoli dell'icosaedro di base utilizzando la griglia triangolare si possono leggere direttamente esaminando la sfera stessa: a partire da uno dei dodici vertici dell'icosaedro inscritto (sono quelli che hanno valenza 5,

⁶Con i simboli di Schläfli estesi si scriverebbe $\{3+,3\}_{a,b}$, oppure $\{4+,3\}_{a,b}$ o infine $\{5+,3\}_{a,b}$: qui la valenza è sempre 3, mentre il tipo di facce triangolari per il tetraedro (che è duale di se stesso), quadrate per il cubo (duale dell'ottaedro) e pentagonali per il dodecaedro (duale dell'icosaedro) possono avere un aumentato numero di lati.

ovvero dove convergono cinque triangoli; tutti gli altri vertici hanno valenza 6) possiamo raggiungere un altro vertice vicino, seguendo un percorso sui lati dei triangoli, con a passi “in linea retta”, ovvero percorrendo lati su uno stesso arco di cerchio massimo, per poi ruotare a sinistra o a destra di 60° e compiere b passi sempre “in linea retta”. Come è evidente si tratta esattamente della riproposizione sulla sfera geodetica del percorso effettuato sulla triangolazione nel piano. Nel caso dell’icosaedro stesso dovremo compiere un solo passo, senza alcuna rotazione: l’icosaedro è una sfera geodetica del tipo $GD(1,0)$. Esaminiamo in dettaglio gli altri due casi già citati, che riproponiamo nella figura B.11, con l’evidenziazione dei vertici dell’icosaedro inscritto e di un percorso per passare da un vertice ad uno vicino: come si vede il pentacisdodecaedro può essere identificato con la denominazione $GD(1,1)$.

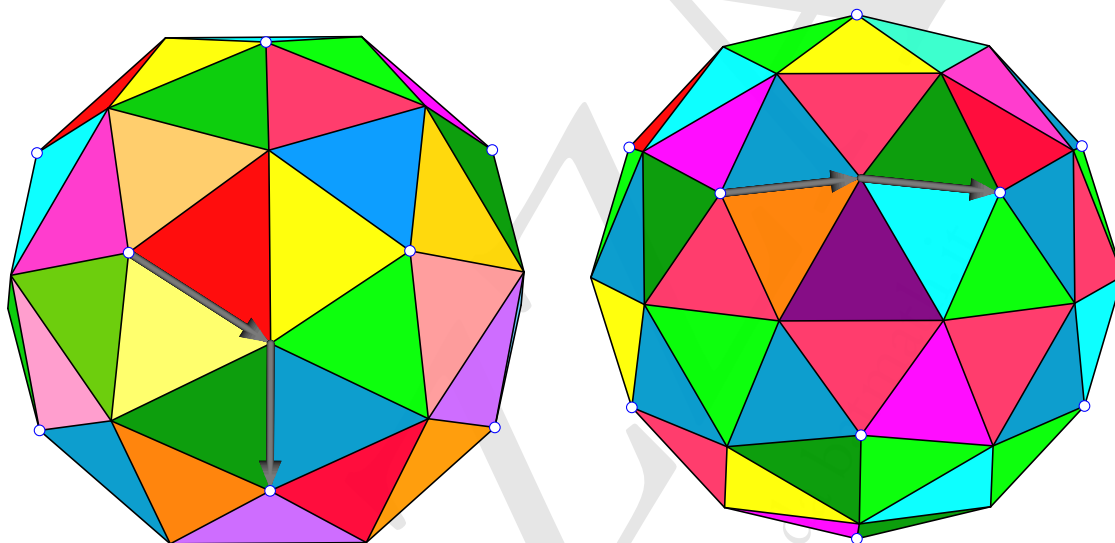


Figura B.11.: Percorso che congiunge due vertici vicini di valenza 5 in un pentacisdodecaedro, o $GD(1,1)$, e in una $GD(2,0)$

Il caso del pentacisdodecaedro risulta ancora più chiaro se lo si immagina ottenuto per elevazione dal dodecaedro, come mostrato nella figura 9.6 del capitolo 9.

Anche il poliedro $GD(2,0)$ si può pensare ottenuto per elevazione, precisamente per elevazione a partire dall’icosidodecaedro, incollando sulle sue facce pentagonali delle piramidi. Si può, equivalentemente, pensare di suddividere le facce pentagonali dell’icosidodecaedro in triangoli isosceli a partire dal centro e poi proiettare il tutto sulla sfera circoscritta. Tutto questo è evidenziato nella figura B.12 dove abbiamo riproposto sulla sinistra la sfera geodetica $GD(2,0)$ della figura B.11, con una diversa colorazione delle facce, e sulla destra l’icosidodecaedro da cui quella sfera geodetica può essere ottenuta per elevazione. In effetti in letteratura questa sfera geodetica è anche nota con il nome di *Pentacisicosidodecaedro*.

Questa osservazione su $GD(2,0)$ non è importante ai fini delle considerazioni che stiamo facendo sul significato dei numeri a e b utilizzati per classificare le sfere geodetiche e i poliedri di Goldberg, ma è oltremodo interessante perché rivela, una volta di più, le proprietà “camaleontiche” dei solidi platonici: in fondo questo fascicolo sui poliedri di Archimede potrebbe a ragione anche avere come titolo “Poliedri derivati dai solidi platonici”.

Proponiamo ora qualche altro esempio di sfera geodetica, illustrando solo le sfere senza i passaggi per costruirle.

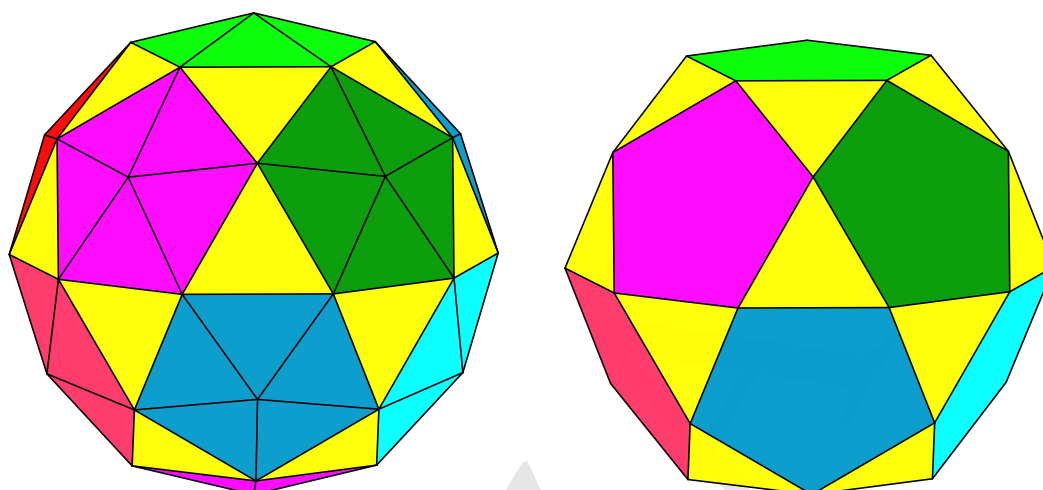


Figura B.12.: *La sfera geodetica $GD(2,0)$ e l'icosidodecaedro da cui essa può essere ottenuta per elevazione*

Cominciamo dalla sfera $GD(2,1)$ ottenibile sia con la triangolazione delle facce dell'icosaedro, sia a partire dal dodecaedro camuso per elevazione mediante piramidi delle facce pentagonali: la figura B.13 mostra la sfera con evidenziati i vertici di valenza cinque (ovvero i vertici dell'icosaedro inscritto) e un percorso per passare da uno di questi vertici ad un altro immediatamente vicino, mentre la B.14 evidenzia la struttura dello snub dodecaedro da cui essa può essere ottenuta.

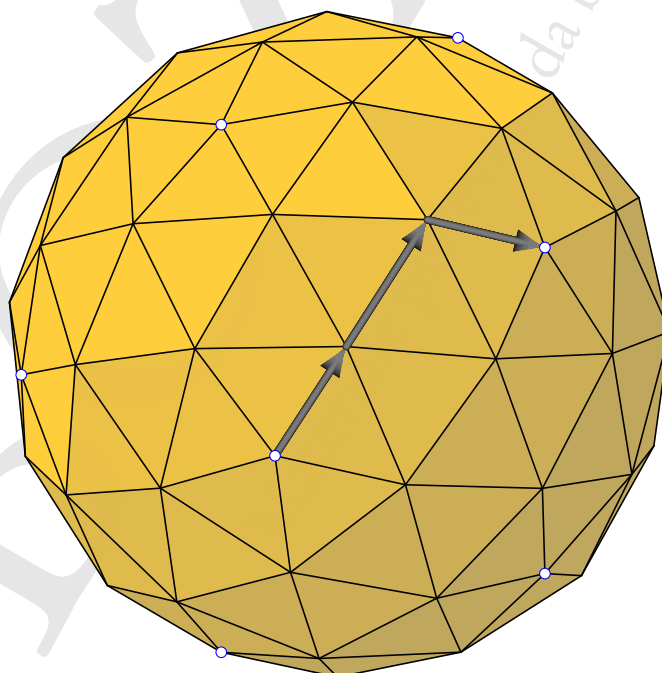


Figura B.13.: *La sfera geodetica $GD(2,1)$, con evidenziati i vertici di valenza 5 e un percorso che ne congiunge due vicini*

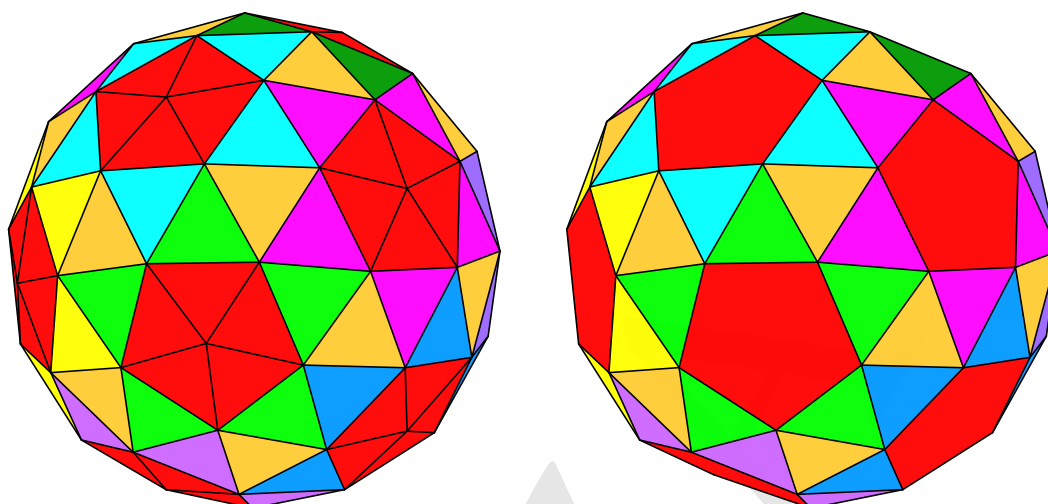


Figura B.14.: *La sfera geodetica della figura B.13 con una diversa colorazione delle facce e lo snub dodecaedro da cui essa è ottenuta per elevazione*

Esattamente come il dodecaedro camuso da cui può essere ottenuta per elevazione, la sfera $GD(2, 1)$ è chirale, ovvero esiste nelle due forme levogira e destrogira. Questa caratteristica è più facilmente apprezzata se si adotta la colorazione utilizzata nella figura B.14 ed è illustrata nella figura B.15. Questa caratteristica sussiste per tutte le sfere in cui $0 < a < b$ oppure $0 < b < a$. Altrettanto dicasi per i poliedri di Goldberg duali, come vedremo nel paragrafo B.3.

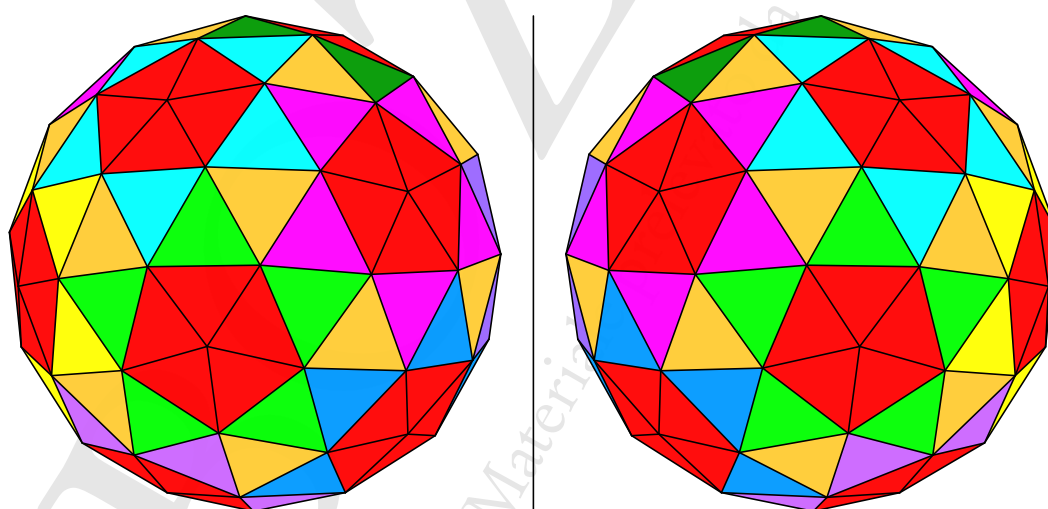


Figura B.15.: *Le due forme chirali della sfera $GD(2, 1)$*

Segnaliamo che anche altre sfere con piccoli valori di a e b possono essere ottenute a partire da altri poliedri con opportune elevazioni, oltreché con il metodo della triangolazione sulle facce dell'icosaedro: tuttavia queste costruzioni diventano via via più complesse ed è preferibile fare riferimento alla costruzione standard basata appunto sulla triangolazione delle facce dell'icosaedro.

Gli ultimi due esempi proposti sono relativi alle sfere $GD(2,2)$ e $GD(3,1)$ rispettivamente illustrate nelle figure B.16 e B.17. Anche in queste figure sono evidenziati i vertici di valenza 5.

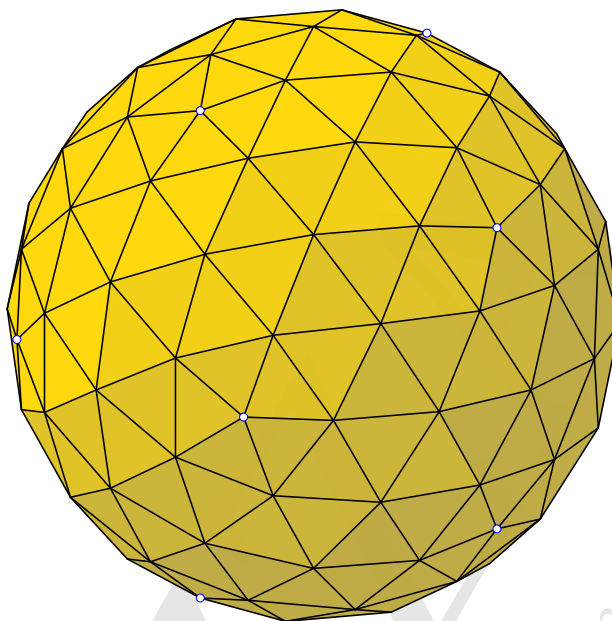


Figura B.16.: *La sfera geodetica $GD(2,2)$*

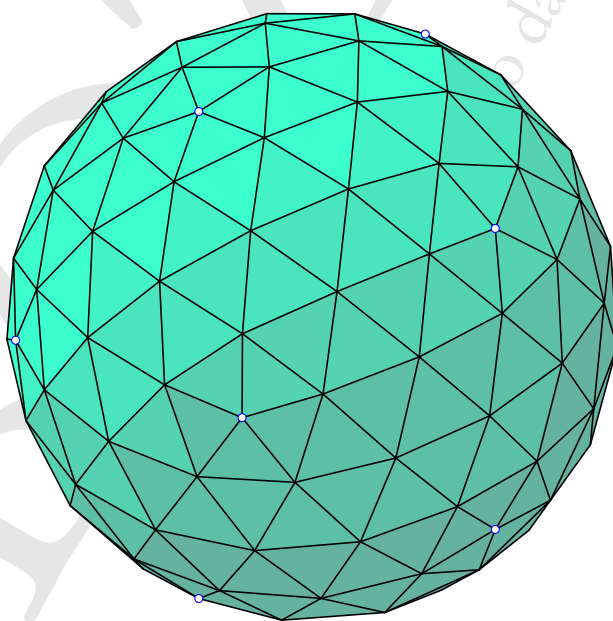


Figura B.17.: *La sfera geodetica $GD(3,1)$*

B.3. Esempi di poliedri di Goldberg

Passiamo a considerare qualche esempio di poliedri di Goldberg. Abbiamo già citato il dodecaedro, che può essere considerato, al pari dell'icosaedro per le sfere geodetiche, come il poliedro di Goldberg “di base”. Abbiamo poi fatto riferimento all'icosaedro troncato, unico altro poliedro di Goldberg a facce poligonali regolari e infine abbiamo considerato il triacontaedro rombico pentatroncato e l'hexpropello dodecaedro, ottenuto per troncatura dall'esacontaedro pentagonale: si vedano le figure B.3 e B.5 rispettivamente.

Come già con le sfere geodetiche vediamo come si leggono i numeri a e b che individuano il poliedro sul poliedro stesso, questa volta con l'idea di costruire un percorso dal centro di un pentagono al centro di un pentagono immediatamente vicino. Il percorso è costruito con passi dal centro di un pentagono al centro di un esagono adiacente (che c'è sempre tranne il caso speciale del dodecaedro), perpendicolarmente a un lato del pentagono e proseguendo successivamente verso il centro di un esagono o di un pentagono adiacente, eventualmente piegando una sola volta di 60° a destra o a sinistra, fino a raggiungere il centro di un altro pentagono immediatamente vicino: si tratta di un percorso che ricorda, come anche quello sulle sfere geodetiche, la “mossa del cavallo” nel gioco degli scacchi: il numero di passi prima di piegare è dato dal valore di a , quello dopo aver piegato dal valore di b . Per esempio per l'hexpropello dodecaedro un percorso di questo genere prevede $a = 2$ e $b = 1$: questo poliedro può dunque essere identificato con il nome GP(2, 1). Equivalentemente si potrebbe seguire un percorso con $a = 1$ e $b = 2$. Nella figura B.18 sono illustrati due di questi percorsi.

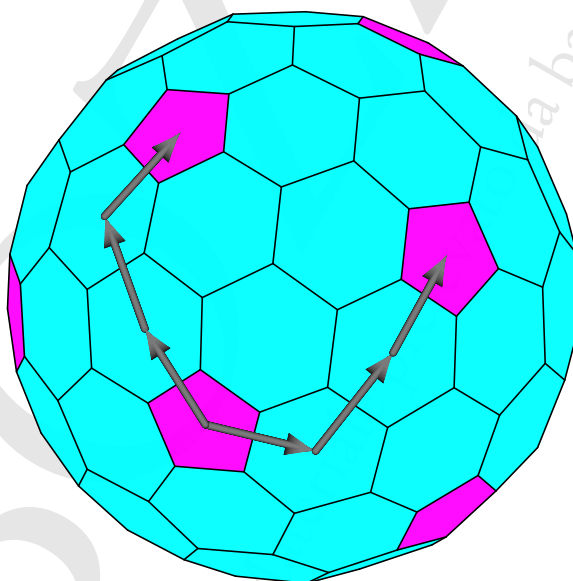


Figura B.18.: *Il poliedro di Goldberg GP(2,1), con l'indicazione di due possibili percorsi per passare dal centro di un pentagono a quello di uno vicino*

Con questa nomenclatura il dodecaedro diventa GP(1,0), l'icosaedro troncato GP(1,1) e il triacontaedro rombico pentatroncato GP(2,0).

Come già le sfere geodetiche e come abbiamo accennato, il poliedro GP(2,1) appena considerato è chirale, come tutti i poliedri di Goldberg con $0 < a < b$ o $0 < b < a$. Le due forme chirali del GP(2,1)

sono illustrate nella figura B.19.

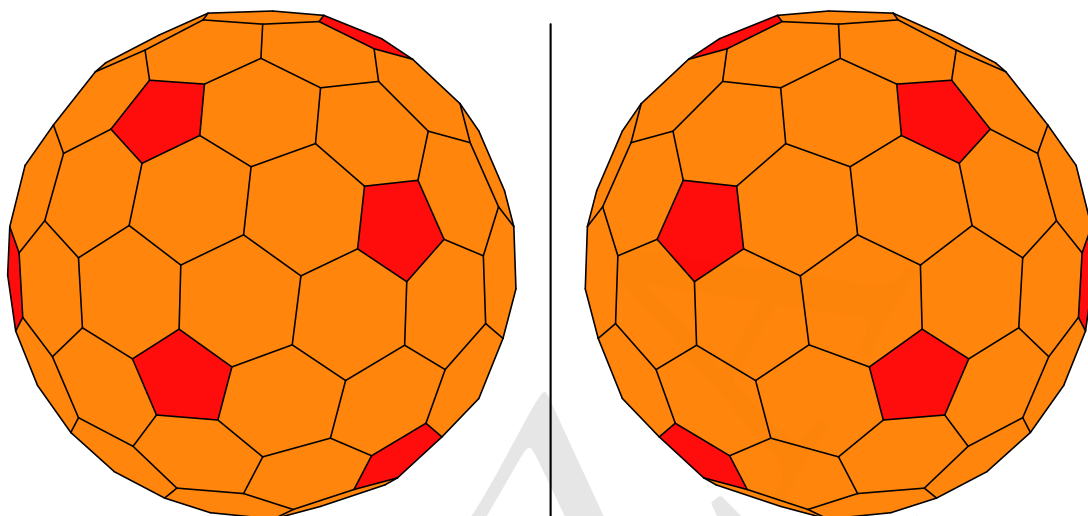


Figura B.19.: *Le due forme chirali del poliedro GP(2,1)*

Proponiamo, nella figure B.20 e B.21 altri due esempi di poliedri di Goldberg, e precisamente il GP(2,2) e il GP(3,1), duali delle sfere geodetiche che portano gli stessi numeri e che abbiamo illustrato nelle figure B.16 e B.17. In entrambe le figure la colorazione delle facce è stata scelta in modo da evidenziare il senso dell'espressione: "gli esagoni devono circondare i pentagoni nello stesso modo".

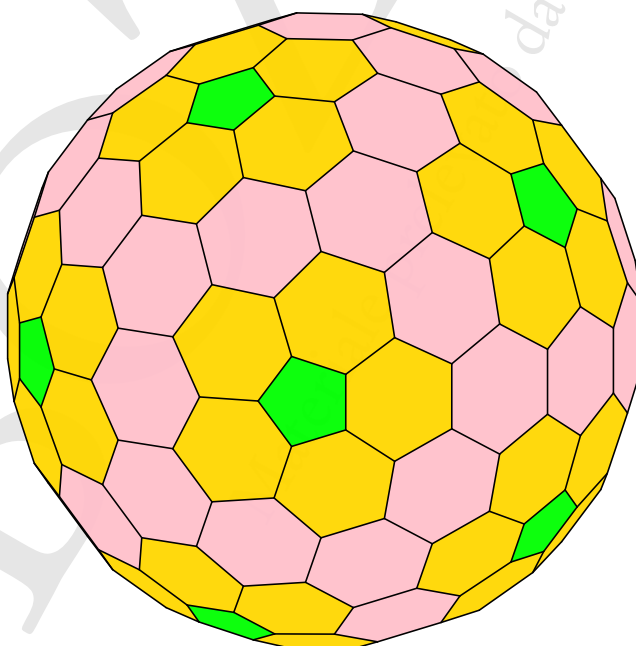


Figura B.20.: *Il poliedro di Goldberg GP(2,2)*

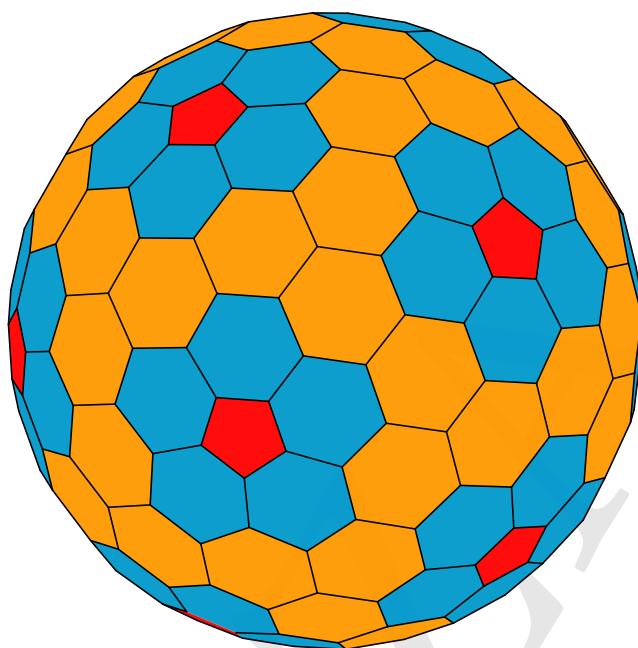


Figura B.21.: Il poliedro di Goldberg GP(3,1)

B.4. Un po' di numeri

Non è molto difficile calcolare il numero di vertici, facce e spigoli in una sfera geodetica o in un poliedro di Goldberg e vale la pena di fare il conto, come utile esercizio. Conviene partire dalle sfere geodetiche e poi ragionare per dualità.

Per questo riprendiamo in considerazione la griglia triangolare nel piano della figura B.6, i cui lati supponiamo unitari (nulla cambia nel discorso che facciamo una griglia con lati di lunghezza diversa). Ci proponiamo di calcolare il lato dei triangoli grandi costruiti sulla griglia. Per questo introduciamo un sistema di coordinate cartesiane e, dopo aver trovato le coordinate di due vertici, usiamo la formula della distanza tra due punti per trovare il valore cercato.

Osserviamo che, a partire da un punto qualunque, diciamolo (x_0, y_0) , uno spostamento di 1 unità verso destra conduce nel punto $(x_0 + 1, y_0)$, mentre uno spostamento di 1 unità dopo rotazione di 60° in senso antiorario porta nel punto

$$\left(x_0 + \frac{1}{2}, y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Per questo basta tenere conto che l'altezza di un triangolo equilatero di lato 1 è $\sqrt{3}/2$. Dunque lo spostamento di a unità verso destra e b unità dopo rotazione di 60° porta dal punto (x_0, y_0) al punto

$$\left(x_0 + a + \frac{b}{2}, y_0 + b \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

La distanza tra i due punti è allora

$$d = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$$

Il quadrato di questo numero è indicato con T (e a volte chiamato *Triangulation number*). Si ha dunque

$$T = a^2 + ab + b^2.$$

Le aree del triangolo grande e di ciascun triangolino piccolo sono, rispettivamente,

$$\frac{T\sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Se ne deduce che in ogni triangolo grande c'è posto per T triangoli piccoli (alcuni interi e alcuni spezzettati come nei casi $a > 0$ e $b > 0$). Poichè in totale ci sono venti facce nell'icosaedro ci saranno in totale $20T$ triangoli sulla sfera geodetica, che si saranno ricomposti dopo la proiezione. Ogni triangolo ha 3 lati e dunque in totale ci sono $60T$ lati: poiché ciascuno è in comune a due triangoli, la sfera geodetica avrà $30T$ spigoli. Applicando la formula di Eulero si può trovare il numero dei vertici: $10T + 2$. Per i poliedri di Goldberg basta fare lo scambio tra facce e vertici. Dunque

1. per le sfere geodetiche: $20T$ facce e $(10T + 2)$ vertici;
2. per i poliedri di Goldberg: $(10T + 2)$ facce e $20T$ vertici;
3. per entrambi: $30T$ spigoli.

In particolare per i poliedri di Goldberg il numero di facce supera sempre di 2 un multiplo di 10. Tuttavia tenendo conto di come è ottenuto T i valori possibili sono solo

$$12, 32, 42, 72, 92, 122, \dots,$$

come si deduce dalla seguente tabella:

a	b	$T = a^2 + ab + b^2$	$10T + 2$
1	0	1	12
1	1	3	32
2	0	4	42
2	1	7	72
2	2	12	122
3	0	9	92
...

Non è naturalmente escluso che due diverse coppie di valori (a, b) producano lo stesso numero di facce. Il caso con il minor numero di facce è quello $(5, 3)$ e $(7, 0)$ in cui si hanno 492 facce. Goldberg stesso ha dimostrato che con alti valori di a e b si possono avere parecchie combinazioni (anzi addirittura quante se ne vogliono) in cui il numero di facce è identico.

B.5. Poliedri a simmetria tetraedrica e ottaedrica

Il processo di tassellazione illustrato nella griglia triangolare della figura B.6 può essere applicato alle 4 facce di un tetraedro regolare o alle 8 facce di un ottaedro regolare, esattamente con la stessa strategia usata per l'icosaedro.

Per i poliedri originati dal tetraedro si avranno le caratteristiche indicate di seguito.

1. Sfere geodetiche

- a) tutti i vertici hanno valenza tre o sei;
- b) tutte le facce sono triangoli;
- c) permangono tutte le simmetrie rotazionali del tetraedro;
- d) una nomenclatura efficace è del tipo $\{3, 3+\}_{(a,b)}$.

2. Poliedri di Goldberg

- a) tutte le facce sono esagoni o triangoli;
- b) tutti i vertici hanno valenza tre;
- c) permangono tutte le simmetrie rotazionali del tetraedro.
- d) una nomenclatura efficace è del tipo $\{3+, 3\}_{(a,b)}$.

Per i poliedri originati dall'ottaedro si avranno le caratteristiche indicate di seguito.

1. Sfere geodetiche

- a) tutti i vertici hanno valenza quattro o sei;
- b) tutte le facce sono triangoli;
- c) permangono tutte le simmetrie rotazionali dell'ottaedro;
- d) una nomenclatura efficace è del tipo $\{3, 4+\}_{(a,b)}$.

2. Poliedri di Goldberg

- a) tutte le facce sono esagoni o quadrati;
- b) tutti i vertici hanno valenza tre;
- c) permangono tutte le simmetrie rotazionali dell'ottaedro;
- d) una nomenclatura efficace è del tipo $\{4+, 3\}_{(a,b)}$.

Ricordiamo che, come già accennato, la nomenclatura indicata tiene conto che i poliedri platonici di partenza sono individuati, rispettivamente, con i simboli di Schläfli $\{3, 3\}$ (tetraedro) e $\{3, 4\}$ (ottaedro), mentre i loro duali con i simboli $\{3, 3\}$ (ancora tetraedro) e $\{4, 3\}$ (cubo), dove il primo numero indica il tipo di faccia (triangoli o quadrati in questi casi) e il secondo la valenza dei vertici (tre nel tetraedro e cubo, quattro nell'ottaedro). Il + aggiunto alla valenza nelle sfere geodetiche sta a indicare che, mentre le facce restano triangolari, la valenza di alcuni vertici aumenta, mentre il + aggiunto al tipo di facce nei poliedri di Goldberg indica che alcune facce sono poligoni con un maggior numero di lati, mentre la valenza dei vertici rimane sempre 3. Il significato dei numeri a e b della coppia (a, b) è lo stesso di quello già visto precedentemente. Si noti come la nomenclatura adottata è in accordo con il fatto che sfere geodetiche e poliedri di Goldberg sono tra di loro duali.

Proponiamo a titolo d'esempio la costruzione di una sfera geodetica e del corrispondente poliedro di Goldberg sia per il caso della simmetria tetraedrica che per quello della simmetria ottaedrica, precisamente nel caso $(a, b) = (3, 0)$.

Le figure B.22 relativa al caso del tetraedro e B.24 relativa al caso dell'ottaedro illustrano la tassellazione delle facce del solido platonico e le corrispondenti costruzioni delle sfere geodetiche per proiezione sulla sfera circoscritta. Le figure B.23 relativa al caso del tetraedro e B.25 relativa al caso dell'ottaedro mostrano invece solo le sfere geodetiche e i poliedri di Goldberg corrispondenti.

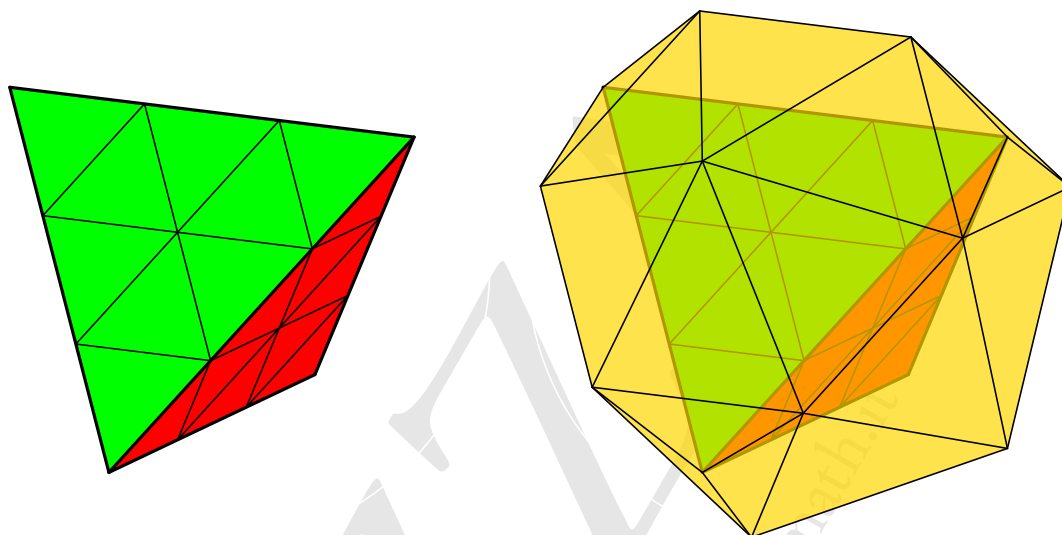


Figura B.22.: *Costruzione della sfera geodetica $\{3,3+\}_{(3,0)}$ a simmetria tetraedrica: triangolazione del tetraedro, a sinistra, e la sfera ottenuta per proiezione, a destra*

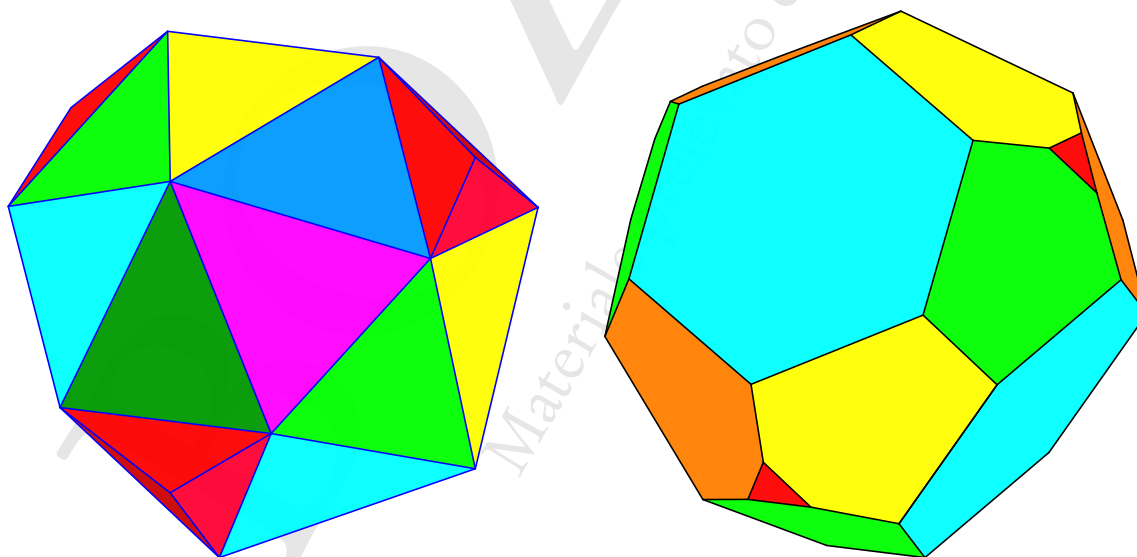


Figura B.23.: *La sfera geodetica $\{3,3+\}_{(3,0)}$, a sinistra, e il corrispondente poliedro di Goldberg $\{3+,3\}_{(3,0)}$, a destra*

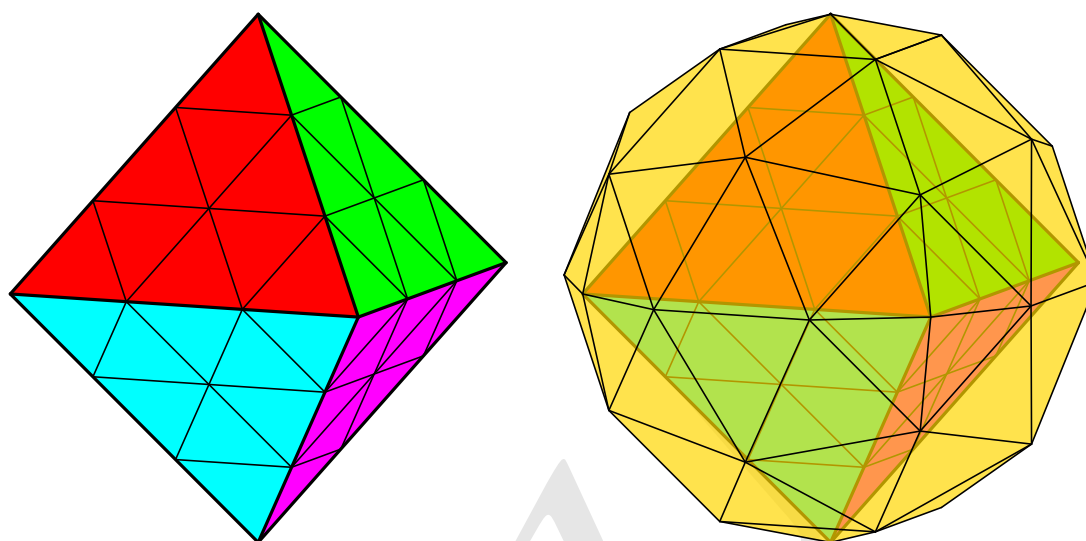


Figura B.24.: *Costruzione della sfera geodetica $\{3,4+\}_{(3,0)}$ a simmetria ottaedrica: triangolazione dell'ottaedro, a sinistra, e la sfera ottenuta per proiezione, a destra*

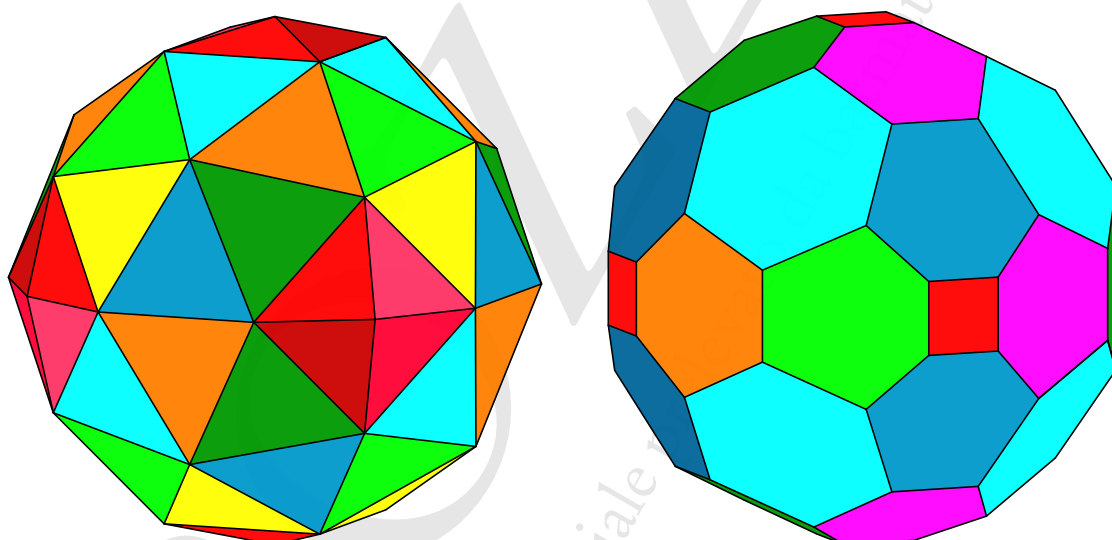


Figura B.25.: *La sfera geodetica $\{3,4+\}_{(3,0)}$, a sinistra, e il corrispondente poliedro di Goldberg $\{4+,3\}_{(3,0)}$, a destra*

B.6. Fullereni

Il carbonio è uno degli elementi chimici che ha la proprietà di formare allotropi⁽⁷⁾, ovvero sostanze semplici (cioè formate da un solo tipo di atomi) che possono esistere in diverse forme con caratteristiche

⁷Anche l'ossigeno, per esempio, ha questa caratteristica: l'ossigeno vero e proprio (O_2) e l'ozono (O_3) sono due forme allotropiche.

radicalmente diverse tra di loro. Nel caso del carbonio le due forme più note, e conosciute da più lungo tempo, sono la grafite e il diamante.

È del 1985 la scoperta ad opera dei chimici Harold Walter Kroto, Robert Floyd Curl e Richard Erret Smalley⁽⁸⁾ di nuove forme molecolari composte da 60, 70 o più atomi di carbonio. La più importante di queste forme, il C_{60} , ha una molecola con 60 atomi di carbonio disposti esattamente nei vertici di un icosaedro troncato. In generale i fullereni hanno proprio la caratteristica di presentare anelli di forma esagonale uniti ad alcuni anelli di forma pentagonale (più raramente ettagonale): questo fatto impedisce una struttura piana di queste molecole (possibile invece nella grafite ad anelli tutti esagonali). Generalmente essi hanno forme grossolanamente sferiche simili ai poliedri di Goldberg, oppure ellissoidali oppure tubolari: quelli sferici o ellissoidali sono noti come *buckyballs*, gli altri come *buckytubes*, o *nanotubi di carbonio*.

Proprio per le affinità geometriche con i poliedri di Goldberg e quindi con le sfere geodetiche, intensamente studiati da Richard Buckminster Fuller, queste sostanze sono state chiamate *fullereni*. È da segnalare però che il maggiore interesse di Buckminster Fuller era per le sfere geodetiche, a causa della loro rigidità strutturale dovuta alle facce triangolari, più adatta dunque per le costruzioni, e quindi forse questo nome è un po' improprio. Addirittura al C_{60} è stato attribuito proprio il nome di *buckminsterfullerene*: la sua molecola è illustrata nella figura B.26.

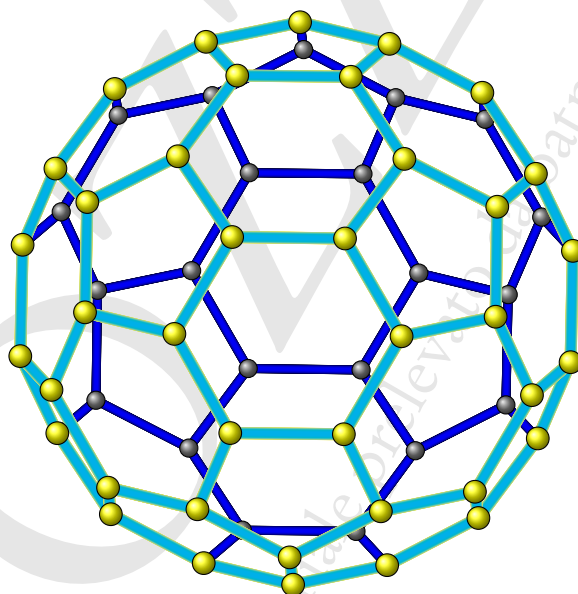


Figura B.26.: La molecola del Buckminsterfullerene

I fullereni possono essere molto meno simmetrici dei poliedri di Goldberg: tuttavia, come già detto, il buckminsterfullerene è tra i più stabili forse proprio a causa della sua alta simmetria. Il più piccolo fullerene, il C_{20} , corrisponde al dodecaedro ed è molto instabile, anche a causa del fatto che tutti gli anelli pentagonali sono adiacenti: in generale la stabilità aumenta se gli anelli pentagonali sono ben separati tra di loro.

⁸Essi ricevettero il premio Nobel per la chimica nel 1996 proprio per questa scoperta.

C. Curiosità sul cubottaedro

L'esagono regolare è l'unico poligono convesso in cui il lato coincide con il raggio della circonferenza circoscritta. Questo fatto ha come conseguenza, tra l'altro, che i suoi vertici sono centri di sei circonferenze identiche tangenti a una settima circonferenza, ancora con lo stesso raggio, in una forma la più compatta possibile. Si veda la figura C.1.

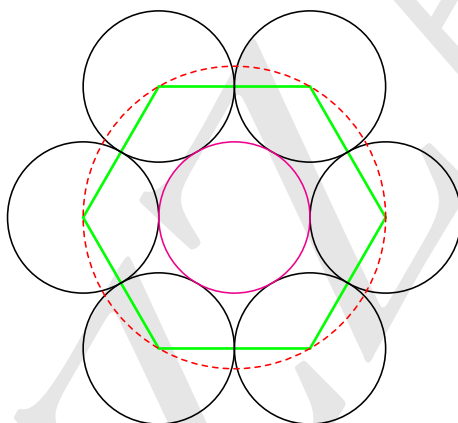


Figura C.1.: *Esagono regolare e sette circonferenze tangenti esternamente*

Il cubottaedro è l'unico poliedro convesso che ha la stessa proprietà dell'esagono di avere lo spigolo uguale al raggio della sfera circoscritta e questo fatto, unitamente ad altre sue caratteristiche, ha interessanti conseguenze, cui faremo cenno in questo capitolo.

In conseguenza di tutte queste speciali caratteristiche non è azzardato pensare, come qualcuno sostiene, che il cubottaedro si possa ritenere il vero “costituente di base dell'universo”, più ancora dei cinque solidi platonici.

Segnaliamo anche che il cubottaedro e le sue proprietà sono state estesamente studiate da Richard Buckminster Fuller e ricordiamo che quasi certamente questo solido era conosciuto da Platone: Erone d'Alessandria riferisce infatti che Platone conosceva un solido formato da otto triangoli e sei quadrati, che non può essere altro che il cubottaedro.

C.1. Impacchettamento di tredici sfere

Un modo efficace per visualizzare graficamente la proprietà del cubottaedro di avere gli spigoli uguali al raggio della circonferenza circoscritta è di considerare i quattro esagoni regolari che si possono costruire congiungendo sei dei quattordici vertici del cubottaedro: la figura C.2 mostra questi quattro esagoni, uno alla volta, con la circonferenza circoscritta a ciascuno, che ha lo stesso raggio della sfera che circoscrive il cubottaedro. La figura C.3 mostra invece contemporaneamente i quattro esagoni.

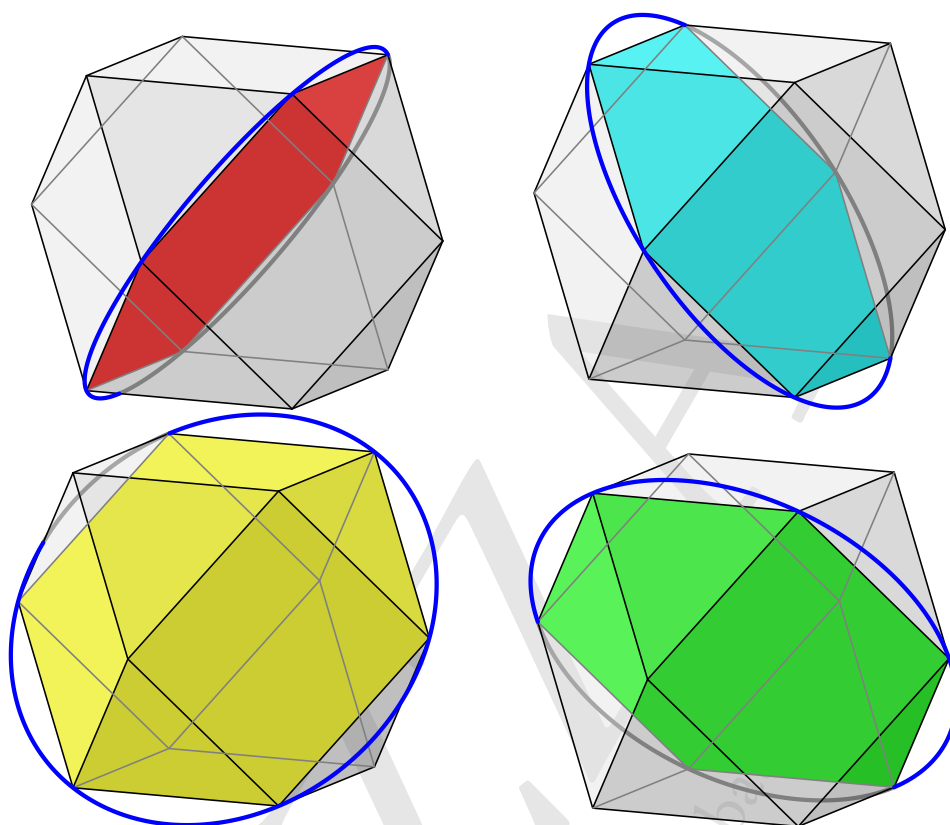


Figura C.2.: *I quattro esagoni regolari inscrivibili in un cubottaedro*

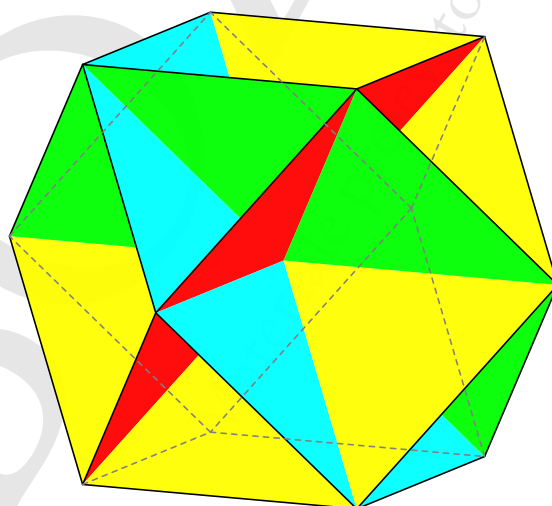


Figura C.3.: *Quattro esagoni in un cubottaedro: visione complessiva*

L'estensione della proprietà relativa alle circonferenze con centro sui vertici di un esagono porta a costruire un impacchettamento di dodici sfere sui vertici del cubottaedro, più una sfera centrale. Anche in questo caso l'impacchettamento è il più compatto possibile. La figura C.4 mostra i primi due passi nella costruzione dell'impacchettamento; la C.5 mostra tutte le tredici sfere.

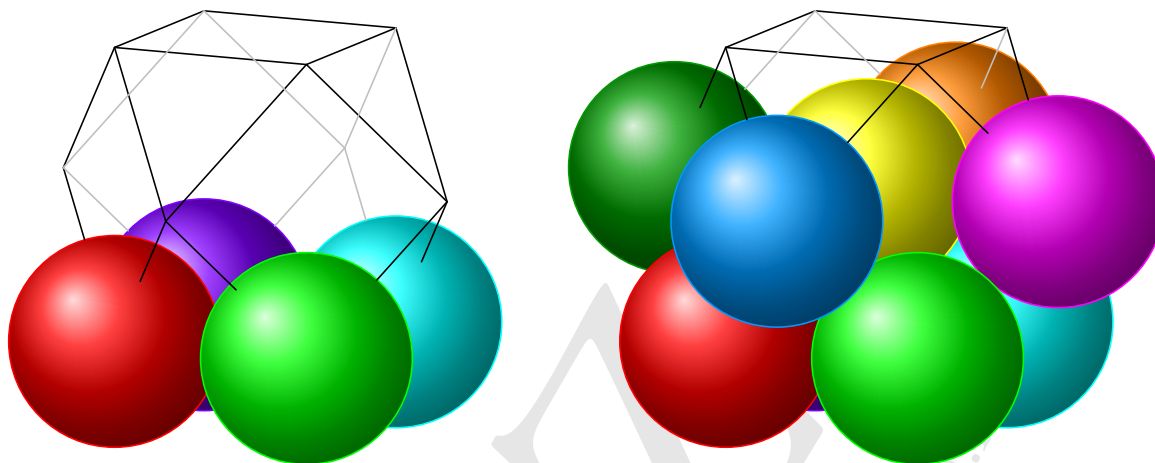


Figura C.4.: *Costruzione dell'impacchettamento di sfere sui vertici del cubottaedro: prime quattro sfere, a sinistra, e aggiunta di ulteriori quattro sfere più la sfera centrale, a destra*

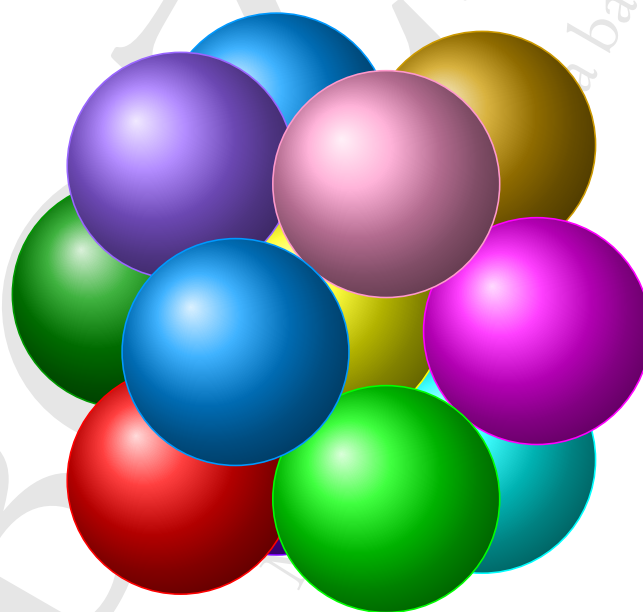


Figura C.5.: *Costruzione dell'impacchettamento di sfere sui vertici del cubottaedro: le tredici sfere*

La stretta analogia con la situazione bidimensionale illustrata nella figura C.1 è ancora più evidente se si considerano solo le sei sfere sui vertici di un esagono inscritto nel cubottaedro, più la sfera centrale: questa situazione è illustrata nella figura C.6.

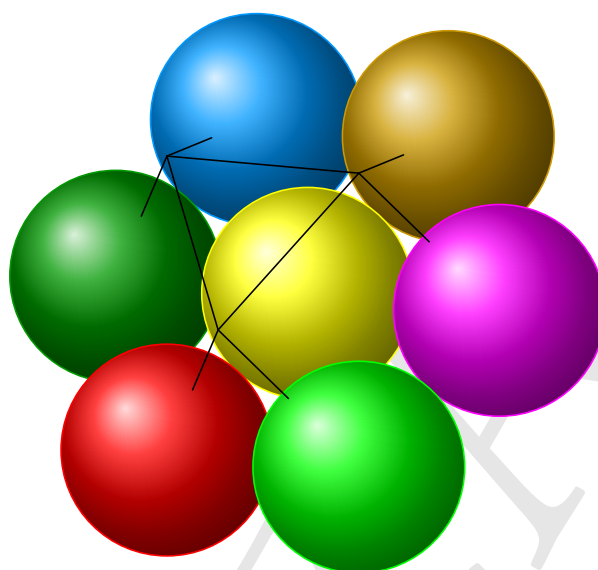


Figura C.6.: Impacchettamento di sfere sui vertici del cubottaedro: le sei sfere sui vertici di un esagono inscritto, più la sfera centrale

Se rimuoviamo la sfera centrale e immaginiamo che i centri delle dodici sfere residue siano collegati da elastici tesi, queste dodici sfere si ridisporranno in una configurazione più compatta, esattamente ai vertici di un icosaedro regolare: si può ritenere che l'icosaedro sia una prima contrazione del cubottaedro. Si veda la figura C.7 nella quale, in confronto con la C.5, si può notare la ridisposizione delle dodici sfere residue in modo da realizzare il massimo di tangenza tra di loro.

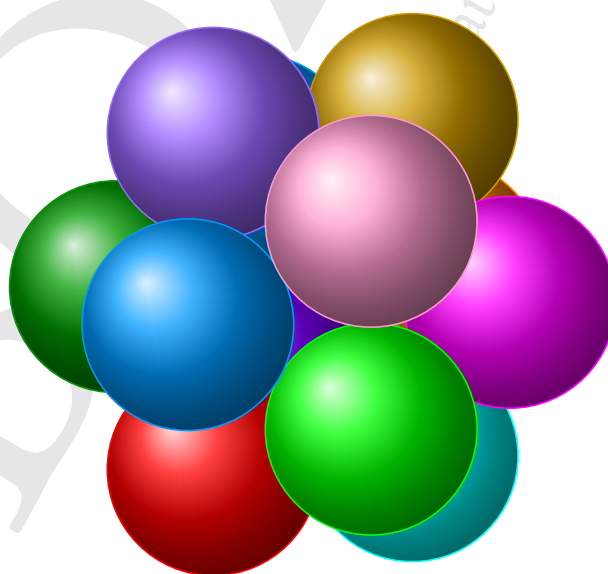


Figura C.7.: Contrazione in simmetria icosaedrica delle sfere della figura C.5, dopo soppressione della sfera centrale

La figura C.8 mostra, a sinistra, solo dieci delle dodici sfere della figura C.7, per evidenziare la mancanza della sfera centrale. La stessa figura, a destra, evidenzia invece la struttura icosaedrica della disposizione dei centri delle sfere della figura C.7.

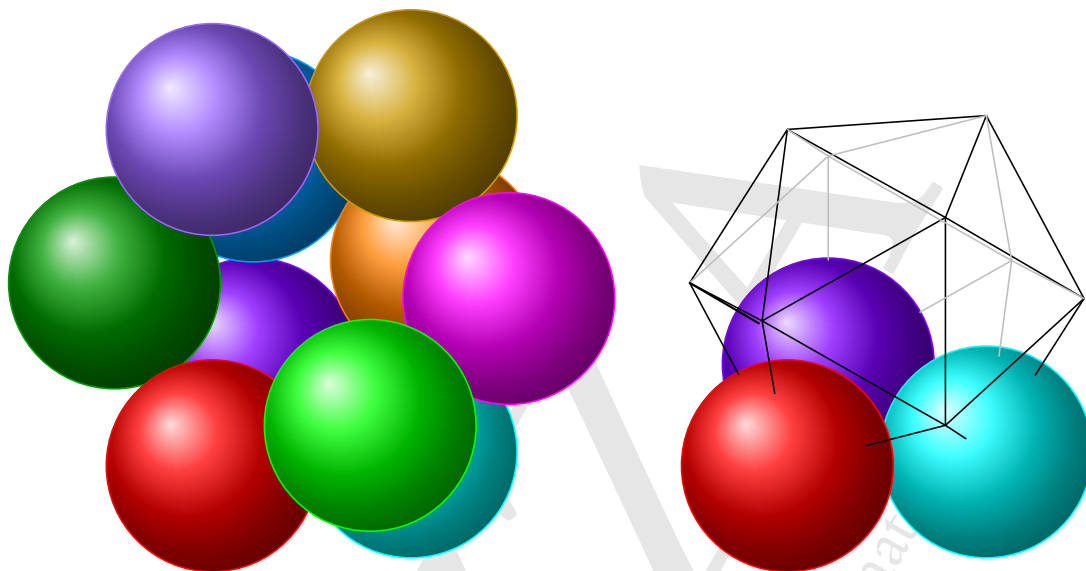


Figura C.8.: Dieci delle dodici sfere della figura C.7, a sinistra, ed evidenziazione della struttura icosaedrica, a destra

C.2. Decomposizioni del cubottaedro

Tra le diverse possibili decomposizioni del cubottaedro in poliedri più semplici ci occupiamo qui della decomposizione in otto tetraedri regolari e sei piramidi rette a base quadrata e facce triangolari equilateri: questo permetterà tra l'altro un agevole calcolo del volume del cubottaedro.

La figura C.9 mostra il cubottaedro e le sei piramidi da esso “estratte”, la figura C.10 mostra invece il cubottaedro e gli otto tetraedri da esso “estratti”. In entrambe le immagini sono evidenziati, per le piramidi e i tetraedri, i vertici corrispondenti al centro del cubottaedro: nel caso delle piramidi si tratta ovviamente sempre del vertice opposto alla faccia quadrata, nel caso dei tetraedri invece tutti i vertici sono “equivalenti”, come sempre succede in un solido platonico.

Osserviamo che le piramidi a base quadrata e facce laterali triangolari equilateri sono poliedri con facce tutte regolari, ma non sono solidi semiregolari, in quanto, per esempio, i vertici non hanno tutti la stessa valenza. Queste piramidi, unitamente a quelle a base pentagonale e facce triangolari equilateri, rientrano nella categoria dei solidi di Johnson, che comprende tutti i poliedri convessi a facce poligonali regolari, diversi dai solidi platonici e archimedeei. Queste piramidi, inoltre, sono esattamente la metà di un ottaedro regolare.

E veniamo all'annunciato calcolo del volume. Sia per i tetraedri che per le piramidi il volume \mathcal{V} si ottiene con la nota formula

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} \cdot h,$$

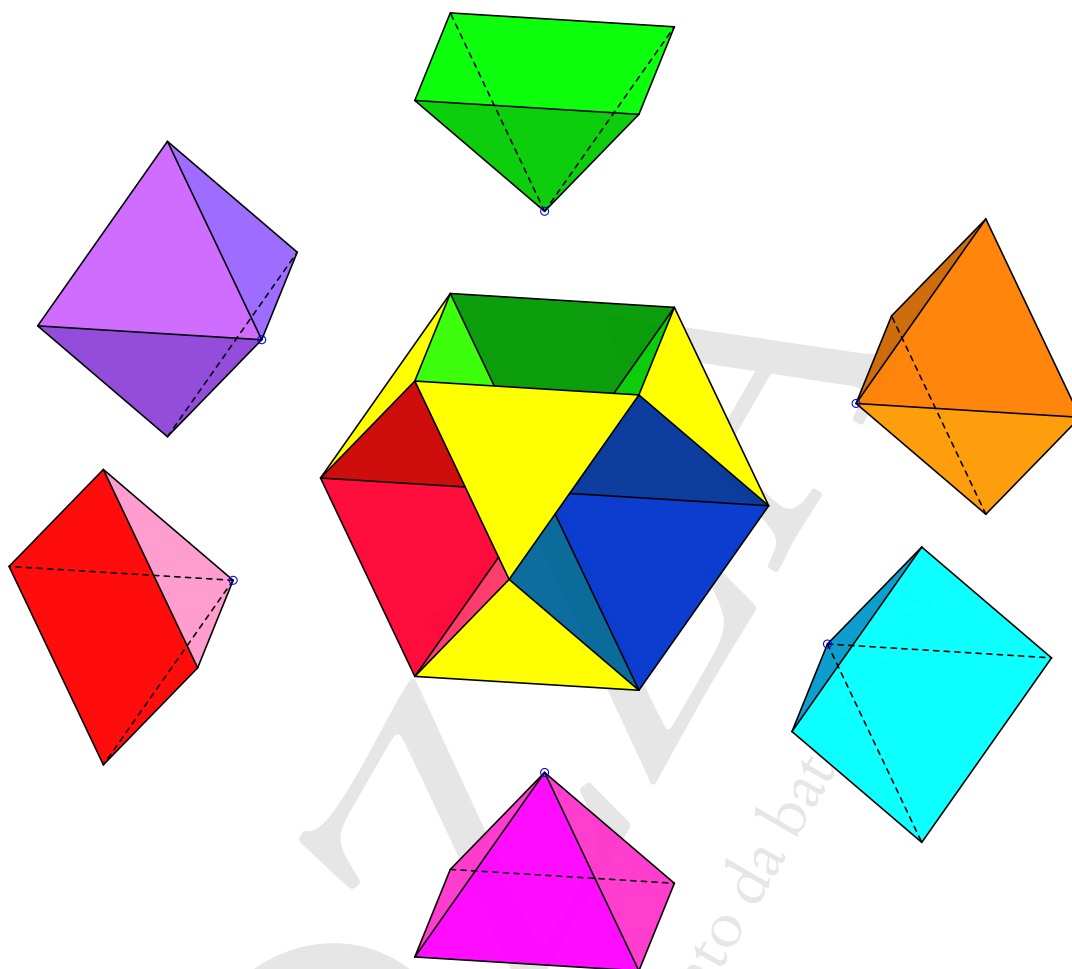


Figura C.9.: Le sei piramidi a base quadrata e facce triangolari regolari che compongono, assieme ai tetraedri della figura C.10, il cubottaedro

dove \mathcal{B} è l'area di base (il quadrato nelle piramidi o, rispettivamente, uno qualunque dei quattro triangoli nel tetraedro) e h è l'altezza ad essa relativa⁽¹⁾.

Indichiamo con ℓ lo spigolo del cubottaedro, e quindi delle piramidi e dei tetraedri. Le aree di base sono, rispettivamente,

$$\mathcal{B}_{\text{pir}} = \ell^2, \quad \mathcal{B}_{\text{tetr}} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Un po' di calcoli elementari sui triangoli rettangoli VBH, in cui $|\overline{VB}| = \ell$ e

$$|\overline{BH}|_{\text{pir}} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}, \quad |\overline{BH}|_{\text{tetr}} = \ell\sqrt{\frac{2}{3}},$$

¹È molto probabile che questa formula fosse nota già agli antichi egizi, che forse la ricavarono costruendo dei modellini di argilla di una piramide e di un parallelepipedo con stessa base e altezza e constatando che il peso del parallelepipedo era triplo di quello della piramide.

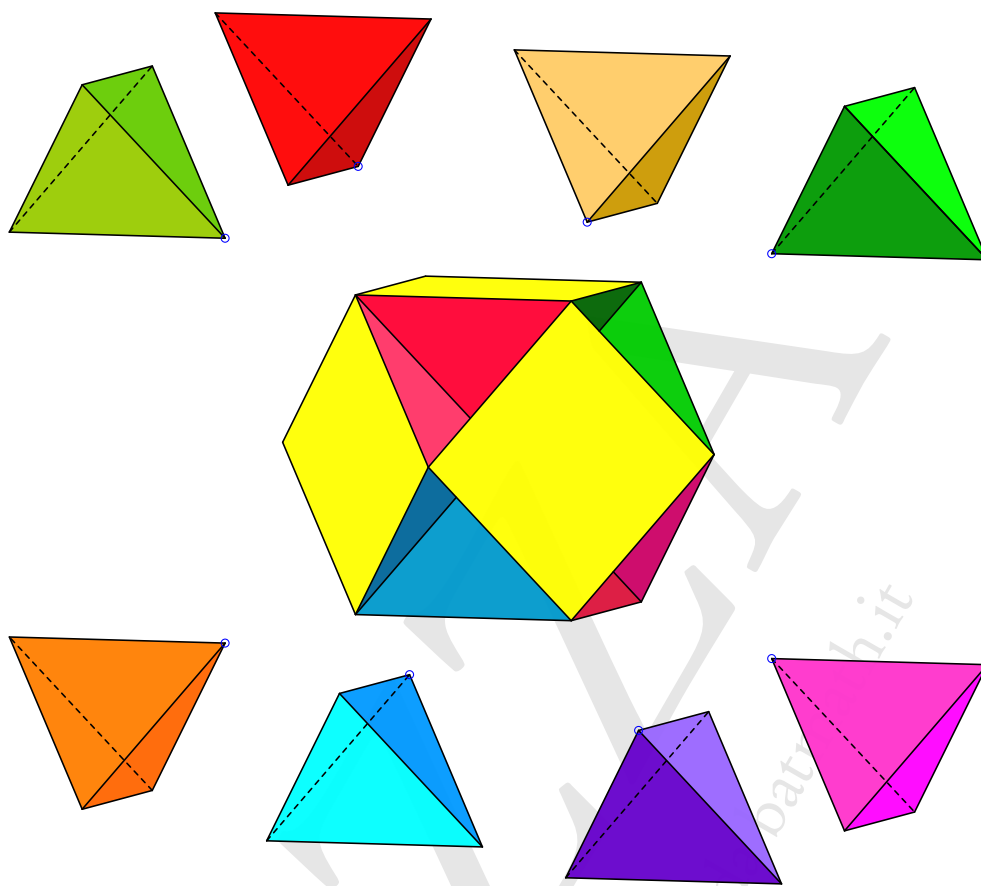


Figura C.10.: Gli otto tetraedri regolari che compongono, assieme alle piramidi della figura C.9, il cubottaedro

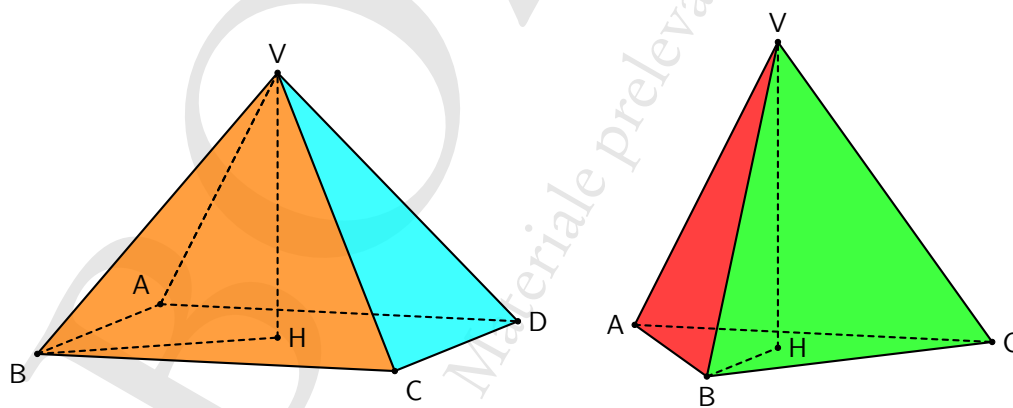


Figura C.11.: Calcolo dell'altezza di una piramide a base quadrata e facce triangolari regolari e di un tetraedro regolare

forniscono facilmente i seguenti valori:

$$V_{\text{pir}} = \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad V_{\text{tetr}} = \ell^3 \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Dunque il volume della piramide è doppio di quello del tetraedro. Per il cubottaedro, in base alla decomposizione considerata, concludiamo che

$$V_{\text{cubottaedro}} = 20V_{\text{tetraedro}}$$

un risultato particolarmente significativo.

C.3. Dal cubottaedro ai solidi platonici

Una proprietà interessante del cubottaedro è quella di “generare” i tre deltaedri platonici, cioè il tetraedro, l’ottaedro e l’icosaedro, mediante deformazione della sua struttura. L’idea è dovuta a Buckminster Fuller e la illustreremo in questo paragrafo. Poiché per dualità da questi tre deltaedri si ottengono gli altri due solidi platonici, si può ritenere che il cubottaedro contenga il “seme” dei cinque solidi regolari.

Consideriamo il cubottaedro rappresentato nella figura C.12: come tutti i solidi convessi esso è rigido se sono incluse tutte le facce sia triangolari che quadrate. Ovviamente la rimozione delle facce triangolari non ne modifica la rigidità, per la caratteristica intrinseca dei triangoli. La rimozione delle facce quadrate rende invece la struttura deformabile ed è proprio questo che ci condurrà alla costruzione dei tre deltaedri.

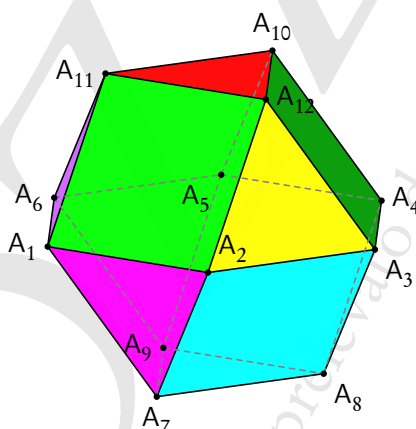


Figura C.12.: Il cubottaedro che sarà usato per le trasformazioni

Il processo avviene in due fasi: nella prima si passa dal cubottaedro all’ottaedro, passando per l’icosaedro, nella seconda dall’ottaedro al tetraedro, passando per un tronco di tetraedro e un triangolo equilatero. Tutto il processo è illustrato nelle figure dalla C.13 alla C.19; la figura C.20 riassume i passi essenziali del percorso.

Con riferimento alla figura C.12, consideriamo la faccia triangolare $A_7A_8A_9$ che immaginiamo di fissare nel suo piano e che rimarrà fissa in tutto il processo. La faccia opposta, $A_{10}A_{11}A_{12}$, nella prima fase si muoverà verso la $A_7A_8A_9$ senza ruotare, mentre nella seconda fase andrà a sovrapporsi alla $A_7A_8A_9$, dopo una rotazione complessiva di 240° .

La parte più delicata del processo è quella che porta dal cubottaedro all’icosaedro, illustrata nelle figure C.13 e C.14. Spingendo il triangolo $A_{10}A_{11}A_{12}$ verso il triangolo opposto, senza rotazione, le facce

quadrate cessano dall'essere piane e si "piegano" lungo le diagonali indicate nella figura C.14, dando luogo a due facce triangolari inizialmente isosceli fin quando i triangoli diventano equilateri: è questa la situazione in cui si ottiene l'icosaedro. In questo caso, per ottenere effettivamente l'icosaedro, occorre aggiungere gli spigoli generati dalle diagonali dei quadrati.

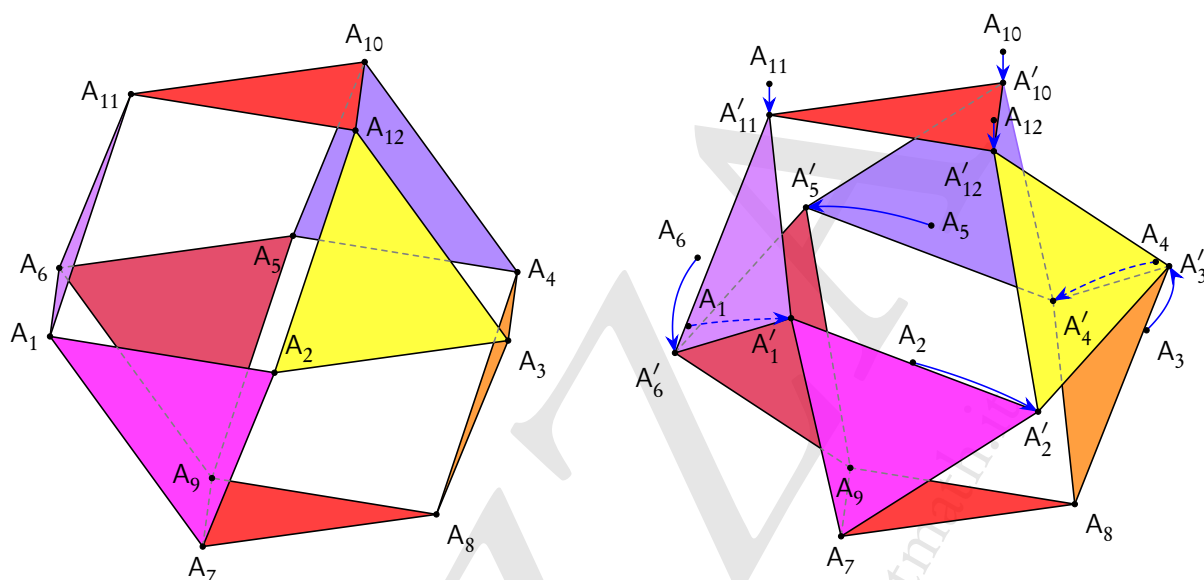


Figura C.13.: Il cubottaedro senza le facce quadrate, a sinistra, e la prima deformazione che conduce alla costruzione dell'icosaedro, a destra

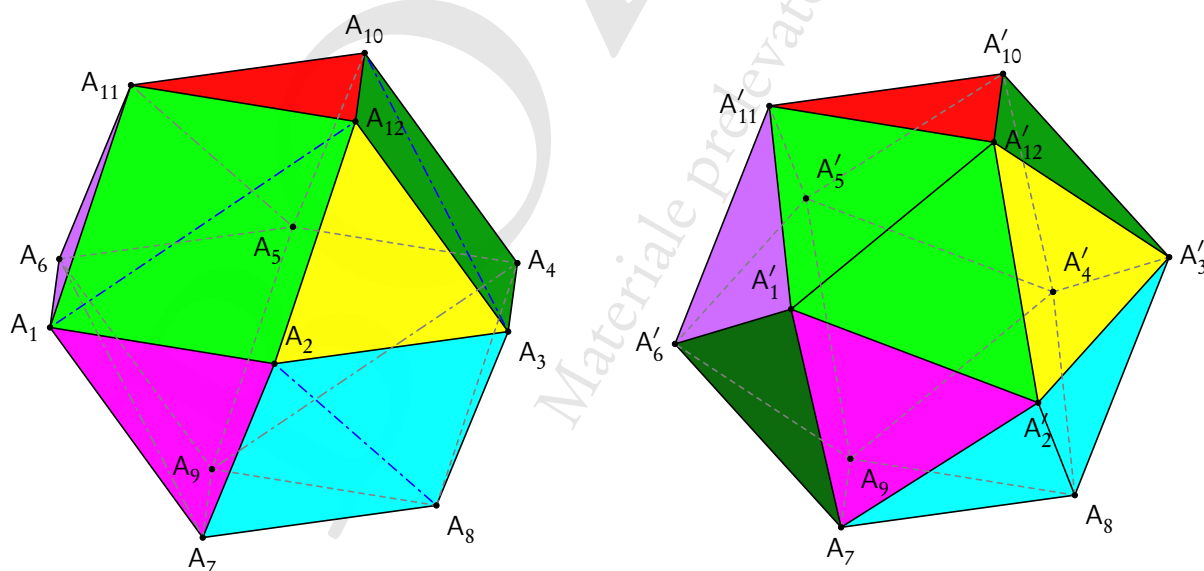


Figura C.14.: Il cubottaedro originale, a sinistra, e l'icosaedro ottenuto come primo passo della deformazione, a destra

Dopo aver rimosso gli spigoli aggiunti per avere l'icosaedro, proseguiamo spingendo il triangolo $A_{10}A_{11}A_{12}$ verso il triangolo opposto, sempre senza rotazione, fin quando le facce triangolari ottenute dai quadrati originari si riducono a segmenti, ovvero le diagonali dei quadrati si riducono a punti: è questa la situazione in cui si ottiene l'ottaedro, con ciascuno dei suoi spigoli e vertici costituito da due spigoli o vertici del cubottaedro originale sovrapposti. Si vedano le figure C.15 e C.16.

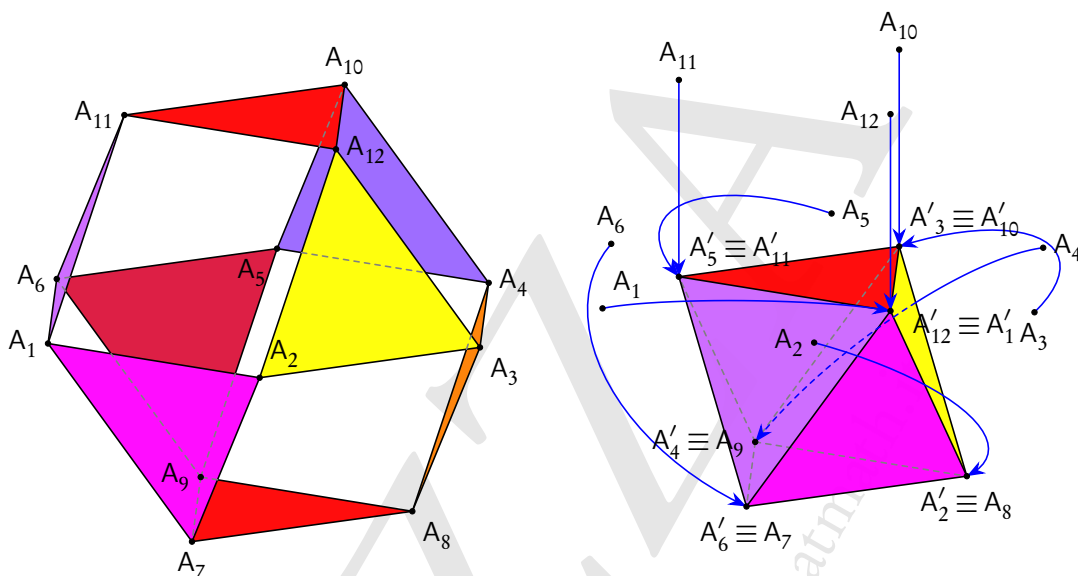


Figura C.15.: Il cubottaedro senza le facce quadrate, a sinistra, e la deformazione completa che conduce alla costruzione dell'ottaedro, a destra

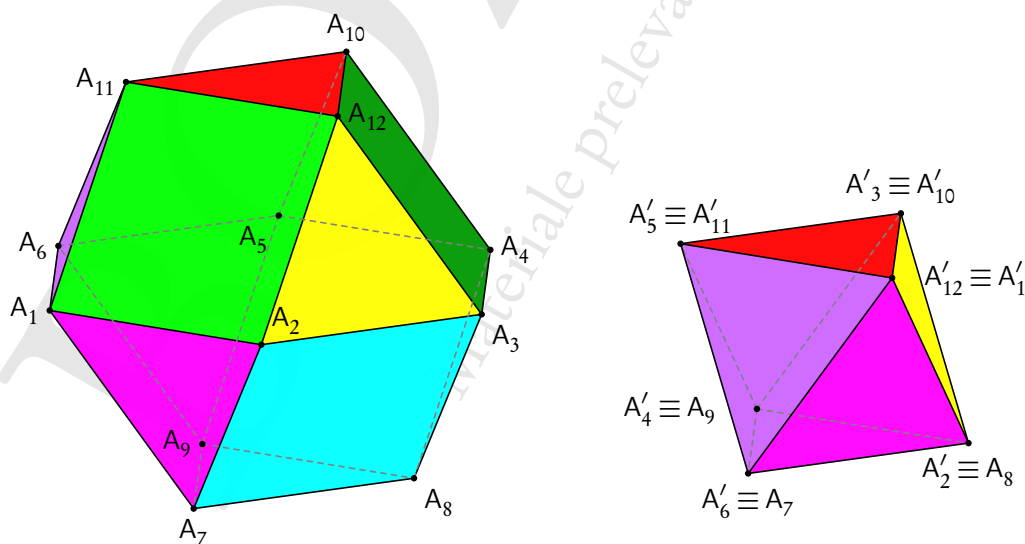


Figura C.16.: Il cubottaedro originale, a sinistra, e l'ottaedro ottenuto mediante deformazione, a destra

A questo punto procediamo risolvendo leggermente la faccia $A_{10}A_{11}A_{12}$, in modo da poterle fare eseguire una prima rotazione di 120° , come indicato nella figura C.17: il solido che si ottiene è ora un tronco di tetraedro (attenzione: non un tetraedro troncato che è un altro solido archimedeo!). Non si tratta di un solido interessante per quanto riguarda questo processo, tuttavia è utile considerarlo per una migliore comprensione del processo stesso.

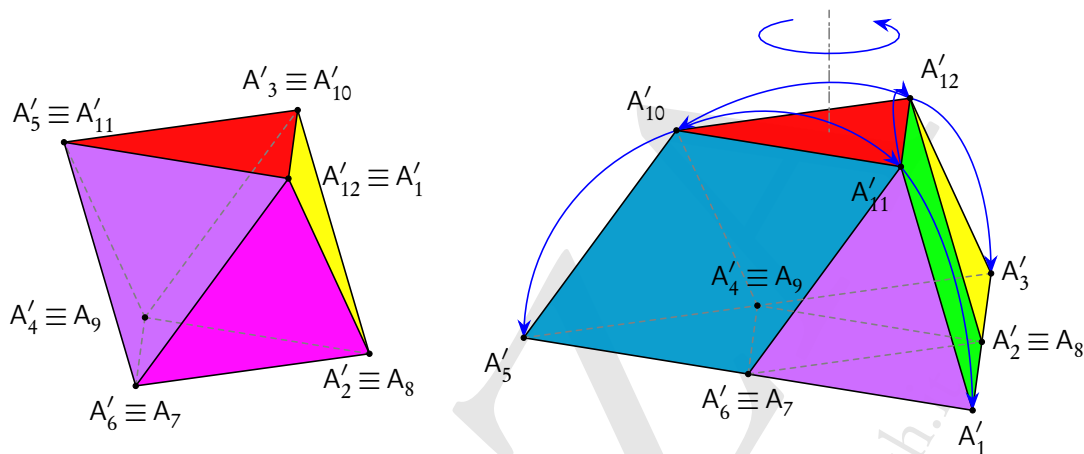


Figura C.17.: L'ottaedro ottenuto per deformazione, a sinistra, e il tronco di tetraedro ottenuto per successiva deformazione, a destra

Successivamente una ulteriore rotazione di 120° della faccia $A_{10}A_{11}A_{12}$ abbassa la stessa fino a farla sovrapporre alla faccia opposta $A_7A_8A_9$. A questo punto il cubottaedro è appiattito in un triangolo equilatero.

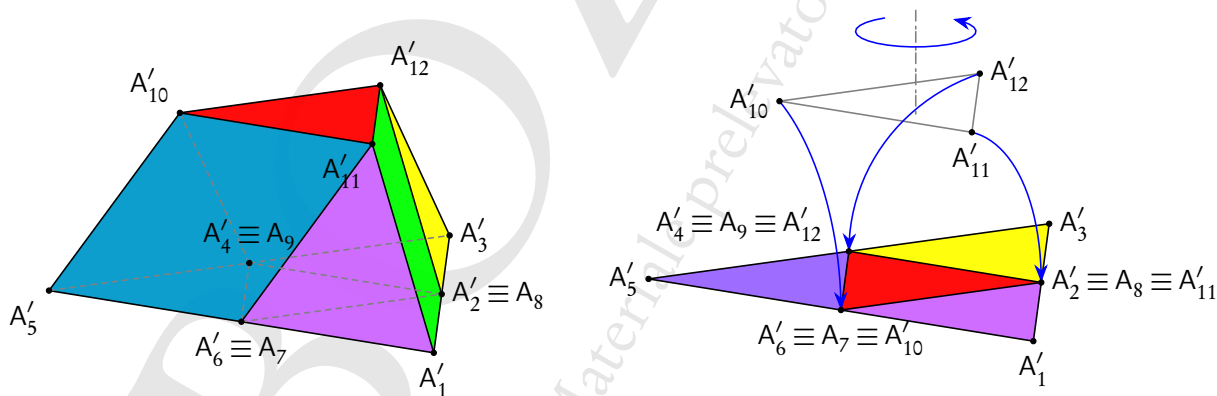


Figura C.18.: Il tronco di tetraedro ottenuto nella figura C.17, a sinistra, e il triangolo equilatero ottenuto per successivo appiattimento, a destra

L'ultimo passo della trasformazione consiste nel ripiegare verso l'alto i tre vertici del triangolo equilatero per ottenere il tetraedro illustrato nella figura C.19: ciascuna delle sue facce è costituita da due triangoli sovrapposti del cubottaedro originale, ciascuno dei suoi spigoli da quattro spigoli sovrapposti del cubottaedro originale e ciascuno dei suoi vertici da tre vertici sovrapposti del cubottaedro originale.

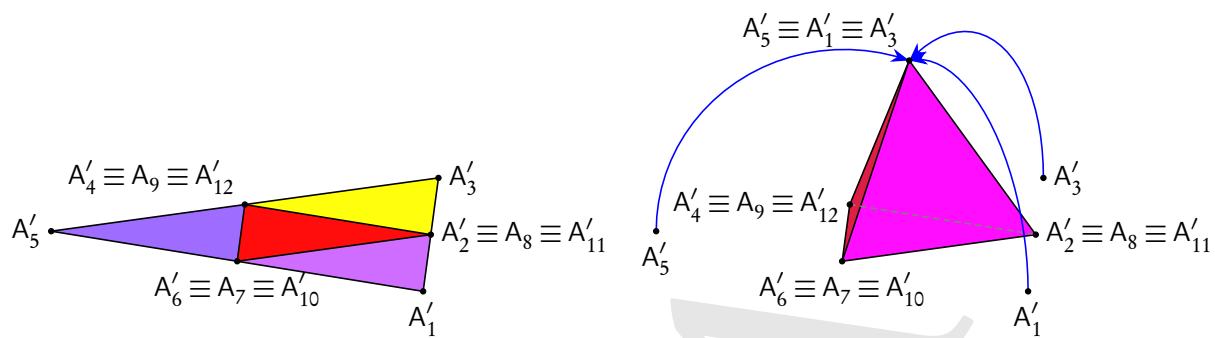


Figura C.19.: Il triangolo equilatero ottenuto nella figura C.18, a sinistra, e il tetraedro ottenuto per successiva deformazione, a destra

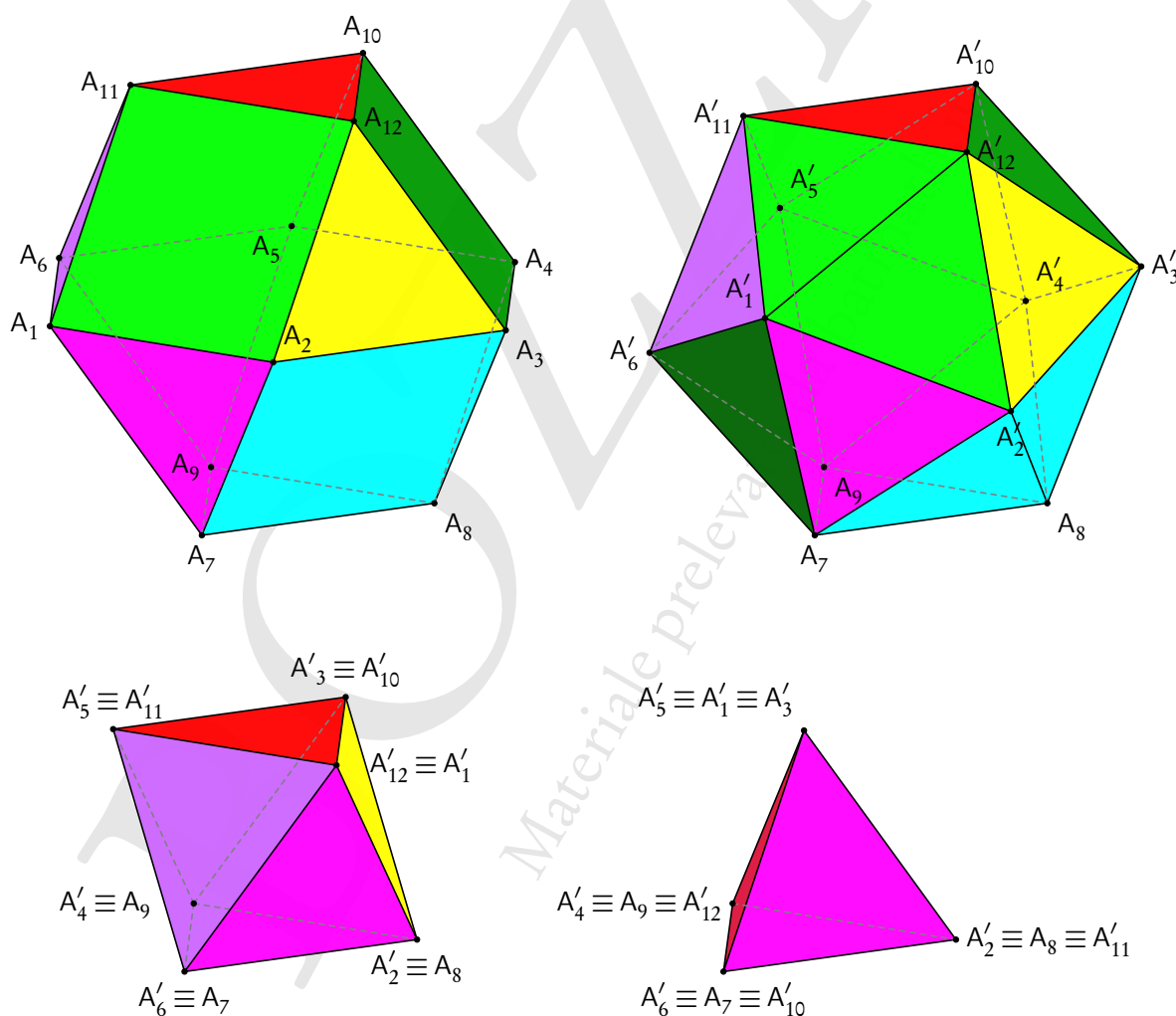


Figura C.20.: Visione d'assieme del cubottaedro e dei tre deltaedri platonici ottenuti per successive deformazioni

Bibliografia

- [1] Fabio Acerbi. *EUCLIDE Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007.
- [2] Eric Aiton, Judith V. Field e A.M. Duncan. *The Harmony of the World by Johannes Kepler*. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.
- [3] Tomaso Aste e Weaire Denis. *The Pursuit of perfect Packing*. New York: Taylor & Francis Group, 2008.
- [4] Jean Paul Albert Badoureau. «Mémoire sur les figures isoscèles». In: *Journal de l'École polytechnique* 49 (1881), pp. 47–172.
- [5] Daniel Barbaro. *La pratica della Perspectiva*. Venezia: Camillo e Rutilio Borgominieri, 1669.
- [6] Marcel Berger. *Géométrie vivante ou L'échelle de Jacob*. Paris: Cassini, 2009.
- [7] Max Bruckner. *Vielecke und Vielfache*. Leipzig: Teubner, 1900 (cit. a p. 1).
- [8] Richard Buckminster Fuller. *Synergetics - Explorations in the Geometry of Thinking*. London: Macmillan Publishing, 1975.
- [9] Francis Buekenhout e Monique Parker. «The number of nets of the regular polytopes in dimension ≤ 4 ». In: *Discrete Mathematics* 186 (1998) (cit. a p. 123).
- [10] Federico Commandino. *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*. Bologna: Ex Typographia HH. de Duccijs, 1660.
- [11] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Introduction to Geometry - Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [12] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Regular Polytopes*. London: Methuen & Co. Ltd., 1948.
- [13] Harold Scott MacDonald Coxeter e Rouse Ball. *Mathematical Recreations and Essays*. New York: The Macmillan Company, 1947 (cit. a p. 115).
- [14] Harold Scott MacDonald Coxeter e Patrick Du Val. *The Fifty-Nine Icosahedra*. New York: Springer, 1982.
- [15] Harold Scott MacDonald Coxeter e Samuel Greitzer. *Geometry Revisited*. New York: The Mathematical Association of America, 1967.
- [16] Harold Scott MacDonald Coxeter, Michael Selwyn Longuet-Higgins e Jeffrey Charles Percy Miller. «Uniform Polyhedra». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. A 246.916 (1954), pp. 401–450.
- [17] Keith Critchlow. *Order in space, a design source book*. New York: Thames e Hudson Inc., 1987.
- [18] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer e Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. New York: Springer, 1991.

- [19] Peter R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [20] Henry Martin Cundy e A.P. Rollett. *Mathematical Models*. Oxford: Oxford University Press, 1961.
- [21] Maria Dedó. *Forme, simmetria e topologia*. Bologna: Zanichelli, 1999.
- [22] Albrecht Dürer. *Underweisung der Messung*. Nuremberg: Hieronymus Formschneyder, 1538.
- [23] Robert Ferréol. *Encyclopédie des formes remarquables, Courbes, Surfaces, Fractals, Polyèdres*. 2017. URL: <http://www.mathcurve.com>.
- [24] Judith V. Field. «Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler». In: *Archive for History of Exact Sciences* 50 (1997) (cit. a p. 20).
- [25] Martin Gardner. «On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving». In: *Scientific American* 232.5 (1975).
- [26] Francesco Giovannetti. *Le tassellazioni dello spazio*. Capitolo 8 del laboratorio didattico-scientifico *Poliedri in pezzi*. 2012. URL: http://www.labfrancoconti.it/public/lab_conti/LAB/DOCUMENTAZIONE/08-Letassellazionidellospazio.pdf.
- [27] Michael Goldberg. «A class of Multi-Symmetric Polyhedra». In: *Tohoku Mathematical Journal* 42 (1937).
- [28] Michael Goldberg. «Unstable Polyhedral Structures». In: *Mathematics Magazine* 51 (1978).
- [29] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. New York: Springer, 2003.
- [30] Adolf Edmund Hess. «Über vier Archimedäische Polyeder höherer Art». In: *Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg* 11.4 (1878), pp. 261–271.
- [31] Wenzel Jamnitzer. *Perspectiva Corporium Regularium*. Nuremberg: Jost Amman, 1568 (cit. a p. 86).
- [32] Normann Johnson. «Convex Solids with Regular Faces». In: *Canadian Journal of Mathematics* 18 (1966).
- [33] Jay Kappraf. *Connections - The Geometric Bridge Between Art and Science*. Singapore: World Scientific, 2001 (cit. a p. 49).
- [34] Miyuki Kawamura. *Polyhedron Origami for Beginners*. Tokyo: Nihon Vogue Company, 2001.
- [35] Giovanni Keplero. *Harmonices Mundi*. Linz, Austria: Johannes Planck, 1619.
- [36] Lazar Aronovich Lyusternik. *Convex Figures and Polyhedra*. Boston: D.C.Heath e Company, 1966.
- [37] John Montroll. *A Constellation of Origami Polyhedra*. New York: Dover Publications, 2004.
- [38] John Montroll. *A Pletora of Polyhedra in Origami*. New York: Dover Publications, 2002.
- [39] Edith Mooers. *Tammes's Problem*. 1994. URL: <http://www.uvm.edu/pdodds/files/papers/others/1994/mooers1994a.pdf>.
- [40] Luca Pacioli. *Divina proportione*. Venezia: Paganio Paganino, 1509.

- [41] Clifford Alan Pickover. *The Math Book*. New York: Sterling Publishing, 2009.
- [42] Johann Pitsch. «Über Halbreguläre Sternpolyeder». In: *Zeitschrift für das Realschulwesen* 6 (1881), pp. 9–24, 64–65, 72–89, 216.
- [43] Edward S. Popko. *Divided Spheres*. New York: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2012.
- [44] Anthony Pugh. *Polyhedra, a visual approach*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1976 (cit. a p. 35).
- [45] David S. Richeson. *Euler's Gem - The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- [46] Jean Francois Rotgé. «Rotating Polyhedra with Congruent Plane Pentagonal Faces». In: *Structural Topology* 9 (1984) (cit. alle pp. 49, 105).
- [47] Marjorie Senechal. *Shaping Space*. New York: Springer, 2013.
- [48] John Skilling. «The complete Set of Uniform Polyhedra». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 278.1278 (1975), pp. 111–135.
- [49] S.P. Sopov. «A proof of the completeness of the list of elementary homogeneous polyhedra». In: *Ukrainskii geometricheskii sbornik* 8 (1970), pp. 139–156.
- [50] Walter Steurer e Sofia Deloudi. *Crystallography of Quasicrystals - Concepts, Methods and Structures*. Berlin: Springer, 2009.
- [51] Alicia Boole Stott. «Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings». In: *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen XL.1* (1910) (cit. a p. 115).
- [52] Geneviève Tulloue. *Figures animées pour la Physique*. 2017. URL: http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/.
- [53] Eric W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [54] David Wells. *The Penguin Dictionary of curious and interesting Geometry*. London: Penguin Books, 1991.
- [55] Magnus Joseph Wenninger. *Dual Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [56] Magnus Joseph Wenninger. *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.
- [57] Magnus Joseph Wenninger. *Spherical Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
- [58] Robert Williams. *The Geometrical Foundation of Natural Structure - A Source Book of Design*. New York: Dover Publications, 1972.

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

Indice analitico

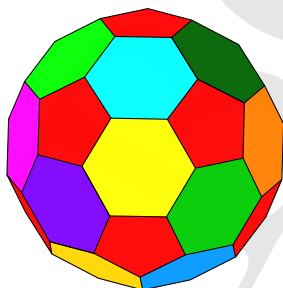
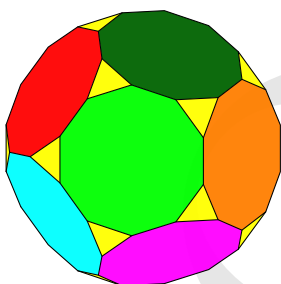
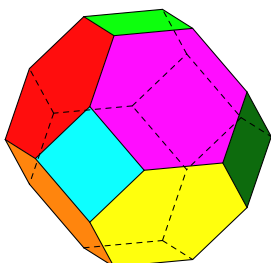
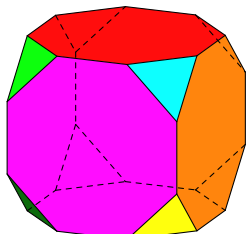
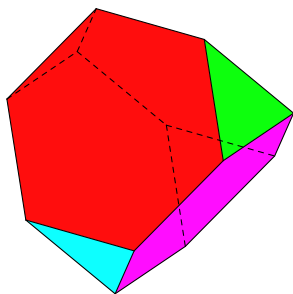
- addolcimento, 105
antidiamante, 15
antiprisma, 13
antiprisma digonale, 16
antiprismi stellati, 18
aquilone, 13
- bicilindro, 99
bipiramide, 10
buckminsterfullerene, 224
buckyball, 224
buckytube, 224
- celle favi delle api, 92
classi delle sfere geodetiche, 212
congettura di Shephard, 123
cubo camuso, 105
cubo simo, 105
cupole geodetiche, 203
- decacisdodecaedro, 139
deltaedro, 13
deltoedro, 13
deltoide, 13
diamanti, 11
digono, 16
disdyakis dodecahedron, 139
disdyakis triacontahedron, 139
dodecaedro camuso, 105
dodecaedro di Bilinski, 95
dodecaedro rombico, 62, 95
dodecaedro rombico aureo, 95
dodecaedro rombico di seconda specie, 95
dodecaedro simo, 105
dodecaedro smussato, 205
Dorman Luke, 5
- duale di un antiprisma, 13
duale di un prisma, 10
dualità, 1
dualità combinatoria, 8
dualità metrica, 8
- elevazione, 132
esacontaedro pentagonale pentatroncato, 206
- facce laterali di un prisma, 9
fullerene, 224
fullerene, 203
- grado di un vertice, 33
- Hexpropello dodecaedro, 206
- icosaedro camuso, 105
icosaedro rombico aureo, 95
impacchettamento di sfere, 182
impacchettamento di tredici sfere, 227
involucro convesso, 8
- levigatura, 105
- metodo delle troncature, 49
metodo di espansione, 115
mouhefanggai, 99
- nanotubo di carbonio, 224
- octacisesaedro, 139
ordine di un prisma, 9
ottaedro camuso, 105
- Pentacisicosidodecaedro, 213
piano di troncatura, 49
piano polare, 1

- poliedri di Badoureaux-Coxeter, 35
poliedri di Goldberg, 60, 203
poliedri quasi regolari, 55
poliedri semiregolari, 9
poliedri semiregolari di seconda specie, 11, 131
poliedro chirale, 108
poliedro di Miller, 30
poliedro rombico, 95
poliedro troncato, 49
politopo, 115
polo, 1
prisma, 9
prisma regolare, 10
prisma retto, 9
prisma uniforme, 10
problema dei dittatori nemici, 197
problema di Tammes, 197
processo di contrazione nei poliedri, 115
pseudo rombicubottaedro, 30
- retta polare, 1
rettificazione di un poliedro, 49
rombo aureo, 67
romboedro aureo acuto, 99
romboedro aureo in forma acuta, 95
romboedro aureo in forma ottusa, 95
romboedro aureo ottuso, 99
- sfere geodetiche, 203
solidi di Steinmetz, 99
Solido troncato di Dürer, 25
stellazioni, 35
- tetraedro circoscritto a poliedro di Achimede,
35
trapezoedro, 13
triacontaedro rombico, 65, 95
triacontaedro rombico pentatroncato, 205
triangulation number, 220
tricilindro, 100
troncatura ai lati, 49
troncatura ai lati e forte ai vertici, 52
troncatura ai lati e vertici, 51
troncatura ai vertici, 49
troncatura debole ai vertici, 49
troncatura forte ai vertici, 49
valenza di un vertice, 33
volta, 100

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

In ultima di copertina: *I cinque solidi archimedei ottenuti per troncatura debole dai solidi platonici: tetraedro troncato, cubo troncato, ottaedro troncato, dodecaedro troncato, icosaedro troncato.*



Fantastici Poliedri

2 - Poliedri semiregolari e loro duali

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 22 maggio 2019

Questo fascicolo fa parte di una serie dedicata ai poliedri. Non si tratta di una pubblicazione teorica, quanto piuttosto di una raccolta di immagini e di indicazioni grafiche sulle tecniche costruttive. La maggior parte delle immagini sono realizzate esclusivamente con \LaTeX e il pacchetto grafico Tikz.

Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatemática, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.