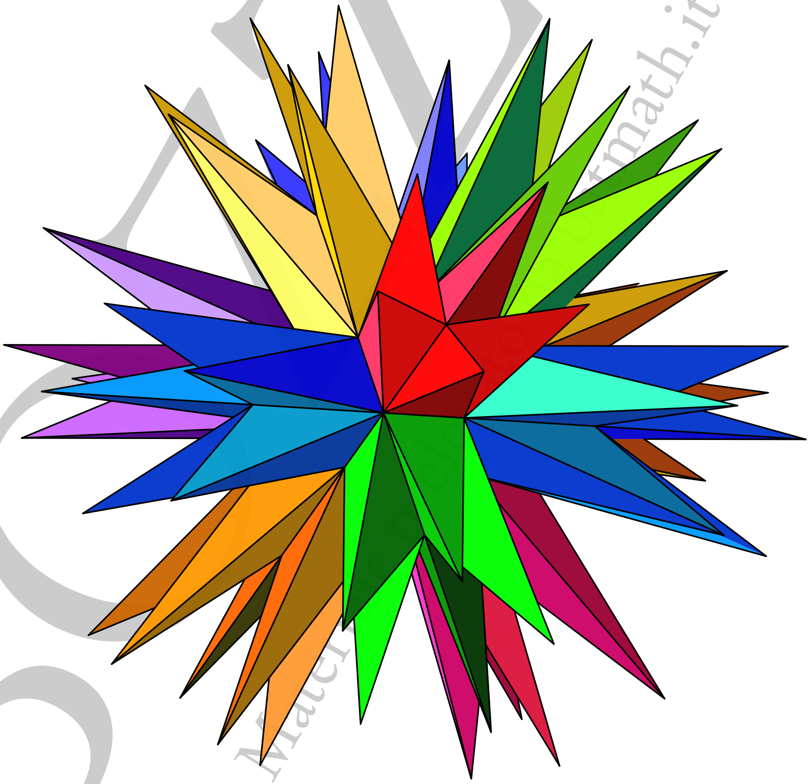
LUCIANO BATTAIA

FANTASTICI POLIEDRI

4 - Solidi di Keplero-Poinsot - Stellazioni



www.batmath.it

Fantastici Poliedri
4 - Solidi di Keplero-Poinsot - Stellazioni

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 22 maggio 2019

In copertina: La "stellazione finale" dell'icosaedro.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013

Indice

Elenco delle figure

Premessa

Questo fascicolo fa parte di una raccolta dedicata ai poliedri. Non si tratta di un lavoro teorico sui poliedri, quanto piuttosto di una serie di immagini che illustrano le spettacolari caratteristiche "estetiche" di queste figure geometriche.

Ci preme anche segnalare che il lavoro non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità: non basterebbe una voluminosa enciclopedia per raccogliere quanto è noto su questo argomento.

Nella bibliografia, che è comune per tutti i fascicoli della raccolta, sono riportati i testi consultati, sui quali si possono trovare tutte le dimostrazioni necessarie a giustificare le affermazioni e costruzioni via via proposte in questo lavoro.

Lo spunto per realizzare questa raccolta è nato per soddisfare le esigenze del corso di *Matematica per il Design*, svolto presso l'ISIA Roma, sede di Pordenone.

La quasi totalità delle figure proposte è stata realizzata con il pacchetto grafico Tikz del sistema LaTeX, e anzi uno degli scopi di questo lavoro è proprio quello di mostrare come si possano realizzare con questo pacchetto anche figure tridimensionali molto complesse. Alcune figure sono costruite con Geogebra ed esportate come immagine.

Fascicoli pubblicati

Solidi Platonici. Introduzione generale ai poliedri. I cinque poliedri regolari. Poliedri regolari elevati. Relazioni tra i poliedri regolari. Costruzioni dei poliedri regolari. Tassellazioni della sfera e dello spazio a partire dai poliedri regolari. Appendice sugli anelli di Borromeo. Miscellanea: simboli di Schläfli, poligoni di Petrie. Oltre duecentocinquanta illustrazioni.

Solidi di Archimede e Catalan. Dualità. Dai poliedri regolari ai poliedri semiregolari mediante troncature o mediante espansione. Solidi di Catalan. Tassellazioni semiregolari della sfera e dello spazio. Il problema dei dittatori nemici. Poliedri di Goldberg e sfere geodetiche. Osservazioni sul cubottaedro. Oltre cinquecento illustrazioni.

Solidi di Johnson Le tecniche costruttive. I novantadue poliedri. Altri solidi ottenuti con le tecniche "alla Johnson". Quasi solidi di Johnson (*Near misses*). Circa trecentottanta illustrazioni.

Solidi di Keplero-Poinsot - Stellazioni Generalità sulle stellazioni e le sfaccettature. I quattro solidi di Keplero-Poinsot. Alcune stellazioni dell'icosaedro. I poliedri di Badoureau e Coxeter. I duali dei poliedri di Badoureau e Coxeter. Prismi e antiprismi non convessi. Circa trecentosettanta illustrazioni.

1 Stellazioni e sfaccettature

Abbandonando la richiesta della convessità nella definizione di *poliedro regolare*, oltre ai cinque solidi platonici si possono costruire altri quattro poliedri. Due di questi hanno come facce *pentagoni regolari stellati* e sono i cosiddetti *poliedri di Keplero* (si tratta del *piccolo* e del *grande dodecaedro stellato*), gli altri due, i cosiddetti *poliedri di Poinsot* (si tratta del *grande dodecaedro* e del *grande icosaedro*), hanno come facce rispettivamente pentagoni regolari o triangoli equilateri, ma sono costruiti in modo che le facce possano interpenetrarsi.

I poliedri di Keplero sono stati studiati e raffigurati da Keplero nel suo *Harmonices mundi* del 1619: sicuramente però essi erano già noti da tempo. Per esempio il piccolo dodecaedro stellato è rappresentato in un mosaico del 1430 attribuito, seppure con qualche incertezza, a Paolo Uccello e presente nella Basilica di San Marco a Venezia. Il grande dodecaedro stellato fu pubblicato invece da Wenzel Jamnitzer nel 1568.

Una trattazione completa e rigorosa dei quattro poliedri regolari stellati, comprendenti i due non noti a Keplero ma probabilmente già considerati da altri precedentemente, è data da Louis Poinsot nel 1809, mentre la dimostrazione che i quattro citati sono gli unici poliedri regolari stellati è dovuta a Augustin Cauchy (1813). Né Keplero né Poinsot usarono i nomi che poi sono divenuti abituali, che invece probabilmente furono usati per la prima volta da Arthur Cayley nel 1859.

In omaggio ai due studiosi citati questi poliedri sono oggi noti con il nome di *Poliedri di Keplero-Poinsot*.

I poliedri di Keplero-Poinsot possono essere ottenuti con due processi costruttivi particolari a partire dal dodecaedro e dall'icosaedro: la *stellazione* e la *sfaccettatura*(1). Senza entrare nei dettagli, decisamente complessi, di questi processi, ne daremo una breve descrizione in questo capitolo, con lo scopo principale di mostrare, a grandi linee, come essi consentano di ottenere i solidi di Keplero-Poinsot.

I due testi più importanti a cui fare riferimento per quanto riguarda le stellazioni e sfaccettature sono quello di Coxeter, [14], e quello di Wenninger, [56]: ad essi faremo riferimento per le nomenclature.

1.1 Il caso dei poligoni

Abbiamo già parlato, nel fascicolo sui solidi platonici, dei poligoni stellati: qui riprendiamo l'argomento, nell'ottica di estenderlo ai poliedri.

In geometria "*stellare* un poligono" o un poliedro (anche un politopo in n dimensioni, anche se noi qui non ce ne vogliamo occupare), significa estendere i suoi lati o le sue facce, usualmente in maniera simmetrica, fin che si incontrano a formare un nuovo poligono o poliedro. Per contro invece *sfaccettare* un poligono o poliedro significa rimuoverne alcune parti in modo da formare un nuovo poligono o poliedro, senza aggiungere nuovi vertici.

[1] Il verbo sfaccettare è usato anche per sfaccettare, per esempio, un diamante. Anche se i processi sono in un certo senso simili, in realtà non sono affatto la stessa cosa.

Consideriamo per esempio il caso del pentagono regolare di vertici $P_1P_2P_3P_4P_5$ mostrato nella figura 1.1.

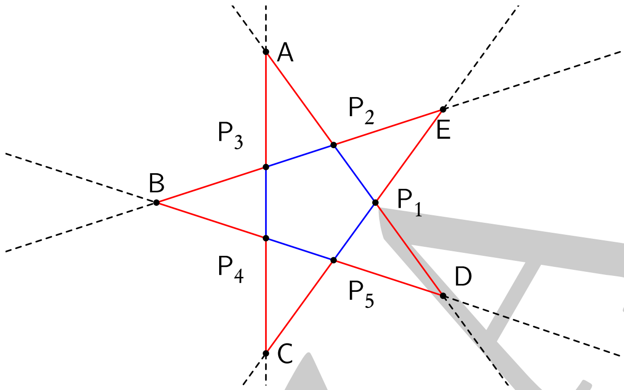


Figura 1.1: *Pentagramma ottenuto per stellazione dal pentagono regolare*

Se prolunghiamo i suoi lati essi si incontreranno nuovamente nei punti A, B, C, D, E, a formare un nuovo poligono, *stellato* appunto, e detto *pentagramma*: in questo caso abbiamo cinque nuovi vertici e i lati sono un'estensione dei lati del pentagono originale.

Se riconsideriamo lo stesso pentagono regolare, vedi la figura 1.2 e ne consideriamo le diagonali, possiamo riottenere la stessa figura stellata sopprimendo le parti di pentagono non racchiuse dalle diagonali: in questo caso i vertici dell'originario pentagono sono anche i vertici della nuova figura (i punti di intersezione delle diagonali tracciate *non* si devono intendere come nuovi vertici) e sono comparse nuove facce.

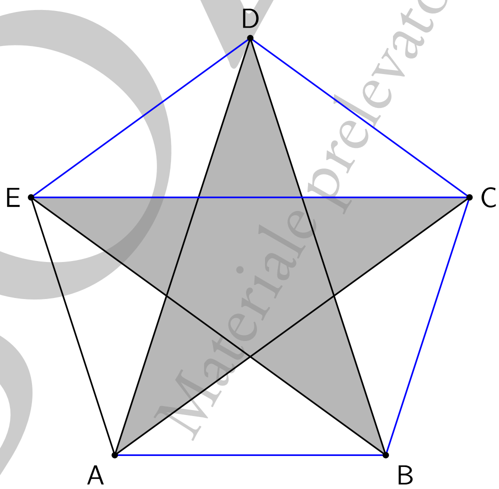


Figura 1.2: *Pentagramma ottenuto per sfaccettatura di un pentagono*

Possiamo ripetere, a titolo d'esempio, le stesse costruzioni su un esagono regolare. L'unica stellazione possibile è illustrata nella figura 1.3.

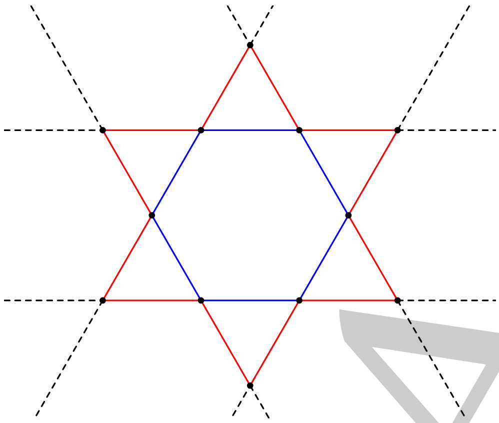


Figura 1.3: *Stellazione di un esagono regolare*

Per quanto riguarda le sfaccettature ci sono due possibilità, se richiediamo solo sfaccettature simmetriche: una prima, che utilizza solo diagonali interne all'esagono e che riproduce lo stesso esagono stellato ottenuto per stellazione, e una seconda che utilizza anche lati dell'esagono regolare originario.

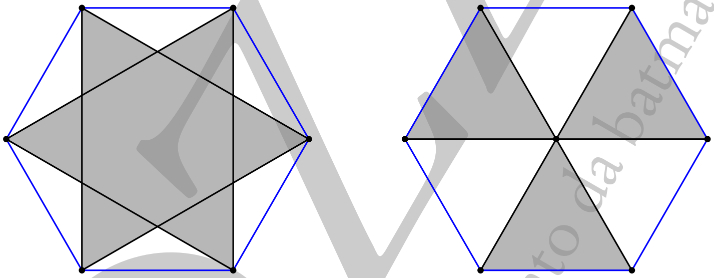


Figura 1.4: *Sfaccettature dell'esagono regolare*

È da notare come l'esagono regolare stellato possa in realtà essere pensato come la sovrapposizione di due triangoli equilateri ruotati di 60° uno rispetto all'altro: si parla di figura stellata *composta*.

1.2 Il caso dei poliedri

Passiamo ora ad estendere questi concetti ai poliedri, con particolare attenzione al caso dei poliedri regolari. È chiaro che né il tetraedro né il cubo possono avere stellazioni, in quanto i piani delle facce non si possono incontrare per racchiudere una figura solida diversa dal tetraedro o cubo stessi. Il primo poliedro regolare che per stellazione può dare origine ad un nuovo solido è l'ottaedro, come già aveva notato Keplero, da cui si deriva la *stella octangula* che, anzi, è l'unica possibile stellazione dell'ottaedro stesso. La stella octangula, come abbiamo già visto nel fascicolo sui poliedri platonici, può anche essere pensata come il solido composto di due tetraedri, opportunamente disposti, oppure come un ottaedro elevato, nel senso di Luca Pacioli. Vedremo che essa può anche essere vista come una sfaccettatura del cubo.

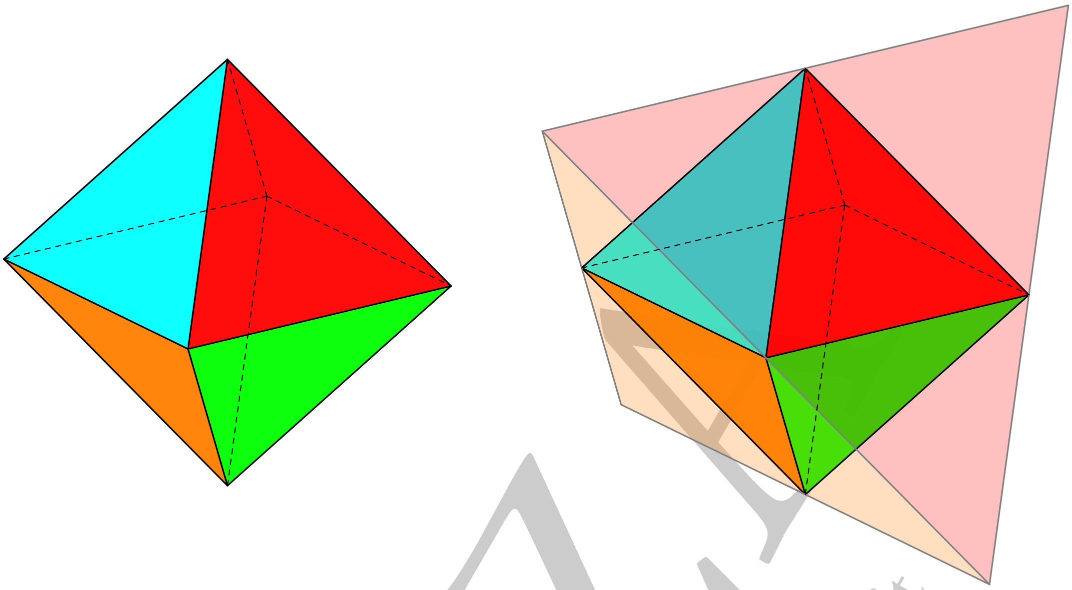


Figura 1.5: *L'ottaedro regolare, a sinistra, e l'estensione di due facce, a destra*

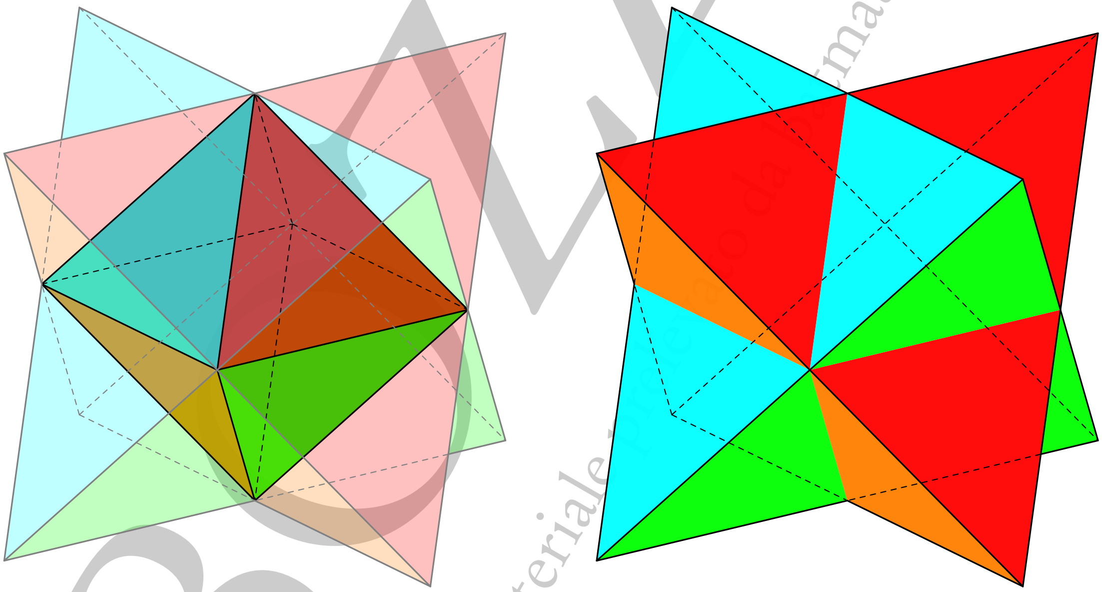


Figura 1.6: *Stellazione completa dell'ottaedro, a sinistra, ed evidenziazione della stella octangula ottenuta da questo provcesso, a destra*

Come già accennato, la stella octangula può anche essere ottenuta per sfaccettatura di un cubo, come si può dedurre dall'analisi della figura 1.7.

Si noti che il cubo e l'ottaedro sono, come sappiamo, fra loro duali: anche i processi di stellazione e sfaccettatura sono, in un senso che andrebbe comunque ben precisato, fra loro duali. Qui ci accontentiamo di osservare che la stella octangula può essere ottenuta per stellazione dell'ottaedro o per sfaccettatura del cubo, duale dell'ottaedro. Questo tipo di comportamento è standard, anche se non possiamo entrare nei dettagli e se è ancora oggetto di studio.

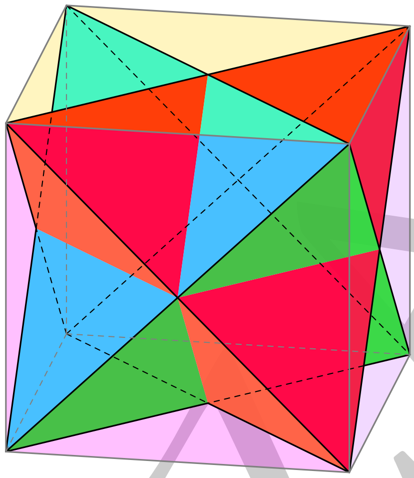


Figura 1.7: *La stella octangula ottenuta per sfaccettatura di un cubo*

Come esempio di stellazione un po' più complessa proponiamo una delle stellazioni dell'icosaedro, la più semplice, o stellazione B, secondo l'elenco di Coxeter, vedi [14].

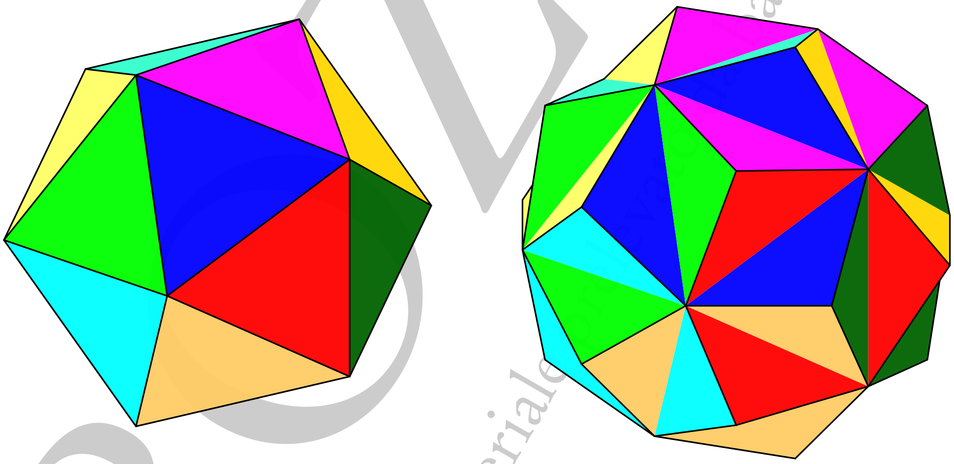


Figura 1.8: *La prima stellazione dell'icosaedro regolare*

Le possibili stellazioni dell'icosaedro sono ben 59 (compreso l'icosaedro stesso, detto stellazione A da Coxeter) e comprendono anche alcuni dei solidi platonici composti che abbiamo trattato nel fascicolo apposito.

Il poliedro ottenuto da questa prima stellazione è anche chiamato *Piccolo icosaedro triambico* ed è sostanzialmente equivalente al *triacisicosaedro*, che è uno dei solidi di Catalan. Come stellazione dell'icosaedro è composto da 20 esagoni equilateri intersecantesi, 60 spigoli e 32 vertici. Se le facce esagonali intersecantesi sono suddivise con la creazione di nuovi spigoli si ottiene un triacisicosaedro, che si può pensare ottenuto incollando sulle venti facce dell'icosaedro dei tetraedri, con altezza maggiore rispetto a quelli utilizzati per costruire il solido di Catalan con questo nome, ma inferiore a quella di un tetraedro regolare: incollando infatti un tetraedro regolare si ottiene l'icosaedro elevato di Luca Pacioli. Si noti che il solido di Catalan è convesso, mentre quello qui ottenuto per stellazione dell'icosaedro è concavo (come del resto l'icosaedro elevato di Luca Pacioli).

Come già accennato, tra le stellazioni dell'icosaedro si annoverano anche alcuni dei poliedri composti di poliedri regolari che abbiamo trattato nel fascicolo sui solidi platonici: il composto di cinque ottaedri e il composto di cinque o dieci tetraedri. Particolarmente interessante il caso del composto dei cinque tetraedri, dove la stellazione è chiaramente individuabile, in quanto sono evidenti i venti triangoli, intersecantesi, che costituiscono le sue facce. Per lo stesso solido è parimenti evidente il fatto che esso possa essere interpretato come una sfaccettaura del dodecaedro, in quanto i suoi vertici sono esattamente quelli del dodecaedro. Questa osservazione è una riprova di quanto già sopra ricordato: stellazione e sfaccettatura sono processi tra loro duali. Riproponiamo, nella figura 1.9 una immagine già inserita nel fascicolo sui solidi platonici illustrante appunto il composto di cinque tetraedri con una colorazione atta ad evidenziare quanto più sopra affermato.

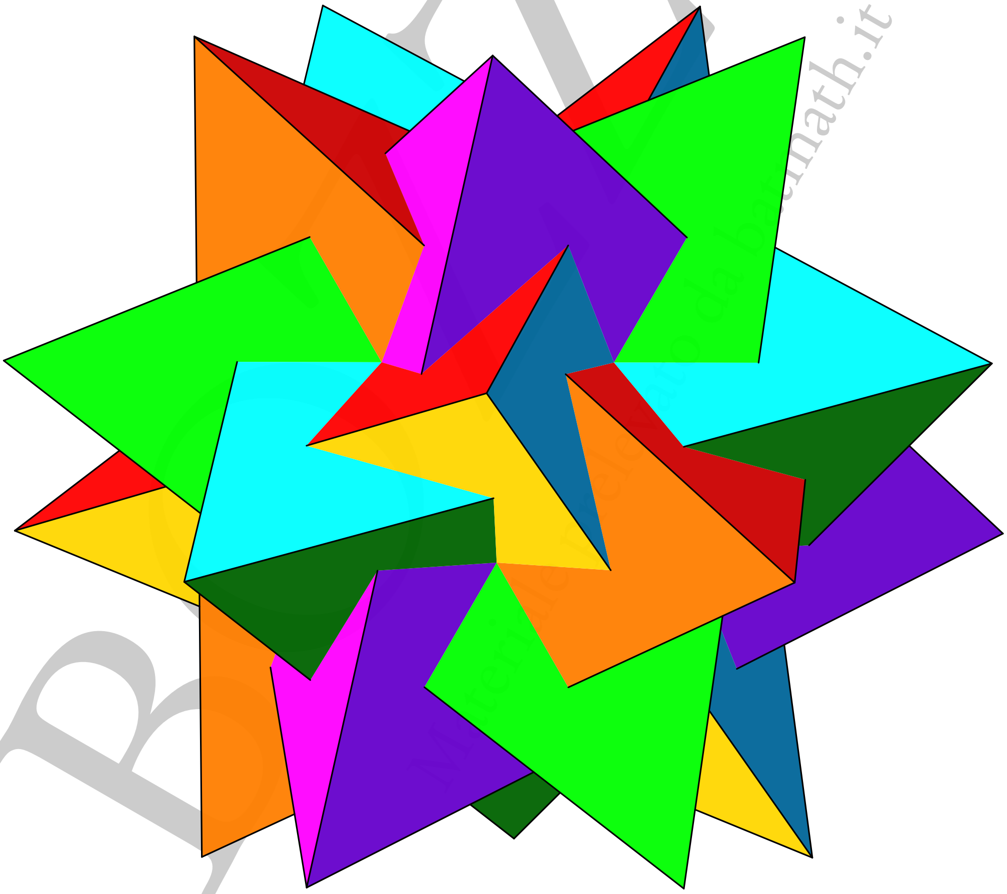


Figura 1.9: *Il composto di cinque tetraedri come stellazione dell'icosaedro*

Nella figura 1.10, riproponiamo la stessa immagine, con l'evidenziazione del dodecaedro circoscritto, ad evidenziare l'interpretazione come sfaccettatura appunto del dodecaedro.

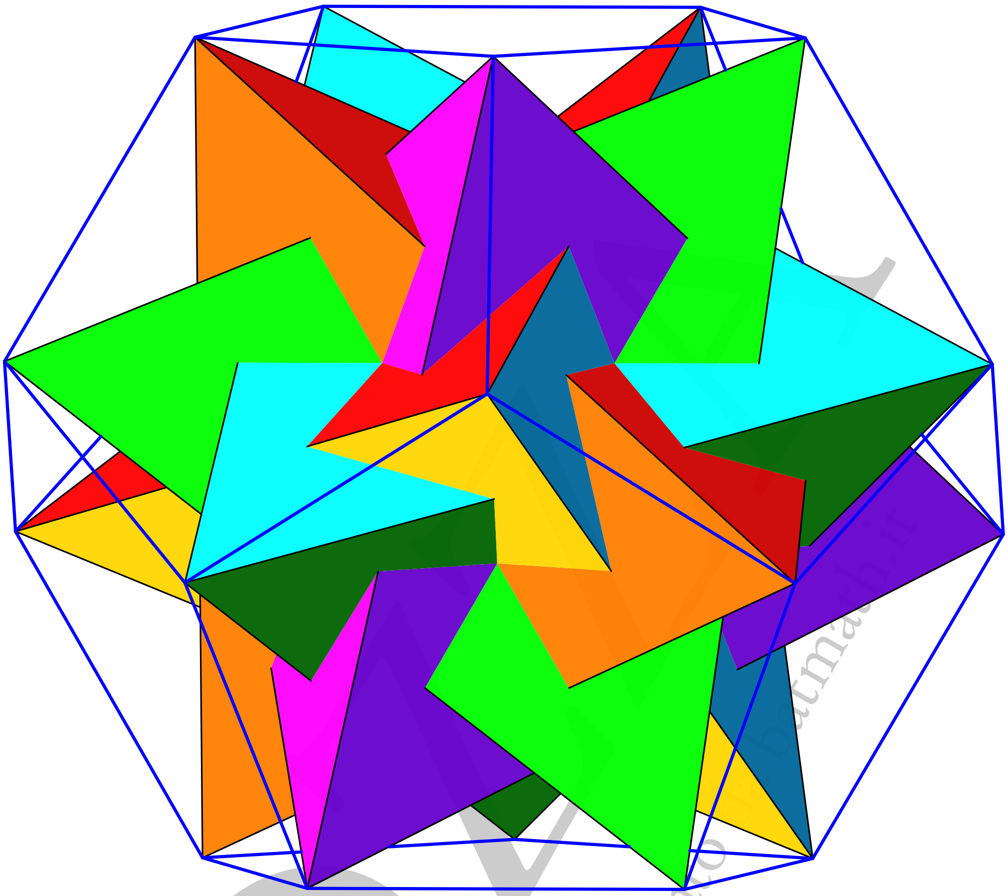


Figura 1.10: *Il composto di cinque tetraedri come sfaccettatura del dodecaedro*

2 I quattro solidi di Keplero-Poinsot

Proponiamo in questo capitolo le immagini e le caratteristiche essenziali dei quattro solidi di Keplero-Poinsot, cui abbiamo già fatto cenno.

2.1 Immagini

2.1.1 Il piccolo dodecaedro stellato

Il piccolo dodecaedro stellato è costituito da dodici facce a forma di pentagono stellato, dodici vertici e 30 spigoli. È una delle stellazioni del dodecaedro. Le figure al vertice sono pentagoni regolari.

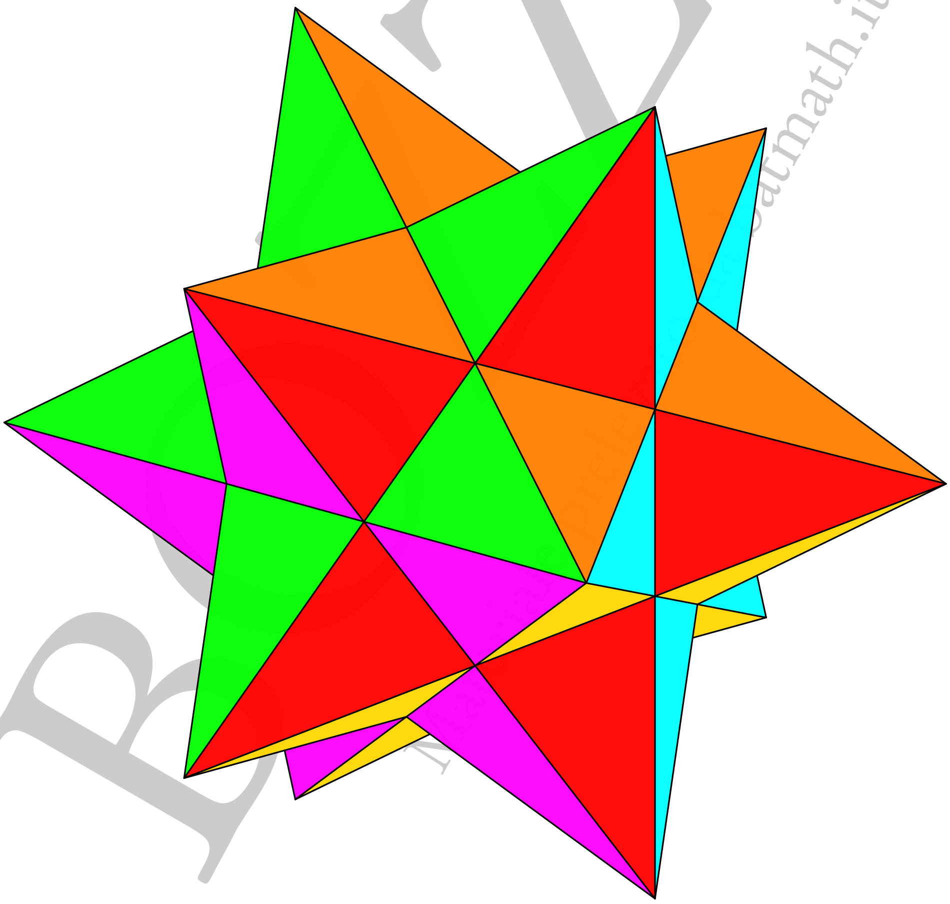


Figura 2.1: *Il piccolo dodecaedro stellato*

2.1.2 Il grande dodecaedro stellato

Il grande dodecaedro stellato è costituito da dodici facce a forma di pentagono stellato, venti vertici e 30 spigoli. È una delle stellazioni del dodecaedro. Le figure al vertice sono triangoli regolari.

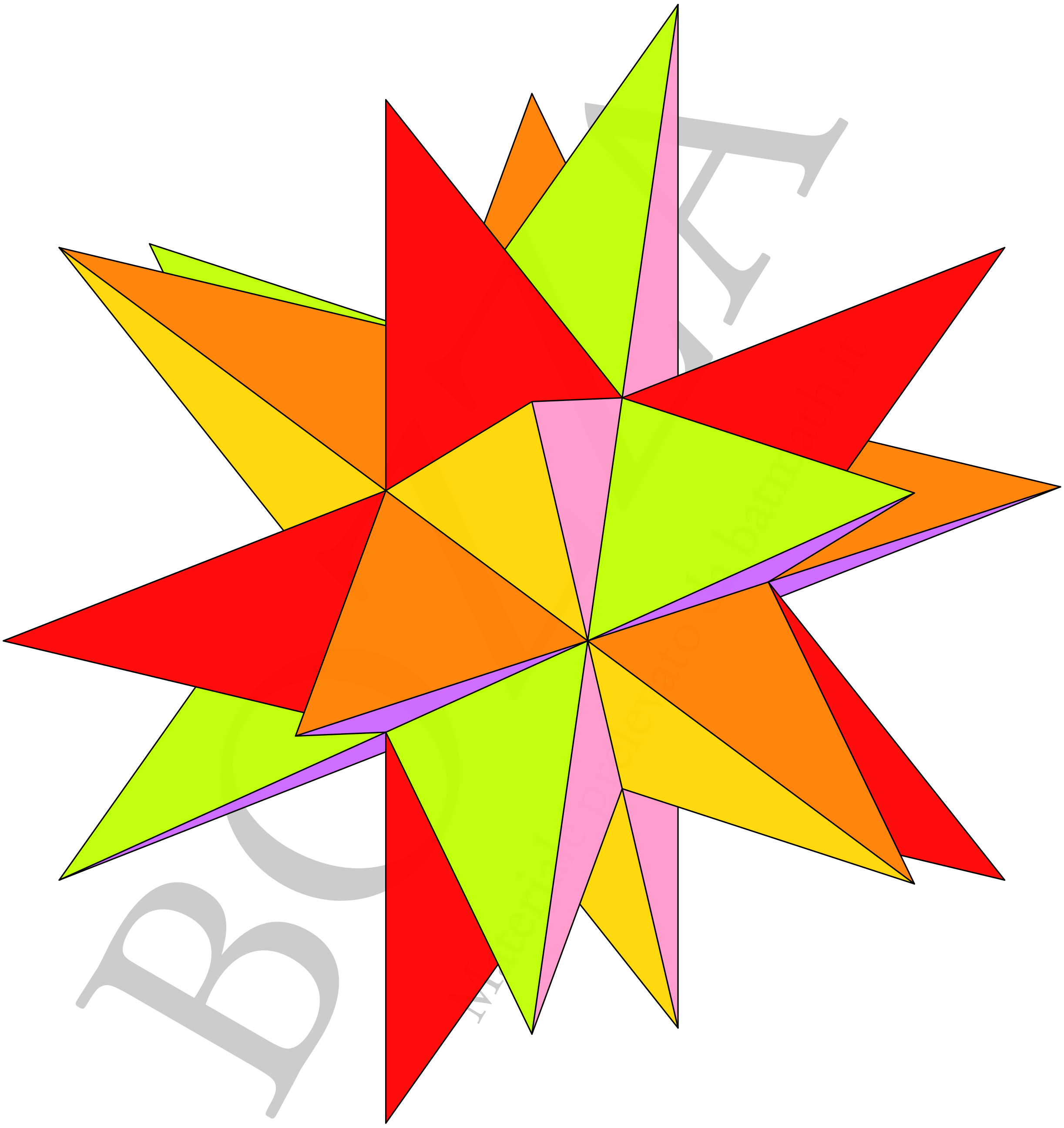


Figura 2.2: *Il grande dodecaedro stellato*

2.1.3 Il grande dodecaedro

Il grande dodecaedro è costituito da dodici facce a forma di pentagono regolare, venti vertici e 30 spigoli. A differenza del normale dodecaedro, le facce si intersecano anche fuori dagli spigoli. È una delle stellazioni del dodecaedro. Le figure al vertice sono pentagoni regolari stellati.

Anche se la sua descrizione formale è dovuta a Poinsot, una immagine molto simile al grande dodecaedro si trova in *Perspectiva Corporium Regularium* di Wenzel Janmitzer, vedi [31].

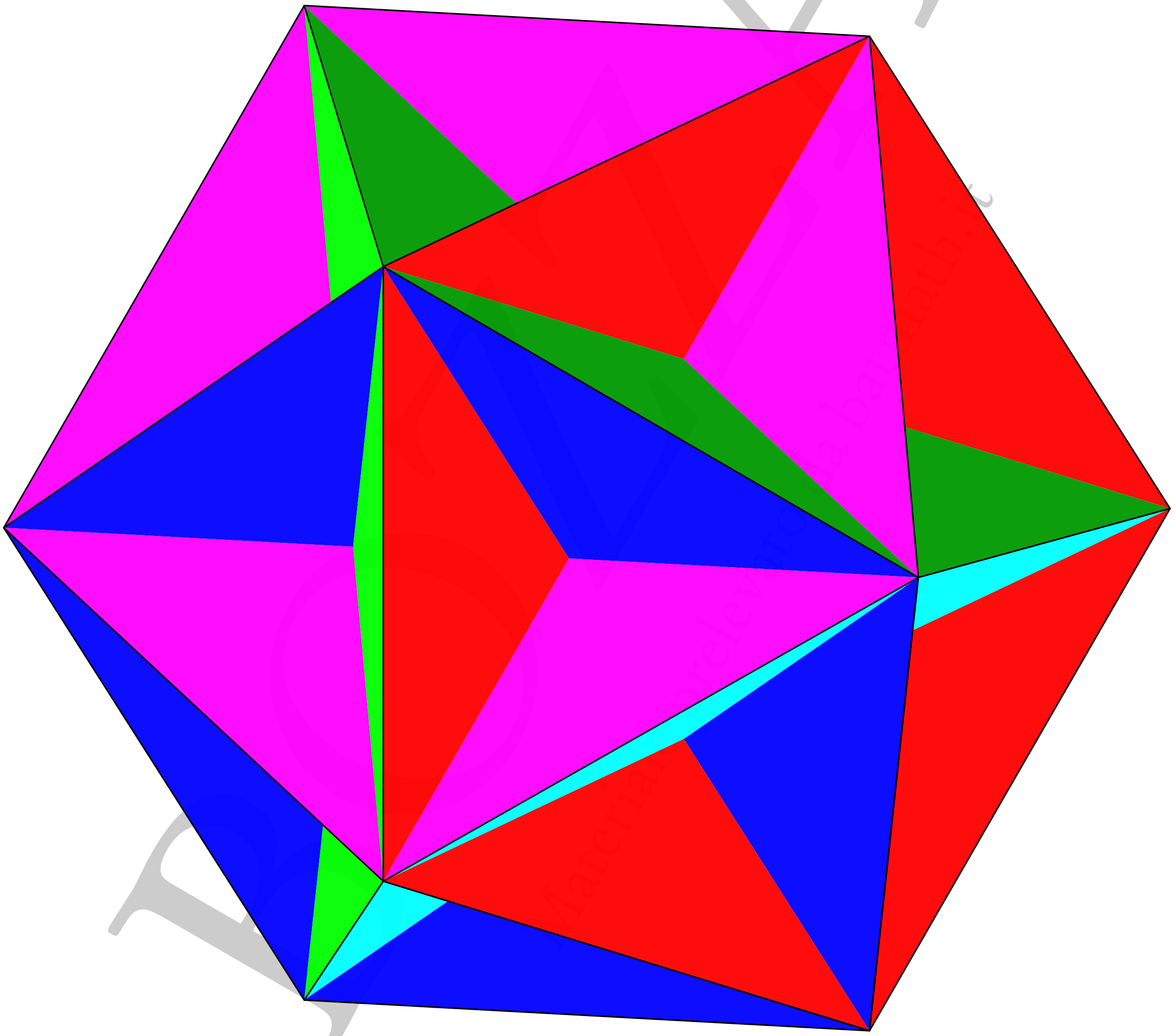


Figura 2.3: *Il grande dodecaedro*

2.1.4 Il grande icosaedro

Il grande icosaedro è costituito da venti facce a forma di triangolo regolare, dodici vertici e 30 spigoli. A differenza del normale icosaedro, le facce si intersecano anche fuori dagli spigoli. È una delle stellazioni dell'icosaedro. Le figure al vertice sono pentagoni regolari stellati.

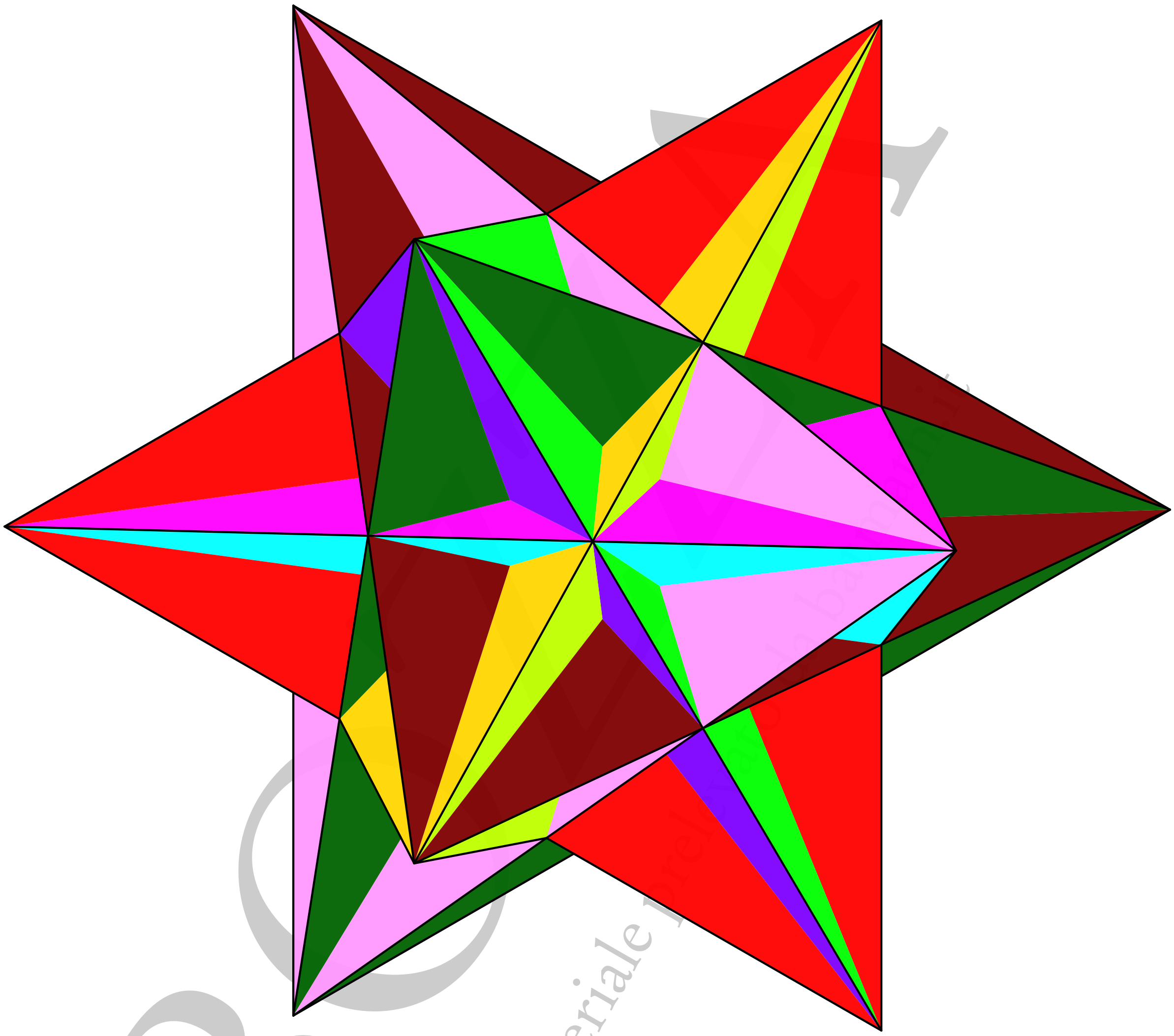


Figura 2.4: *Il grande icosaedro*

2.2 Proprietà

2.2.1 Regolarità

I poliedri di Keplero-Poinsot si meritano l'appellativo di *regolari* in quanto mantengono le caratteristiche dei solidi platonici, con le varianti che le facce possono essere anche poligoni regolari stellati e che si possono intersecare anche fuori dagli spigoli. Cauchy dimostrò, nel 1811, che questo ampliamento delle caratteristiche dei poliedri per poter essere chiamati regolari produce solo quattro nuovi poliedri: due con facce a pentagramma e due con facce rispettivamente triangolari e pentagonali regolari, ma intersecantesi. È interessante notare che solo il pentagono regolare stellato, o pentagramma, può essere faccia di un poliedro di questo tipo e che, per gli altri due poliedri, il pentagramma è figura al vertice.

I simboli di Schläfli per questi poliedri, che sono una generalizzazione di quelli usati per i poliedri regolari, sono i seguenti:

— piccolo dodecaedro stellato: $\{5/2, 5\}$;
— grande dodecaedro stellato: $\{5/2, 3\}$;
— grande dodecaedro: $\{5, 5/2\}$;
— grande icosaedro: $\{3, 5/2\}$.

Il primo numero indica il tipo di facce del poliedro, il secondo il tipo di figura al vertice, che tiene conto anche di quante facce convergono in ogni vertice, come già nei poliedri regolari.

Continua a valere anche per questi poliedri la regola già vista per i solidi platonici relativamente alle coppie di poliedri duali e cioè il fatto che i corrispondenti simboli di Schläfli sono semplicemente invertiti: $\{5/2, 5\}$ e $\{5, 5/2\}$ per la coppia piccolo dodecaedro stellato - grande dodecaedro, $\{5/2, 3\}$ e $\{3, 5/2\}$ per la coppia grande dodecaedro stellato e grande icosaedro. Anche qui, come già per i solidi platonici, la dualità non produce nuovi poliedri.

2.2.2 Relazioni tra i poliedri e con i poliedri platonici

E veniamo ora ad esaminare alcune delle proprietà che legano i quattro poliedri di Keplero-Poinsot tra di loro e con i poliedri platonici.

Il piccolo dodecaedro stellato ha gli stessi vertici di un icosaedro, come si evidenzia dalla figura 2.5.

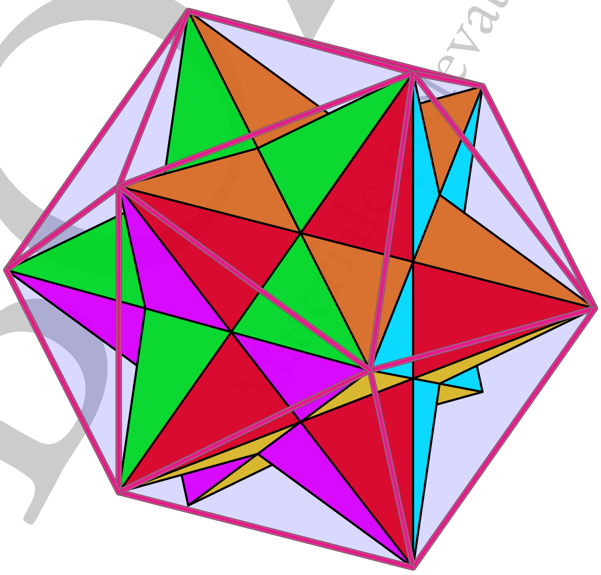


Figura 2.5: *Il piccolo dodecaedro stellato e l'icosaedro che ha gli stessi vertici*

Il piccolo dodecaedro stellato ha anche gli stessi spigoli di un grande icosaedro, come si evidenzia dalla figura 2.6.

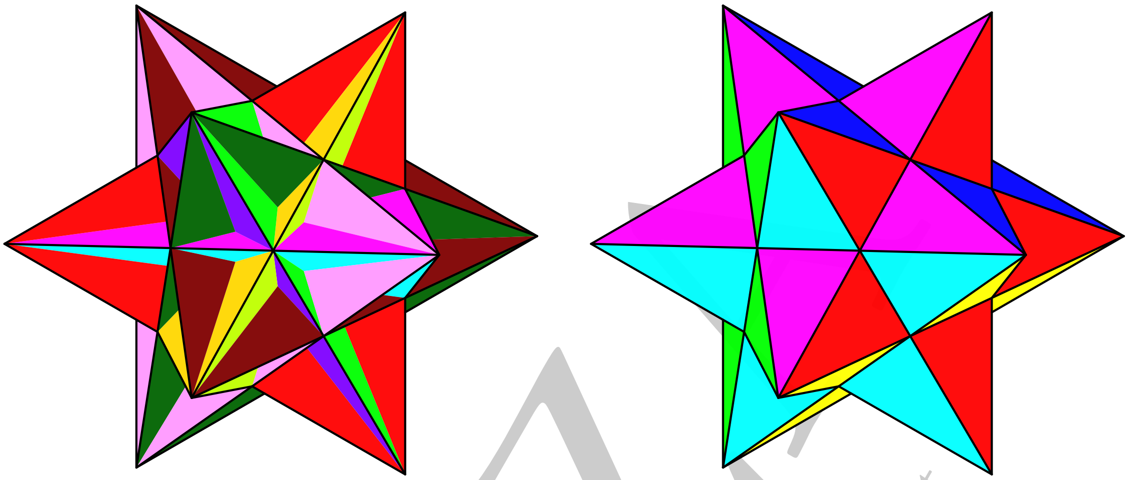


Figura 2.6: *Il grande icosaedro e il piccolo dodecaedro stellato costruito usando gli stessi spigoli*

Il grande dodecaedro stellato ha gli stessi vertici di un dodecaedro, come mostra la figura 2.7.

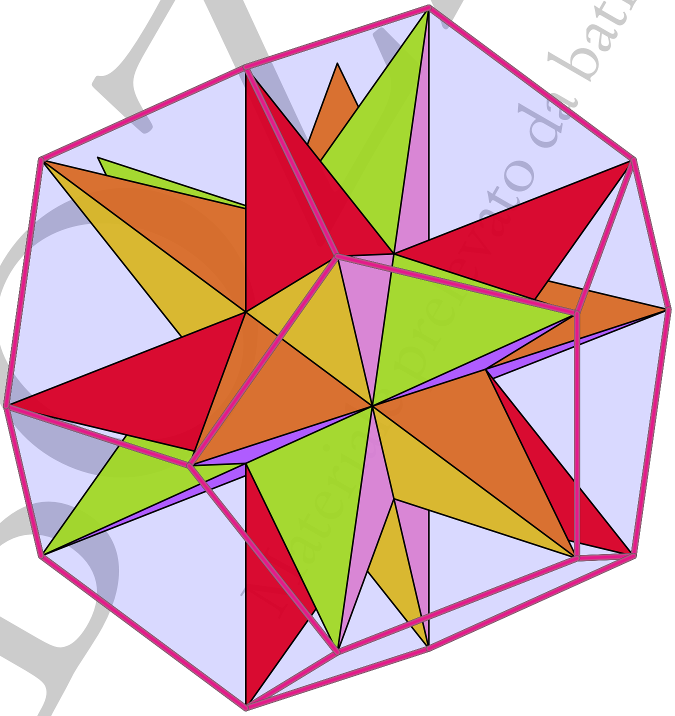


Figura 2.7: *Il grande dodecaedro stellato e il dodecaedro che ha gli stessi vertici*

Il grande dodecaedro ha, come mostra chiaramente la figura 2.3, gli stessi vertici e gli stessi spigoli di un icosaedro.

Infine il grande icosaedro ha gli stessi vertici di un icosaedro, come mostra la figura 2.8.

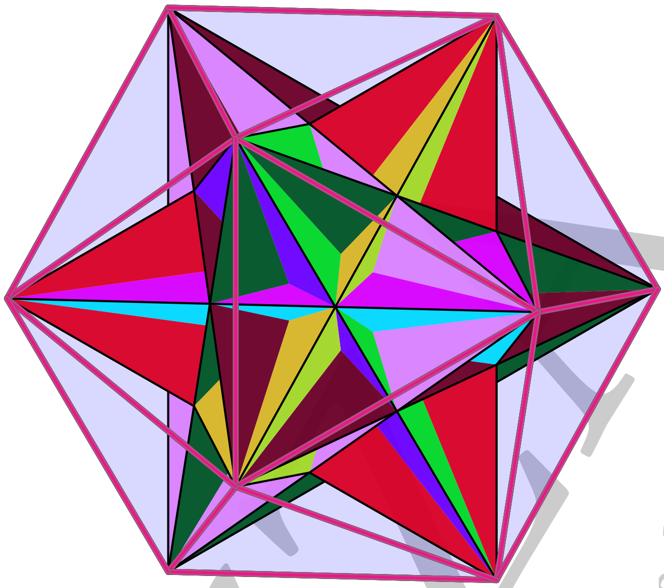


Figura 2.8: *Il grande icosaedro e l'icosaedro avente gli stessi vertici*

2.2.3 Relazioni con altri poliedri

Il piccolo dodecaedro stellato può essere chiaramente interpretato come un dodecaedro sulle cui facce sono state elevate delle piramidi pentagonali per un totale di 60 facce a forma di triangolo isoscele: esso ha dunque la stessa struttura del *pentacisdodecaedro* ovvero di uno dei solidi di Catalan (precisamente il duale dell'icosaedro troncato): naturalmente qui i triangoli isosceli sono molto più alti, precisamente con un'altezza tale che i cinque triangoli di ogni pentagramma siano complanari.

Il grande dodecaedro stellato può anche essere interpretato come un icosaedro sulle cui facce sono state elevate delle piramidi a base triangolare, per un totale di 60 facce a forma di triangolo isoscele: esso ha dunque la stessa struttura del *triacisicosaedro*, ovvero di uno dei solidi di Catalan (precisamente il duale del dodecaedro troncato): naturalmente qui i triangoli isosceli sono molto più alti, precisamente con un'altezza tale che i cinque triangoli di ogni pentagramma siano complanari.

Infine il grande dodecaedro ha anch'esso una struttura che si può pensare costituita da un icosaedro sulle cui facce sono state elevate verso l'interno (ovvero sottratte dall'icosaedro stesso) delle piramidi a base triangolare: si può dunque ancora pensare come un triacisicosaedro con piramidi concave anziché convesse.

2.3 Diversi modi di costruzione

I solidi di Keplero-Poinsot possono essere costruiti in diversi modi. Per esempio, come già visto, il piccolo dodecaedro stellato e il grande dodecaedro stellato come elevazioni rispettivamente del dodecaedro e dell'icosaedro, il grande dodecaedro come "escavazione" di un icosaedro, sottraendo all'icosaedro piramidi a base triangolare opportune. Una diversa colorazione delle fossette del grande dodecaedro è proposta nella figura 2.9 per evidenziare questa proprietà dello stesso.

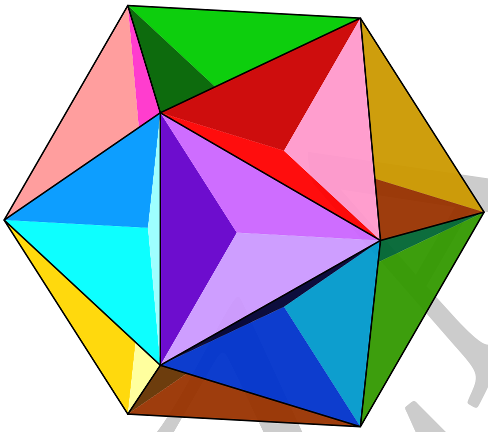


Figura 2.9: *Il grande dodecaedro come icosaedro scavato*

A proposito della costruzione del piccolo dodecaedro stellato mediante l'aggiunta al dodecaedro di uno "strato" di 12 piramidi a base pentagonale, è molto interessante esaminare come con una tecnica simile si possano costruire, successivamente, il grande dodecaedro e il grande dodecaedro stellato mediante successiva aggiunta di ulteriori strati di poliedri. Del primo passo, la costruzione del piccolo dodecaedro stellato mediante l'aggiunta di piramidi a base pentagonale, abbiamo già parlato e ne proponiamo lo schema nella figura 2.10. Come è ovvio sono richieste 12 piramidi, una per ciascuna faccia del dodecaedro.

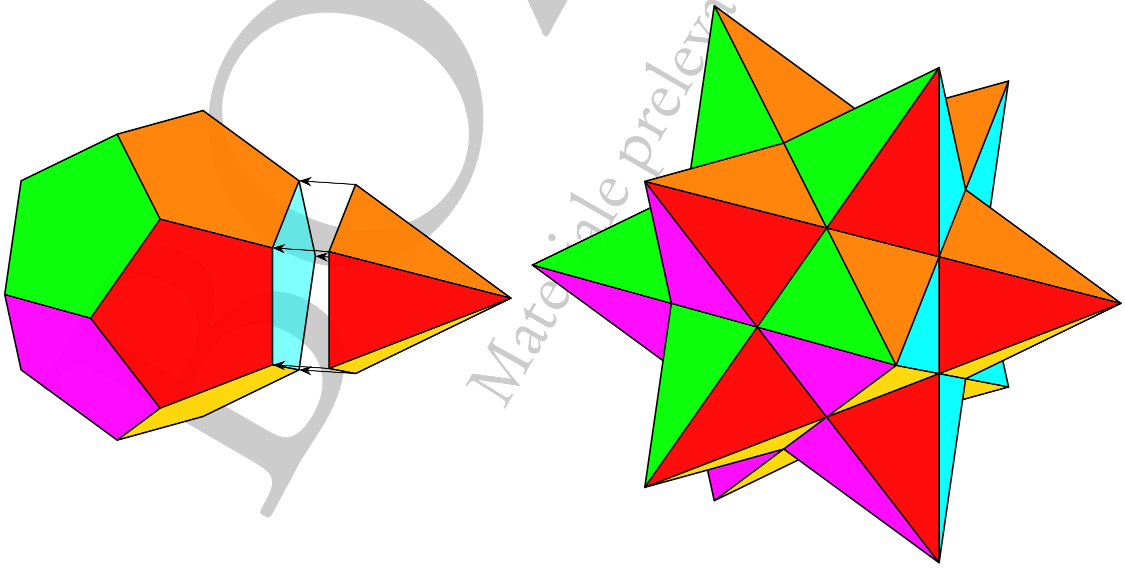


Figura 2.10: *Costruzione del piccolo dodecaedro stellato mediante l'aggiunta di piramidi al dodecaedro*

Si noti che lo strato di piramidi aggiunte copre completamente tutte le facce del dodecaedro iniziale, che non sarà dunque più visibile: questo succederà anche per i successivi due passi che portano al grande dodecaedro e al grande dodecaedro stellato.

Il processo continua con l'aggiunta di opportuni "cunei" al piccolo dodecaedro stellato, in modo da riempire gli spazi tra le facce a forma di triangolo isoscele adiacenti di due piramidi, come mostrato nella figura 2.11, dove sono evidenziati due di tali cunei. Poiché le 12 piramidi usate per costruire il piccolo dodecaedro stellato hanno un totale di 60 facce e serve un cuneo ogni 2 facce, il nuovo strato di poliedri inseriti sul piccolo dodecaedro stellato comprenderà 30 cunei.

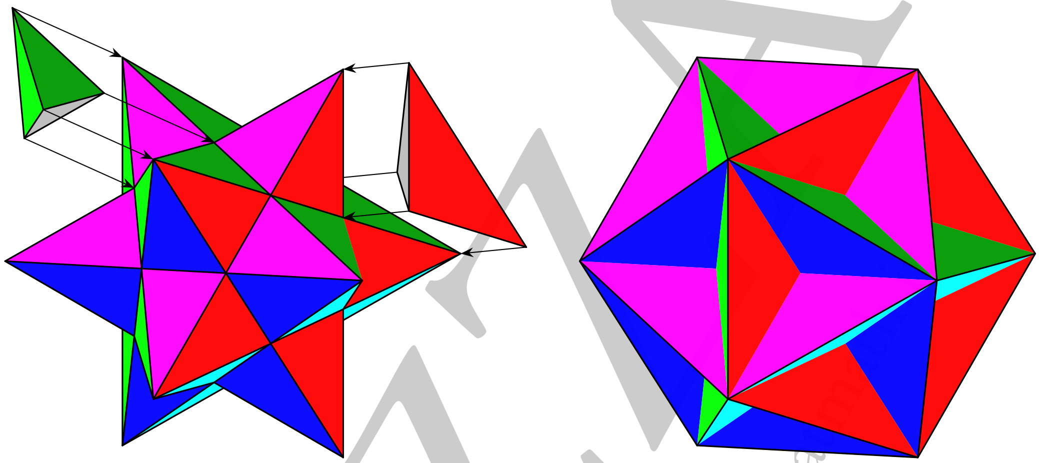


Figura 2.11: *Costruzione del grande dodecaedro mediante l'aggiunta di "cunei" al piccolo dodecaedro stellato*

L'ultimo passo in questa costruzione progressiva è illustrato nella figura 2.12.

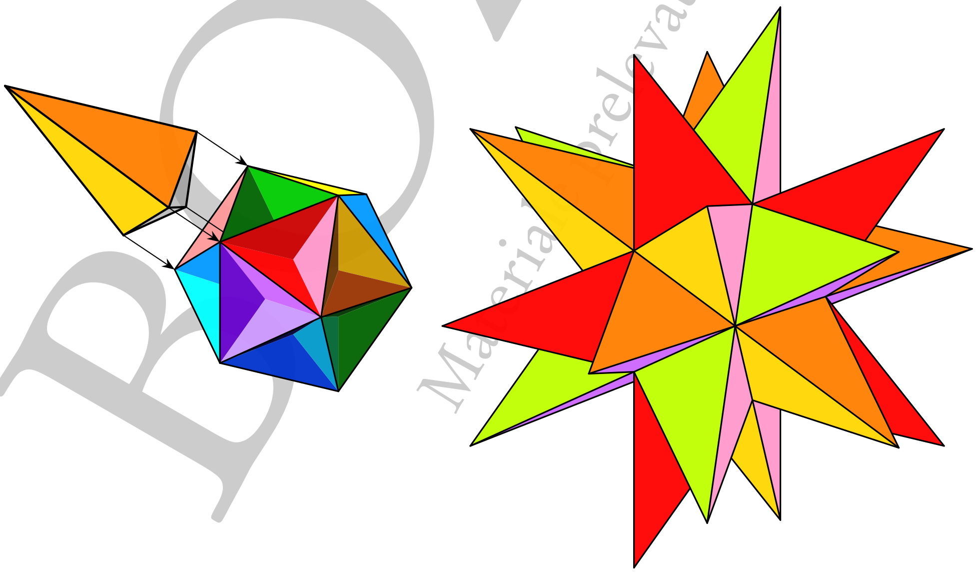


Figura 2.12: *Costruzione del grande dodecaedro stellato mediante l'aggiunta di dipiramidi al grande dodecaedro*

In questo caso si aggiunge al grande dodecaedro un ultimo strato di 20 "spuntoni" costituiti da dipiramidi triangolari asimmetriche. È chiaro che questo processo è equivalente a "riempire" preventivamente le fossette del grade dodecaedro con piramidi a base triangolare, in modo da ricostruire l'icosaedro, per poi procedere ad aggiungere verso l'esterno delle alte piramidi triangolari. Dal punto di vista geometrico è però interessante l'aggiunta diretta delle dipiramidi, in quanto così si evidenzia come i tre poliedri in esame siano ottenuti mediante progressivo "ampliamento" del dodecaedro.

La costruzione del grande dodecaedro stellato che abbiamo appena esaminato suggerisce una simile costruzione molto interessante del grande icosaedro, utile anche per chi volesse realizzarne un modello di carta in quanto si ottiene una struttura ben rigida: questa costruzione è proposta in [20], pag. 98. Si comincia con il costruire un *dodecaedro scavato*, ottenuto *scavando* su ogni faccia di un dodecaedro una piramide a base pentagonale con facce laterali equilatere(1). Successivamente si costruiscono 12 poliedri simili a speciali dipiramidi come mostrato nella figura 2.13. Incollando questi 12 poliedri nelle fossette ottenute sul dodecaedro si ottiene il grande icosaedro, tenendo presente che le *basi* di queste speciali dipiramidi occuperanno solo una parte dei triangoli delle facce laterali delle fossette, che non saranno completamente riempite, come invece avveniva per il passaggio dal grande dodecaedro al grande dodecaedro stellato.

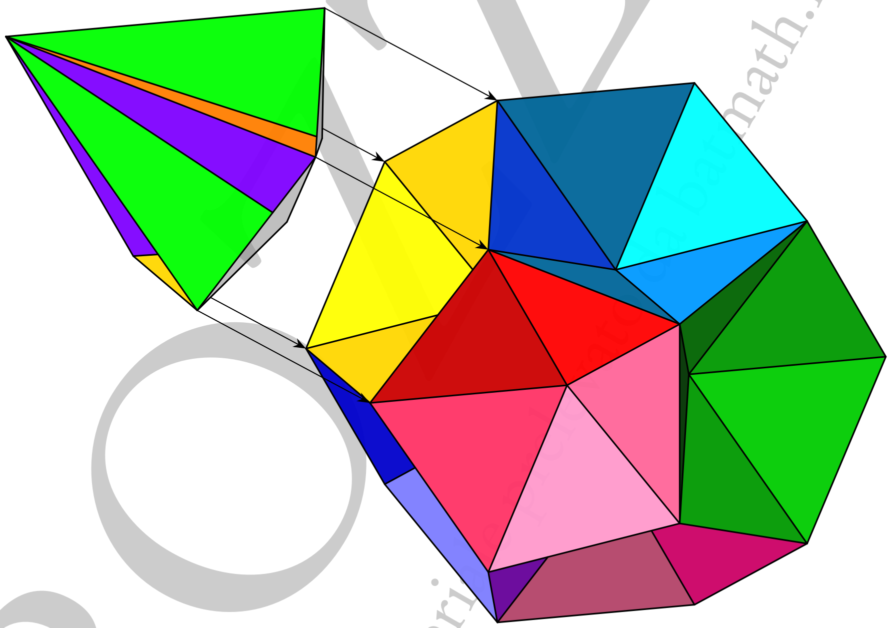


Figura 2.13: *Una possibile costruzione del grande icosaedro utilizzando un dodecaedro scavato e una speciale dipiramide*

Per concludere questa sezione dedicata all'esame di alcune tecniche costruttive dei quattro poliedri di Keplero-Poinsot, segnaliamo che le dodici facce del grande dodecaedro non sono altro che i dodici pentagoni regolari che si possono costruire scegliendo cinque dei venti vertici di un icosaedro, come risulta evidente dal fatto, già osservato, che il grande dodecaedro ha gli stessi vertici e gli stessi spigoli di

[1] Questo poliedro è di per sè molto interessante e costituisce una delle 59 possibili stellazioni dell'icosaedro. Esso è un significativo esempio di deltaedro (concavo) con alte proprietà di simmetria.

un icosaedro. Una evidenziazione di questo fatto è proposta nella figura 2.14, dove sono mostrati due di questi pentagoni,

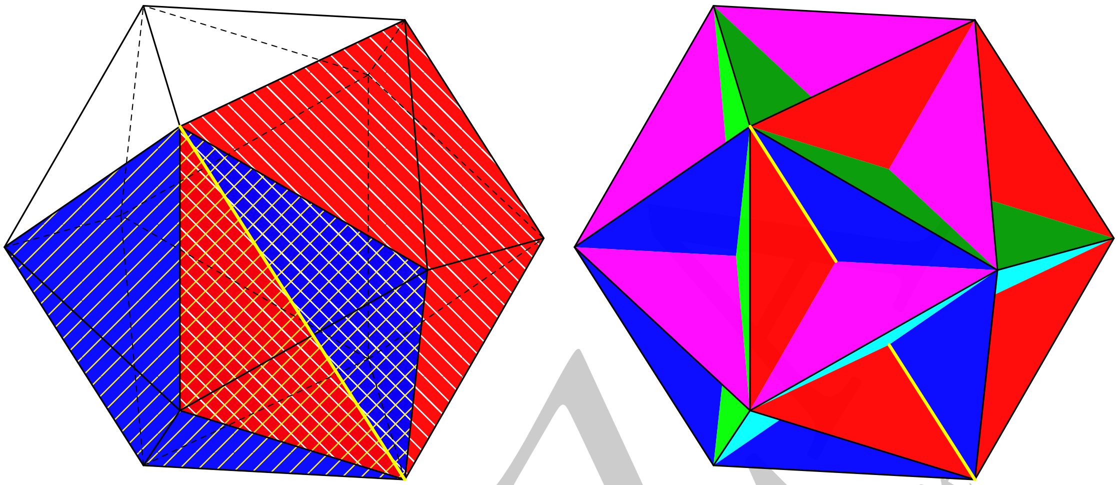


Figura 2.14: *Pentagoni in un icosaedro per costruire il grande dodecaedro*

2.4 Costruzione mediante stellazioni e sfaccettature

Per evidenziare al meglio come i quattro poliedri di Keplero-Poinsot siano stellazioni del dodecaedro e dell'icosaedro, riprendiamo in esame, da un diverso punto di vista, il caso dell'ottaedro. Se appoggiamo il tetraedro su un piano per una faccia, potremo dividere le facce dello stesso in quattro gruppi: la "base", che poggia sul piano, il "top", parallelo alla base, tre facce adiacenti al top e tre facce adiacenti alla base.

Le tre facce adiacenti al top, anche se prolungate, racchiudono solo il top stesso, le tre facce adiacenti alla base invece, se prolungate, racchiudono un triangolo che costituisce un'estensione, una stellazione del top stesso (in questo caso si tratta di un raddoppio del top). Tutto questo è evidenziato nella figura 2.15, dove è mostrato anche l'ottaedro base (che possiamo chiamare stellazione "zero"). Se ripetiamo questo processo sulle otto facce dell'ottaedro otterremo la stella octangula, di cui abbiamo già ampiamente parlato. Non ci sono altre possibilità di stellazione per l'ottaedro.

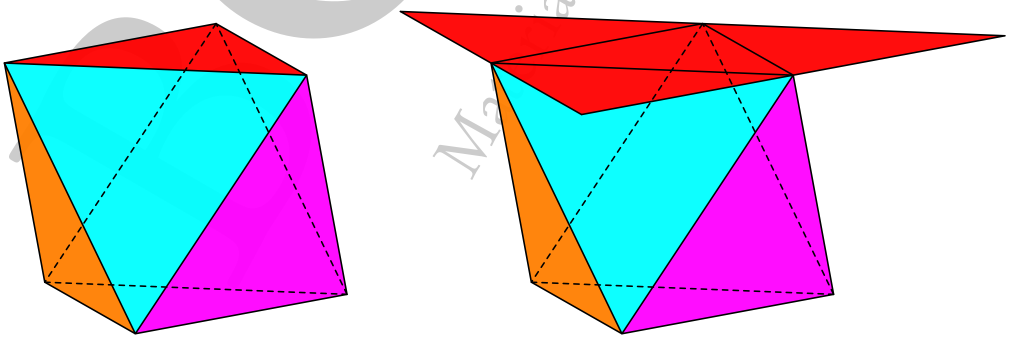


Figura 2.15: *L'ottaedro e la stellazione della sua faccia alta mediante estensione di tre facce ad essa non adiacenti*

Applichiamo ora la stessa idea al caso del dodecaedro: appoggiandolo su un piano potremo ancora individuare quattro gruppi di facce: la "base", che poggia sul piano, il "top", parallelo alla base, cinque facce adiacenti al top e cinque facce adiacenti alla base.

A differenza dell'ottaedro in questo caso le cinque facce adiacenti al top racchiudono il top stesso, ma, se prolungate, racchiudono anche un pentagramma, come mostrato nella figura 2.16, al centro. Passiamo ora a considerare le facce adiacenti alla base: la loro estensione produce un pentagono come mostrato nella figura 2.16, a destra, e successivamente un nuovo pentagramma, come mostrato nella figura 2.17. Dunque con il dodecaedro si hanno tre stellazioni diverse, oltre al dodecaedro base.

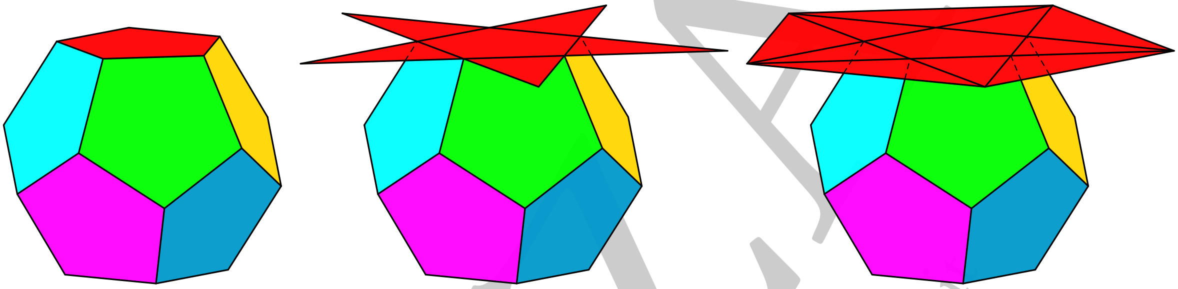


Figura 2.16: *Il dodecaedro, la stellazione della sua faccia alta mediante estensione di cinque facce ad essa adiacenti e la seconda stellazione della faccia alta mediante prima estensione delle facce adiacenti alla base*

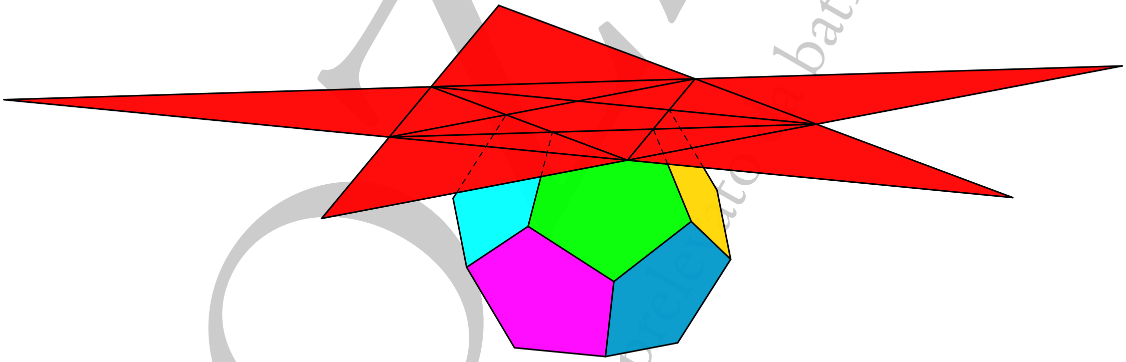


Figura 2.17: *Terza stellazione della faccia alta del dodecaedro mediante seconda estensione delle facce adiacenti alla base*

Ripetendo sulle dodici facce la prima, seconda e terza stellazione si ottengono, di seguito, il piccolo dodecaedro stellato, il grande dodecaedro e il grande dodecaedro stellato.

Si noti come le tre stellazioni del dodecaedro (quattro se contiamo anche il dodecaedro base), siano schematicamente estraibili dalle figure contenute nella faccia alta rappresentata nella figura 2.17: è questo un modo molto significativo per studiare in generale le stellazioni di un poliedro, ed è chiamato *modello di stellazione*: lo riproponiamo nella figura 2.18.

Decisamente più complessa la situazione relativa all'icosaedro e qui proponiamo solo un cenno all'estensione della tecnica usata per il dodecaedro, che è poi la tecnica utilizzata da Cauchy per studiare i possibili poliedri regolari stellati; per il resto rimandiamo all'esaustiva trattazione che si trova in [14] e che enumera tutte le 59 stellazioni (58 più il normale icosaedro). Ricordiamo anche le stellazioni

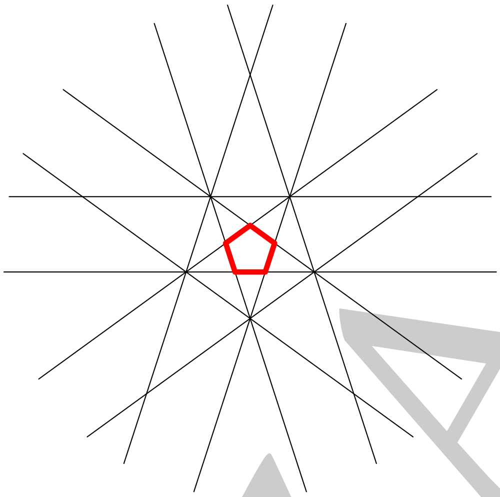


Figura 2.18: *Il modello di stellazione del dodecaedro*

che abbiamo incontrato: il *piccolo icosaedro triambico*, il composto di cinque ottaedri, di cinque e dieci tetraedri, il *dodecaedro scavato* e, soprattutto, il *grande icosaedro*.

Sistemiamo dunque l'icosaedro su un piano, come per il dodecaedro, e dividiamo le facce in otto gruppi di cui i primi tre sono: la "base", che poggia sul piano, il "top", parallelo alla base, le tre facce adiacenti al top. Per individuare gli altri cinque gruppi procediamo con la tecnica proposta da Cromwell in [19], pag. 263: denominiamo con A le tre facce adiacenti alla base, con B, C, D, E le altre facce che circondano il vertice di A, per ognuna delle tre facce di tipo A. I cinque gruppi di facce che interessano sono i gruppi di tre facce con la stessa lettera; il gruppo con la lettera A è fatto, come è ovvio, dalle tre facce adiacenti alla base. Proponiamo, a titolo di esempio, la figura (triangolo) ottenuta intersecando i piani di queste tre facce adiacenti alla base con il piano della faccia top: si tratta di una delle facce del grande icosaedro, e naturalmente 12 di questi triangoli completano il grande icosaedro.

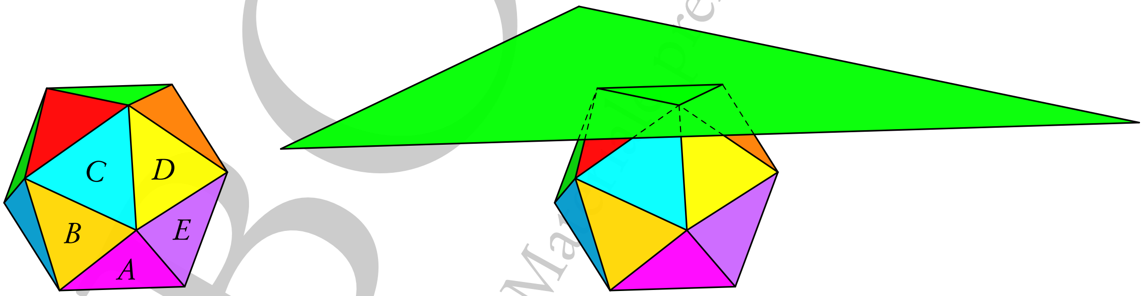


Figura 2.19: *L'icosaedro e la stellazione della faccia superiore ottenuta con i piani adiacenti alla base*

Applicando la stessa tecnica, però usando i gruppi di facce C o D si ottiene il composto di cinque ottaedri, con i gruppi B o E si ottiene il composto di cinque tetraedri.

Per un utile confronto proponiamo, nella figura 2.20, il modello di stellazione dell'icosaedro, da cui si rileva subito la complessità del problema. Come c'era da aspettarsi trattandosi di icosaedro, la sezione aurea mette lo zampino in questo modello: i punti che dividono il lato del triangolo equilatero di colore blu, che corrisponde al grande icosaedro, sono ottenuti dividendo il lato stesso in rapporto aureo. Il triangolo equilatero di colore rosso si riferisce invece alla faccia dell'icosaedro di partenza.

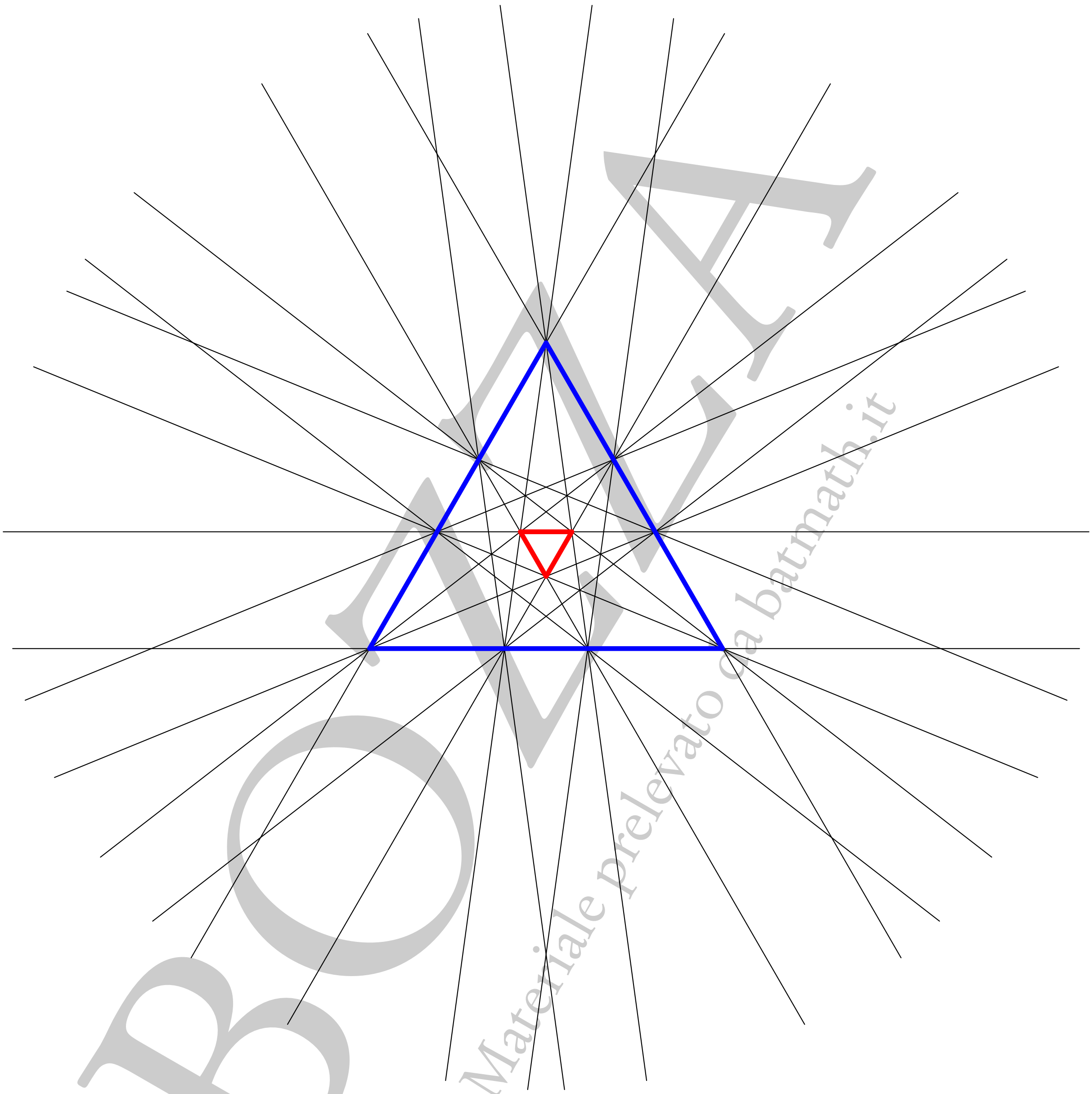


Figura 2.20: *Il modello di stellazione completo dell'icosaedro*

Le figure 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 e 2.26 illustrano, per ciascuna delle sei stellazioni dell'icosaedro che abbiamo considerato, il modello di stellazione relativo, dedotto dal modello completo della figura 2.20: queste immagini possono aiutare a evidenziare meglio la struttura di questi solidi abbastanza complessi

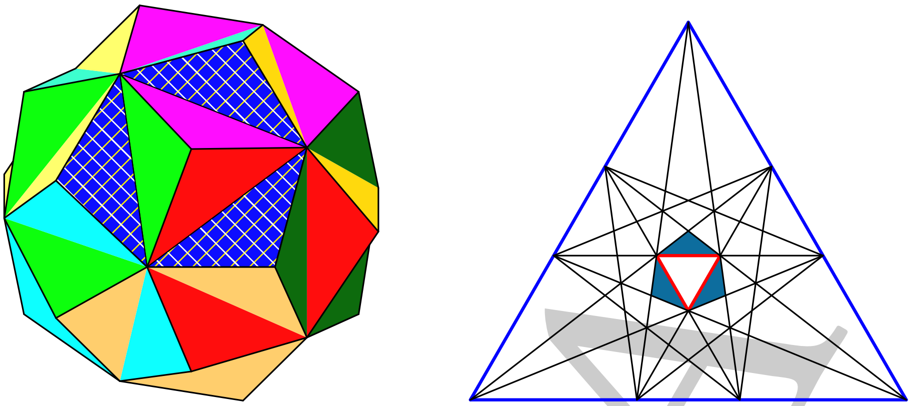


Figura 2.21: *Il piccolo icosaedro triambico ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

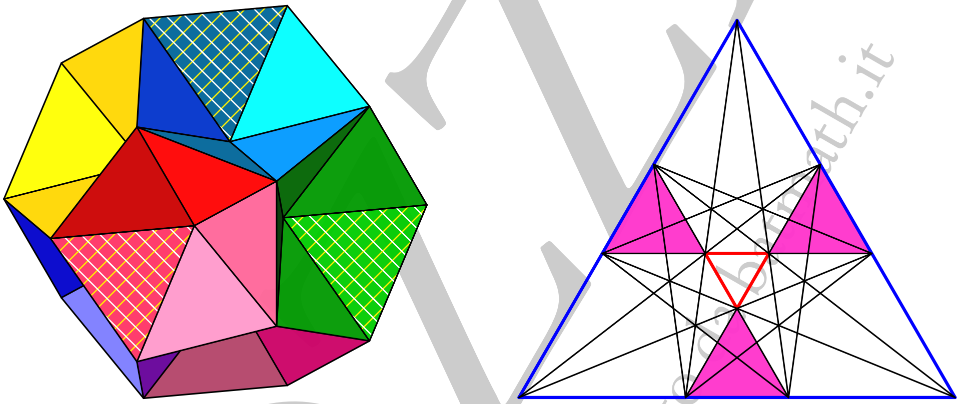


Figura 2.22: *Il dodecaedro scavato ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

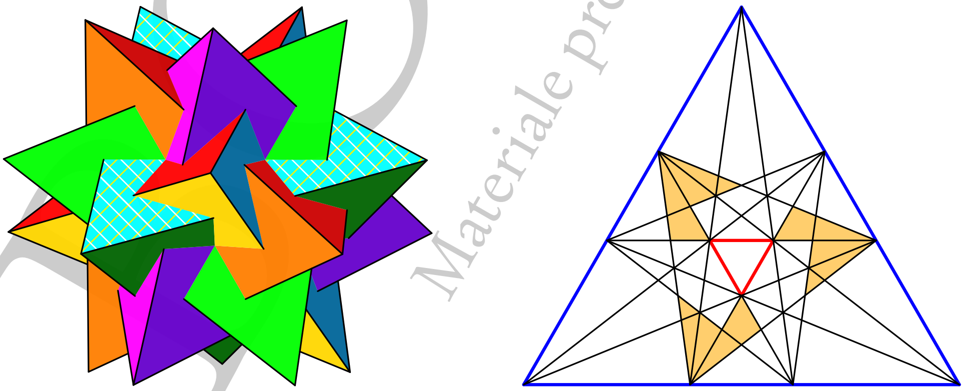


Figura 2.23: *Il composto di cinque tetraedri ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

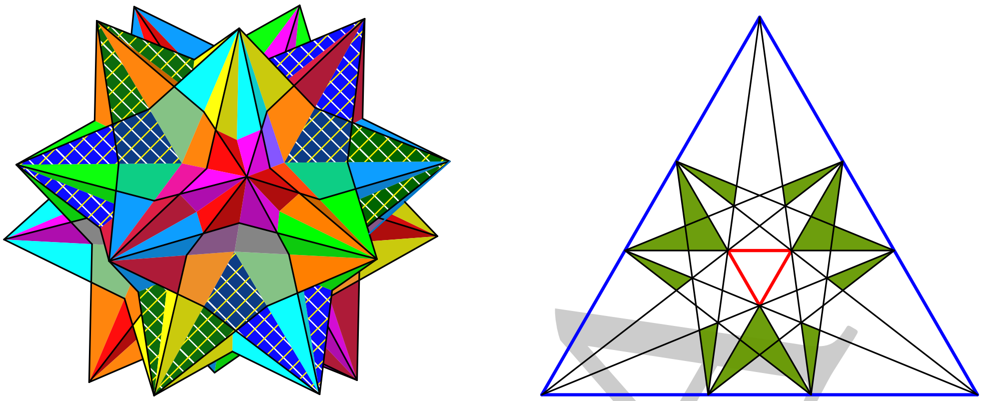


Figura 2.24: *Il composto di dieci tetraedri ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

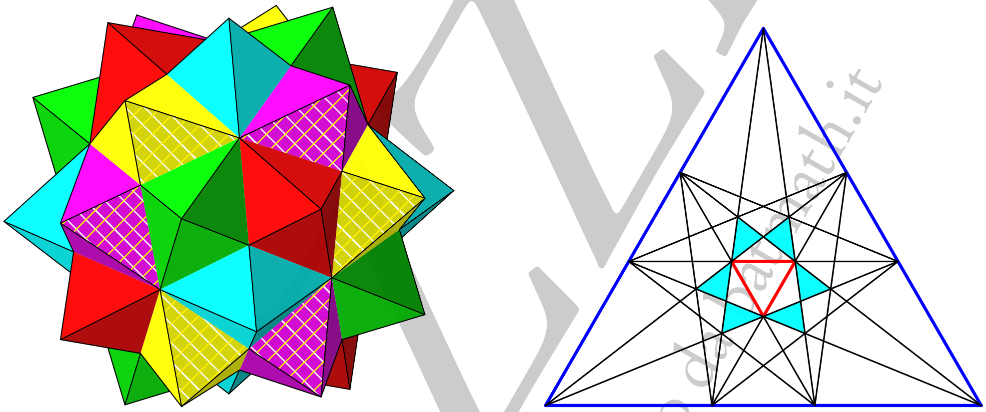


Figura 2.25: *Il composto di cinque ottaedri ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

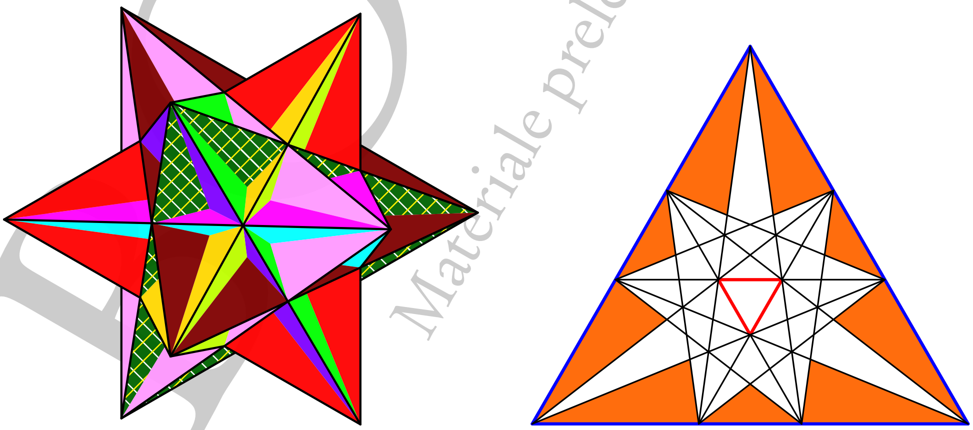


Figura 2.26: *Il grande icosaedro ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

Se teniamo conto delle proprietà dei solidi ottenuti come sfaccettatura di avere gli stessi vertici del solido di partenza e riesaminiamo le figure 2.5, 2.7, 2.8 (oltre a ricordare le caratteristiche del grande dodecaedro) possiamo osservare che:

1. il piccolo dodecaedro stellato può anche essere ottenuto come sfaccettatura dell'icosaedro;
2. il grande dodecaedro può essere considerato anche come sfaccettatura dell'icosaedro;
3. il grande dodecaedro stellato può essere considerato anche come sfaccettatura del dodecaedro (olterché stellazione);
4. il grande icosaedro può essere considerato anche come sfaccettatura dell'icosaedro (olterché stellazione).

Dunque i poliedri di Keplero-Poinsot si possono ottenere mediante i processi duali di stellazione e sfaccettatura a partire dal dodecaedro e dall'icosaedro. È da notare che tutte le stellazioni del dodecaedro producono solidi regolari (secondo la definizione estesa che prevede poligoni stellati come facce e poligoni che si intersecano anche fuori dagli spigoli), mentre ciò non succede per le stellazioni dell'icosaedro.

2.5 Due ulteriori stellazioni dell'icosaedro

Per illustrare al meglio la complessità delle stellazioni dell'icosaedro, proponiamo due ulteriori, significativi, esempi: la cosiddetta *sesta stellazione* nell'elenco di Wenninger e la *stellazione finale*, o *icosaedro completo*. Si tratta di due solidi particolarmente interessanti e significativi dal punto di vista estetico.

La sesta stellazione può essere anche ottenuta dal dodecaedro scavato, incollando al centro di ognuna delle fossette una bipiramide pentagonale fortemente asimmetrica, come una specie di spuntone.

Anche le facce di questa stellazione sono contenute all'interno del grande icosaedro, come mostra lo schema della figura 2.27.

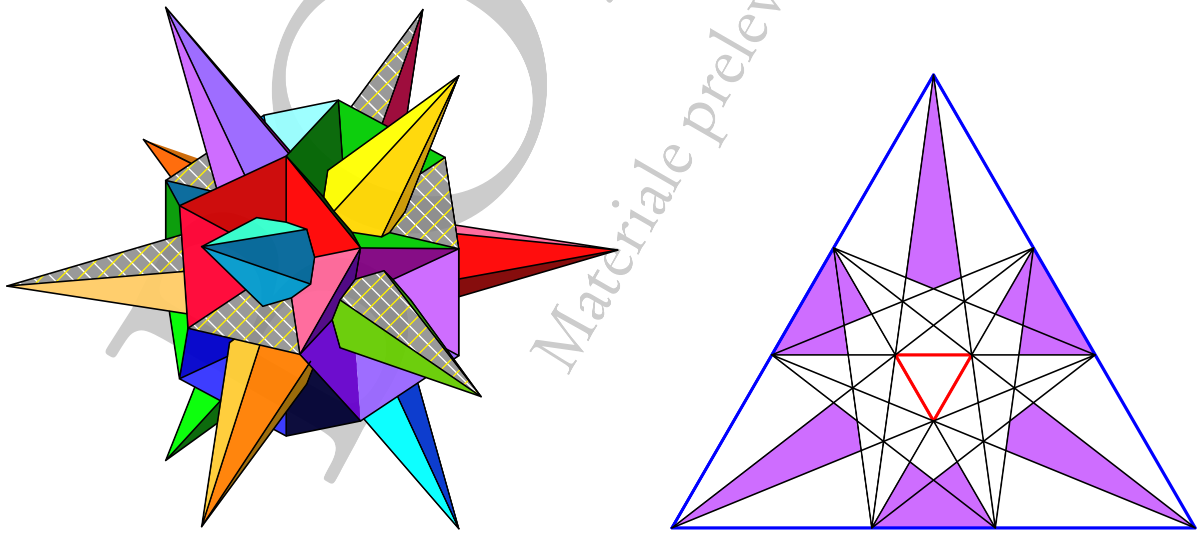


Figura 2.27: *La "sesta stellazione" dell'icosaedro ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

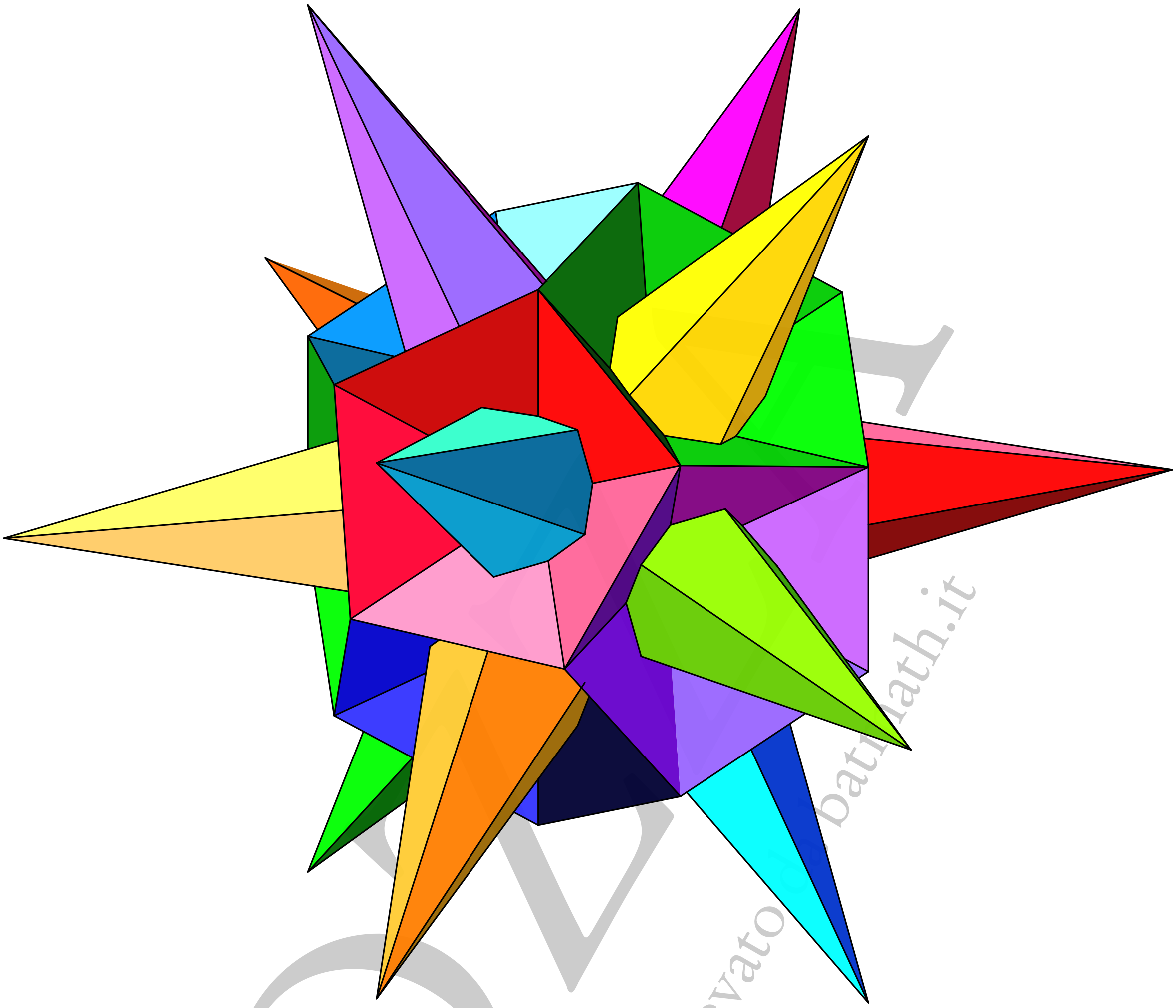


Figura 2.28: *La "sesta stellazione" dell'icosaedro*

Passiamo ora ad esaminare la stellazione finale, detta anche icosaedro completo perché contiene tutte le celle tridimensionali che si possono costruire a partire da un icosaedro mediante estensione delle facce. Nella classificazione di Wenninger è la stellazione numero 17.

Ha l'aspetto di un poliedro "spinoso", le cui punte sono raggruppate in ben definiti gruppi di cinque.

Il poliedro può essere pensato come avente venti facce a forma di ennagono stellato (non regolare), intersecantesi anche fuori dagli spigoli, ed in questo caso ha 90 spigoli e 60 vertici, oppure come un semplice poliedro (concavo), avente come facce 180 triangolari (60 isosceli e 120 scaleni), 270 spigoli, 92 vertici.

È interessante notare che i 92 vertici, nella seconda interpretazione citata, che è quella più utile se si vuole costruirne un modello di carta, si ripartiscono in tre gruppi: i venti più interni sono vertici di un dodecaedro regolare, i dodici intermedi sono vertici di un icosaedro regolare, i 60 vertici più esterni, le punte delle "spine", sono vertici di un *icosaedro troncato non regolare*.

La prima trattazione di questo solido è dovuta a Bruckner, che ne pubblica anche un'immagine, vedi [7], tavola XI, figura 14. Per il suo straordinario aspetto esso è stato anche chiamato *echidnahedron* (probabilmente la prima volta nel database dei poliedri di Netlib, `https://netlib.org/`), dal nome di un mammifero (*Echidna*) spinoso come un riccio.

La figura 2.29 mostra il solido con una colorazione che evidenzia i gruppi di spine: cinque spine per ogni gruppo, per un totale di dodici gruppi e quindi 60 "punte".

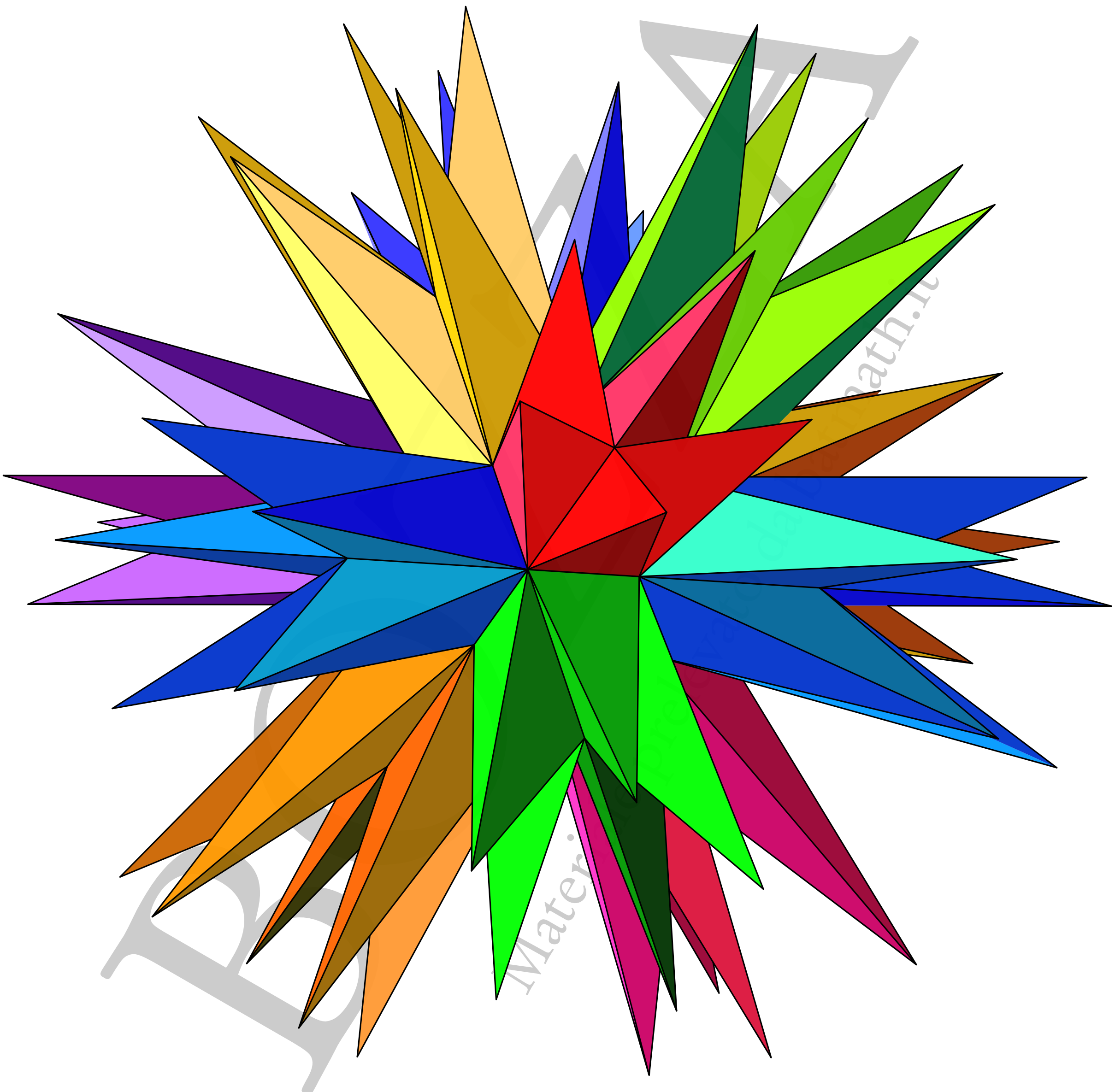


Figura 2.29: *La "stellazione finale" dell'icosaedro*

La figura 2.30 evidenzia una faccia a forma di ennagono stellato sul solido e la circonferenza circoscritta all'ennagono.

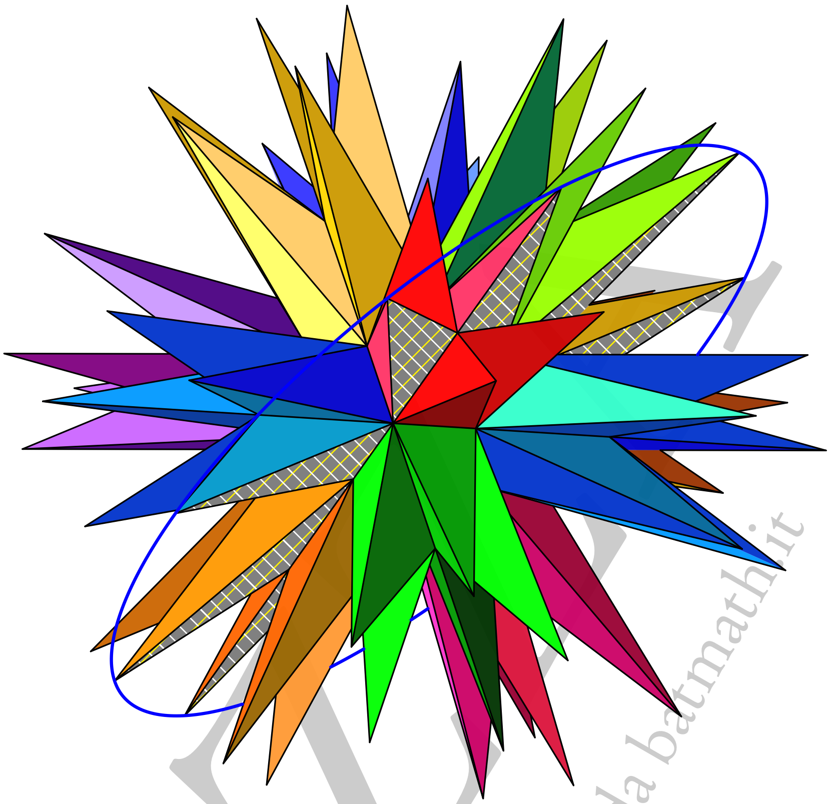


Figura 2.30: *La stellazione finale dell'icosaedro ed evidenziazione del relativo modello di stellazione dell'icosaedro*

La figura 2.31 mostra lo schema della stellazione per l'icosaedro completo.

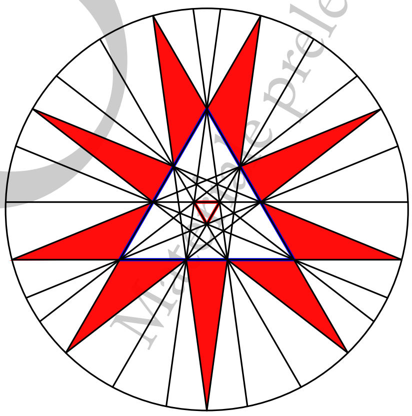


Figura 2.31: *Schema della stellazione dell'icosaedro completo*

Le figure 2.32 e 2.33 mostrano l'icosaedro troncato non regolare che ha i vertici sui vertici più esterni dell'icosaedro completo: si esprime questo fatto dicendo che esso è la *chiusura convessa* dell'icosaedro completo, ovvero il più piccolo poliedro convesso che lo contiene.

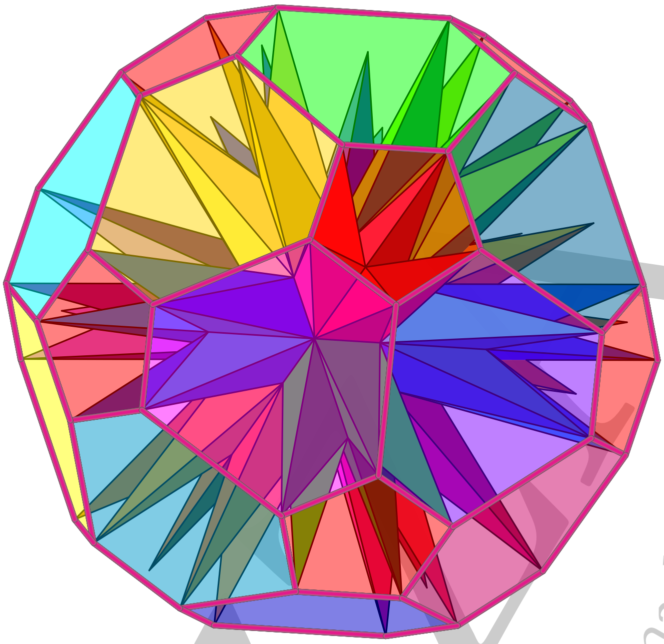


Figura 2.32: *Schema dell'icosaedro troncato non regolare, chiusura convessa dell'icosaedro completo*

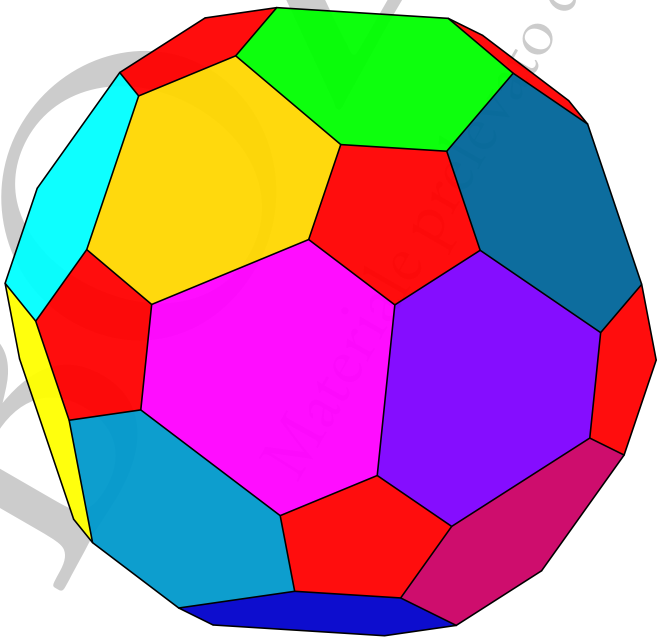


Figura 2.33: *L'icosaedro troncato non regolare, chiusura convessa dell'icosaedro completo*

La figura 2.34 mostra il dodecaedro costruito con i 20 vertici più interni dell'icosaedro completo, e uno dei dodici gruppi di cinque punte che, incollati sulle facce del dodecaedro, completano la stellazione finale dell'icosaedro.

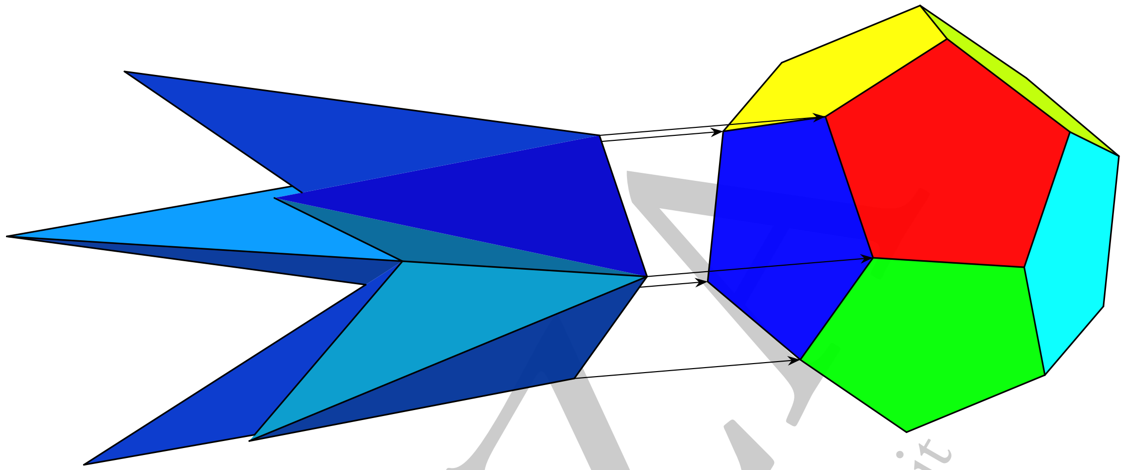


Figura 2.34: *Il dodecaedro costruito con i vertici più interni dell'icosaedro completo*

La figura 2.35 mostra l'icosaedro costruito con i vertici intermedi dell'icosaedro completo: questi vertici si trovano esattamente sulla perpendicolare nel punto medio alle facce del precedente dodecaedro, ovvero questo icosaedro è in posizione duale rispetto al precedente dodecaedro.

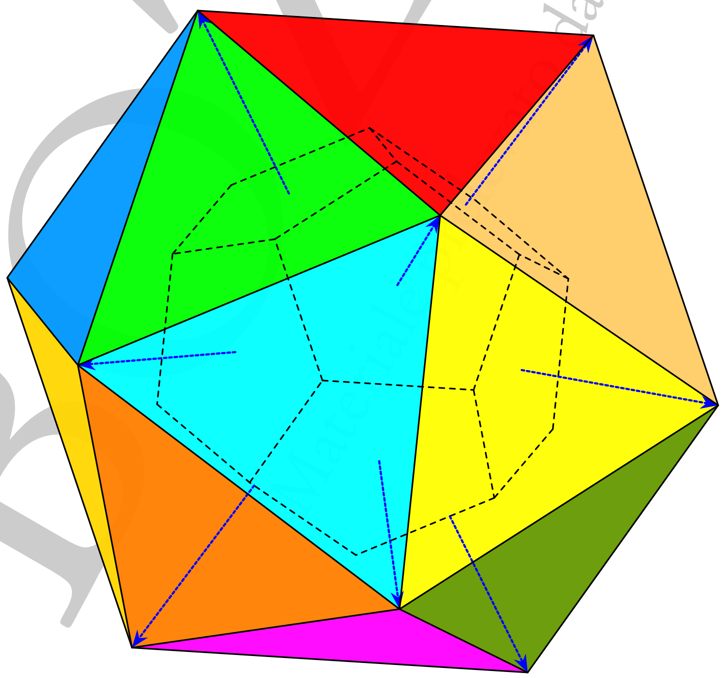


Figura 2.35: *L'icosaedro costruito con i vertici intermedi dell'icosaedro completo*

Un'ultima curiosità relativa alla stellazione finale dell'icosaedro. Come abbiamo già detto, questo poliedro prò essere pensato come un semplice poliedro concavo con 180 facce triangolari, di cui 60 a forma di triangolo isoscele e 120 di triangolo scaleno; questo si deduce immediatamente dalla figura 2.31, dove sono evidenziati nove triangoli: siccome ci sono 20 facce come questa si ottengono appunto 180 triangoli. Ci sono 4 spigoli diversi per questi triangoli in quanto i due lati di quelli isosceli hanno la stessa lunghezza di uno di quelli scaleni. Ebbene, se usiamo il lato dell'icosaedro di partenza come unità di misura, questi quattro segmenti hanno lunghezza, nell'ordine, φ, φ^2, φ^3, $\varphi^3\sqrt{2}$, dove φ è la sezione aurea.

3 Poliedri di Badoureau-Coxeter

3.1 I poliedri uniformi

Un *poliedro uniforme* è un poliedro in cui tutte le facce sono poligoni regolari eventualmente stellati e in cui tutti i vertici sono identici, nel senso che data una qualunque coppia di vertici deve esistere un simmetria che muta uno nell'altro.

Come si vede ci sono molti affievolimenti rispetto alle condizioni richieste per i poliedri regolari o platonici:

— le facce possono essere poligoni regolari anche di tipo diverso (come già nei poliedri di Archimede);
— le facce possono essere anche poligoni stellati (come già nel piccolo e grande dodecaedro stellato);
— le facce possono anche intersecarsi al di fuori degli spigoli (come già nel grande dodecaedro e nel grande icosaedro).

I poliedri di Johnson *non* sono uniformi perché manca la condizione sui vertici: come abbiamo visto nei vertici di un poliedro di Johnson può concorrere un numero diverso di facce.

Finora di solidi con queste caratteristiche abbiamo incontrato, tra i solidi convessi, i solidi platonici, che hanno facce di un solo tipo, e i solidi di Archimede, che hanno facce regolari anche di più tipi, ma non stellate e non intersecantesi oltre alle famiglie infinite dei prismi e degli antiprismi. Tra i solidi non convessi i poliedri di Keplero-Poinsot, che hanno facce stellate intersecantesi oppure facce non stellate ma intersecantesi.

Oltre a questi poliedri esistono anche altri 53 poliedri con queste caratteristiche "affievolite" e li trattiamo in questo capitolo.

3.2 I 53 poliedri di Badoureau e Coxeter

I poliedri di Keplero-Poinsot, come abbiamo visto, mantengono la caratteristica dei poliedri platonici di avere facce regolari tutte delle stesso tipo e in più ammettono facce stellate e/o facce intersecantesi; i poliedri di Badoureau e Coxeter sono il corrispettivo dei poliedri di Keplero-Poinsot per i poliedri di Archimede, in quanto ammettono facce regolari di diverso tipo e in più anche facce stellate e/o facce intersecantesi.

I poliedri di Badoureau e Coxeter sono in numero di 53, portando il numero dei poliedri uniformi a un totale di 75: 5 solidi platonici, 4 solidi di Keplero-Poinsot, 13 solidi di Archimede e 53, appunto, solidi di Badoureau e Coxeter. Si devono poi aggiungere le famiglie infinite di prismi e antiprismi convessi, non convessi e incrociati.

Due di questi poliedri furono per primo descritti da Hess ([30]) e poi riproposti da Badoureau ([4]) che in totale ne descrisse 37; Pitsch ([42]), indipendentemente da Badoureau, ne descrisse 18, di cui quattro diversi rispetto a Badoureau. Gli ultimi 12 furono inizialmente scoperti da Coxeter e Miller nel 1932, che tuttavia non pubblicarono la loro scoperta, nell'attesa della dimostrazione che la lista era completa. Nel frattempo alcuni di questi dodici furono riscoperti da altri studiosi, fin quando Coxeter, Miller e Longuet-Higgins nel 1954 pubblicarono quella che doveva diventare la lista definitiva ([16]).

La prova della completezza dell'elenco è dovuta a Sopov nel 1970 ([49]) e successivamente a Skilling ([48]) che utilizza anche calcoli basati su un programma al computer. Skilling, a prezzo di un'estensione del concetto di poliedro in cui si ammette che sugli spigoli convergano anche più di due facce, costruisce un ulteriore poliedro con le caratteristiche degli uniformi:ne parliamo nella pagina 124.

Tutti i poliedri uniformi hanno una sfera circoscritta, il cui centro è chiamato da Coxeter et al. ([16]) *centroide geometrico*. Tra i 53 poliedri di Badoureau e Coxeter ce ne sono 10 di speciali: si tratta di tutti quelli che hanno il gruppo "emi" come affisso e del poliedro U75:

1. $U3$: ottaemiottaedro;
2. $U4$: tetraemiesaedro;
3. $U15$: cuboemiottaedro;
4. $U49$: piccolo icosiemidodecaedro;
5. $U51$: piccolo dodecaemidodecaedro;
6. $U62$: piccolo dodecaemicosaedro;
7. $U65$: grande dodecaemicosaedro;
8. $U70$: grande dodecaemidodecaedro;
9. $U71$: grande icosiemidodecaedro;
10. $U75$: grande dirombicosidodecaedro.

Questi poliedri sono importanti perché hanno delle facce passanti per il centroide geometrico: queste facce dividono la sfera circoscritta in due emisfere e questo è uno dei motivi della presenza dell'affisso "emi" nel nome. Lo stesso affisso "emi" si riferisce anche al numero delle facce che passano per il centro, che sono la metà del successivo affisso greco presente nel nome. Per esempio in *ottaemiottaedro*, ci sono otto facce di un tipo, in questo caso otto triangoli (e questo è il senso del primo "otta"), e la metà di otto, ovvero quattro, facce di un secondo tipo, le quali passano per il centro (in questo caso si tratta di quattro esagoni).

Il fatto di avere facce passanti per il centroide è di grande importanza, perché implica che la costruzione standard del duale produce un solido che non si estende all'infinito. In effetti i dieci poliedri citati non hanno un vero e proprio duale, che sarebbe costituito da un insieme di rette. Wenninger (vedi [55]) introduce una tecnica per costruire comunque una specie di duale di questi dieci poliedri uniformi, in realtà non da tutti accettata. Non ce ne occuperemo in questo fascicolo.

Nelle pagine che seguono proponiamo, per ciascun poliedro di Badoureau e Coxeter, una brevissima descrizione che si limita al numero di facce, di spigoli e di vertici, con un cenno all'origine del nome utilizzato. A questo proposito segnaliamo che la nomenclatura in lingua italiana è poco diffusa e in alcuni casi addirittura assente. L'ordine che abbiamo seguito è quello, molto diffuso e che può ormai essere considerato ufficiale, di Roman Maeder, visualizzabile su *MathWorld*.

Considerata la difficoltà di lettura della struttura di questi poliedri, abbiamo anche cercato di illustrare alcuni particolari della tecnica costruttiva, coinvolgendo in particolare le facce più difficili da evidenziare nella struttura complessiva.

Segnaliamo infine che le immagini relative al poliedro $U40$ e tutte quelle relative ai poliedri da $U42$ in poi sono in formato ".png" e non ottenute con *tikz* come per il resto delle figure di questi fascicoli. Pur essendo possibile anche la redazione di un codice tikz, esso avrebbe richiesto un tempo eccessivo e per questo abbiamo optato per delle figure bitmap, comunque di alta qualità.

3.2.1 U3: ottaemiottaedro

L'*ottaemiottaedro* è un poliedro con 4 facce esagonali (da cui "emiotta"), 8 facce triangolari (da cui "otta"), 24 spigoli e 12 vertici, che sono gli stessi del cubottaedro. Ha anche gli stessi spigoli del cubottaedro. Lo stesso vale per il cuboemiottaedro, vedi la sezione 3.2.5.

Poliedro scoperto da Badoureau.

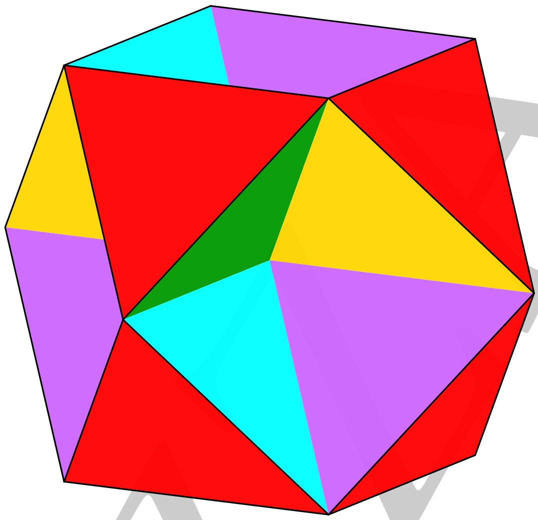


Figura 3.1: *U3: ottaemiottaedro*

La figura 3.2 evidenzia due degli esagoni intersecantesi utilizzati per costruire l'ottaemiottaedro. Le facce triangolari (in rosso) si evidenziano invece direttamente sul poliedro.

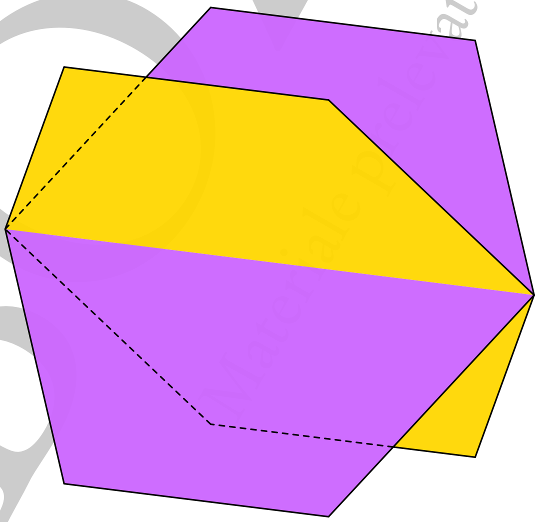


Figura 3.2: *U3: evidenziazione di due degli esagoni intersecantesi dell'ottaemiottaedro*

3.2.2 U4: tetraemiesaedro

Il *tetraemiesaedro* è un poliedro con 4 facce triangolari (da cui "tetra") e 3 facce quadrate (da cui "emiesa"), 12 spigoli, 6 vertici, che sono gli stessi dell'ottaedro, con il quale condivide anche gli spigoli.

Poliedro scoperto da Badoureau.

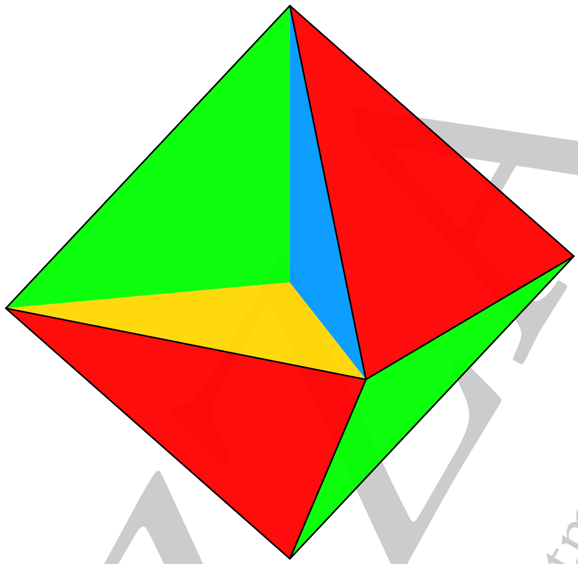


Figura 3.3: *U4: tetraemiesaedro*

La figura 3.4 evidenzia i tre quadrati intersecantesi utilizzati per costruire il tetraemiesaedro. Le facce triangolari (in rosso) si evidenziano invece direttamente sul poliedro.

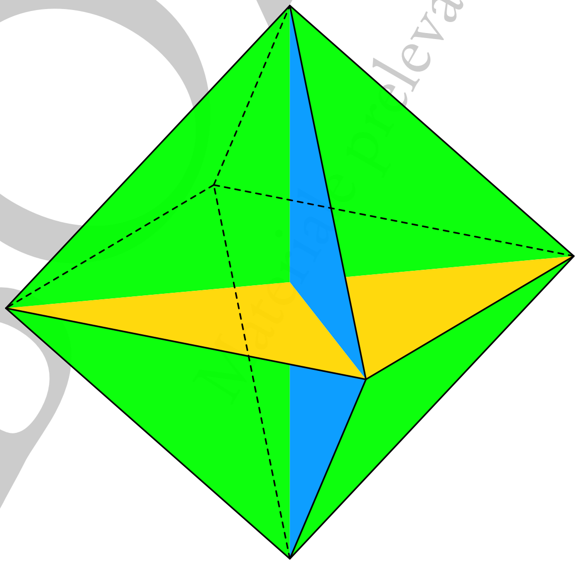


Figura 3.4: *U4: evidenziazione dei tre quadrati intersecantesi del tetraemiesaedro*

3.2.3 U13: piccolo cubicubottaedro

Il *piccolo cubicubottaedro* è un poliedro con 8 facce triangolari (da cui "otta"), 6 quadrate (da cui "cubi") e 6 ottagonali (da cui "cub"), 48 spigoli, 24 vertici, che sono gli stessi del rombicubottaedro, con il quale condivide anche gli spigoli. Lo stesso vale anche per il piccolo rombiesaedro, vedi la sezione 3.2.8. "Piccolo" è per differeziarlo dal "grande" (vedi 3.2.4).

Poliedro scoperto da Badoureau.

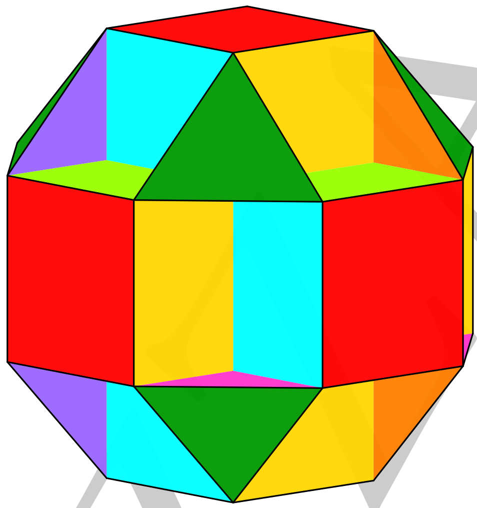


Figura 3.5: *U13: piccolo cubicubottaedro*

La figura 3.6 evidenzia tre degli ottagoni intersecantesi utilizzati per costruire il piccolo cubicubottaedro. Le facce triangolari (in verde) e quadrate (in rosso) si evidenziano invece direttamente sul poliedro.

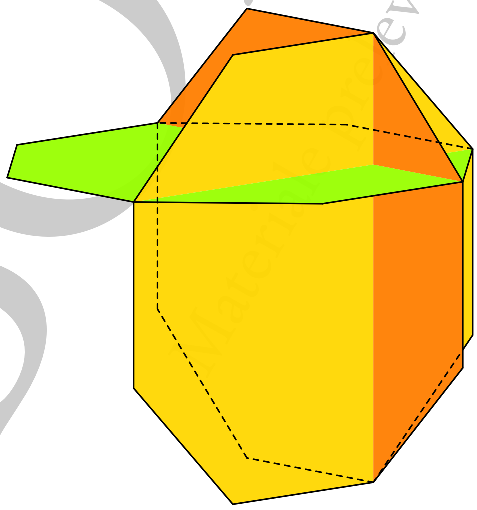


Figura 3.6: *U13: evidenziazione di tre ottagoni intersecantesi del piccolo cubicubottaedro*

3.2.4 U14: grande cubicubottaedro

Il *grande cubicubottaedro* è un poliedro con 8 facce triangolari (da cui “otta”), 6 quadrate (da cui “cubi” e 6 a forma di ottagono stellato (da cui “cub”), 48 spigoli, 24 vertici, che sono gli stessi del cubo troncato. Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch. Ha gli stessi vertici e spigoli del grande rombicubottaedro (3.2.7) e del grande rombiesaedro (3.2.11).

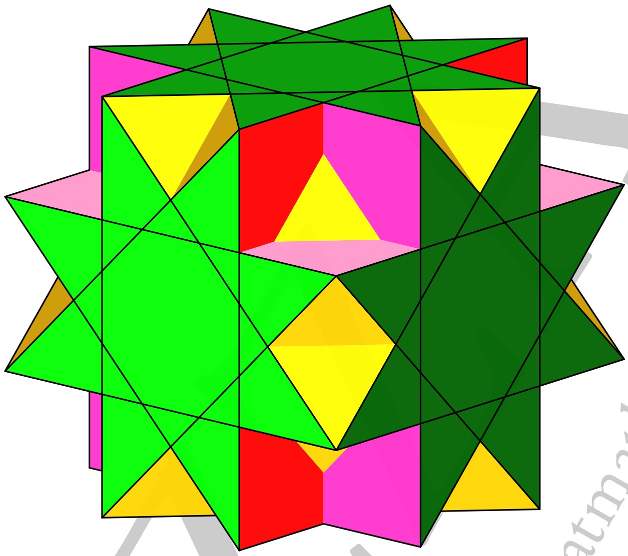


Figura 3.7: *U14: grande cubicubottaedro*

La figura 3.8 evidenzia due delle facce quadrate e due delle facce triangolari intersecantesi utilizzate per costruire il grande cubicubottaedro. Sono anche evidenziati i perimetri di due degli ottagoni stellati.

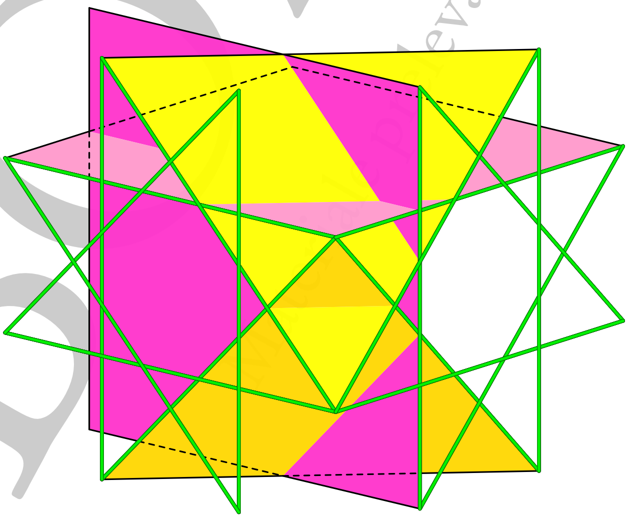


Figura 3.8: *U14: evidenziazione di due facce quadrate e due triangolari intersecantesi del grande cubicubottaedro*

3.2.5 U15: cuboemiottaedro

Il *cuboemiottaedro* è un poliedro con 6 facce quadrate (da cui "cubo") e 4 facce esagonali (da cui "emiotta"), 24 spigoli e 12 vertici, che sono gli stessi del cubottaedro, con il quale condivide anche gli spigoli. Lo stesso vale per l'ottaemiottaedro, vedi la sezione 3.2.1.

Poliedro scoperto da Badoureau.

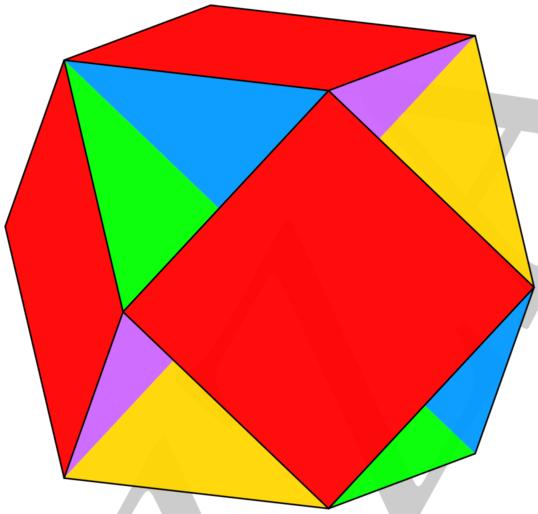


Figura 3.9: *U15: cuboemiottaedro*

La figura 3.10 evidenzia le quattro facce esagonali intersecantesi utilizzate per costruire il cuboemiottaedro. Le facce quadrate (in rosso) si evidenziano invece direttamente sul poliedro. Si veda anche la figura 3.2 relativa all'ottaemiottaedro.

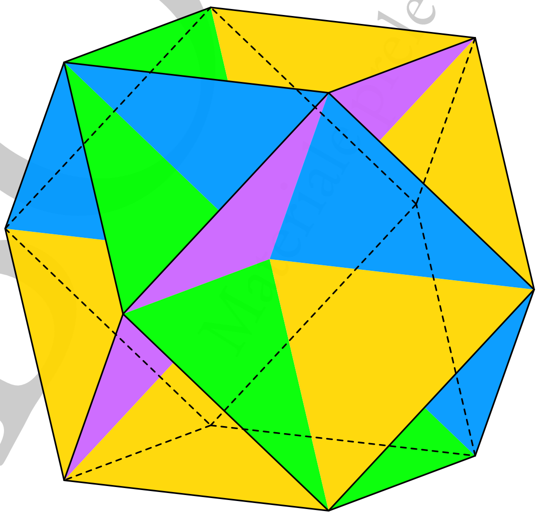


Figura 3.10: *U15: evidenziazione delle quattro facce esagonali intersecantesi del cuboemiottaedro*

3.2.6 U16: cubottaedro cubitroncato

Il *cubottaedro cubitroncato* è un poliedro con 8 facce esagonali, 6 facce ottagonali e 6 facce a forma di ottagono stellato, 72 spigoli e 48 vertici, che sono gli stessi di quelli di un pseudo cubottaedro troncato. Il nome deriva dalla parentela con il cubottaedro troncato, mentre "cubitroncato" forse è legato al fatto che due facce dello stesso tipo si incontrano ad angolo retto.

Poliedro scoperto da Badoureau e da Pitsch.

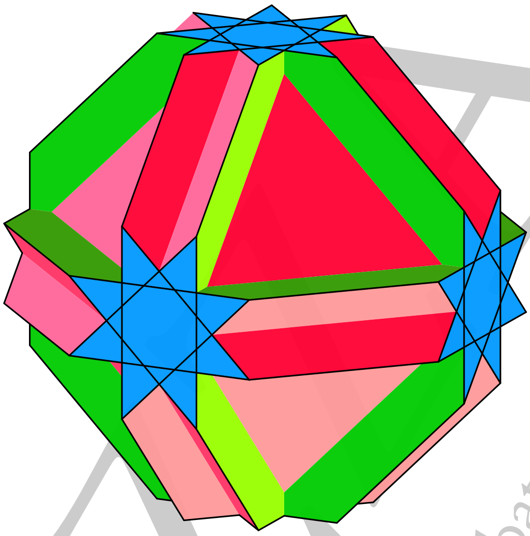


Figura 3.11: *U16: cubottaedro cubitroncato*

La figura 3.12 evidenzia una delle facce ottagonali e due delle facce esagonali utilizzate per costruire il cubottaedro cubitroncato. Sono anche evidenziati i perimetri di due degli ottagoni stellati.

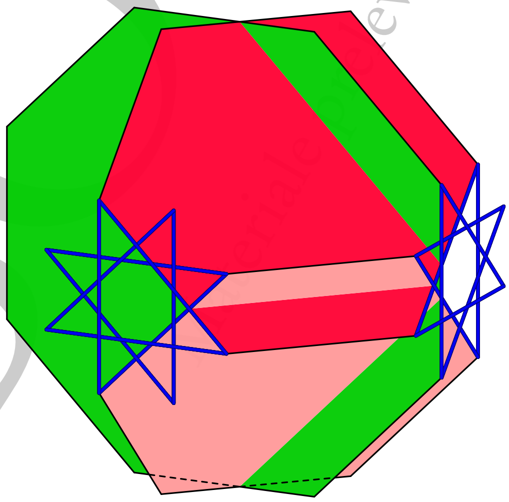


Figura 3.12: *U16: evidenziazione di una faccia ottagonale e di due facce esagonali intersecantesi del cubottaedro cubitroncato*

3.2.7 U17: grande rombicubottaedro (non convesso)

Il *grande rombicubottaedro (non convesso)* è un poliedro con 8 facce triangolari e 18 facce quadrate (esattamente come il rombicubottaedro, da cui il nome), 48 spigoli e 24 vertici, che sono gli stessi di quelli del cubo troncato. Da non confondere con il grande rombicubottaedro di Archimede, noto anche come cubottaedro troncato. Ha gli stessi vertici e spigoli del grande cubicubottaedro (3.2.4) e del grande rombiesaedro (3.2.11). Poliedro scoperto da Badoureau.

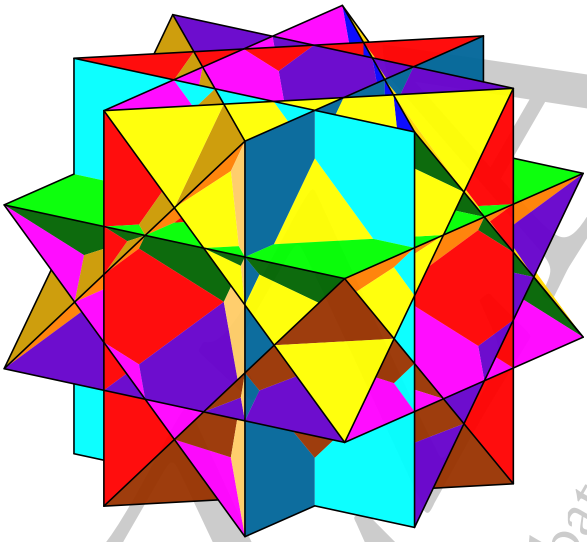


Figura 3.13: *U17: grande rombicubottaedro*

La figura 3.14 evidenzia due delle facce quadrate e due delle facce triangolari intersecantesi utilizzate per costruire il grande rombicubottaedro. Si veda anche la figura 3.8 relativa al grande cubicubottaedro.

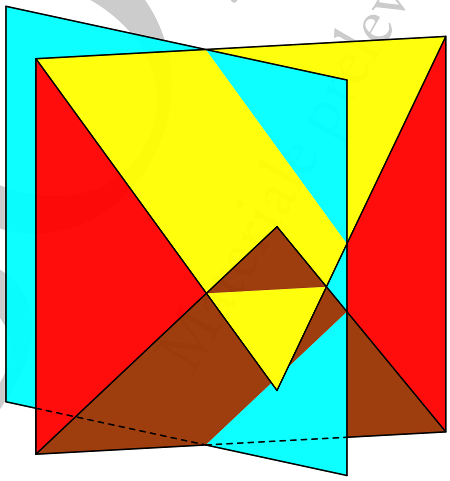


Figura 3.14: *U17: evidenziazione di due facce quadrate e due facce triangolari intersecantesi del grande rombicubottaedro*

3.2.8 U18: piccolo rombiesaedro

Il *piccolo rombiesaedro* è un poliedro con 12 facce quadrate (da cui “rombi”, per menzionare le facce quadrate) e 6 facce ottagonali (da cui “esa”), 48 spigoli e 24 vertici, che sono gli stessi di quelli del rombicubottaedro, con il quale condivide anche gli spigoli. Stessa proprietà è goduta dal piccolo cubicubottaedro (3.2.3). Poliedro scoperto da Badoureau.

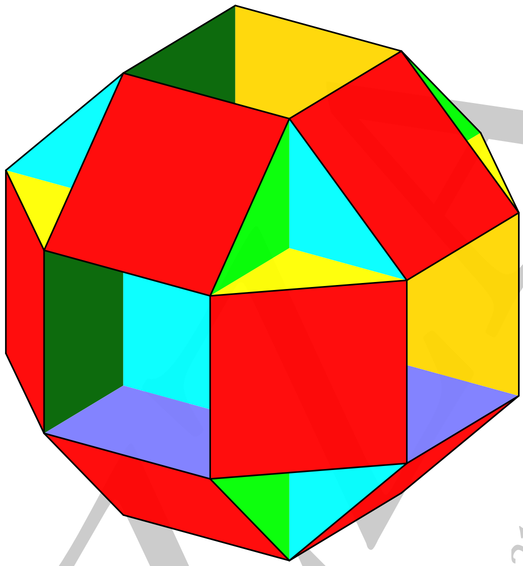


Figura 3.15: *U18: piccolo rombiesaedro*

La figura 3.16 evidenzia tre degli ottagoni intersecantesi utilizzati per coostruire il piccolo rombiesaedro. Le facce quadrate (in rosso) si evidenziano invece direttamente sul poliedro.

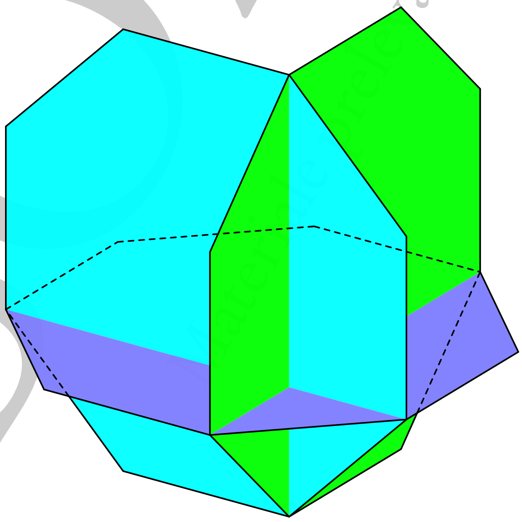


Figura 3.16: *U18: evidenziazione di tre facce ottagonali intersecantesi del piccolo rombiesaedro*

3.2.9 U19: cubo troncato stellato

Il *cubo troncato stellato* è un poliedro con 8 facce triangolari e 6 facce a forma di ottagono stellato, 36 spigoli e 24 vertici, che sono gli stessi di quelli del rombicubottaedro. Il nome deriva dal fatto che si ottiene come troncatura generalizzata del cubo e dal fatto che è stellato.

Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

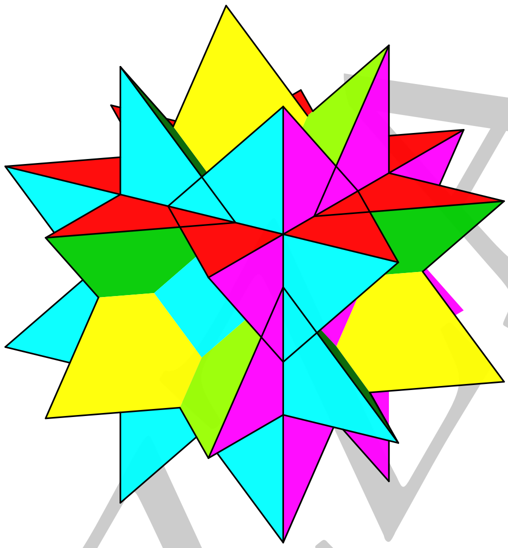


Figura 3.17: *U19: cubo troncato stellato*

La figura 3.18 evidenzia una faccia triangolare e una faccia a forma di ottagono stellato, intersecantesi, utilizzate per costruire il cubo troncato stellato.

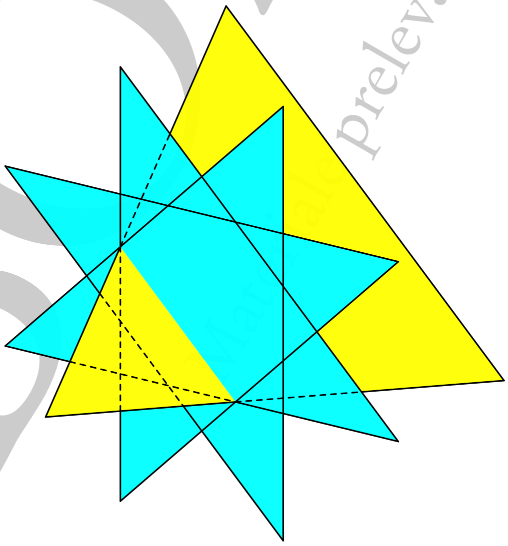


Figura 3.18: *U19: evidenziazione di una delle facce triangolari e di un ottagono stellato del cubo troncato stellato*

3.2.10 U20: grande cubottaedro troncato

Il *grande cubottaedro troncato* è un poliedro con 12 facce quadrate, 8 facce esagonali e 6 facce a forma di ottagono stellato, 72 spigoli e 48 vertici, che sono gli stessi di quelli di un pseudo cubottaedro troncato. Il nome deriva dal fatto che è imparentato con il cubottaedro troncato.

Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

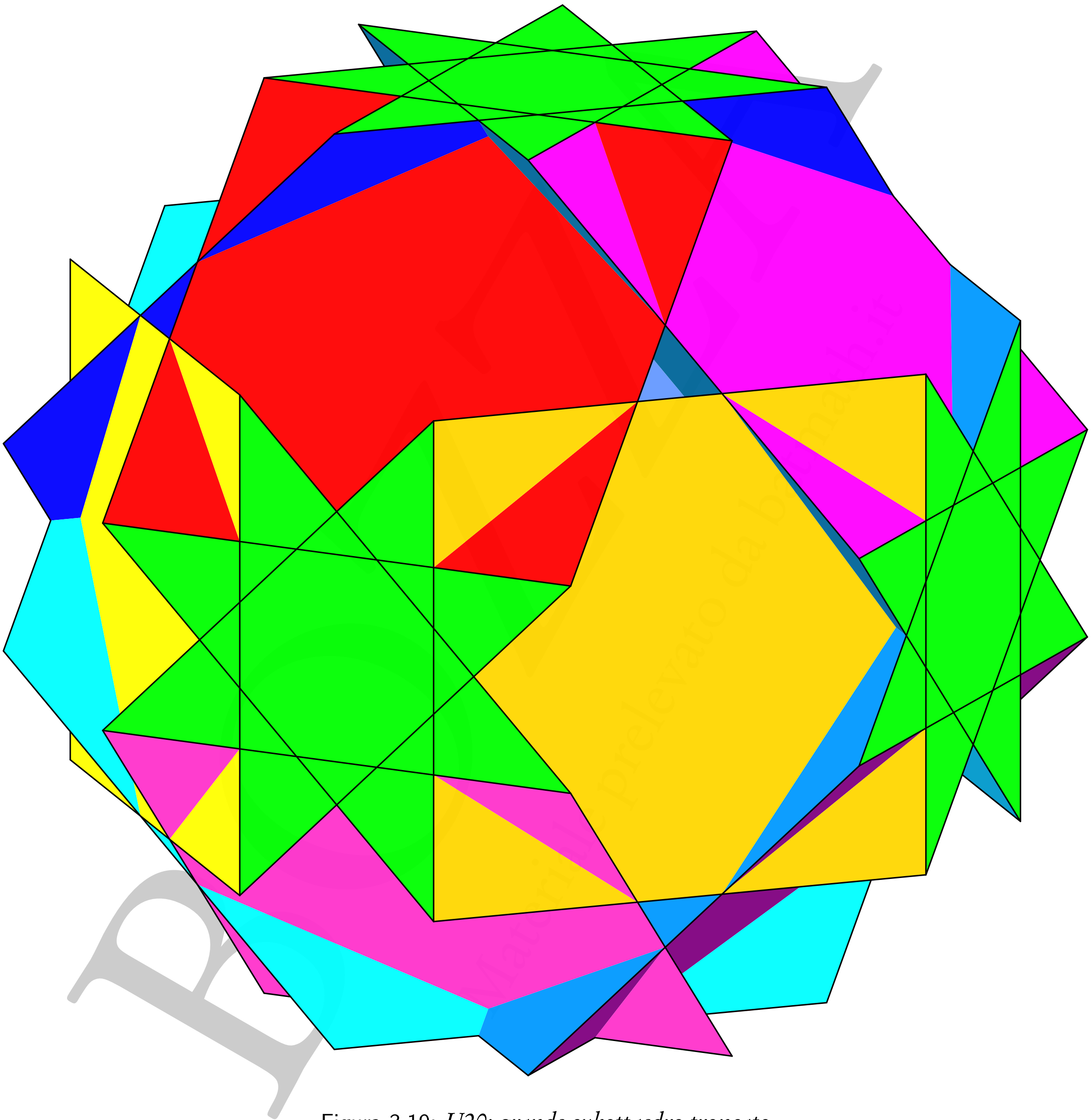


Figura 3.19: *U20: grande cubottaedro troncato*

La figura 3.20 evidenzia tre dei quadrati e uno degli esagoni intersecantesi utilizzati per la costruzione del grande cubottaedro troncato. È anche evidenziato il perimetro di uno degli ottagoni stellati.

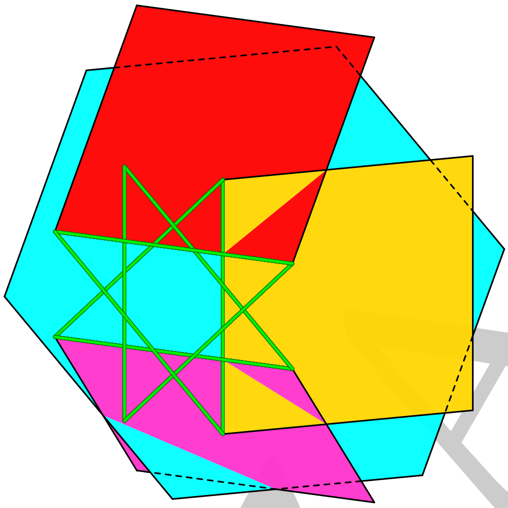


Figura 3.20: *U20: evidenziazione di tre quadrati e un esagono intersecantesi del grande cubottaedro troncato*

3.2.11 U21: grande rombiesaedro

Il *grande rombiesaedro* è un poliedro con 12 facce quadrate (da cui "rombi" per ricordare le facce quadrate) e 6 facce a forma di ottagono stellato (da cui "esa"), 48 spigoli e 24 vertici, che sono gli stessi di quelli del cubo troncato. L'appellativo "grande" è usato per distinguerlo dal "piccolo" (3.2.8). Ha gli stessi vertici e spigoli del grande cubicubottaedro (3.2.4) e del grande rombicubottaedro (3.2.7). Poliedro scoperto da Badoureau.

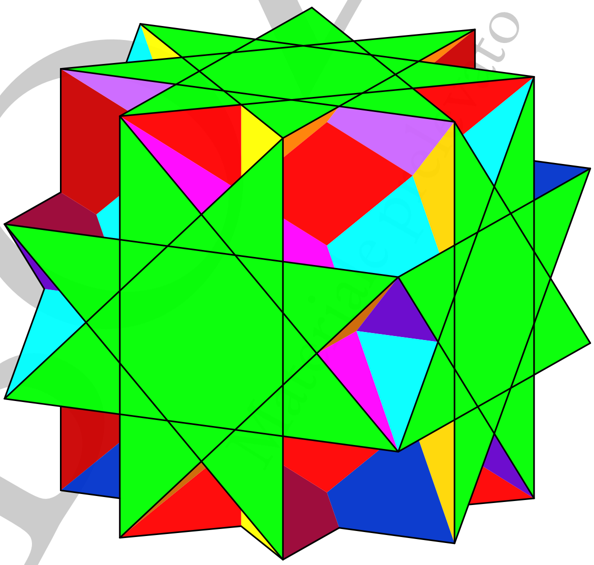


Figura 3.21: *U21: grande rombiesaedro*

La figura 3.22 evidenzia tre dei quadrati intersecantesi usati per costruire il grande rombiesaedro.

Sono anche evidenziati i perimetri di due degli ottagoni stellati.

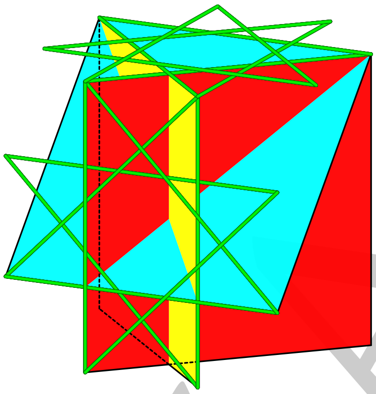


Figura 3.22: *U21: evidenziazione di tre quadrati intersecantesi del grande rombiesaedro*

3.2.12 U30: piccolo icosidodecaedro ditrigonale

Il *piccolo icosidodecaedro ditrigonale* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui "icosi") e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodeca"), 60 spigoli e 20 vertici, che sono gli stessi di quelli del dodecaedro. Ditrigonale indica che in ogni vertice arrivano due gruppi di tre facce dello stesso tipo. Stessi vertici e spigoli del dodecadodecaedro ditrigonale (3.2.21) e del grande icosaedro ditrigonale (3.2.27). Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

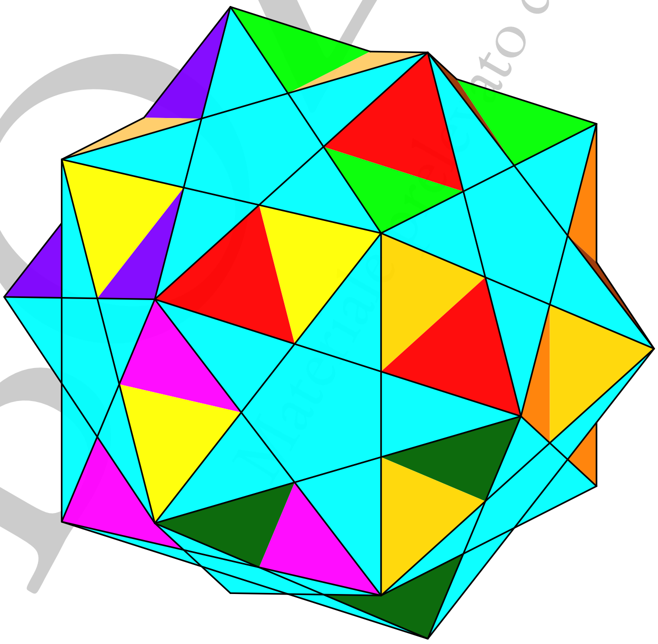


Figura 3.23: *U30: piccolo icosidodecaedro ditrigonale*

La figura 3.24 evidenzia quattro triangoli intersecantesi usati per costruire il piccolo icosidodecaedro ditrigonale. Sono evidenziati anche i perimetri di tre pentagoni stellati che, come tutti gli altri nove, hanno gli stessi vertici del dodecaedro circoscritto.

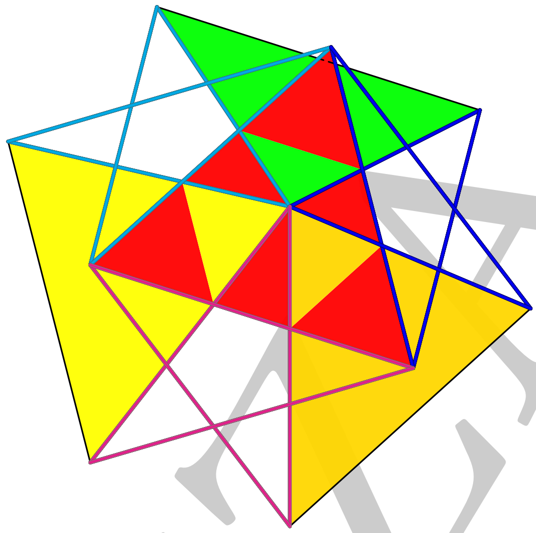


Figura 3.24: *U30: evidenziazione di quattro triangoli intersecantesi del piccolo icosidodecaedro ditrigonale*

Per comprendere al meglio la struttura del piccolo icosidodecaedro ditrigonale, la figura 3.25 mostra anche lo scheletro del dodecaedro avente gli stessi vertici.

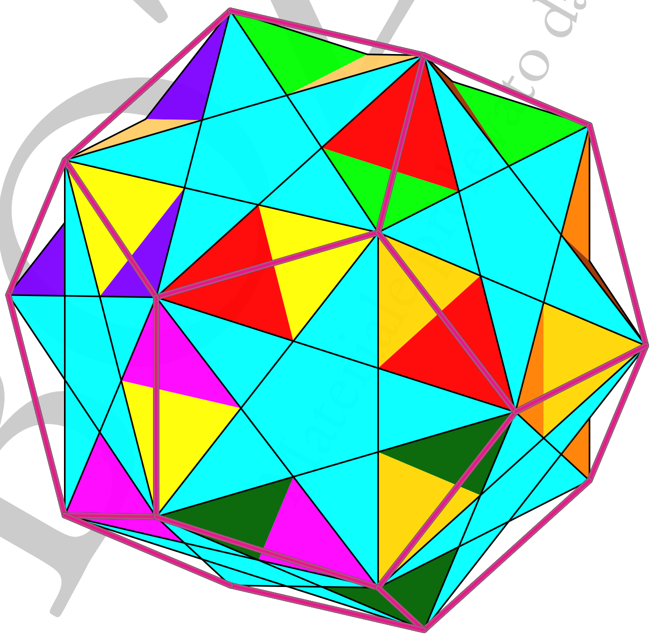


Figura 3.25: *U30: il dodecaedro con gli stessi vertici del piccolo icosidodecaedro ditrigonale*

3.2.13 U31: piccolo icosicosidodecaedro

Il *piccolo icosicosidodecaedro* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui “icos”), 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui “dodeca”) e 20 facce esagonali (da cui “icosi”), 120 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi di quelli di un pseudo rombicosidodecaedro. Condivide vertici e spigoli con il piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale (3.2.23) e con il piccolo dodecicosaedro (3.2.30). Poliedro scoperto da Pitsch.

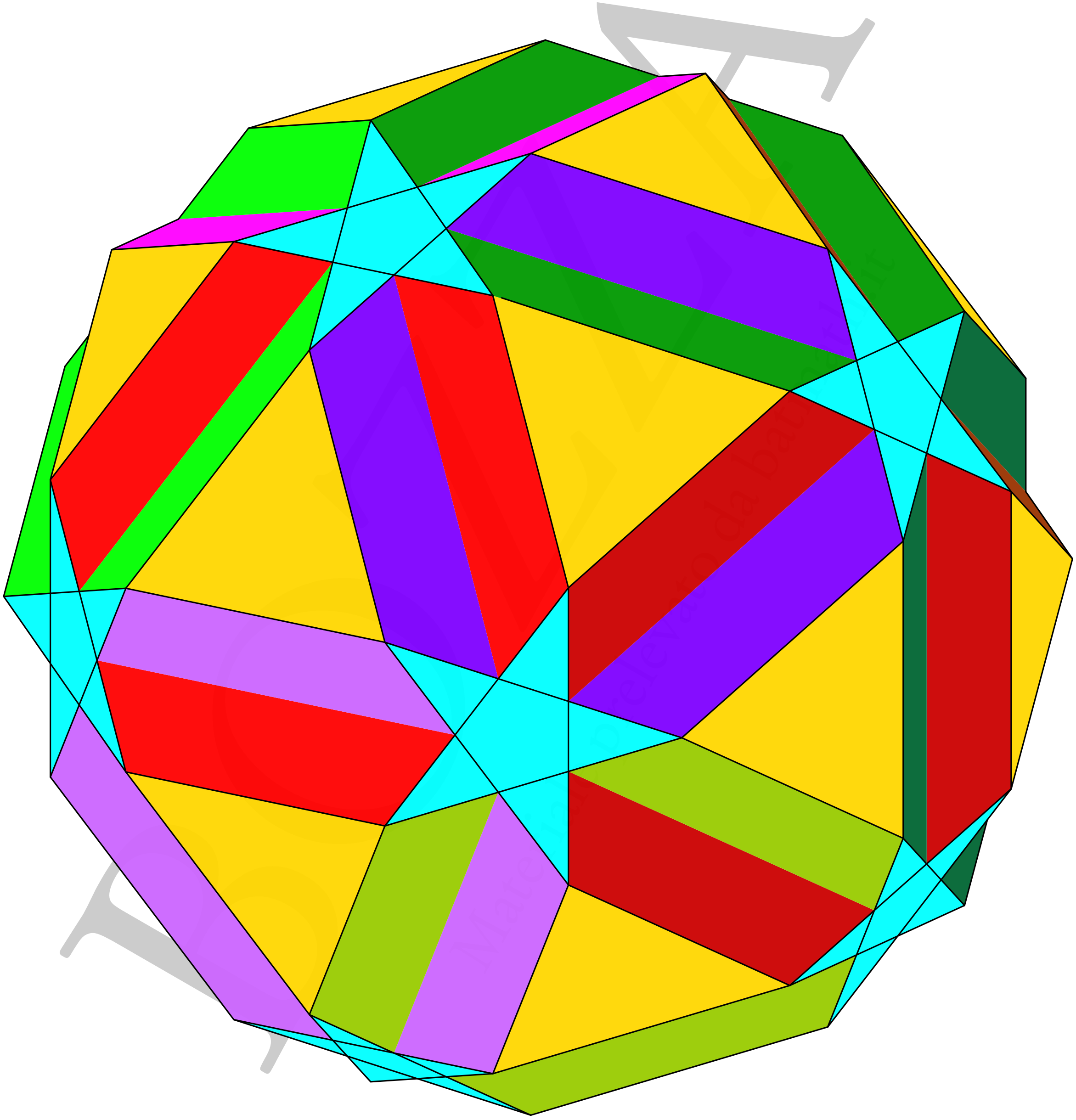


Figura 3.26: *U31: piccolo icosicosidodecaedro*

La figura 3.27 evidenzia cinque esagoni intersecantesi utilizzati per costruire il piccolo icosicosidodecaedro. Per maggior chiarezza è evidenziato anche il perimetro di uno dei pentagoni stellati, mentre i triangoli (in giallo oro) si evidenziano invece direttamente sul poliedro.

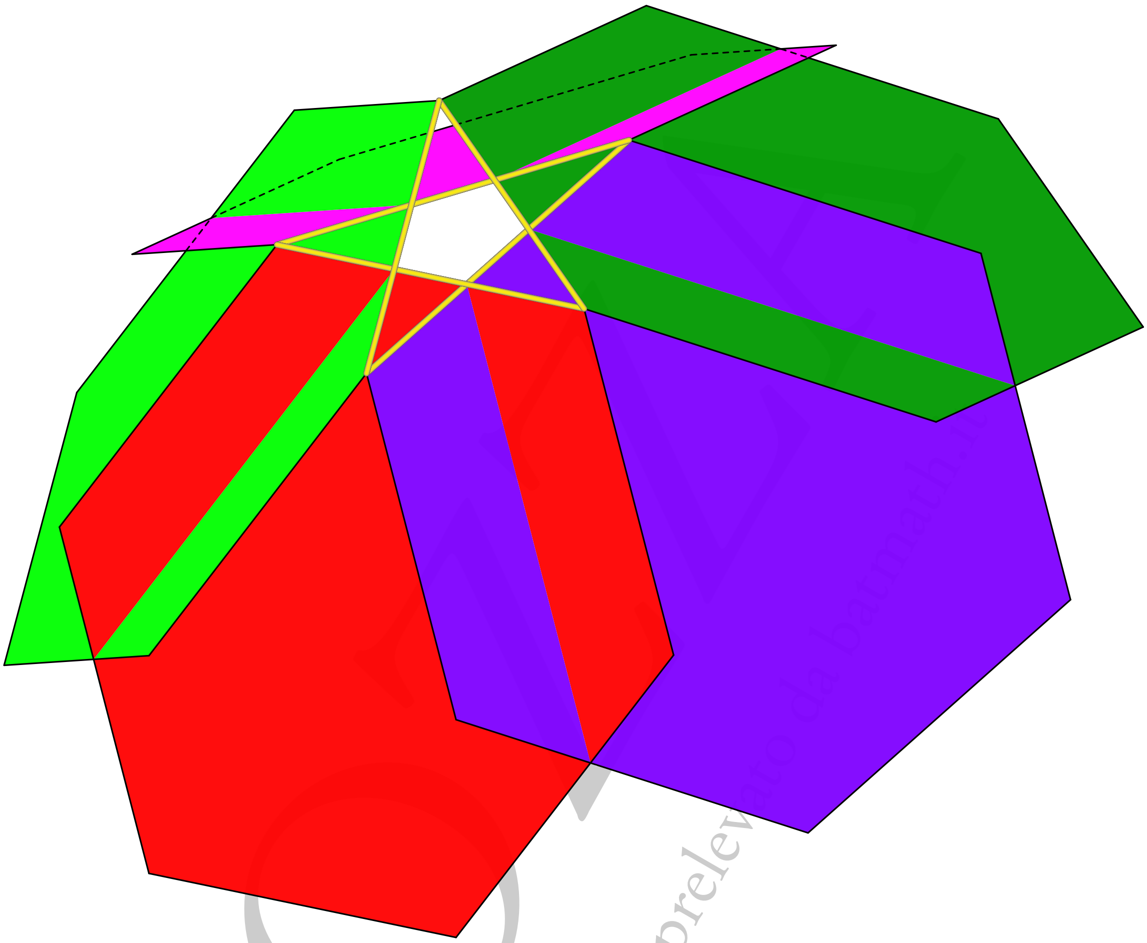


Figura 3.27: *U31: evidenziazione di cinque esagoni del piccolo icosicosidodecaedro*

3.2.14 U32: piccolo icosicosidodecaedro camuso

Il *piccolo icosicosidodecaedro camuso* è un poliedro con 100 facce triangolari e 12 facce a forma di pentagono stellato, 180 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi di quelli di un pseudo icosaedro troncato. Il nome è legato al fatto che si tratta di un “addolicmento” del piccolo icosicosidodecaedro, 3.2.13.

Poliedro scoperto da Coxeter e Miller nel 1932.

La struttura di questo solido è decisamente complessa e alcune facce triangolari sono addirittura complanari, ma non contigue.

I centri dei dodici pentagoni stellati sono vertici di un icosaedro regolare.

I 100 triangoli equilateri si possono dividere in due gruppi:

— 60 triangoli congiungono un lato di un penatgono stellato a uno dei vertici di un altro pentagono stellato (nella figura 3.28 sono colorati con vari colori, in modo che tutti quelli che partono dai vertici di un pentagono stellato abbiano lo stesso colore);
— i restanti 40 triangoli (colorati in rosso nella figura 3.28) congiungono tre vertici dei pentagoni stellati e si sovrappongono parzialmente due a due, avendo lo stesso centro. Formano un esagono stellato non regolare.

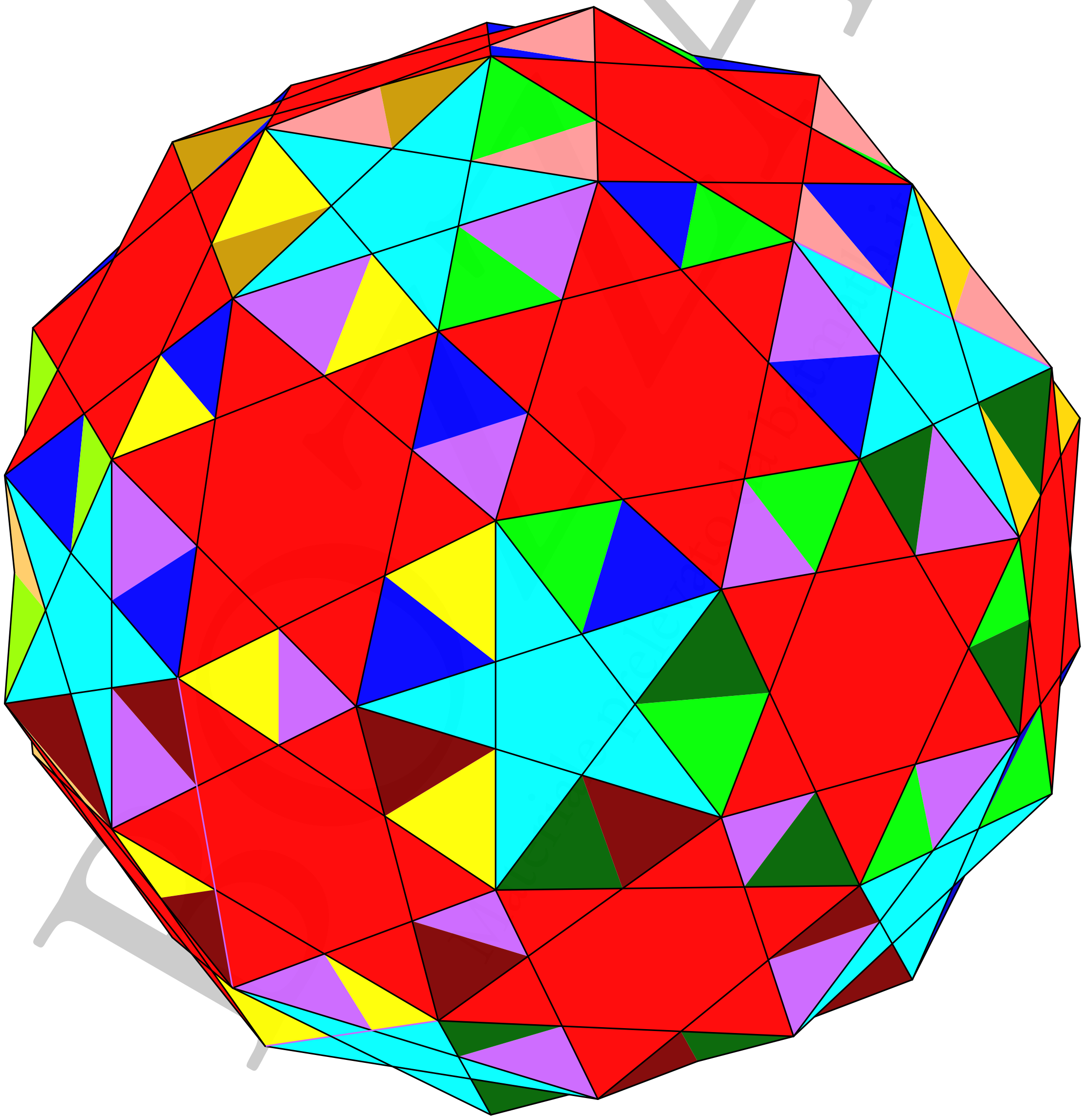


Figura 3.28: *U32: piccolo icosicosidodecaedro camuso*

La figura 3.29 evidenzia, a sinistra, un pentagono stellato e i cinque triangoli aventi un vertice sui suoi vertici e il lato opposto sui lati di un altro pentagono stellato, a destra, una coppia di triangoli parzialmente sovrapposti, nel loro piano, evidenziando il fatto che l'esagono stellato non è regolare.

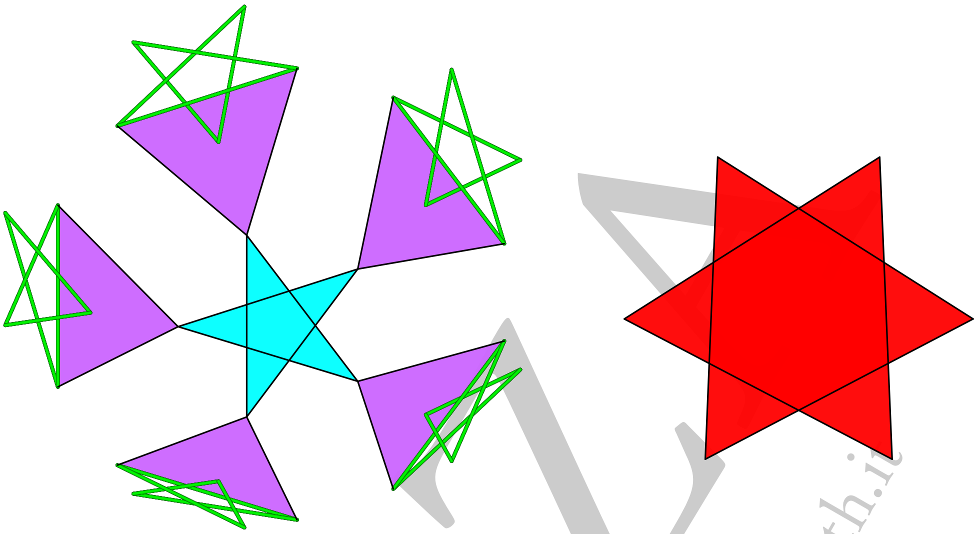


Figura 3.29: *U32: evidenziazione dei triangoli con origine sui vertici di un pentagono stellato e di due triangoli parzialmente sovrapposti del piccolo icosicosidodecaedro camuso*

La figura 3.30 mostra il pseudo icosaedro troncato (falso "pallone da calcio"), involucro convesso del piccolo icosicosidodecaedro camuso.

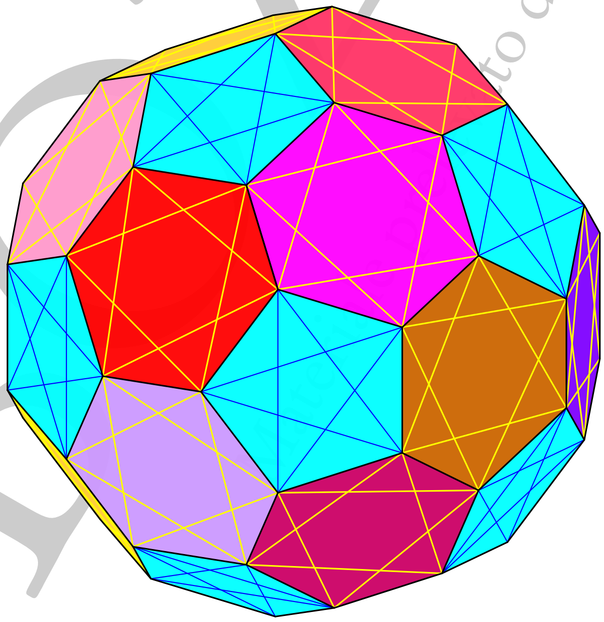


Figura 3.30: *U32:il pseudo icosaedro troncato, involucro convesso del piccolo icosicosidodecaedro camuso*

3.2.15 U33: piccolo dodecicosidodecaedro

Il *piccolo dodecicosidodecaedro* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui "icosi"), 12 facce pentagonali e 12 facce decagonali (da cui "dodec" e "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi del rombicosidodecaedro. Condivide vertici e spigoli con il piccolo rombidodecaedro, vedi 3.2.19. Poliedro scoperto da Badoureau.

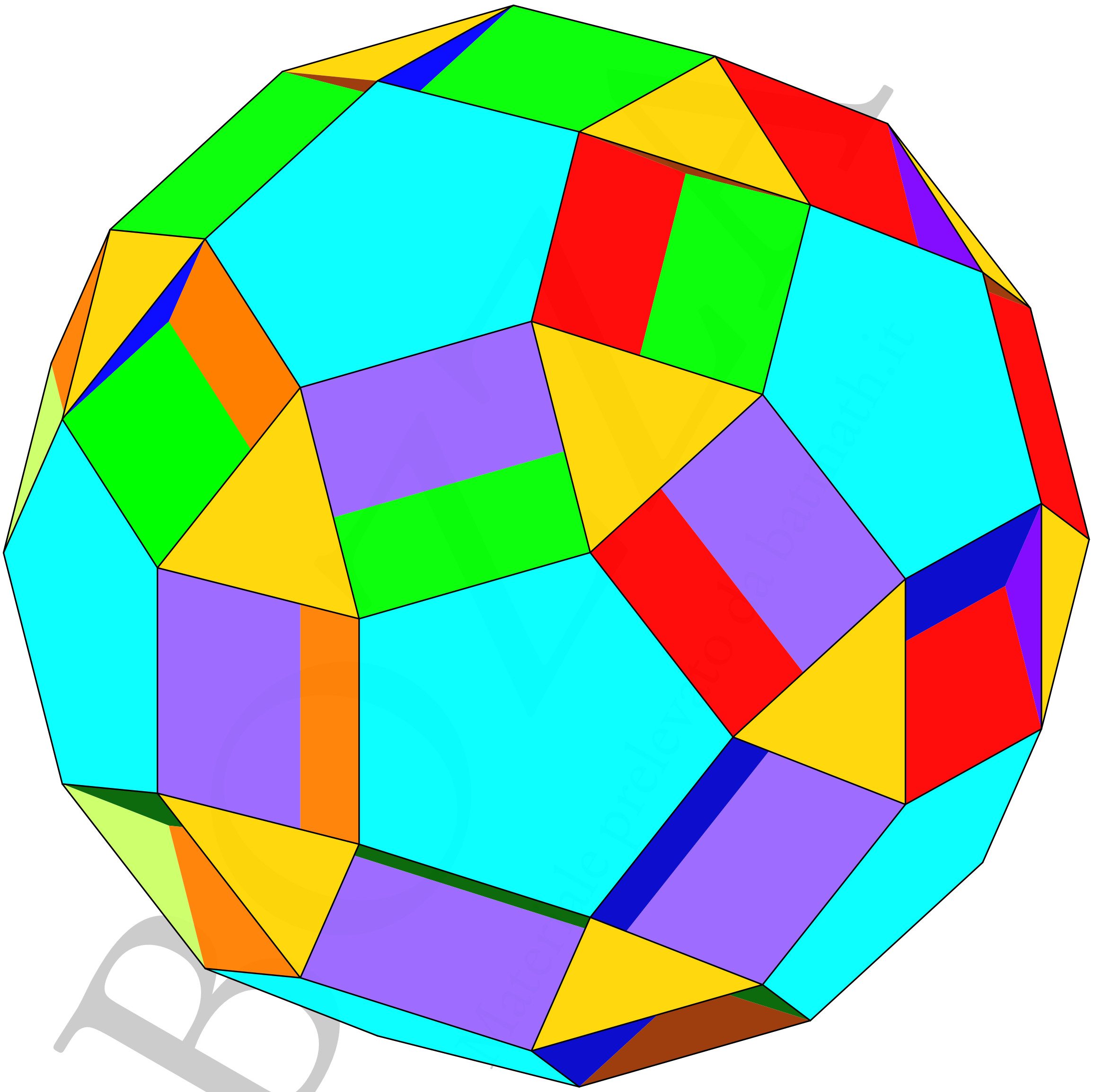


Figura 3.31: *U33: piccolo dodecicosidodecaedro*

La figura 3.32 mostra i soli decagoni intersecantesi del piccolo dodecicosidodecaedro: i loro 120 spigoli esauriscono tutti i 120 spigoli del poliedro in esame. Nella figura 3.32 sono infatti facilmente individuabili i triangoli e i pentagoni che completano il piccolo dodecicosidodecaedro.

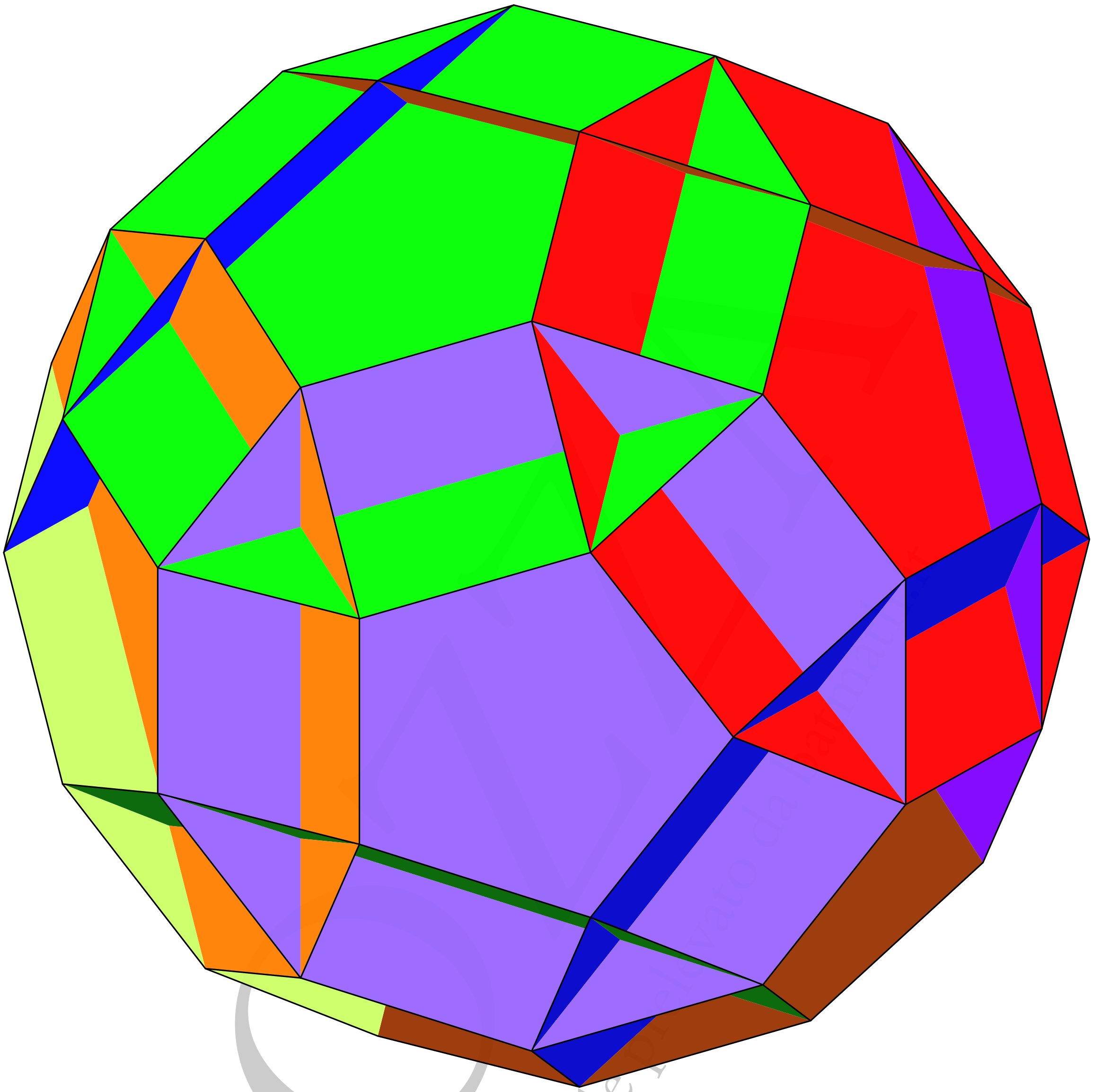


Figura 3.32: *U33: evidenziazione dei decagoni intersecantesi del piccolo dodecicosidodecaedro*

3.2.16 U36: dodecadodecaedro

Il (grande) *dodecadodecaedro* è un poliedro con 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato (e questo è il motivo del nome, "dodeca-dodeca"), 60 spigoli e 30 vertici, che sono gli stessi di quelli dell'icosidodecaedro. Condivide vertici e spigoli con il piccolo dodecaemicosaedro (3.2.40) e con il grande dodecaemicosaedro (3.2.43). Poliedro scoperto da Edmund Hess nel 1878 e successivamente descritto anche da Pitsch e da Badoureau nel 1881.

La figura3.34 evidenzia i sei pentagoni regolari "anteriori" utilizzati per costruire il dodecadodecaedro. Per maggior chiarezza sono evidenziati anche i perimetri dei pentagoni stellati.

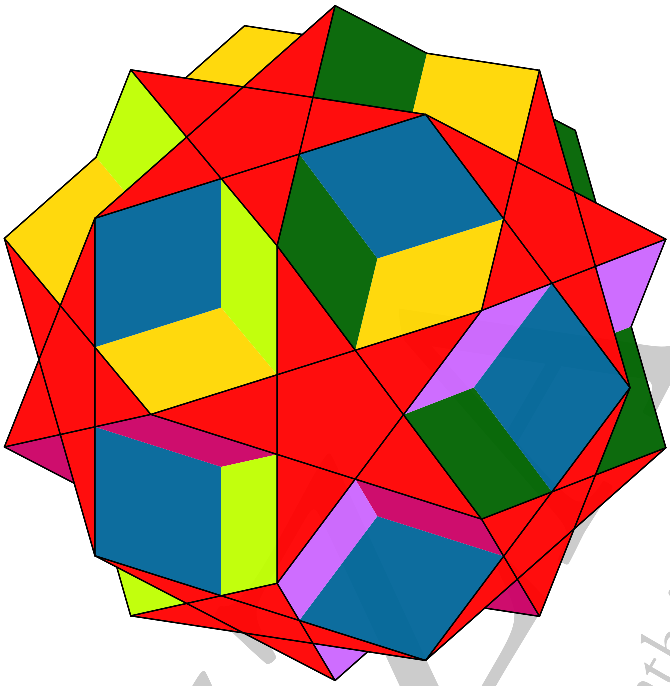


Figura 3.33: *U36: dodecadodecaedro*

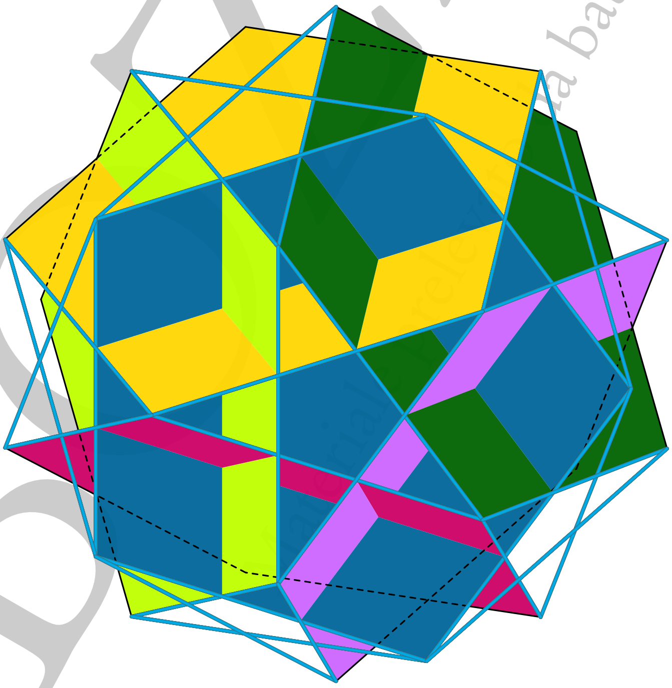


Figura 3.34: *U36 evidenziazione di cinque pentagoni regolari del dodecadodecaedro*

3.2.17 U37: grande dodecaedro troncato

Il *grande dodecaedro troncato* è un poliedro con 12 facce a forma di pentagono stellato e dodici facce decagonali, 90 spigoli e 60 vertici. Condivide i vertici con il grande dodecicosidodecaedro (3.2.39), con il grande rombicosidodecaedro (3.2.45) e con il grande rombidodecaedro (3.2.51). Si ottiene come troncatura ai vertici del grande dodecaedro: i pentagoni stellati sono in realtà le figure al vertice del grande dodecaedro. La figura 3.36 evidenzia i sei decagoni "anteriori" utilizzati per costruire il poliedro in esame. Per maggior chiarezza sono evidenziati anche i perimetri dei pentagoni stellati. Poliedro scoperto da Pitsch.

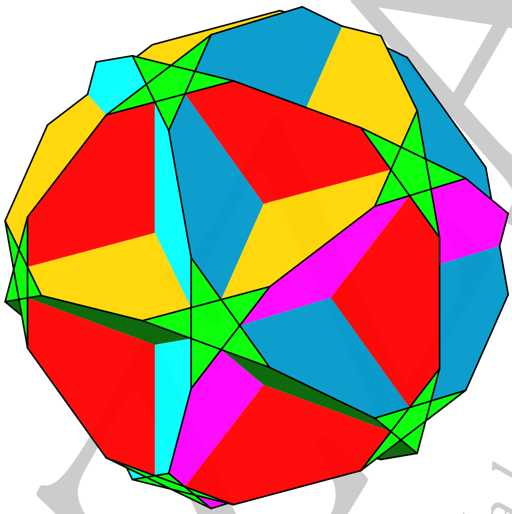


Figura 3.35: *U37: grande dodecaedro troncato*

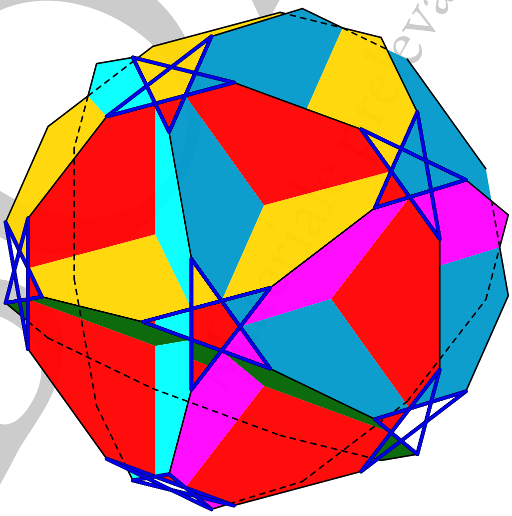


Figura 3.36: *U37: evidnziazione di sei decagoni intersecantesi del grande dodecaedro troncato*

3.2.18 U38: rombidodecadodecaedro

Il *rombidodecadodecaedro* è un poliedro con 30 facce quadrate (da cui “rombi”), 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui “dodecadodeca”), 120 spigoli e 60 vertici. Condivide vertici e spigoli con l’icosidodecadodecaedro (3.2.24) e con il rombicosadodecaedro (3.2.34). Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

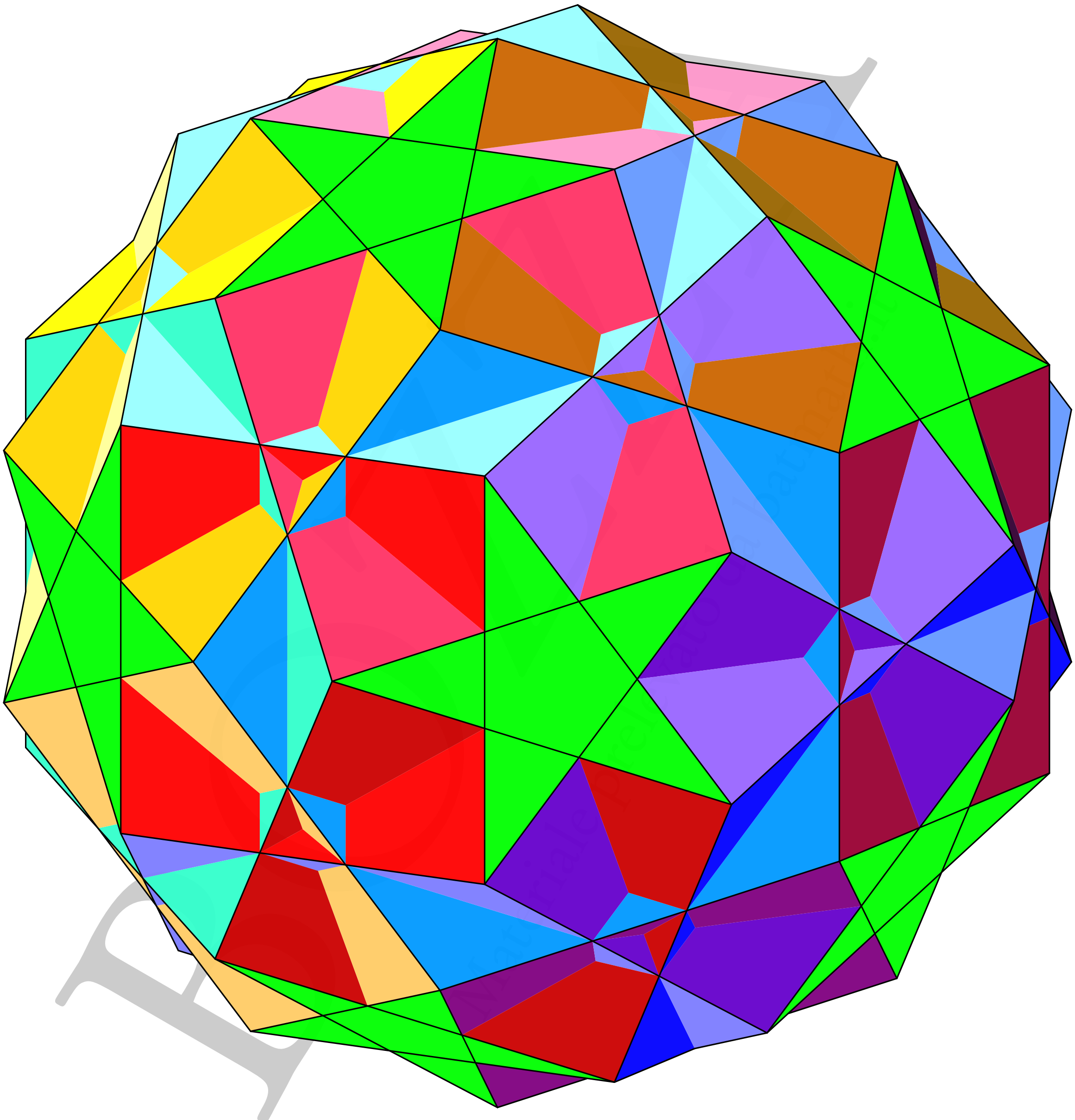


Figura 3.37: *U38: rombidodecadodecaedro*

La figura 3.38 evidenzia cinque quadrati (circondanti un pentagono stellato) e un pentagono regolare interescantesi utilizzati per costruire il rombidodecadodecaedro. Per maggiore chiarezza sono anche evidenziati i perimetri dei pentagoni stellati.

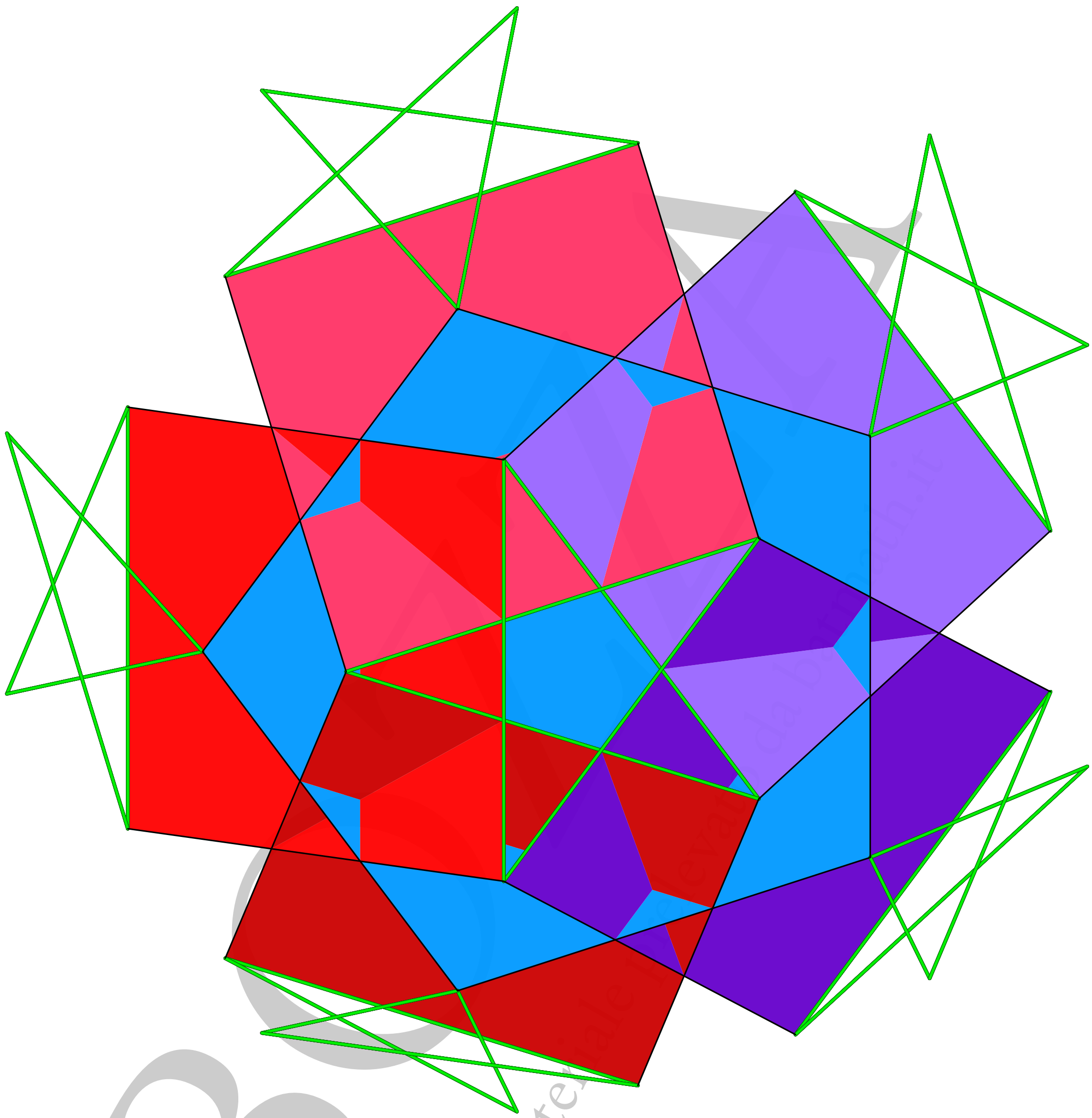


Figura 3.38: *U38: evidenziazione di cinque quadrati e un pentagono intersecantesi del rombidodecadodecaedro*

3.2.19 U39: piccolo rombidodecaedro

Il *piccolo rombidodecaedro* è un poliedro con 30 facce quadrate (da cui "rombi") e 12 facce decagonali (da cui "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi di quelli del rombicosidodecaedro. Condivide vertici e spigoli con il piccolo dodecicosidodecaedro, vedi 3.2.15. Poliedro scoperto da Badoureau.

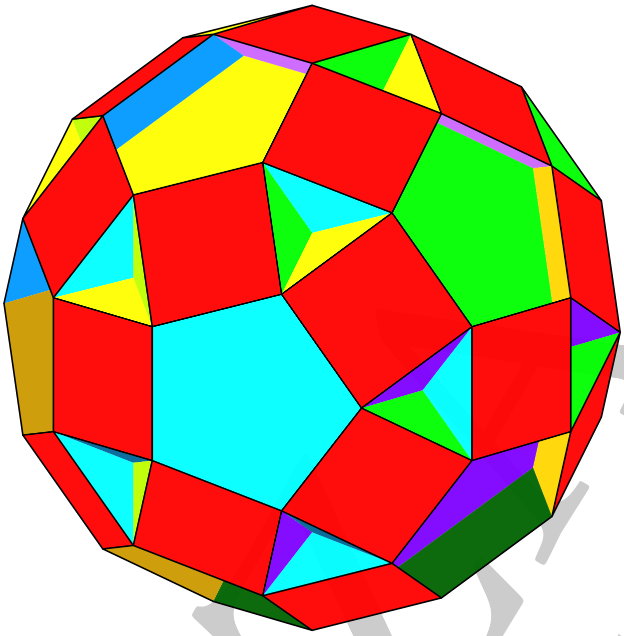


Figura 3.39: *U39: piccolo rombidodecaedro*

La figura 3.40 mostra i dieci decagoni intersecantesi utilizzati per costruire il piccolo rombidodecaedro. Come si può notare essi individuano completamente la struttura del poliedro in esame.

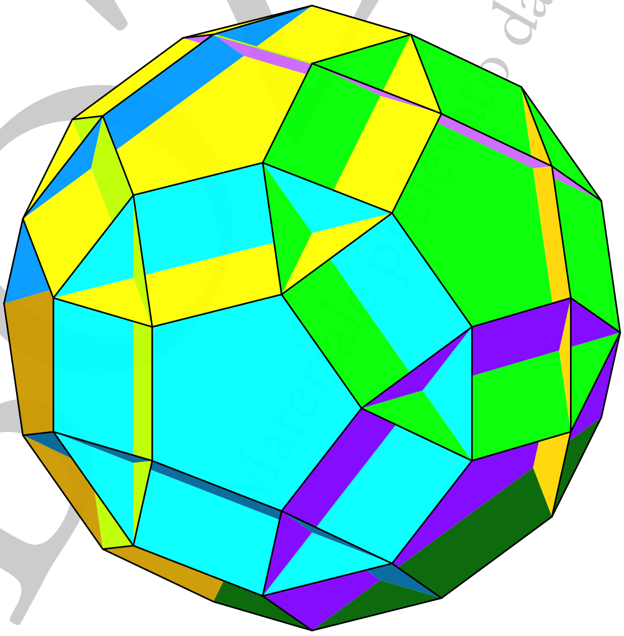


Figura 3.40: *U39: evidenziazione dei decagoni intersecantesi del piccolo rombidodecaedro*

3.2.20 U40: dodecadodecaedro camuso

Il *dodecadodecaedro camuso* è un poliedro con 60 facce triangolari, 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato, 150 spigoli e 60 vertici.

Il nome è legato al fatto che si tratta di un "addolcimento" del dodecadodecaedro

Poliedro scoperto da Coxeter e Miller nel 1932.

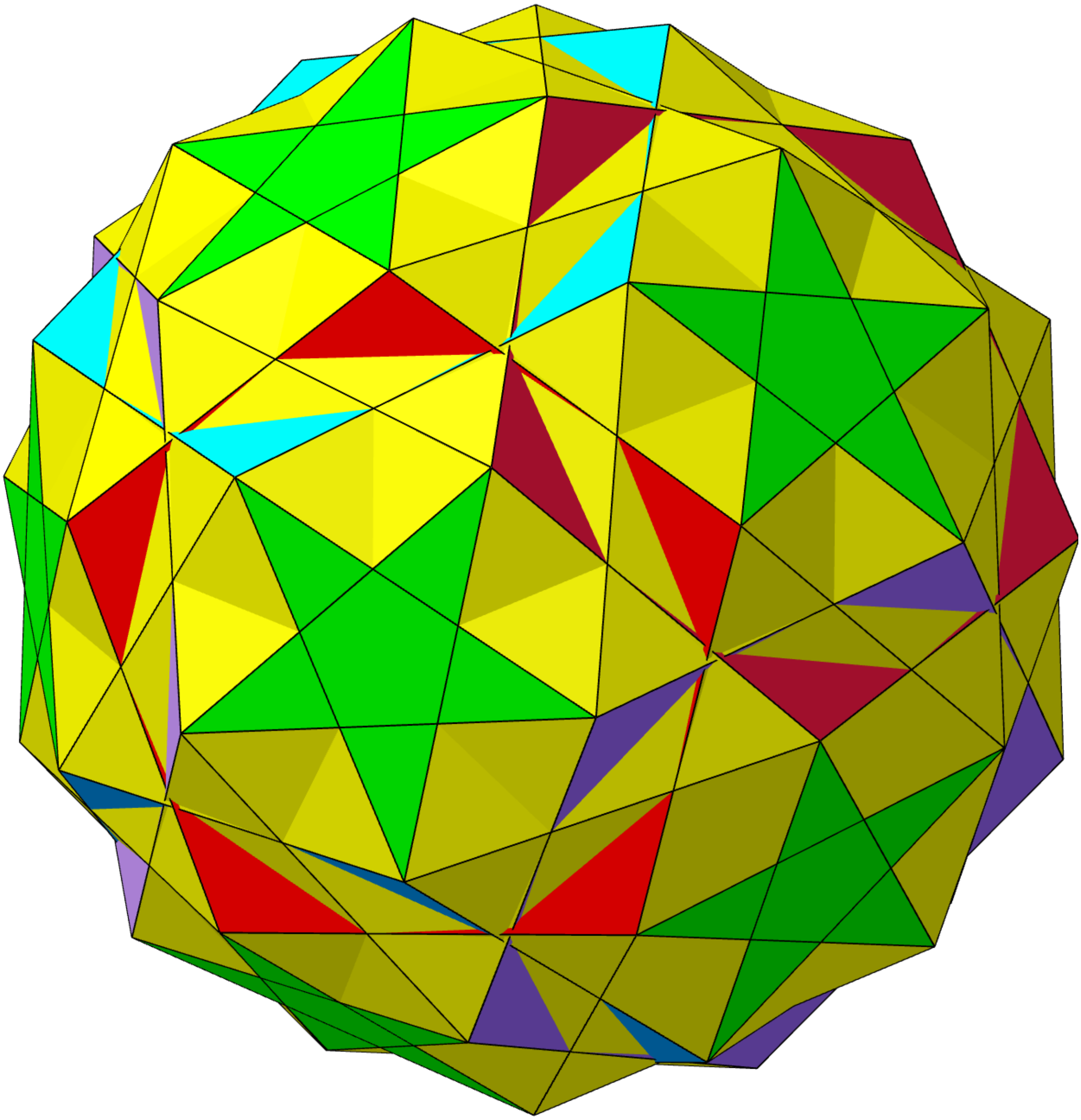


Figura 3.41: *U40: dodecadodecaedro camuso*

Le figure 3.42 e 3.42 evidenziano la struttura, decisamente complessa, di questo poliedro.

In particolare la figura 3.42 evidenzia il fatto che i pentagoni regolari che compongono il dodecadodecaedro camuso congiungono vertici di 5 diversi pentagoni stellati.

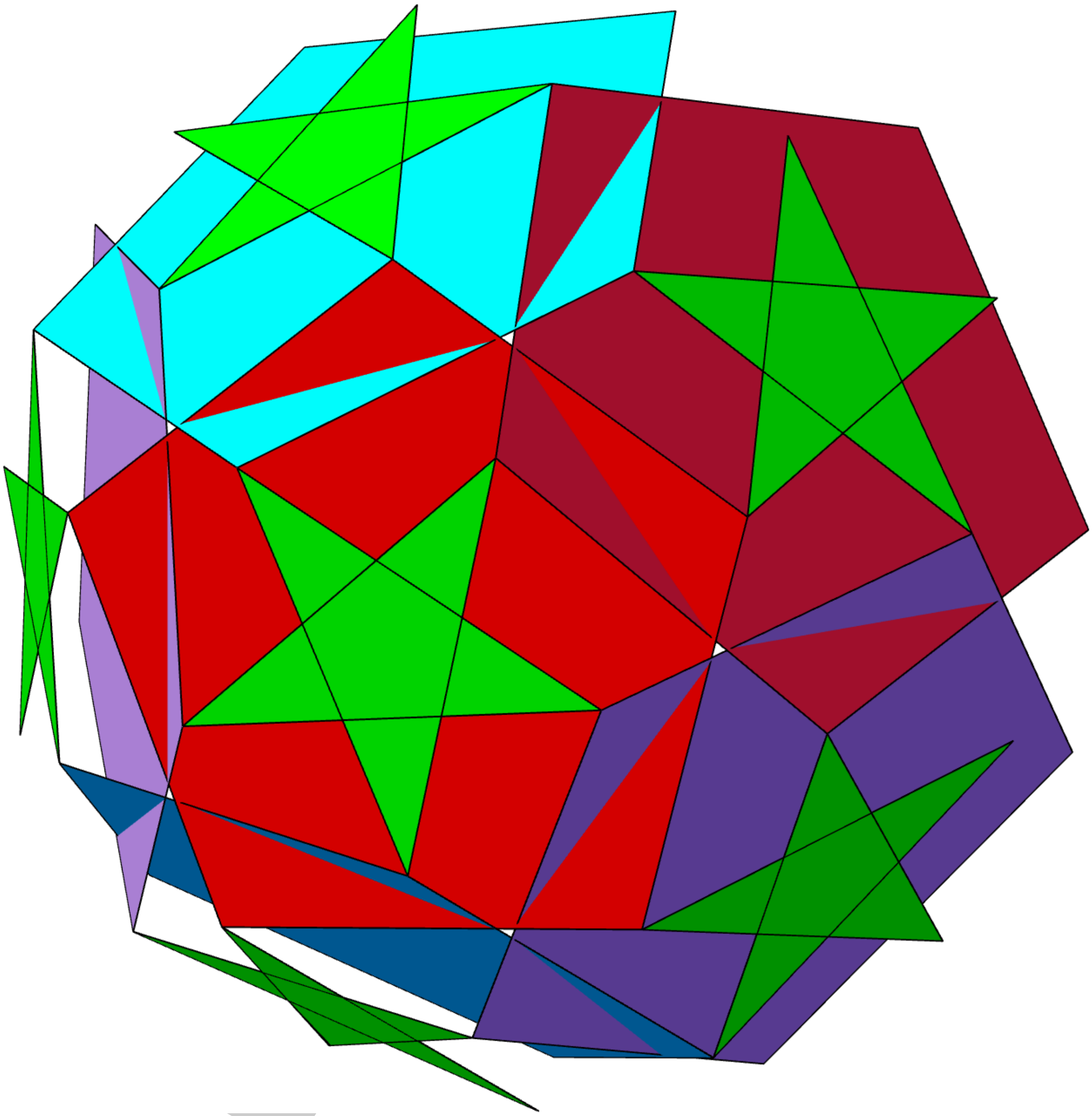


Figura 3.42: *U40: schema costruttivo del dodecadodecaedro camuso - 1*

La figura 3.43 evidenzia invece il fatto che i triangoli di questo poliedro congiungono un vertice di un pentagono stellato con un lato di un altro pentagono stellato.

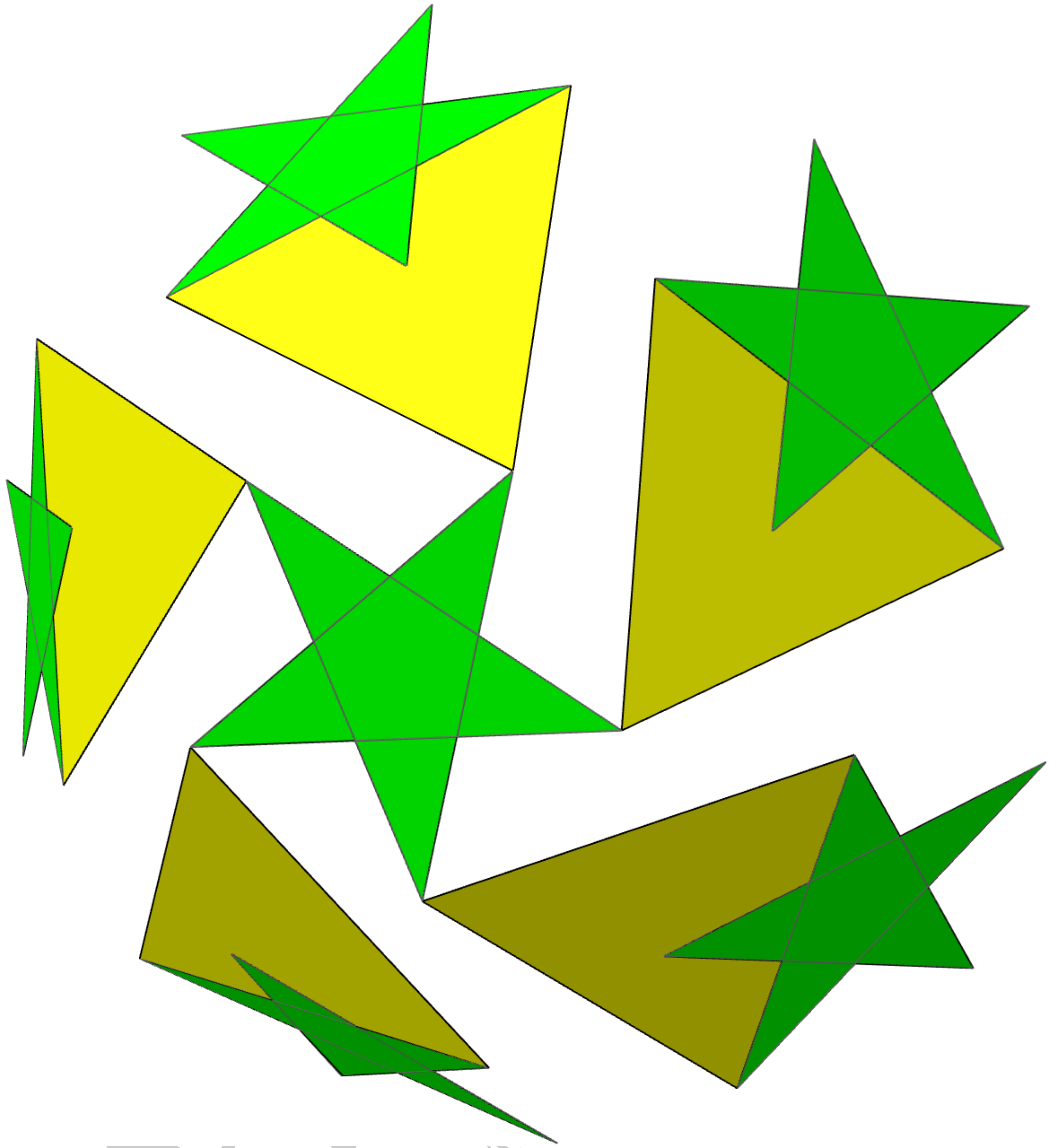


Figura 3.43: *U40: schema costruttivo del dodecadodecaedro camuso - 2*

3.2.21 U41: dodecadodecaedro ditrigonale

Il *dodecadodecaedro ditrigonale* è un poliedro con 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodecadodeca"), 60 spigoli e 20 vertici, che sono quelli del dodecaedro. Ditrigonale indica che in ogni vertice arrivano due gruppi di tre facce dello stesso tipo. Stessi vertici e spigoli del piccolo icosaedro ditrigonale (3.2.12) e del grande icosaedro ditrigonale (3.2.27). Poliedro scoperto da Badoureau.

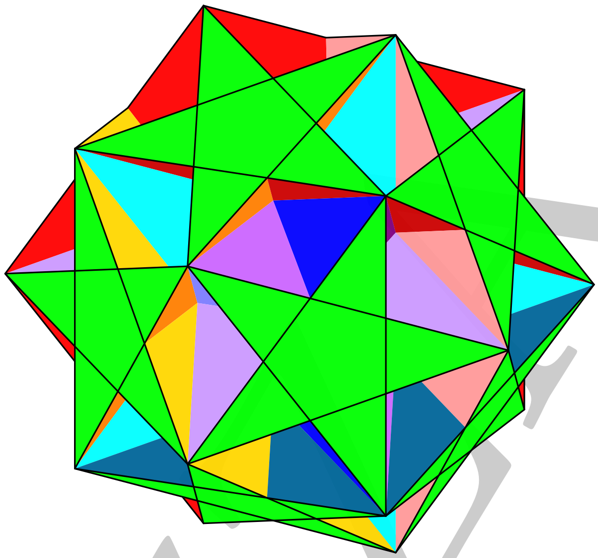


Figura 3.44: *U41: dodecadodecaedro ditrigonale*

La figura 3.45 mostra sei dei pentagoni regolari intersecantesi utilizzati per costruire il dodecadodecaedro ditrigonale. Per maggiore chiarezza sono evidenziati anche i perimetri dei pentagoni stellati. Si confronti questa figura con la 3.24.

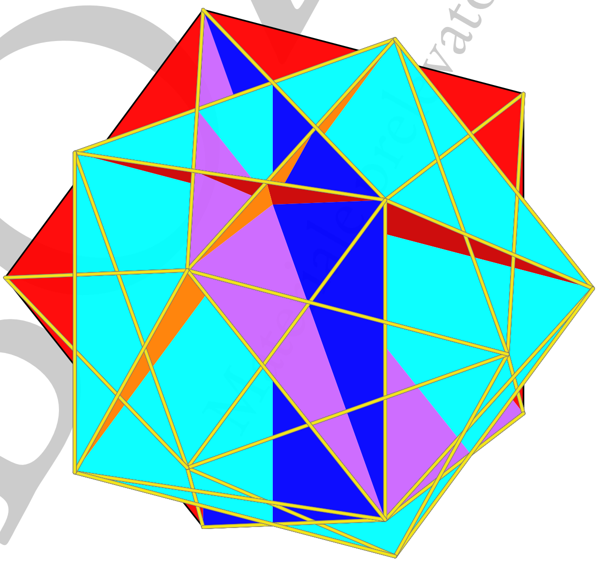


Figura 3.45: *U41: evidenziazione di sei pentagoni intersecantesi del dodecadodecaedro ditrigonale*

3.2.22 U42: grande dodecicosidodecaedro ditrigonale

Il *grande dodecicosidodecaedro ditrigonale* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui "icosi"), 12 facce pentagonali (da cui "dodec") e 12 facce a forma di decagono stellato (da cui "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi di quelli del dodecaedro troncato. Non è chiaro il perché dell'aggettivo "ditrigonale" in questo poliedro. Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

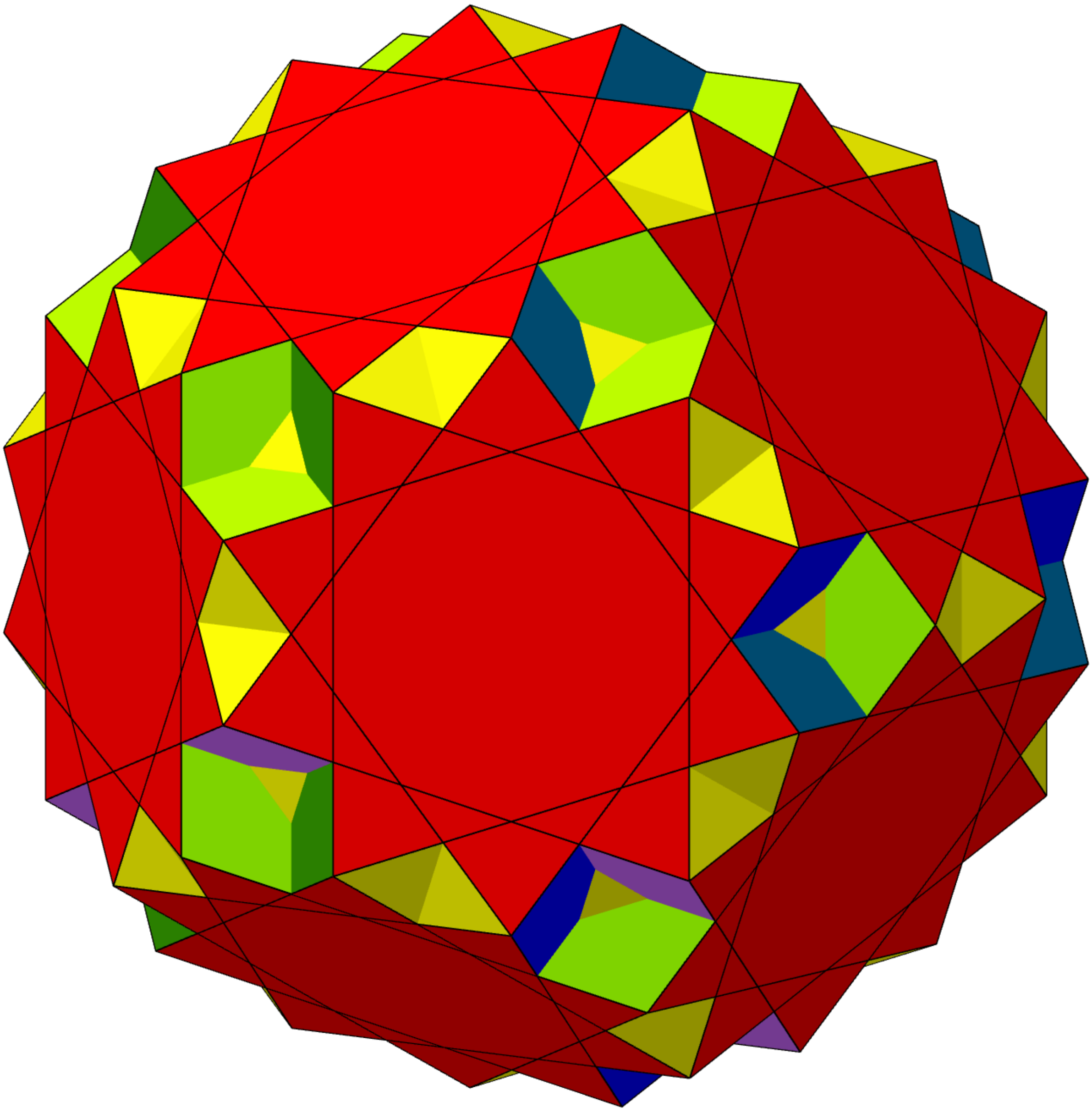


Figura 3.46: *U42: grande dodecicosidodecaedro ditrigonale*

La figura 3.47 evidenzia le facce pentagonali regolari del poliedro: i vertici dei pentagoni sono anche vertici dei decagoni stellati, il cui perimetro è evidenziato nella stessa figura.

Questo poliedro condivide vertici e spigoli con il grande icosicosidodecaedro (3.2.28) e con il grande dodecicosaedro (3.2.41).

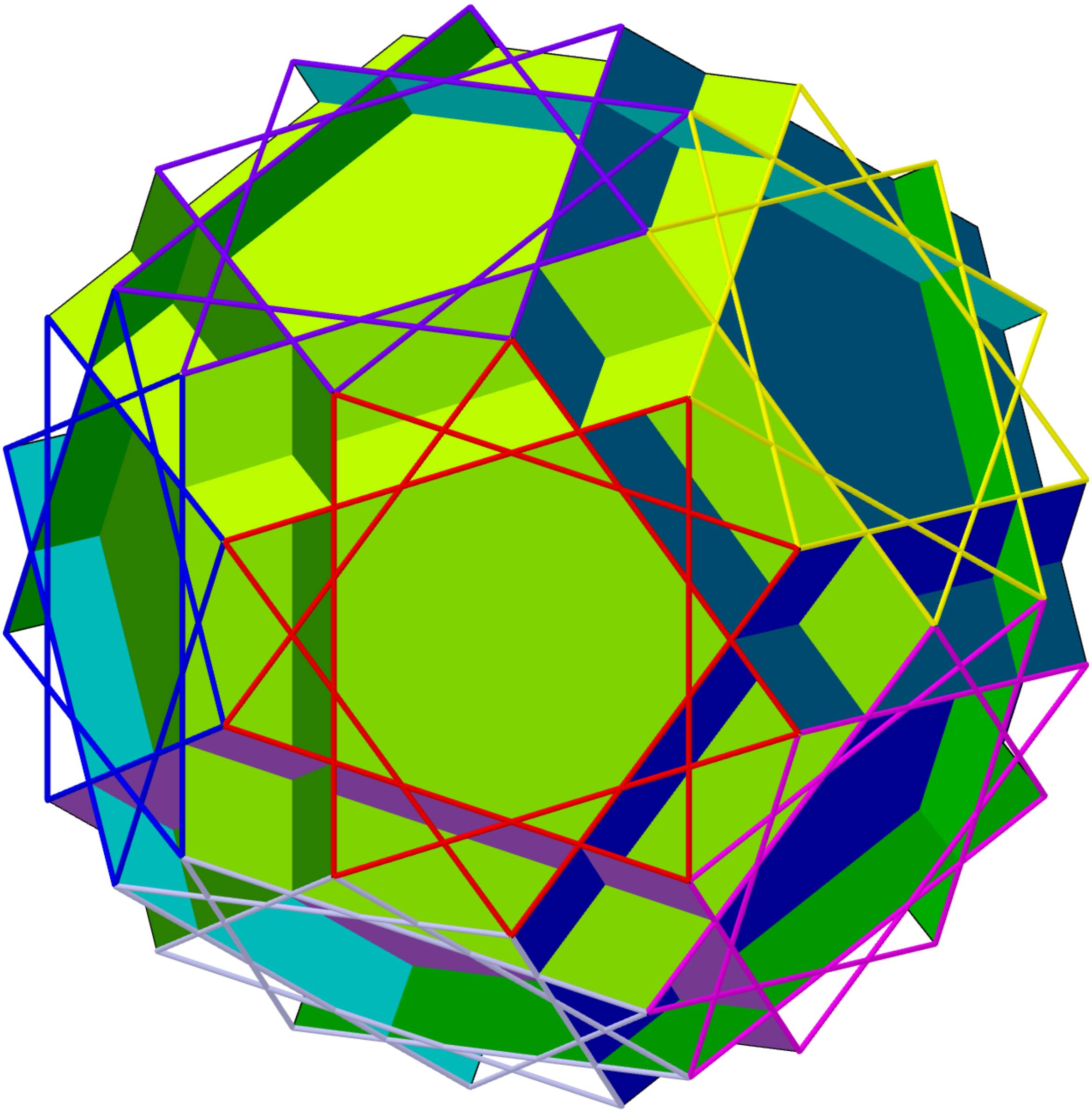


Figura 3.47: *U42: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro ditrigonale - 1*

La figura 3.48 mostra come sono costruiti i triangoli del grande dodecicosidodecaedro ditrigonale, utilizzando i lati di tre decagoni stellati opportuni, aventi a due a due un vertice in comune.

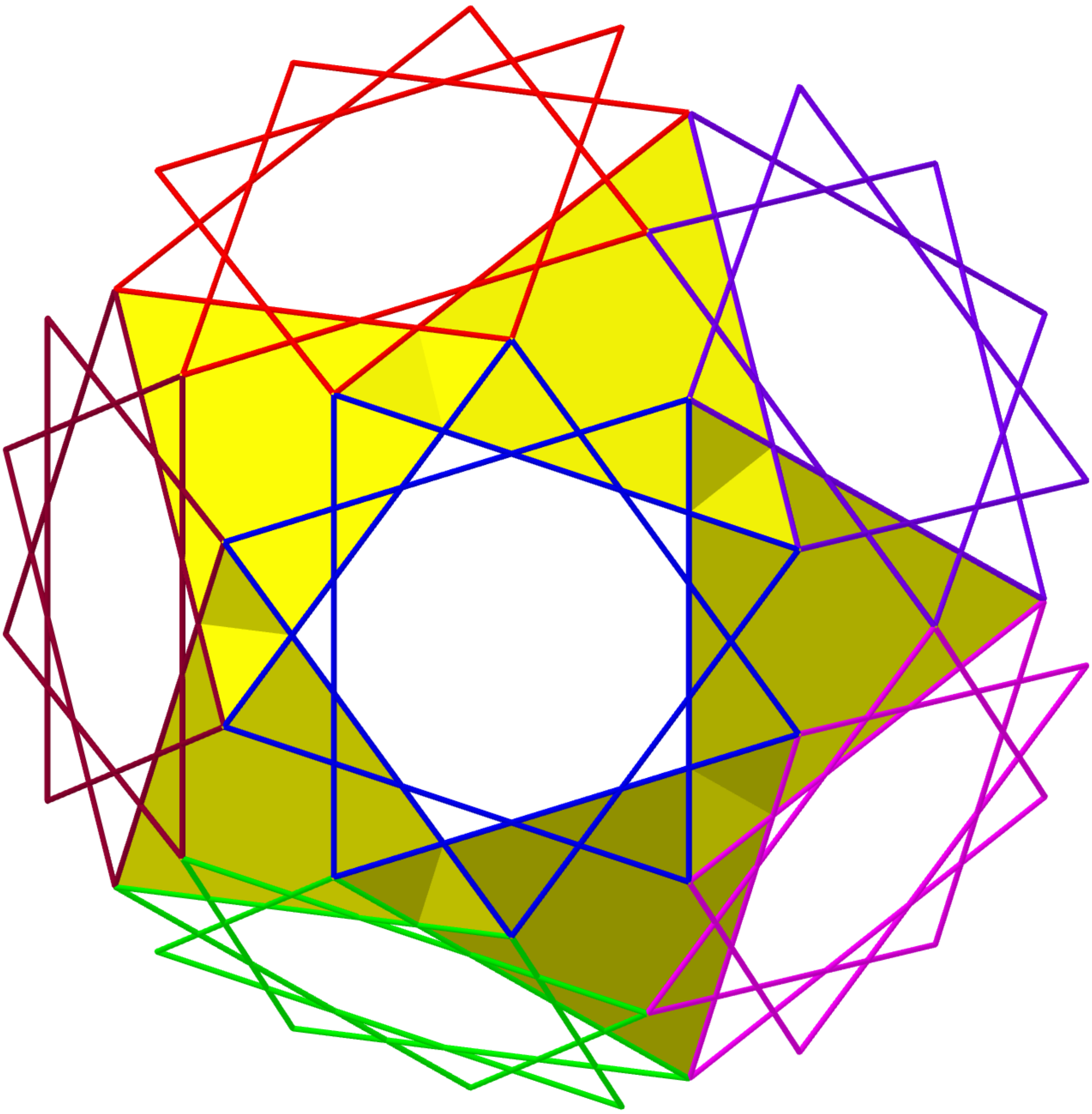


Figura 3.48: *U42: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro ditrigonale - 2*

3.2.23 U43: piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale

Il *piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale* è un poliedro con 20 facce triangolari(da cui "icosi"), 12 facce decagonali (da cui "dodec") e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi di quelli di un pseudo rombicosidodecaedro. Non è chiaro il perché dell'aggettivo "ditrigonale" in questo poliedro, come già nel grande dodecicosidodecaedro ditrigonale.

Condivide vertici e spigoli con il piccolo icosicosidodecaedro (3.2.13) e con il piccolo dodecicosaedro (3.2.30).

Poliedro scoperto da Coxeter e Miller nel 1932.

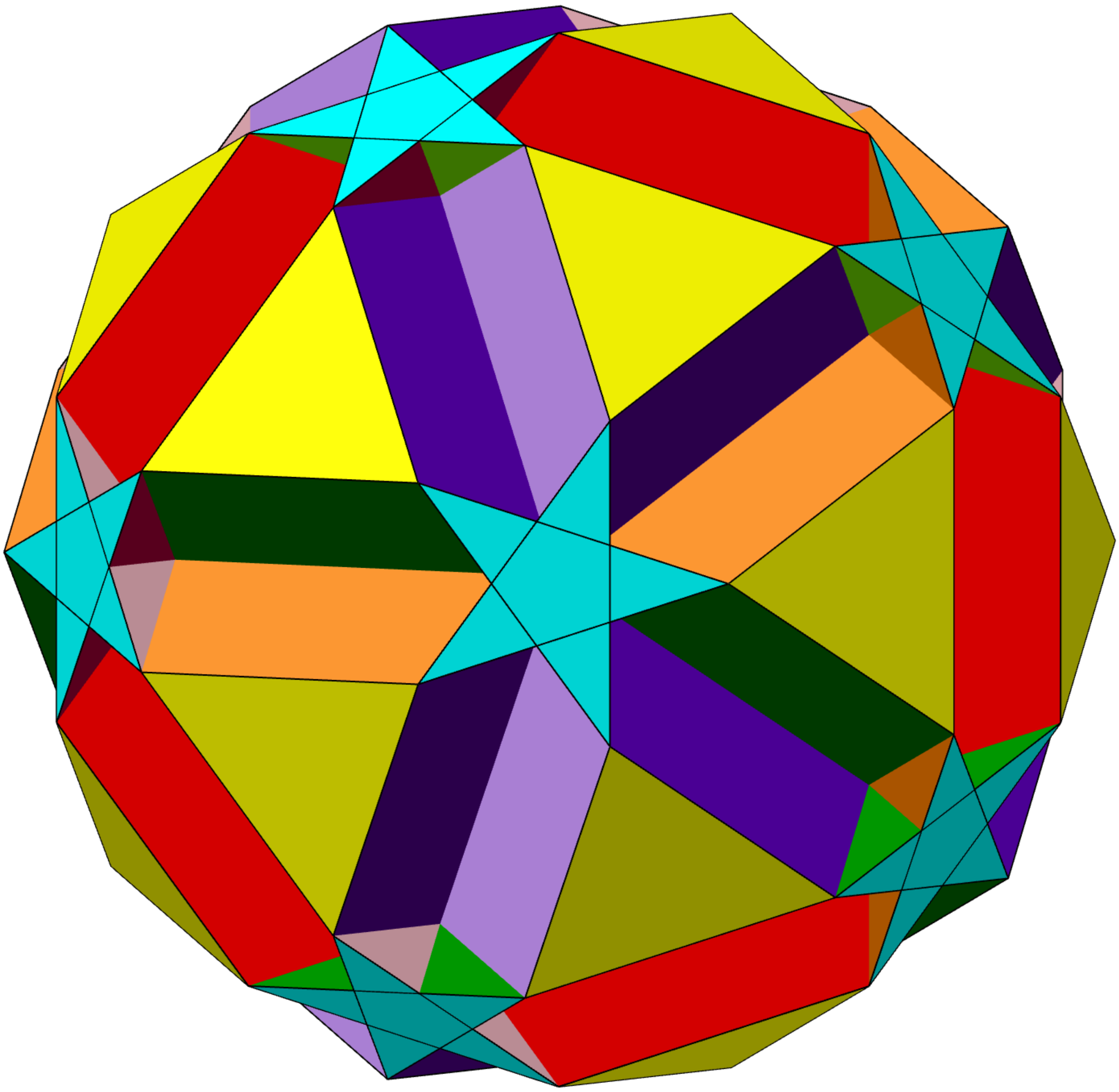


Figura 3.49: *U43: piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale*

La figura 3.50 mostra i decagoni utilizzati per costruire il poliedro in esame e i perimetri dei pentagoni stellati.

Esaminando il decagono in rosso, con il bordo evidenziato in verde chiaro, si possono capire le relazioni tra i pentagoni stellati e i decagoni: i lati dei decagoni sono, alternativamente, lati di pentagoni stellati.

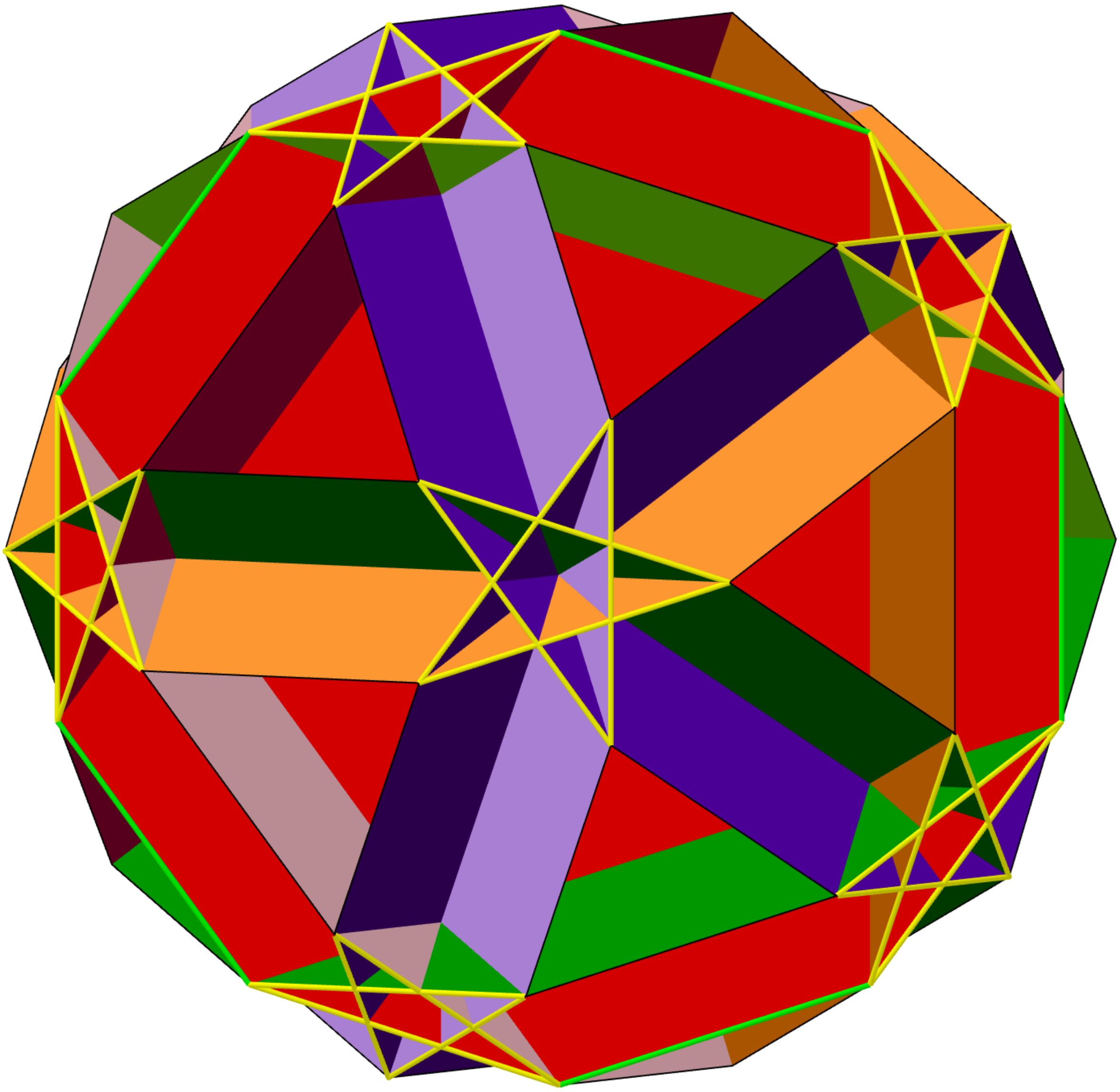


Figura 3.50: *U43: schema costruttivo del piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale - 1*

La figura 3.51 mostra invece le relazioni tra i pentagoni stellati e i triangoli usati per costruire il piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale: i triangoli hanno i loro vertici su tre pentagoni stellati vicini. In ogni caso questo fatto è rilevabile anche direttamente dalle figure 3.49 e 3.50.

La figura 3.52 mostra il pseudo rombicosidodecaedro con gli stessi vertici del piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale: “psuedo” rombicosidodecaedro perché i quadrati sono sostituiti da rettangoli. Lo stesso vale per il piccolo icosicosidodecaedro (3.2.13) e il piccolo dodecicosaedro (3.2.30).

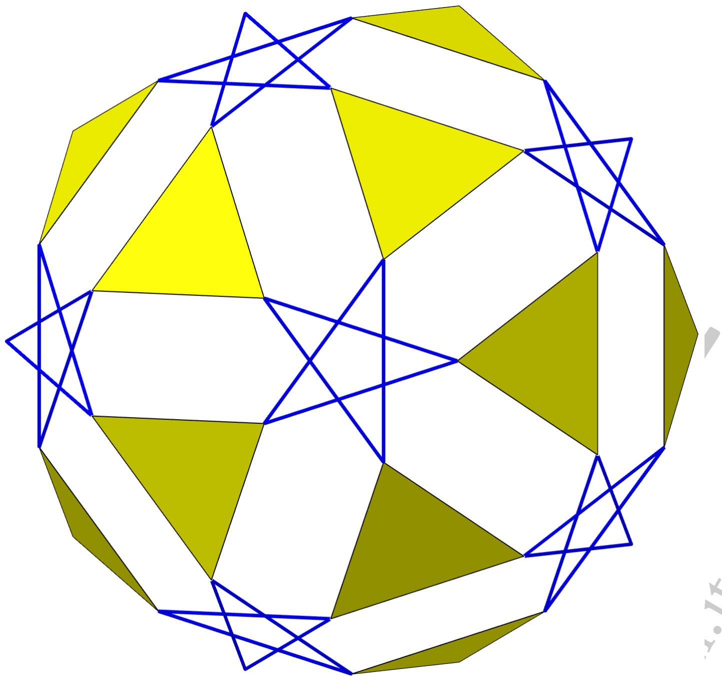


Figura 3.51: *U43: schema costruttivo del piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale - 2*

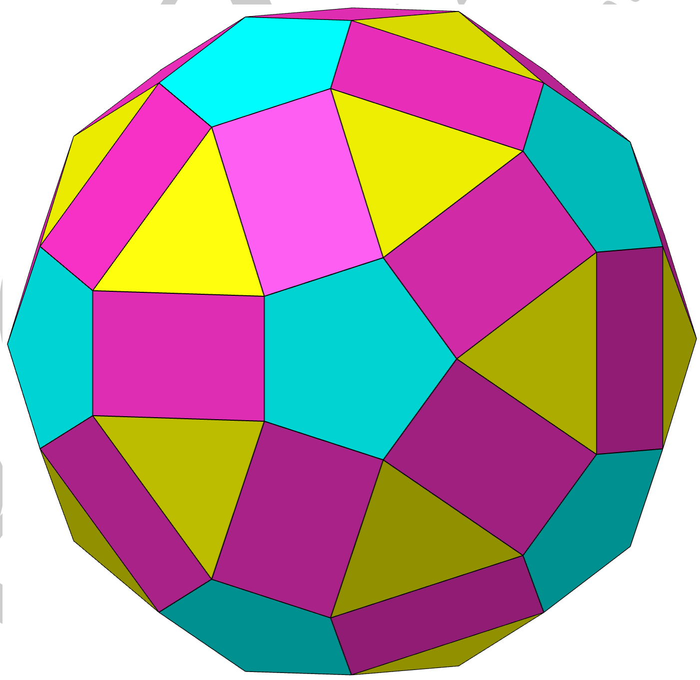


Figura 3.52: *U43: il pseudo rombicosidodecaedro con gli stessi vertici del piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale*

3.2.24 U44: icosidodecadodecaedro

L'*icosidodecadodecaedro* è un poliedro con 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodecadodeca") e 20 facce esagonali (da cui "icosi"),120 spigoli e 60 vertici. Condivide vertici e spigoli con il rombidodecadodecaedro (3.2.18) e con il rombicosaedro (3.2.34).

Poliedro scoperto da Badoureau.

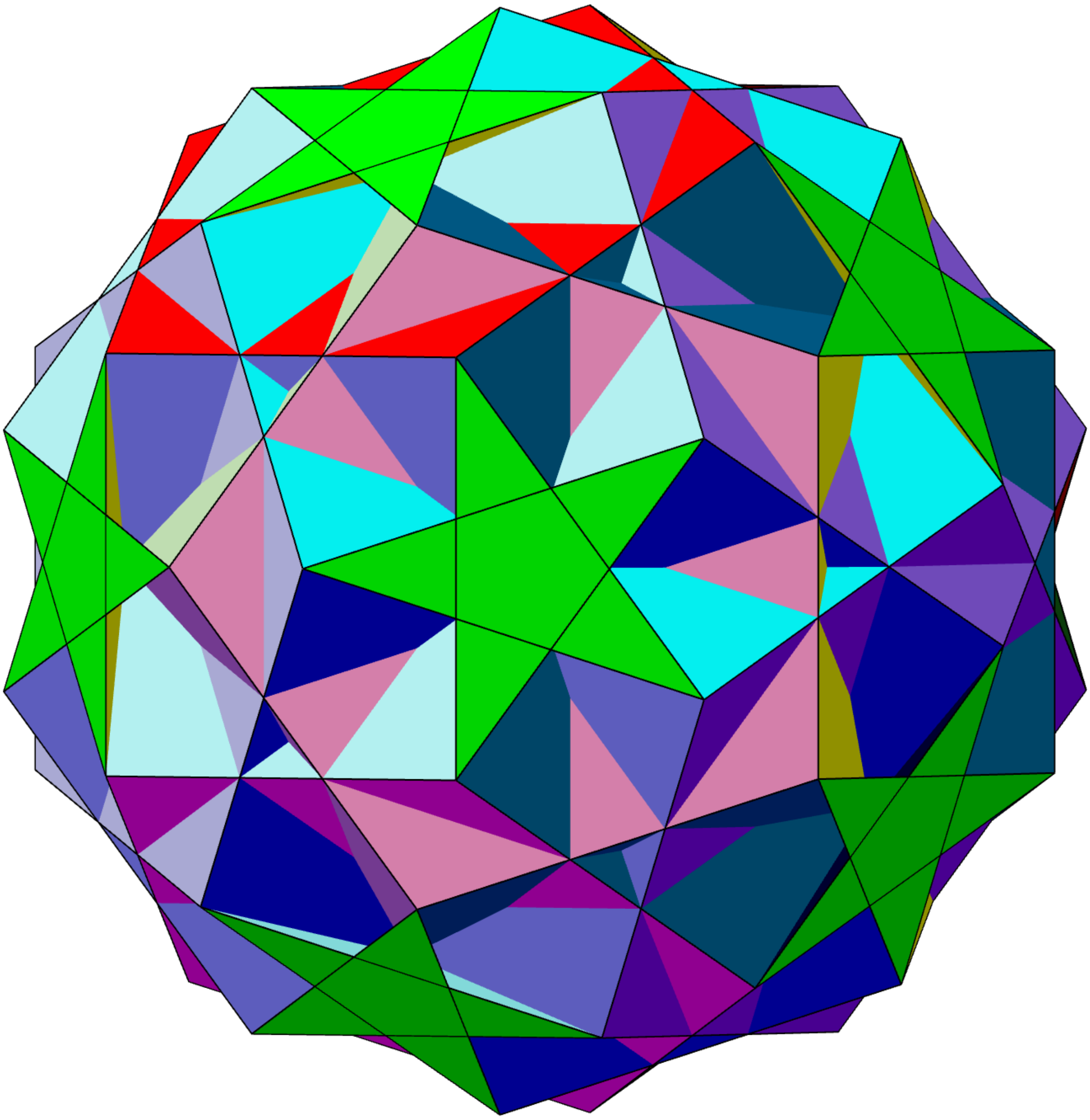


Figura 3.53: *U44: icosidodecadodecaedro*

La figura 3.54 mostra le relazioni tra i pentagoni stellati e gli esagoni utilizzati per costruire il poliedro in esame: gli esagoni hanno i vertici, a due a due, sui vertici di pentagoni stellati vicini, e gli spigoli alternativamente coincidenti con quelli degli stessi pentagoni stellati.

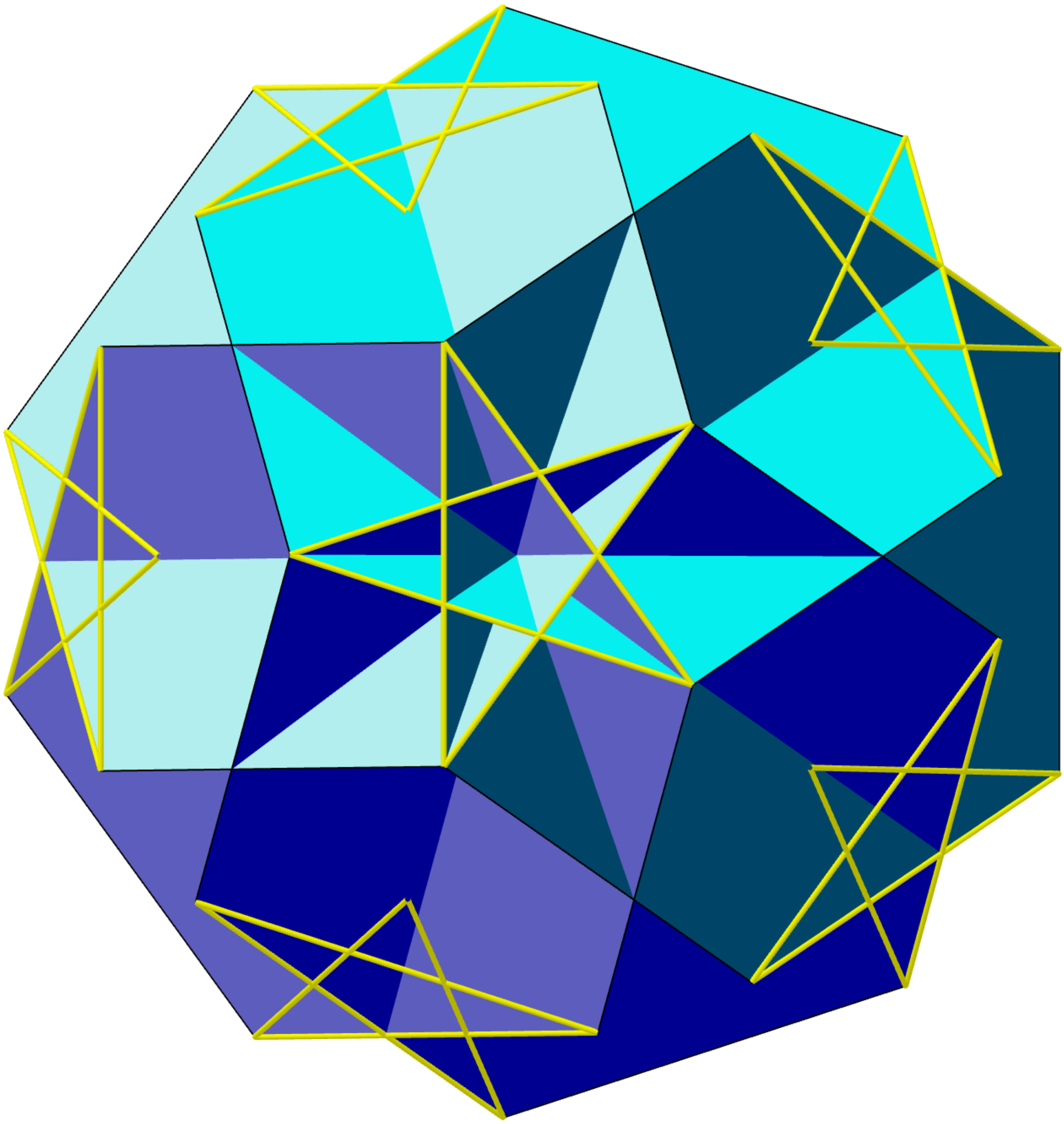


Figura 3.54: *U44: schema costruttivo dell'icosidodecadodecaedro - 1*

La figura 3.55 mostra invece le relazioni tra i pentagoni stellati e i pentagoni regolari utilizzati per costruire l'icosidodecadodecaedro: i pentagoni regolari hanno i vertici su cinque pentagoni stellati circondanti un sesto pentagramma.

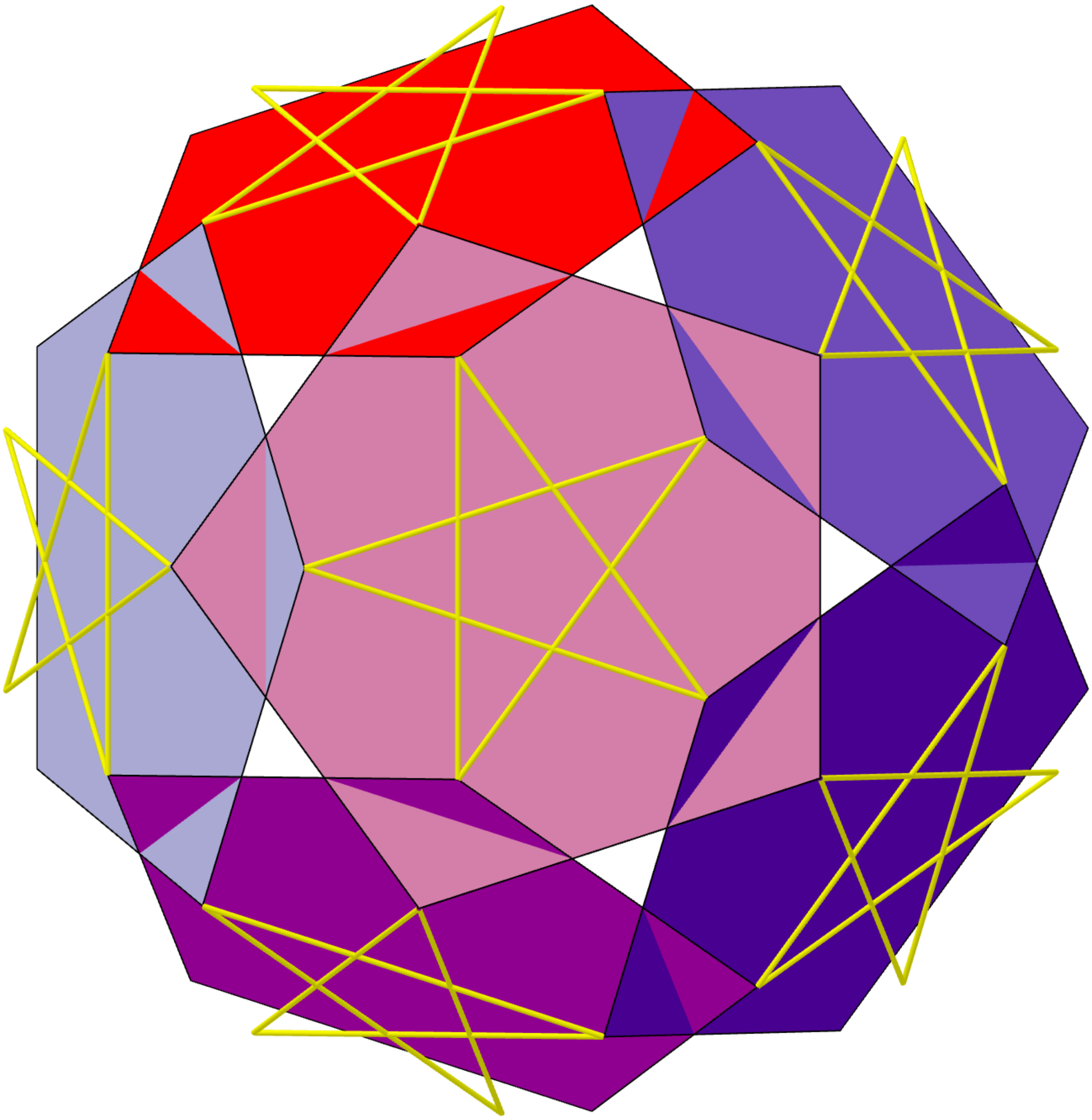


Figura 3.55: *U44: schema costruttivo dell'icosidodecadodecaedro - 2*

3.2.25 U45: dodecadodecaedro icositroncato

Il *dodecadodecaedro icositroncato* è un poliedro con 20 facce esagonali, 12 facce decagonali e 12 facce a forma di decagono stellato (da cui "dodecadodeca"), 180 spigoli e 120 vertici, che sono quelli di un pseudo icosidodecaedro troncato. L'appellativo "icositroncato" si riferisce probabilmente alle 20 facce esagonali e al fatto che ha gli stessi vertici di un pseudo icosidodecaedro troncato. Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

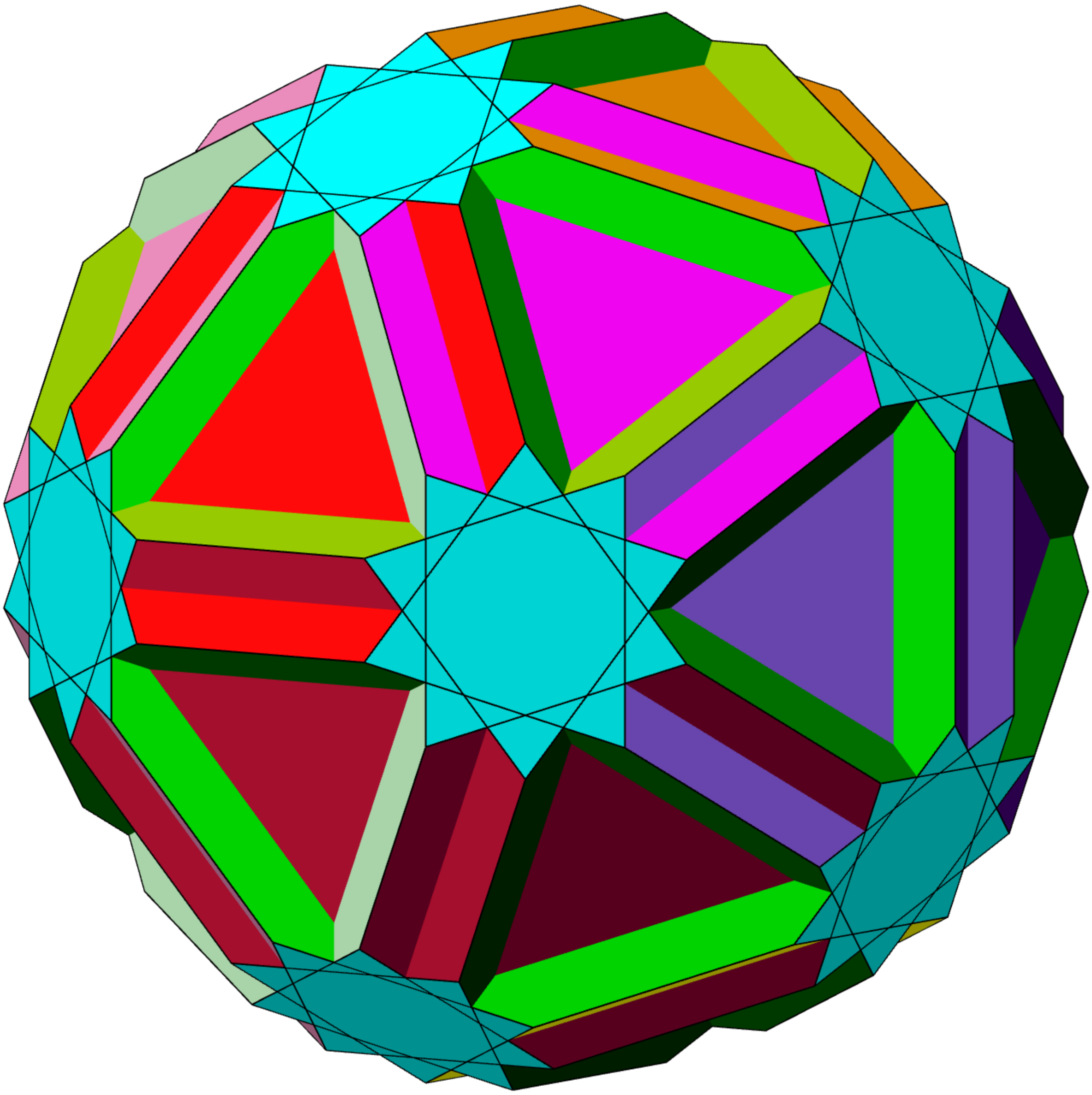


Figura 3.56: *U45: dodecadodecaedro icositroncato*

La figura 3.57 mostra, a sinistra, la relazione tra i decagoni stellati e i decagoni regolari che hanno, alternativamente, gli spigoli coincidenti con quelli di cinque decagoni stellati circondanti un decagono stellato centrale; a destra si evidenzia come sono costruiti gli esagoni regolari che hanno, alternativamente, gli spigoli coincidenti con quelli di tre decagoni stellati vicini.

La figura 3.58 mostra il pseudo icosidodecaedro troncato, involucro convesso del dodecadodecaedro icositroncato: mentre i decagoni sono regolari, i quadrati sono sostituiti da rettangoli e gli esagoni non sono regolari.

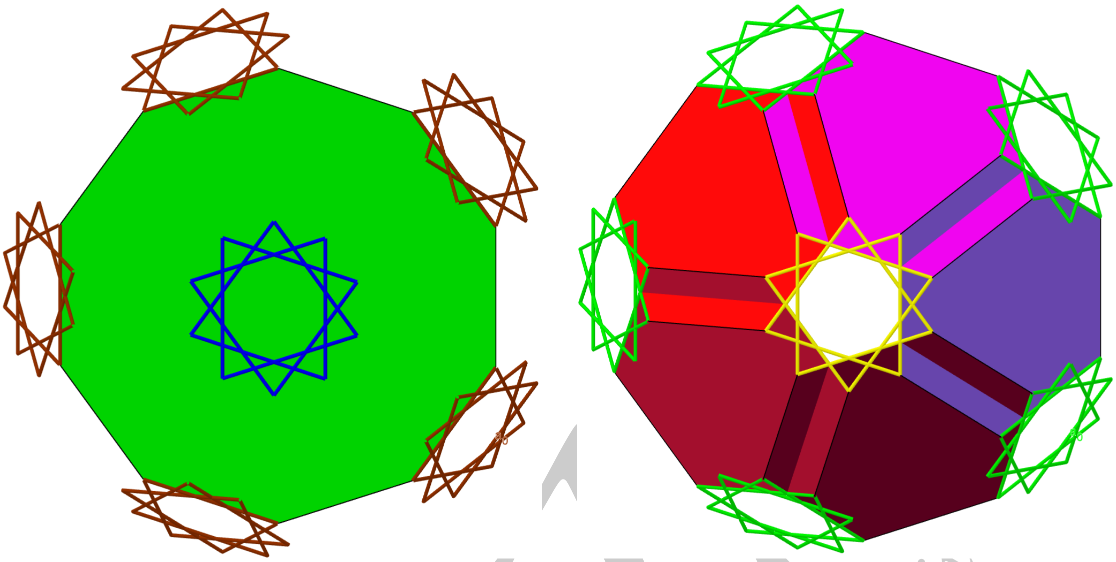


Figura 3.57: *U45: schema costruttivo del dodecadodecaedro icositroncato*

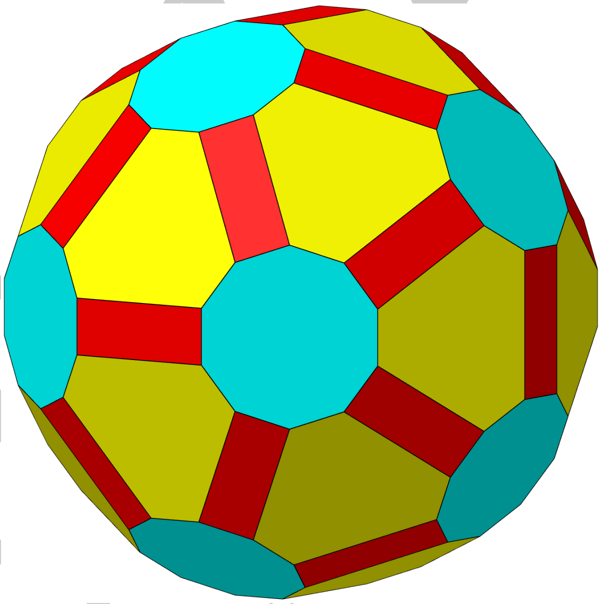


Figura 3.58: *U45: il pseudo icosidodecaedro troncato, involucro convesso del*

3.2.26 U46: icosidodecadodecaedro camuso

L'*icosidodecadodecaedro camuso* ha 80 facce triangolari, 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodecadodeca") mentre il prefisso "icosi" è probabilmente dovuto al fatto che si può considerare la forma addolcita (smussata) di U44 (3.2.24).

Poliedro scoperto da Coxeter e Miller nel 1932.

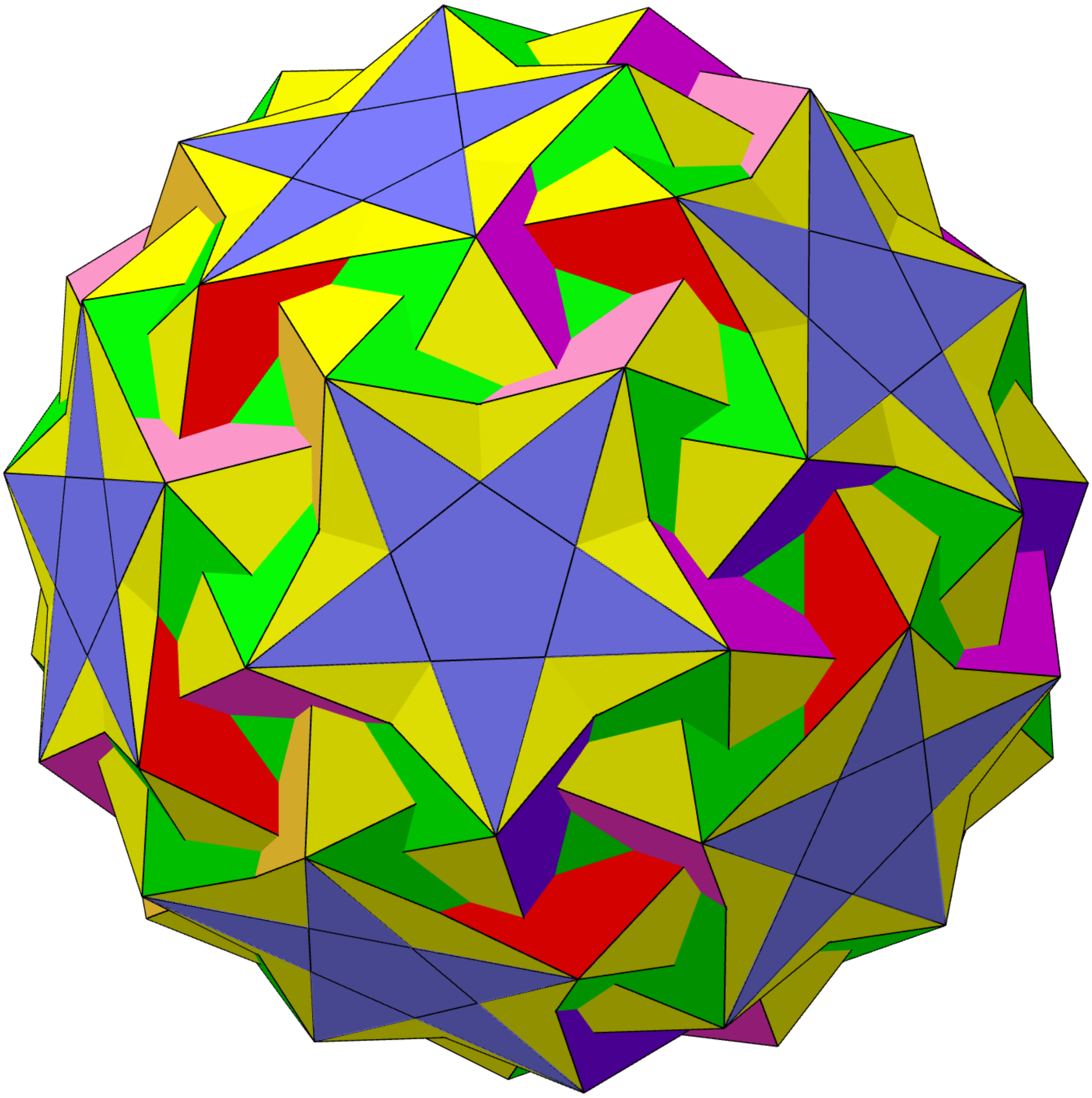


Figura 3.59: *U46: icosidodecadodecaedro camuso*

Questo poliedro, come tutti poliedri "camusi", ha una struttura decisamente complessa e la evidenziamo mediante tre diverse immagini.

La figura 3.60 mostra le relazioni tra i pentagoni stellati e i pentagoni regolari, che hanno i loro cinque vertici su cinque diversi pentagoni stellati. I 12 pentagoni stellati hanno il centro sui vertici di un icosaedro regolare (come succede sempre in casi simili) e il piano di ciascun pentagono stellato è parallelo a quello del pentagono regolare “sottostante”.

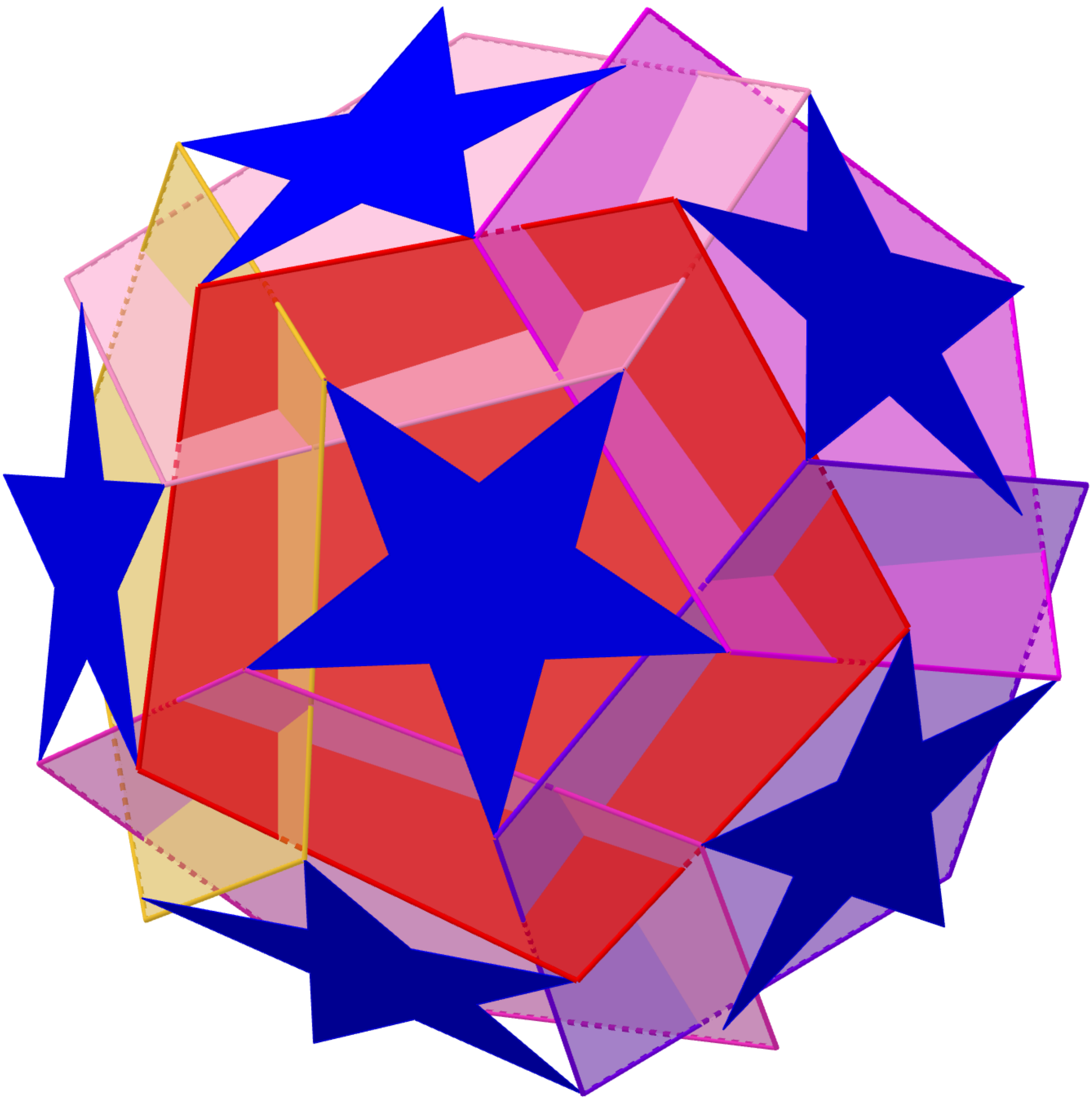


Figura 3.60: *U46: schema costruttivo dell'icosidodecadodecaedro camuso - 1*

Più delicata la struttura del gruppo dei triangoli equilateri. Essi possono essere divisi in due gruppi:, 20 congiungono i vertici di tre pentagoni stellati vicini, ma in maniera complessa (e sono colorati in verde nella figura 3.59), 60 congiungono un lato di un pentagono stellato a un vertici di un altro (e sono colorati in giallo nella figura 3.59).

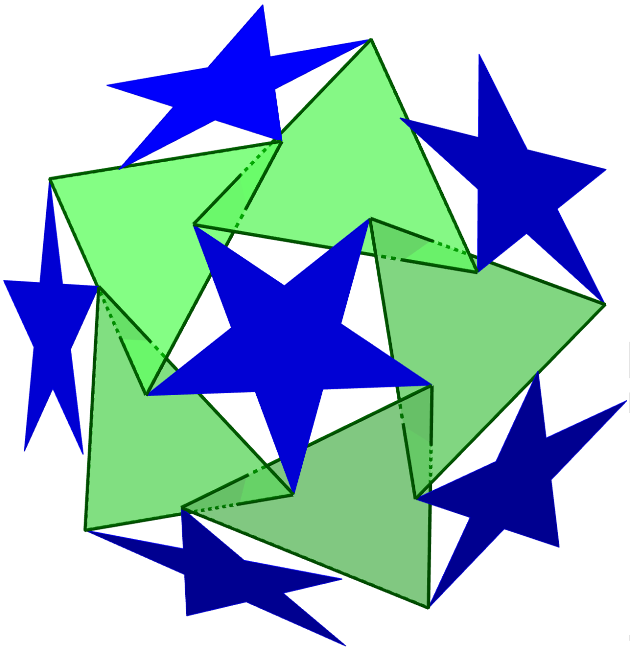


Figura 3.61: *U46: schema costruttivo dell'icosidodecadodecaedro camuso - 2*

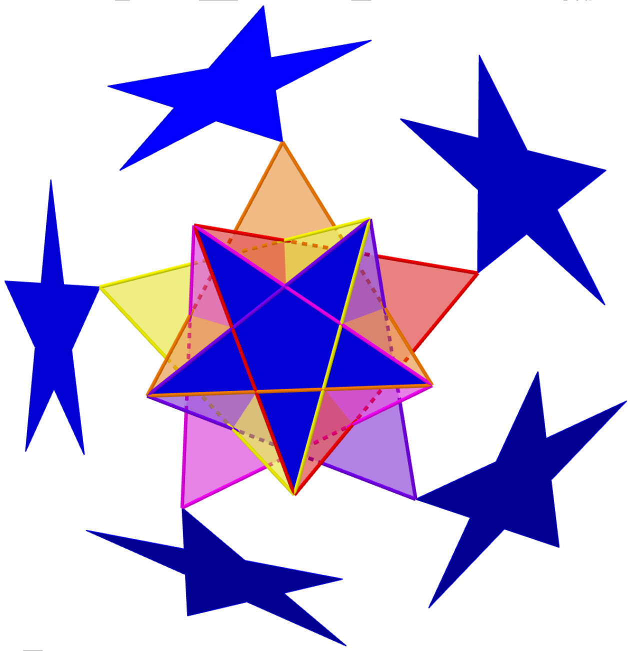


Figura 3.62: *U46: schema costruttivo dell'icosidodecadodecaedro camuso - 3*

3.2.27 U47: grande icosidodecaedro ditrigonale

Il *grande icosidodecaedro ditrigonale* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui "icosi") e 12 facce pentagonali (da cui "dodeca"), 60 spigoli e 20 vertici, che sono gli stessi di quelli del dodecaedro. Poliedro scoperto da Badoureau. Ha gli stessi vertici e spigoli del piccolo icosidodecaedro ditrigonale (3.2.12) e del dodecadodecaedro ditrigonale (3.2.21). L'appellativo ditrigonale indica, al solito, che su ogni vertice arrivano due gruppi di tre facce dello stesso tipo.

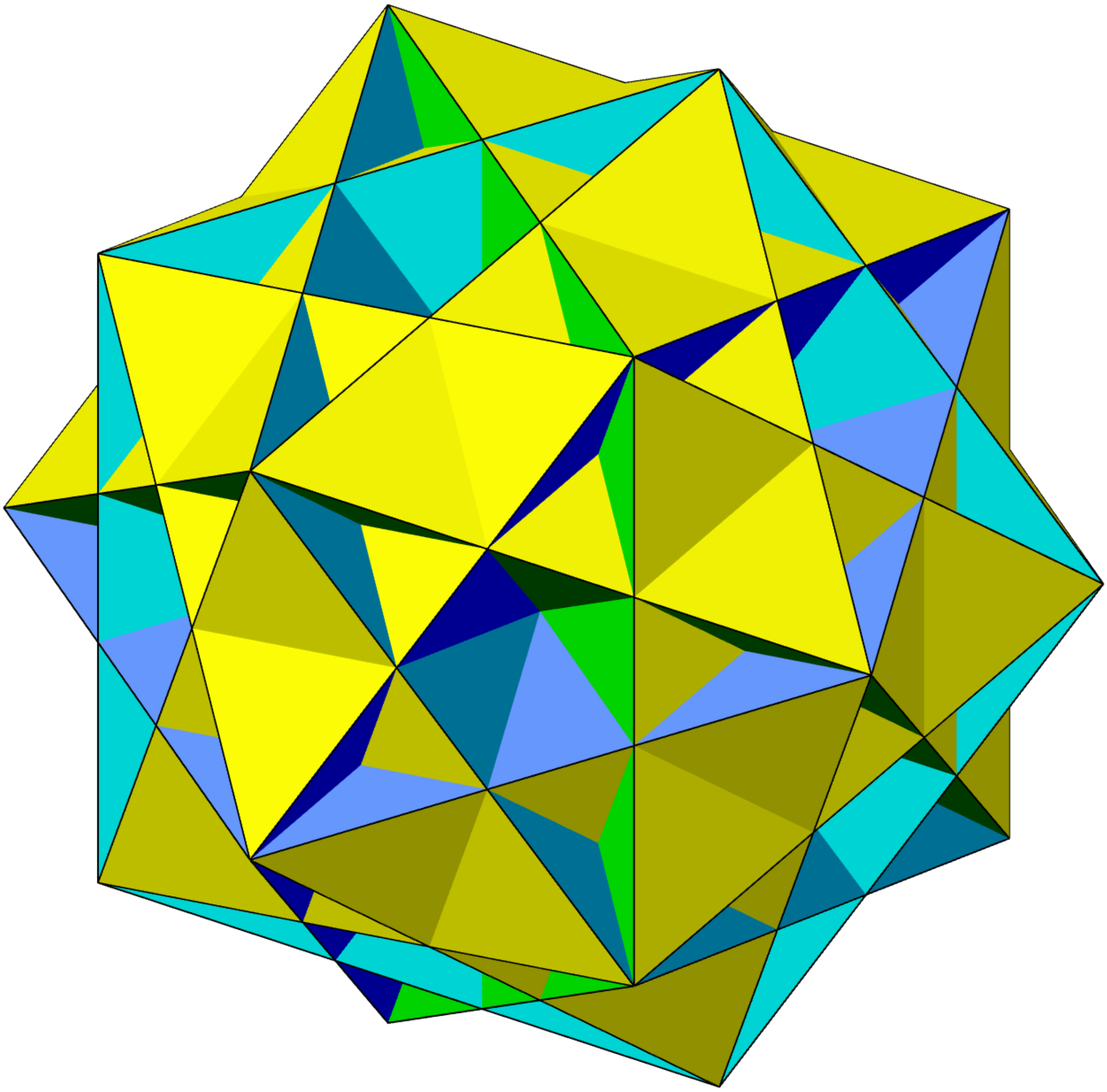


Figura 3.63: *U47: grande icosidodecaedro ditrigonale*

La figura 3.64 mostra gli spigoli del dodecaedro, involucro convesso del grande icosidodecaedro ditrigonale, mentre la figura 3.65 mostra tre pentagoni e il perimetro di tre triangoli concorrenti in uno stesso vertice del poliedro in esame, per chiarire il significato dell'aggettico "ditrigonale". Per maggiore chiarezza, anche nella figura 3.65 sono mostrati gli spigoli del dodecaedro circoscritto.

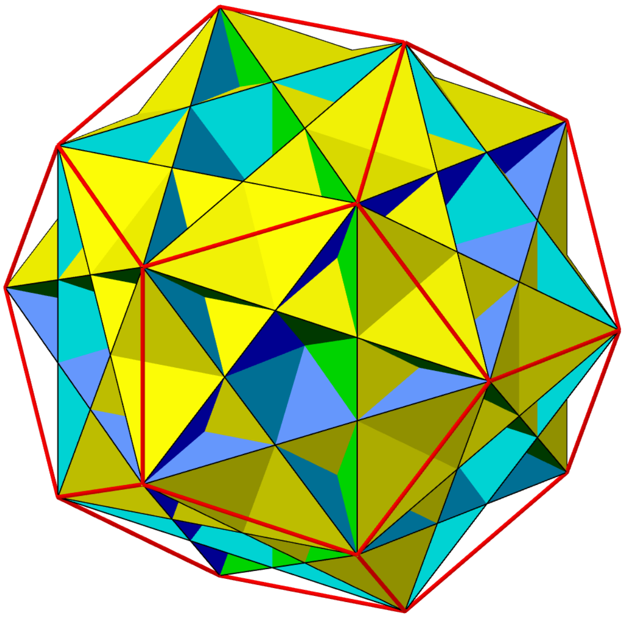


Figura 3.64: *U47: il dodecaedro, involucro convesso del grande icosidodecaedro ditrigonale*

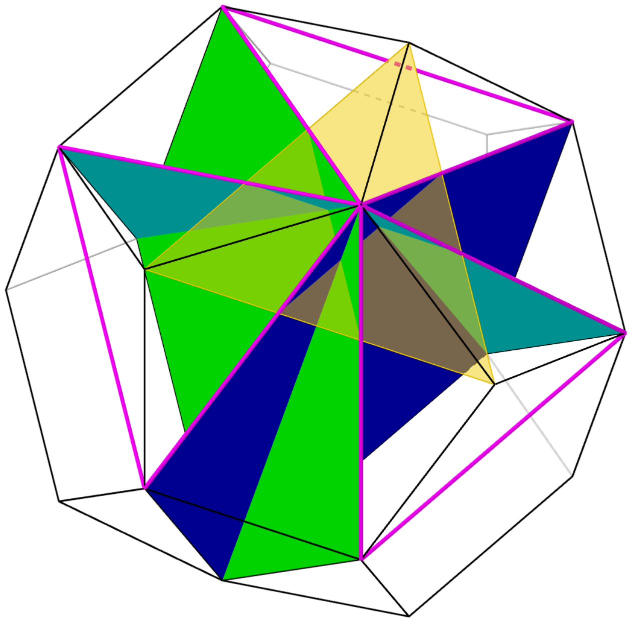


Figura 3.65: *U47: schema costruttivo del grande icosidodecaedro ditrigonale*

3.2.28 U48: grande icosicosidodecaedro

Il *grande icosicosidodecaedro* è un poliedro con 20 facce triangolari, 20 facce esagonali (da cui"icosicosi") e 12 facce pentagonali (da cui "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici, che sono quelli del dodecaedro troncato. Condivide gli spigoli e i vertici con il grande dodecicosidodecaedro ditrigonale (3.2.14) e con il grande dodecicosaedro (3.2.41). Poliedro scoperto da Badoureau.

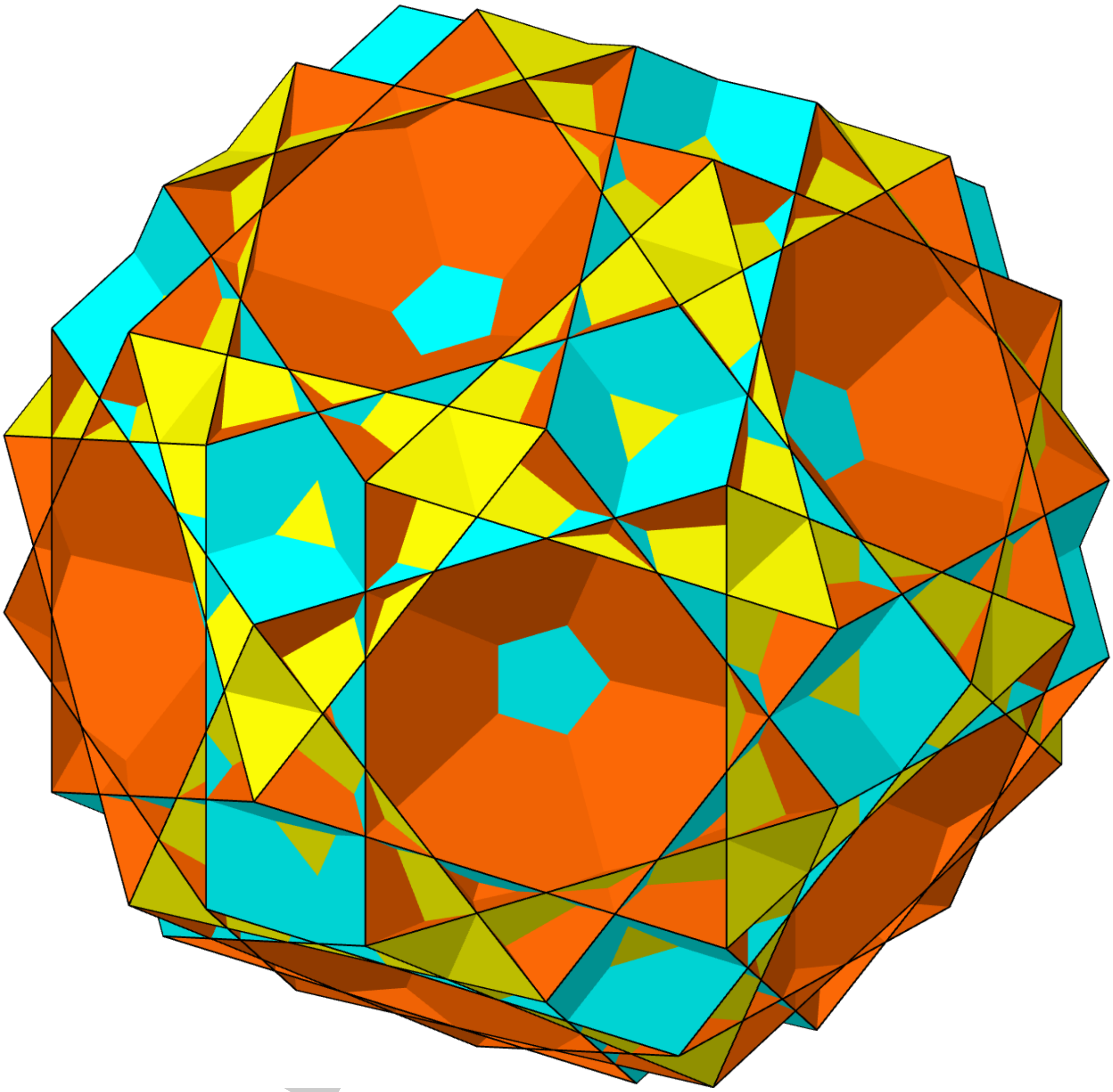


Figura 3.66: *U48: grande icosicosidodecaedro*

La figura 3.67 mostra la struttura dei triangoli utilizzati per il poliedro in esame.
La figura 3.68 mostra la struttura dei pentagoni utilizzati per il poliedro in esame.

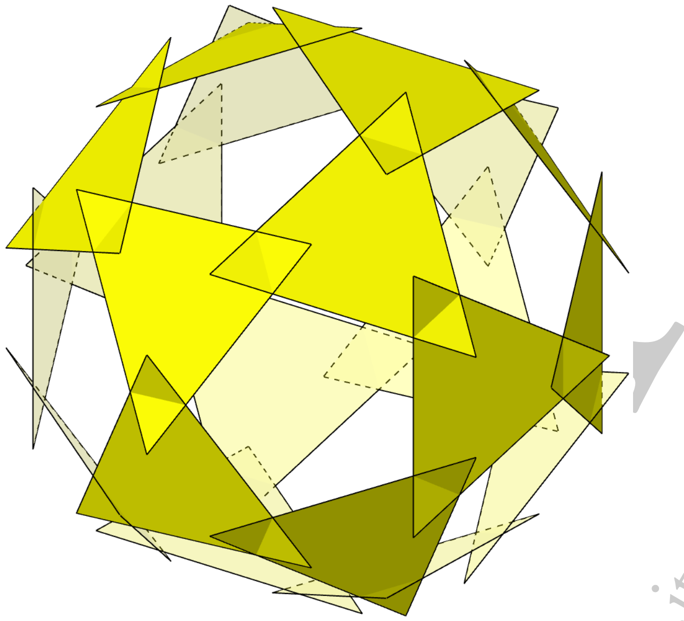


Figura 3.67: *U48: schema costruttivo del grande icosicosidodecaedro - 1*

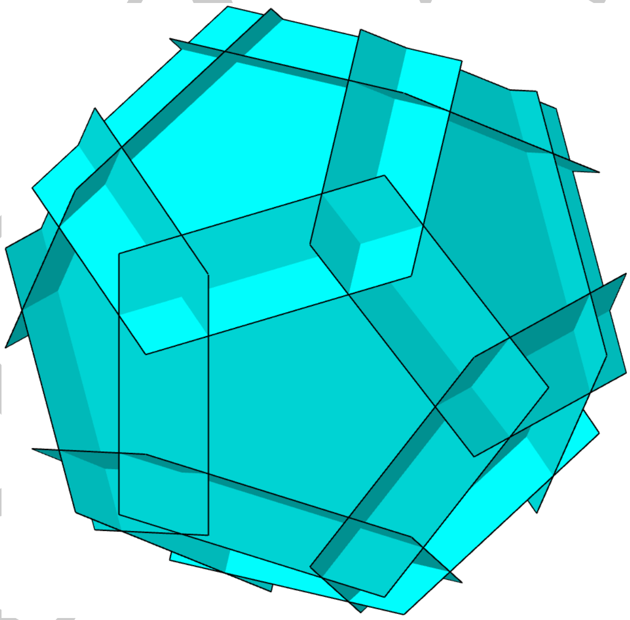


Figura 3.68: *U48: schema costruttivo del grande icosicosidodecaedro - 2*

La figura 3.69 evidenzia cinque degli esagoni utilizzati per il poliedro in esame: essi si incontrano tutti in un punto che si trova sulla perpendicolare per il centro al pentagono evidenziato nella figura stessa.

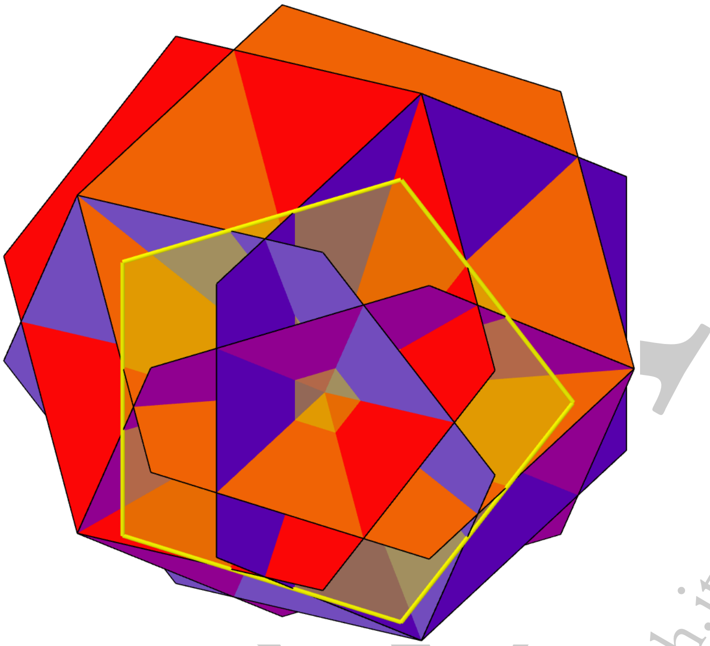


Figura 3.69: *U48: schema costruttivo del grande icosicosidodecaedro - 3*

La figura 3.70 mostra il dodecaedro troncato, involucro convesso del grande icosicosidodecaedro.

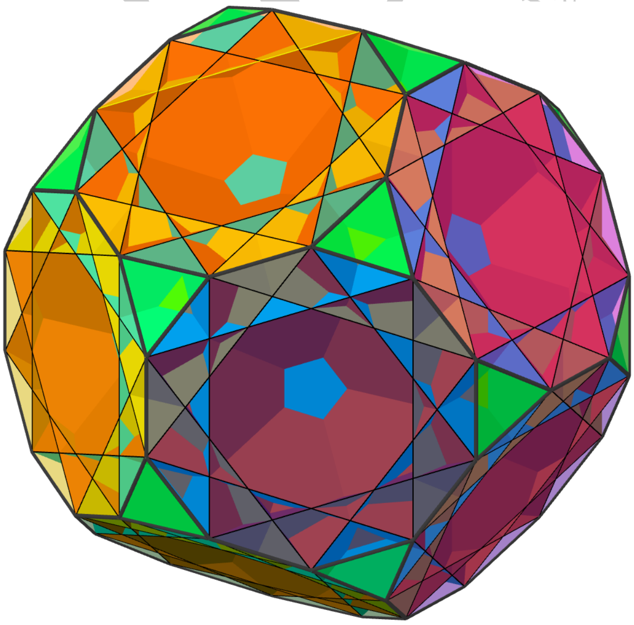


Figura 3.70: *U48: dodecaedro troncato, involucro convesso del grande icosicosidodecaedro*

3.2.29 U49: piccolo icosemidodecaedro

Il *piccolo icosiemidodecaedro* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui “icosi”) e 6 facce decagonali (da cui “emidodeca”), 60 spigoli e 30 vertici. Spigoli e vertici sono gli stessi dell’icosidodecaedro, con cui condivide anche le facce triangolari. Spigoli e vertici sono anche gli stessi del piccolo dodecaemidodecaedro (3.2.31). Poliedro scoperto da Badoureau. La figura 3.72 mostra i decagoni intersecantesi utilizzati per il poliedro in esame.

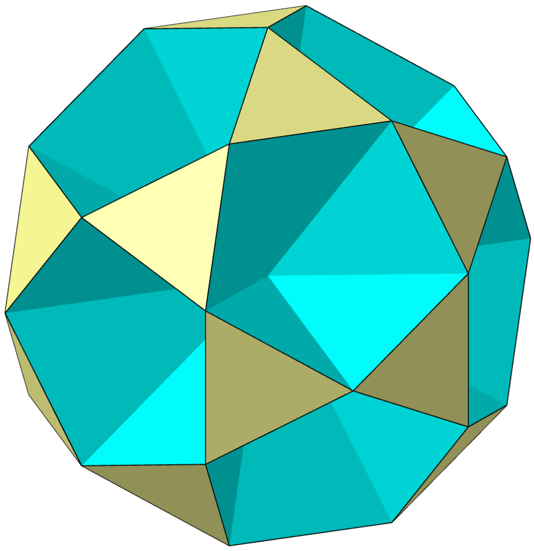


Figura 3.71: *U49: piccolo icosemidodecaedro*

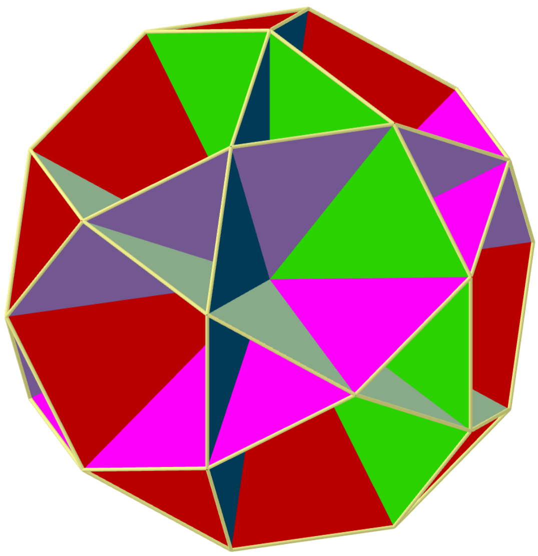


Figura 3.72: *U49: schema costruttivo del piccolo icosemidodecaedro*

3.2.30 U50: piccolo dodecicosaedro

Il *piccolo dodecicosaedro* è un poliedro con 12 facce decagonali (da cui “dodec”) e 20 facce esagonali (da cui“icosa”), 120 spigoli e 60 vertici, che sono gli stessi di un pesudorombicosidodecaedro. Condivide vertici e spigoli con il piccolo icosicosidodecaedro (3.2.13) e con il piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale (3.2.23). Poliedro scoperto da Coxeter e Miller nel 1932.

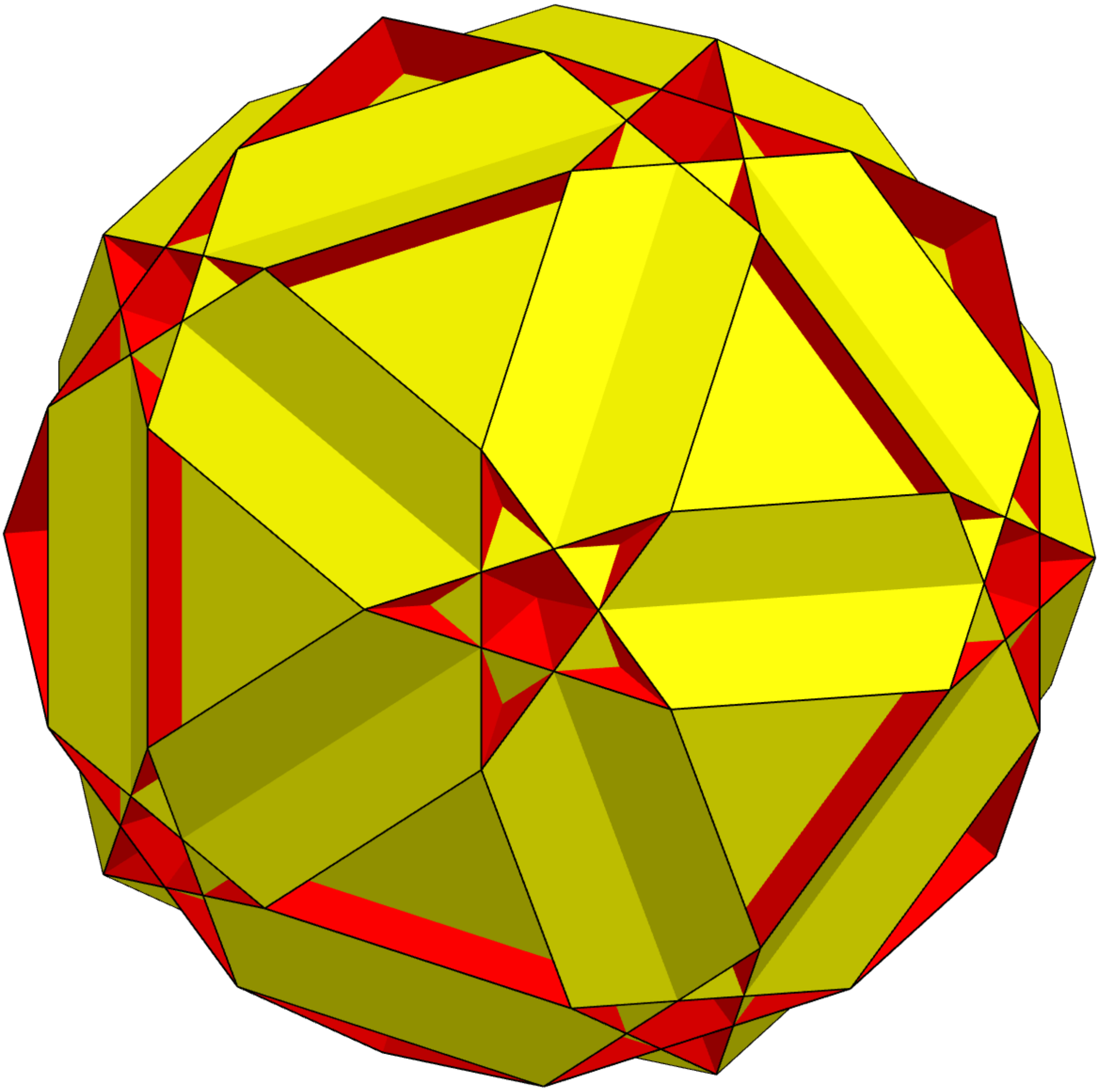


Figura 3.73: *U50: piccolo dodecicosaedro*

La figura 3.74 mostra cinque decagoni intersecantesi utilizzati per costruire il poliedro in esame: essi individuano il perimetro di un pentagono stellato, che però non è una faccia del piccolo dodecicosaedro, a differenza di quanto succede per il piccolo icosicosidodecaedro (3.2.13) e per il piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale (3.2.23).

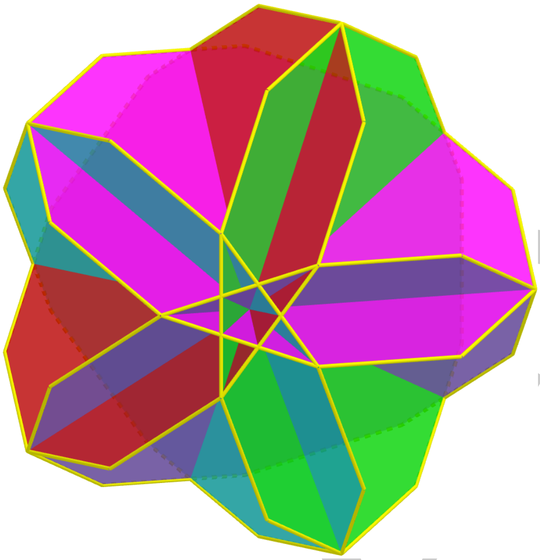


Figura 3.74: *U50: schema costruttivo del piccolo dodecicosaedro - 1*

La figura 3.74 mostra cinque esagoni intersecantesi utilizzati per costruire il poliedro in esame: essi individuano il perimetro di un pentagono stellato, che però, come per i decagoni, non è una faccia del piccolo dodecicosaedro, a differenza di quanto succede per il piccolo icosicosidodecaedro (3.2.13) e per il piccolo dodecicosidodecaedro ditrigonale (3.2.23).

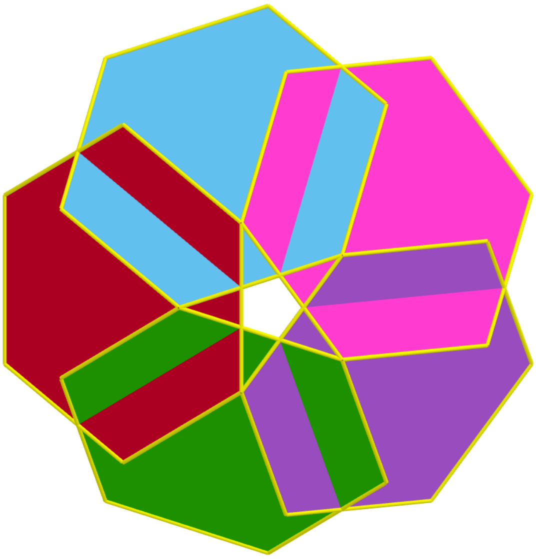


Figura 3.75: *U50: schema costruttivo del piccolo dodecicosaedro - 2*

3.2.31 U51: piccolo dodecaemidodecaedro

Il *piccolo dodecaemidodecaedro* è un poliedro con 12 facce pentagonali (da cui “dodeca”) e 6 facce decagonali (da cui “emidodeca”), 60 spigoli e 30 vertici. Spigoli e vertici sono gli stessi dell’icosidodecaedro, con cui condivide anche le facce pentagonali. Spigoli e vertici sono anche gli stessi del piccolo icosiemidodecaedro (3.2.29). Poliedro scoperto da Badoureau. La figura 3.77 mostra i decagoni intersecantesi utilizzati per il poliedro in esame ed è la stessa usata per il piccolo icosiemidodecaedro (3.77).

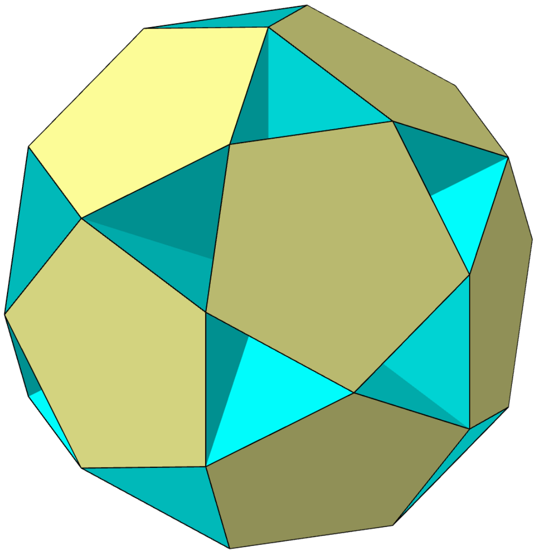


Figura 3.76: *U51: piccolo dodecaemidodecaedro*

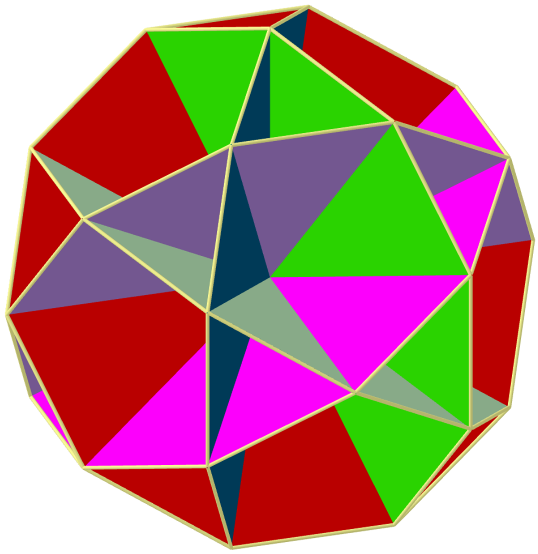


Figura 3.77: *U51: schema costruttivo del piccolo dodecaemidodecaedro*

3.2.32 U54: grande icosidodecaedro

Il *grande icosidodecaedro* ha 20 facce triangolari (da cui “icosi”) e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui “dodeca”), 60 spigoli e 30 vertici, che sono gli stessi di quelli dell’icosidodecaedro. Il grande dodecaemidodecaedro (3.2.48) ha gli stessi vertici e le stesse facce pentagonali. Il grande icosiemidodecaedro (3.2.49) ha gli stessi vertici e le stesse facce triangolari. Poliedro scoperto da Hess e poi descritto anche da Badoureau e Pitsch.

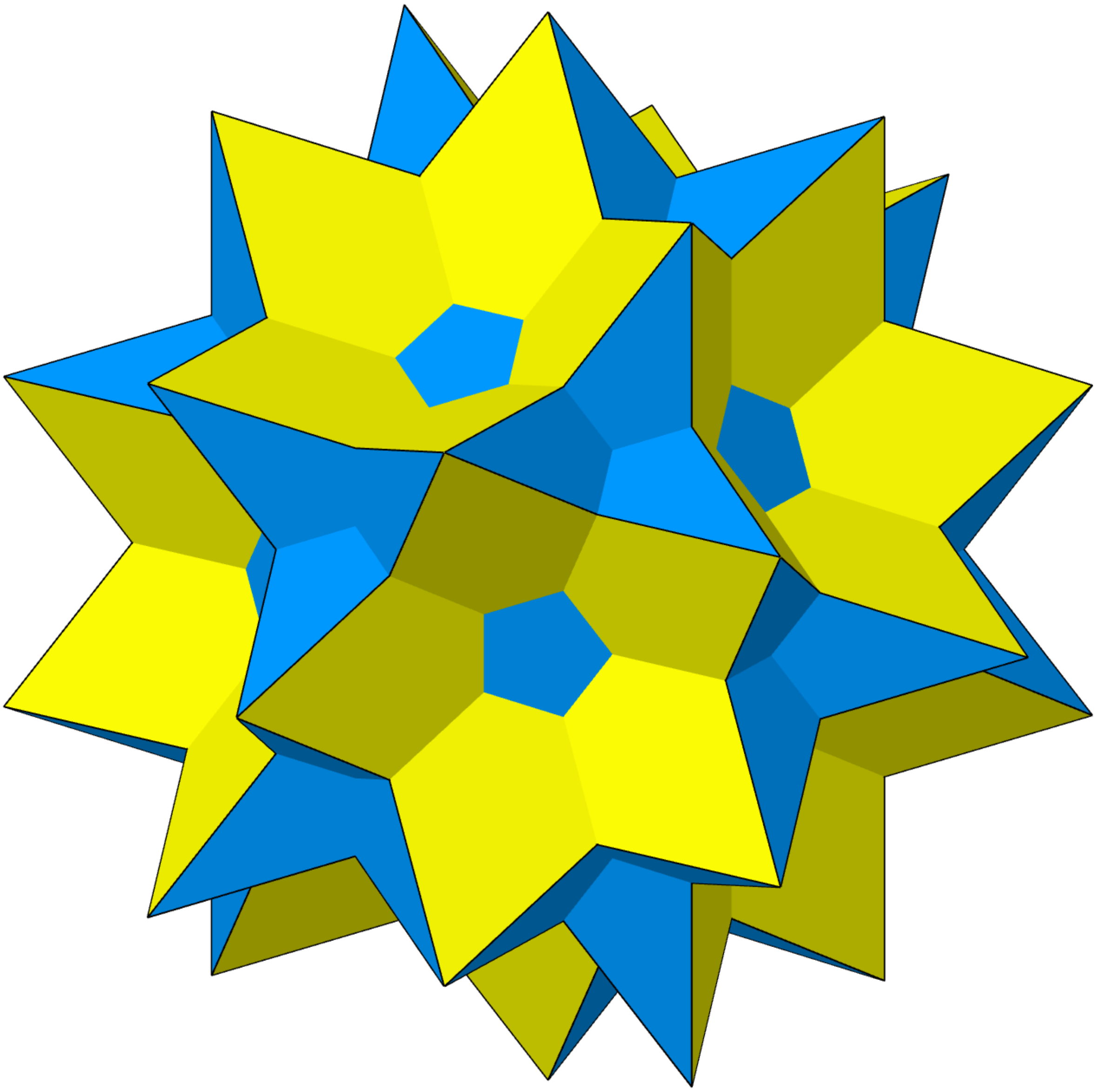


Figura 3.78: *U54: grande icosidodecaedro*

La figura 3.79 evidenzia cinque dei triangoli intersecantesi utilizzati per costruire il solido in esame:

essi si incontrano su un punto che sta sulla perpendicolare per il centro al pentagono stellato evidenziato nella stessa figura.

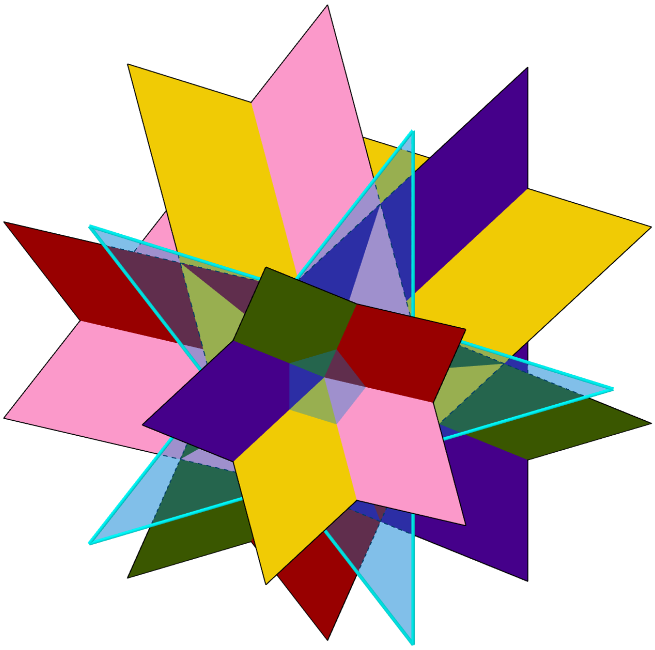


Figura 3.79: *U54: schema costruttivo del grande icosidodecaedro*

La figura 3.80 mostra, a sinistra, gli spigoli dell'icosidodecaedro circoscritto al poliedro in esame e, a destra, come uno dei pentagoni stellati si costruisce sui vertici dell'icosidodecaedro.

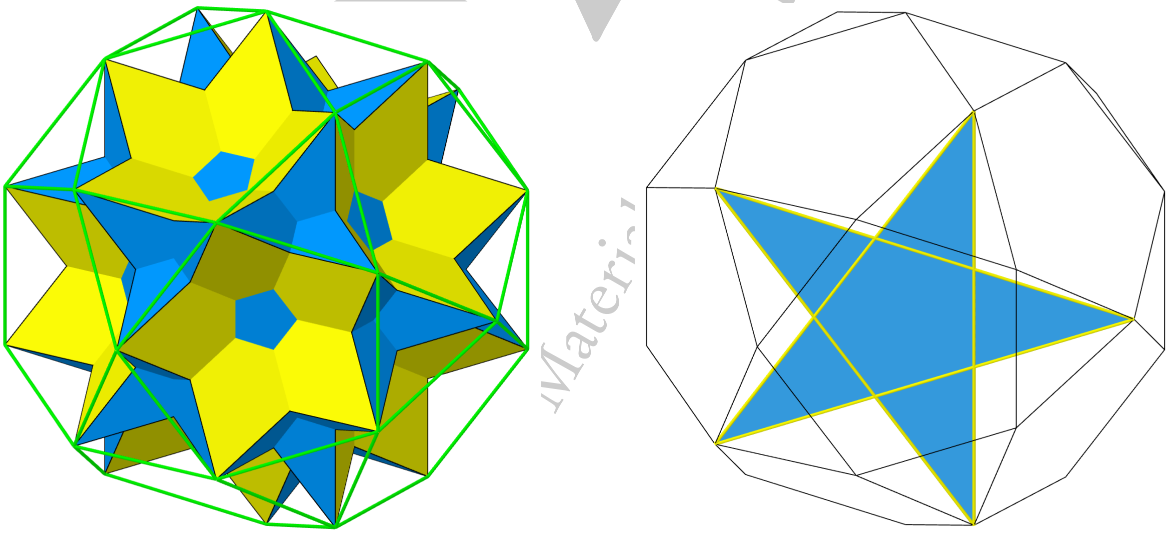


Figura 3.80: *U54: l'icosidodecaedro circoscritto e uno dei pentagoni del grande icosidodecaedro*

3.2.33 U55: grandicosaedro troncato

Il *grandicosaedro troncato* è un poliedro con 20 facce esagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato, 90 spigoli e 60 vertici. Ottenibile come troncatura del grande icosaedro. Poliedro scoperto da Pitsch.

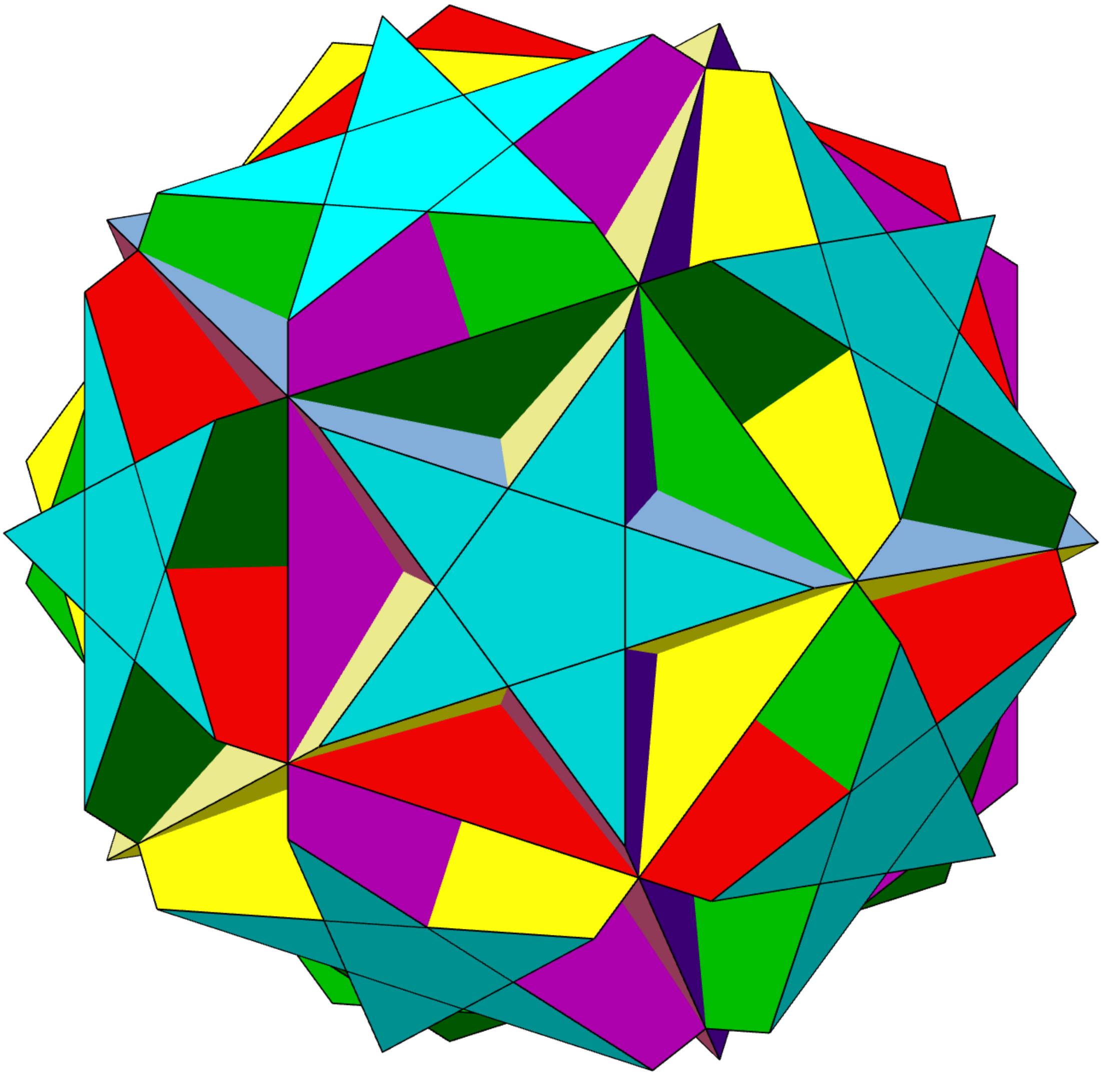


Figura 3.81: *U55: grandicosaedro troncato*

La figura 3.82 mostra il grande icosaedro da cui si ottiene il grandicosaedro troncato per troncatura (debole) ai vertici.

La figura 3.83 evidenzia il processo di troncatura su tre "punte" del grande icosaedro.

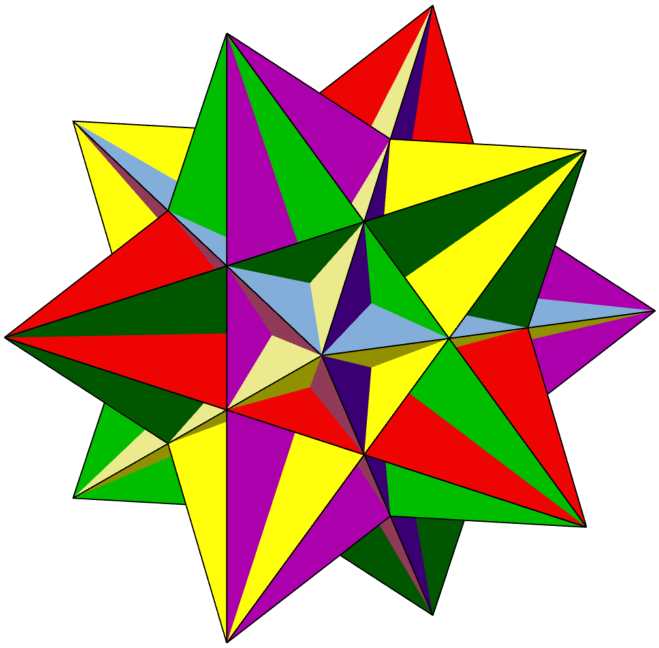


Figura 3.82: *U55: il grande icosaedro da cui si ottiene per troncatura il grandicosaedro troncato*

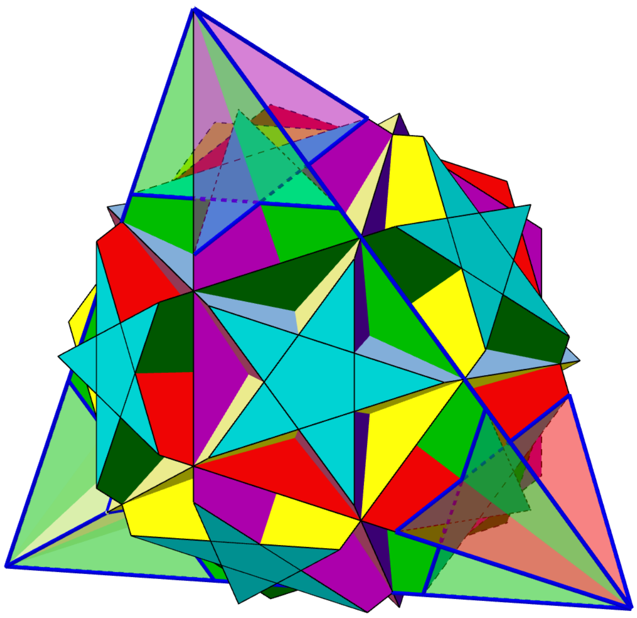


Figura 3.83: *U55: evidenziazione del processo di troncatura sul grande icosaedro*

3.2.34 U56: rombicosaedro

Il *rombicosaedro* è un poliedro con 30 facce quadrate (da cui "rombi") e 20 facce esagonali (da cui "icosa"), 120 spigoli e 60 vertici. Condivide vertici e spigoli con il rombidodecaedro (3.2.18) e con l'icosidodecadodecaedro (3.2.24). I quadrati sono gli stessi del rombidodecaedro (3.2.18), gli esagoni gli stessi dell'icosidodecadodecaedro (3.2.24).

Poliedro scoperto da Badoureau

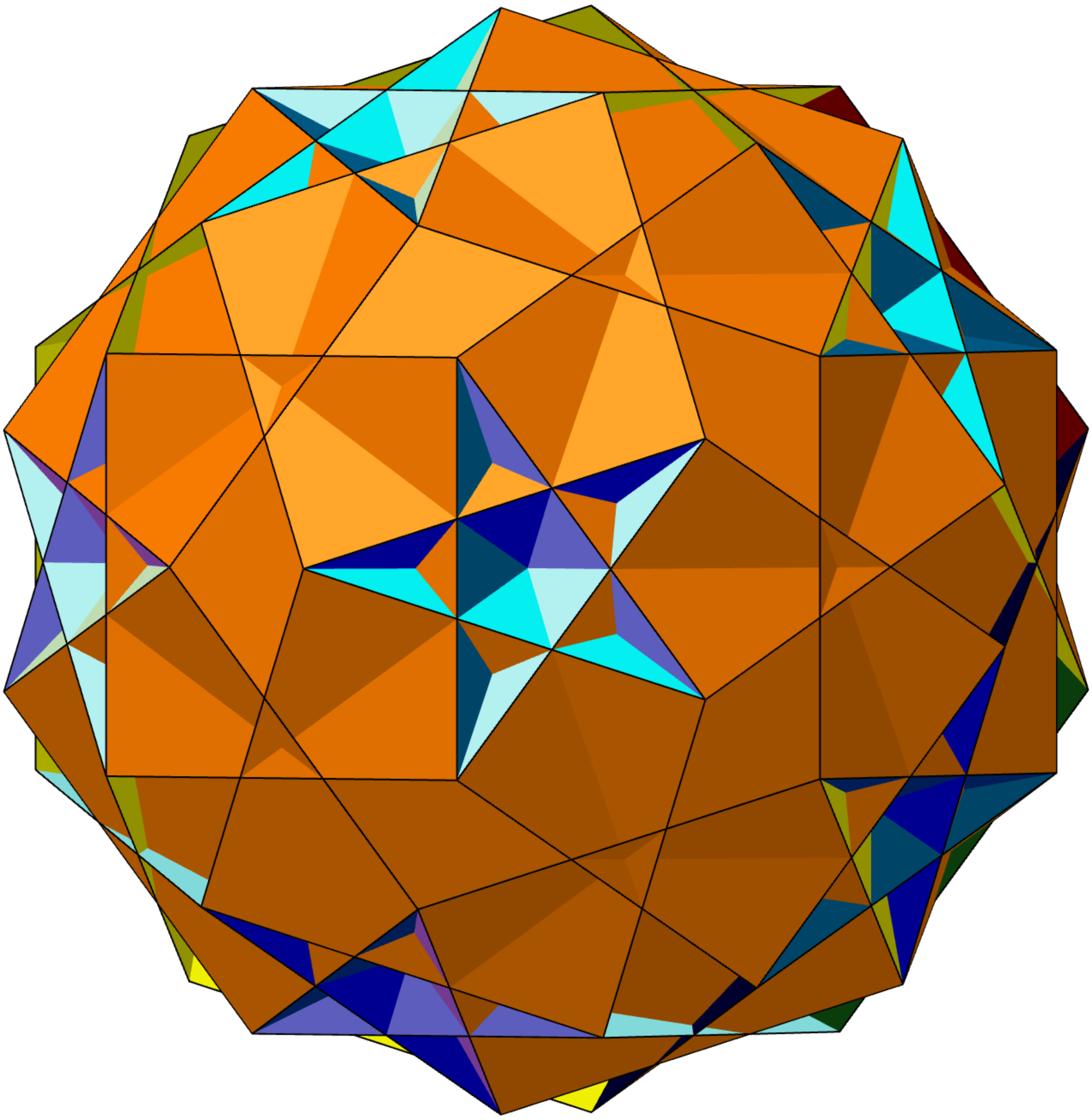


Figura 3.84: *U56: rombicosaedro*

La figura 3.85 mostra gli stessi cinque quadrati della figura 3.38 e gli stessi cinque esagoni della figura 3.54, al fine di evidenziare lo schema costruttivo di questo poliedro e le differenze con i due poliedri connessi: $U38$ e $U44$.

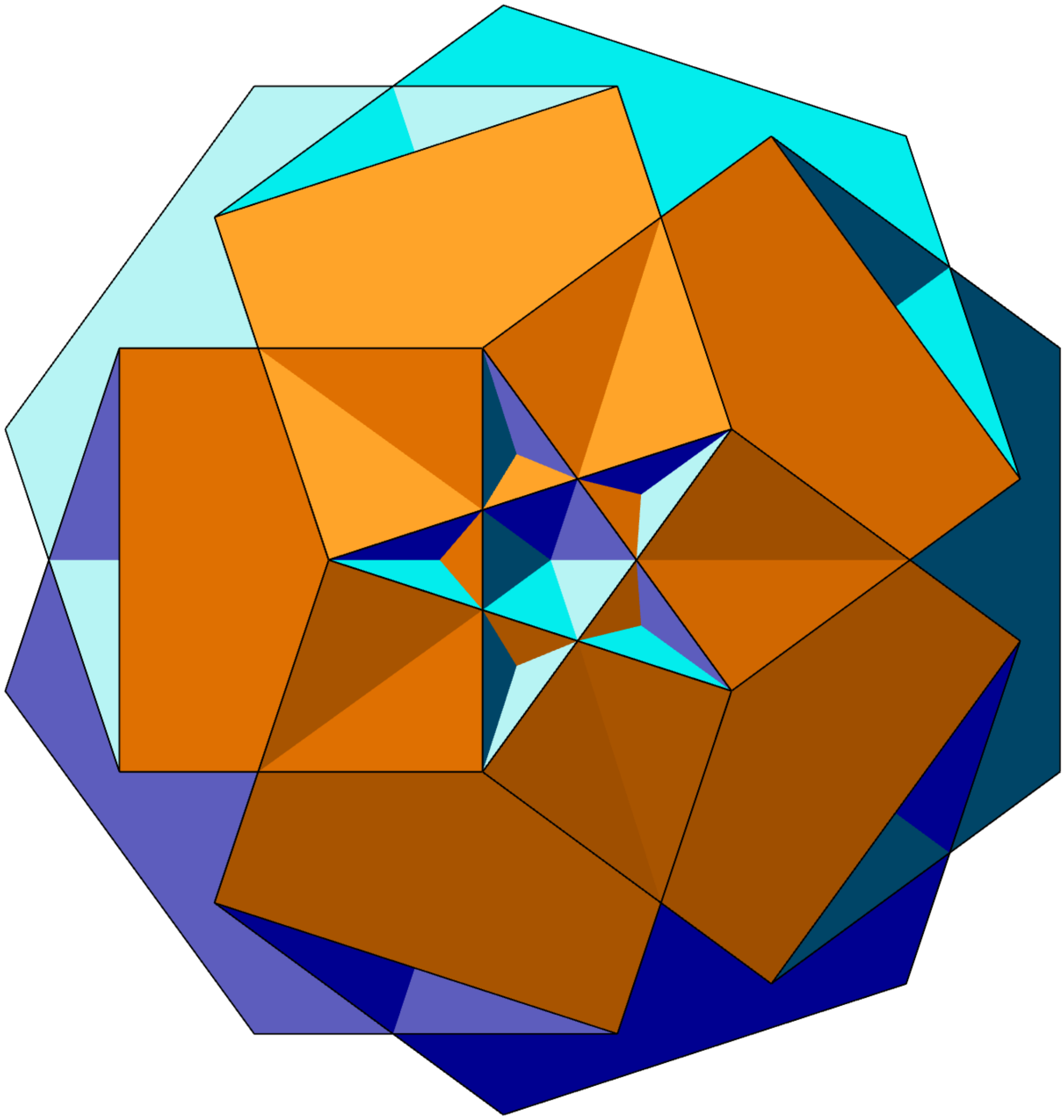


Figura 3.85: *U56: schema costruttivo con cinque quadrati e cinque esagoni del rombicosaedro*

3.2.35 U57: grande icosidodecaedro camuso

Il *grande icosidodecaedro camuso* è un poliedro con 80 facce triangolari e 12 facce a forma di pentagono stellato. Il nome deriva da quello del grande icosidodecaedro, di cui rappresenta la forma camusa. Le facce triangolari si dividono in due gruppi: 60 hanno un vertice su un pentagono stellato e un lato su un lato di un altro pentagono stellato (in giallo nella figura 3.86), 20 hanno i tre vertici su tre pentagoni stellati diversi (in rosso nella figura 3.86).

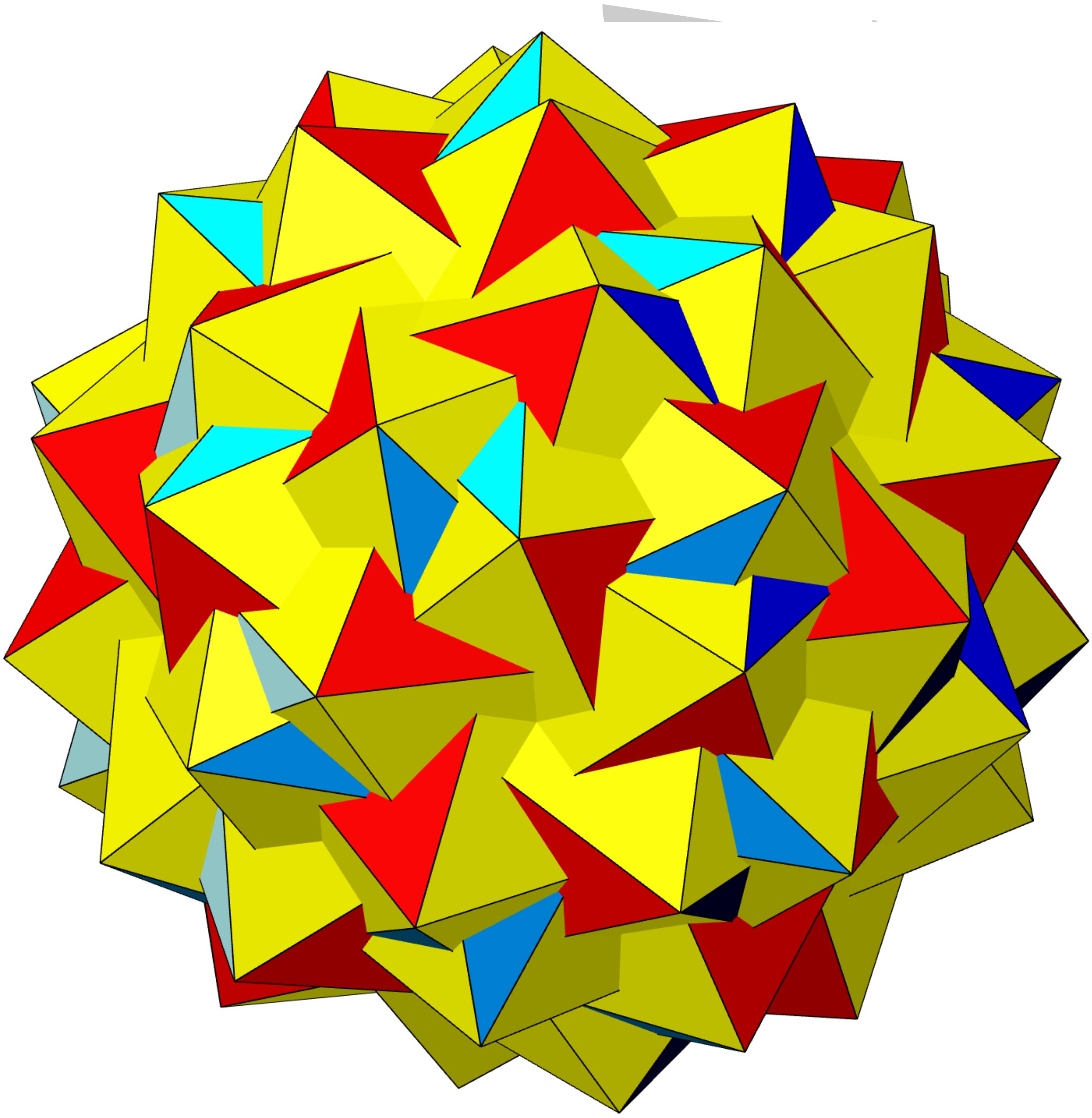


Figura 3.86: *U57: grande icosidodecaedro camuso*

La figura 3.87 mostra uno dei triangoli del secondo tipo con i tre pentagoni stellati (quello in grigio è uno di quelli non visibili nella figura 3.86) a cui è collegato.

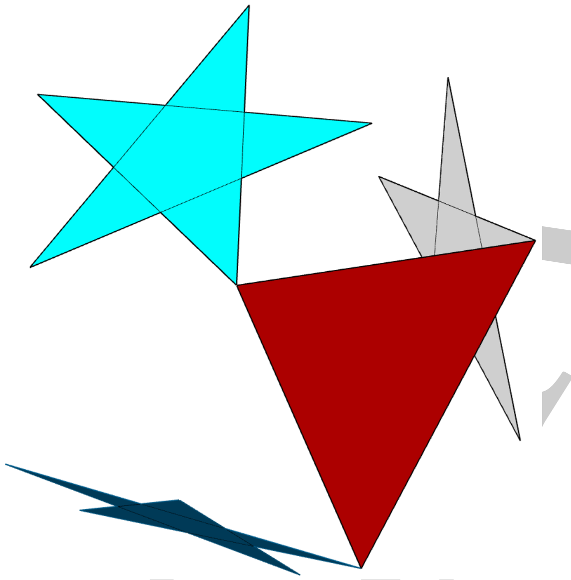


Figura 3.87: *U57: schema costruttivo del grande icosidodecaedro camuso - 1*

La figura 3.88 mostra un pentagono stellato con i cinque triangoli del primo tipo che hanno un loro lato sui suoi cinque lati.

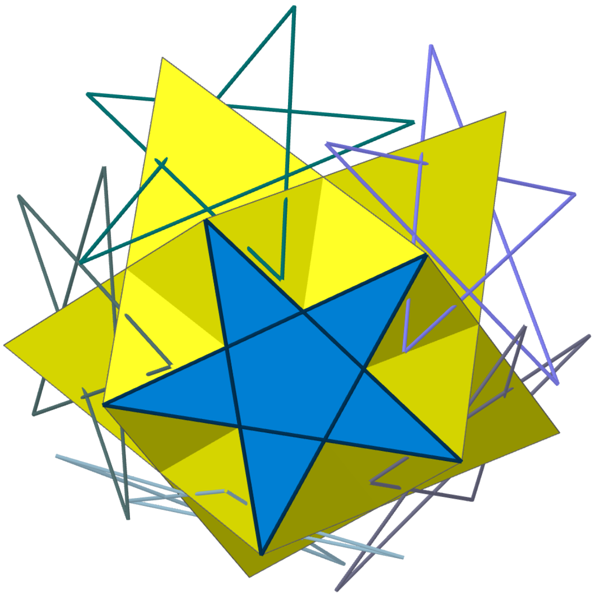


Figura 3.88: *U57: schema costruttivo del grande icosidodecaedro camuso - 2*

3.2.36 U58: piccolo dodecaedro troncato stellato

Il *piccolo dodecaedro troncato stellato* è un poliedro con 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di decagono stellato, 90 spigoli e 60 vertici. Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

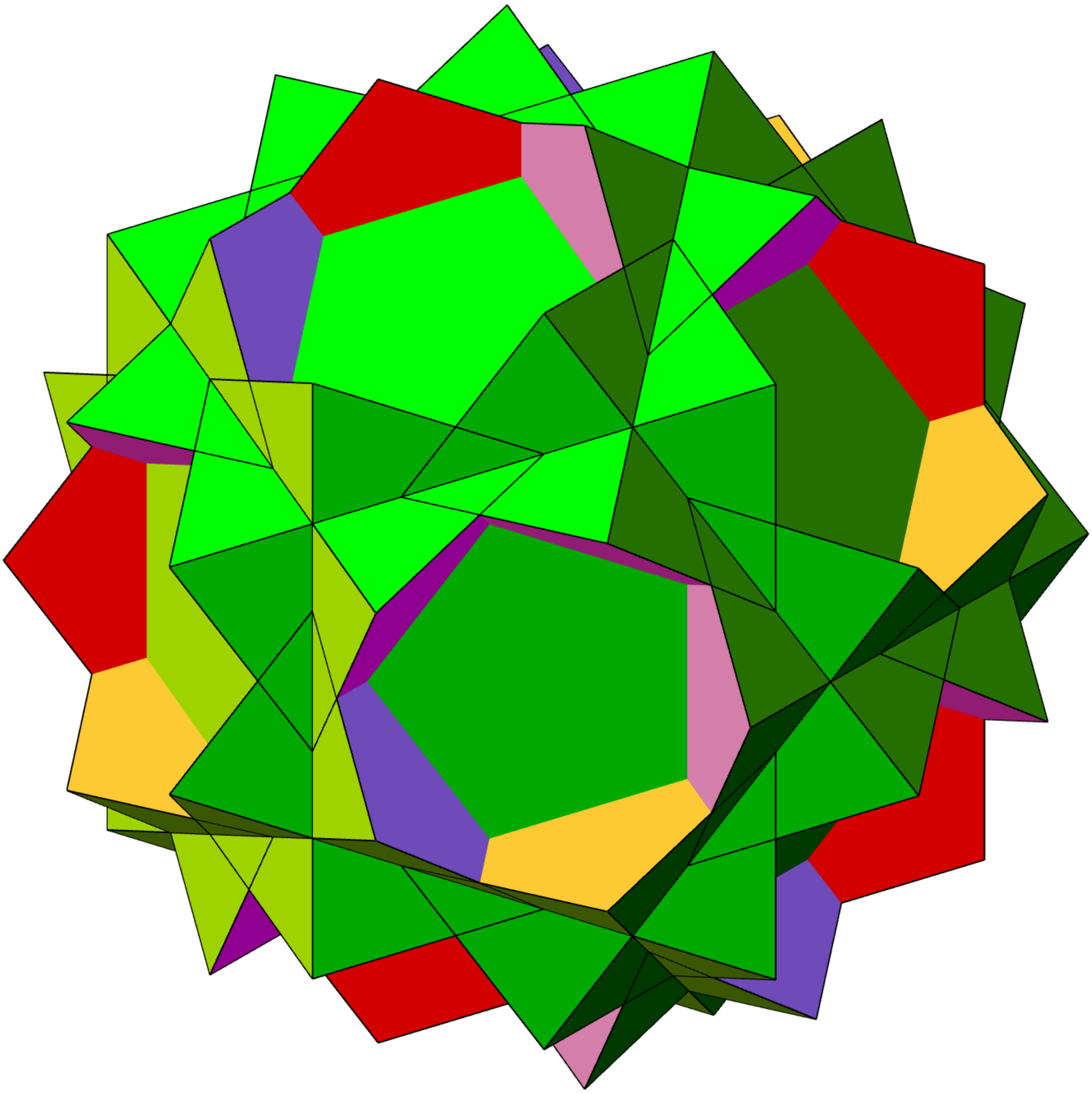


Figura 3.89: *U58: piccolo dodecaedro troncato stellato*

La figura 3.90 mostra quattro dei decagoni stellati intersecantesi utilizzati per costruire il piccolo dodecaedro troncato stellato.

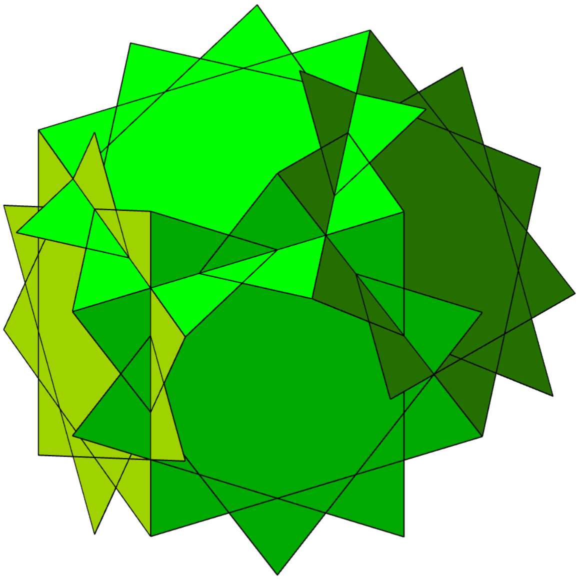


Figura 3.90: *U58: schema costruttivo del piccolo dodecaedro troncato stellato - 1*

La figura 3.91 mostra cinque dei pentagoni regolari utilizzati per il poliedro in esame: essi si intersecano tutti in un punto che sta sulla perpendicolare perl centro al decagono stellato rappresentato nella stessa figura.

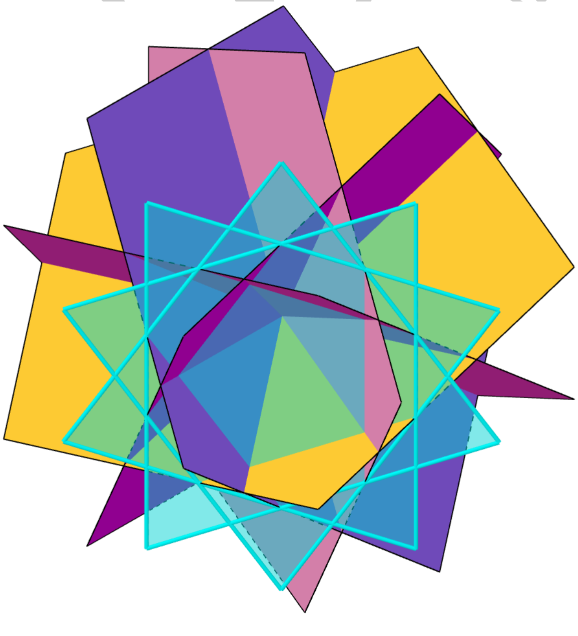


Figura 3.91: *U58: schema costruttivo del piccolo dodecaedro troncato stellato - 2*

3.2.37 U59: dodecadodecaedro troncato

Il *dodecadodecaedro troncato* è un poliedro con 30 facce quadrate 12 facce decagonali e 12 facce a forma di decagono stellato, 180 spigoli e 120 vertici. Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch. Si noti come i decagoni regolari siano quasi completamente nascosti dai decagoni stellati e dai quadrati.

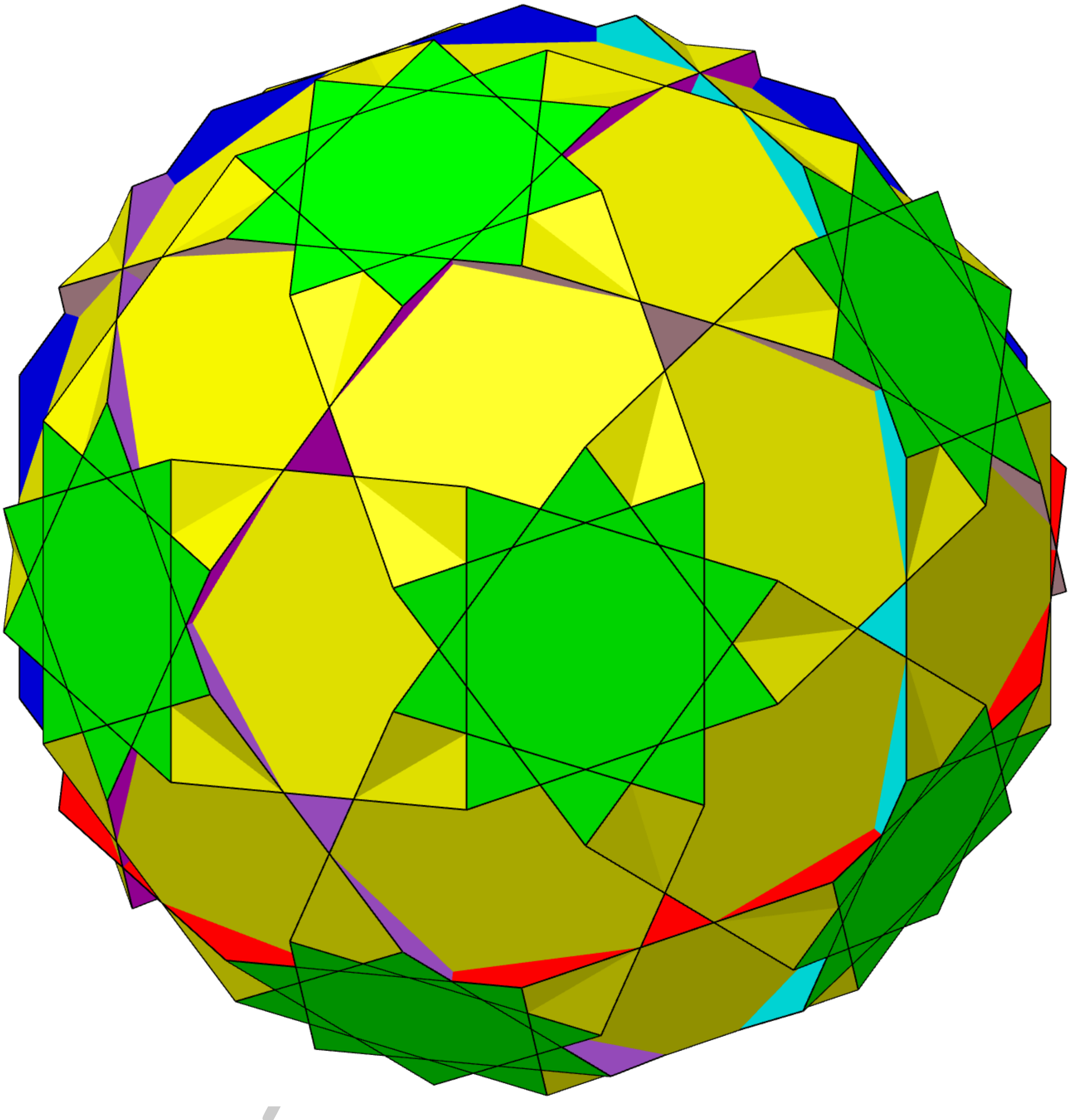


Figura 3.92: *U59: dodecadodecaedro troncato*

La figura 3.93 mostra cinque dei decagoni regolari intersecantesi utilizzati per costruire il dodecadodecaedro troncato: essi hanno, alternativamente, lati coincidenti con un lato di un decagono stellato; questo cinque si incontrano in un punto che si trova sulla perpendicolare per il centro al decagono stellato evidenziato con il perimetro in blu nella stessa figura.

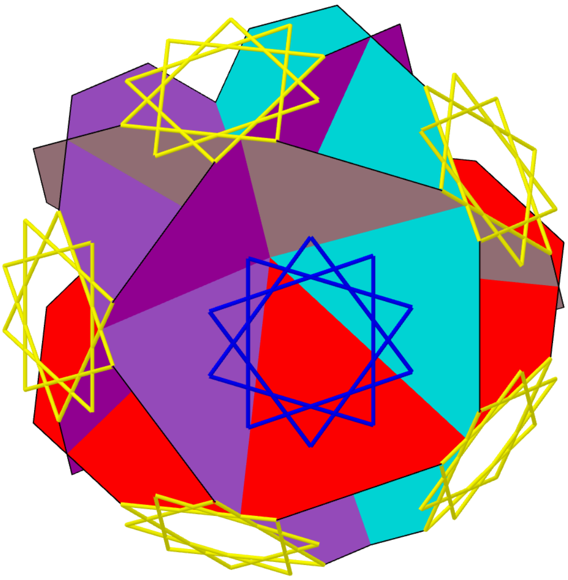


Figura 3.93: *U59: schema costruttivo del dodecadodecaedro troncato - 1*

La figura 3.94 mostra cinque dei quadrati utilizzati per costruire il poliedro in esame: essi hanno due lati opposti su due decagoni stellati vicini.

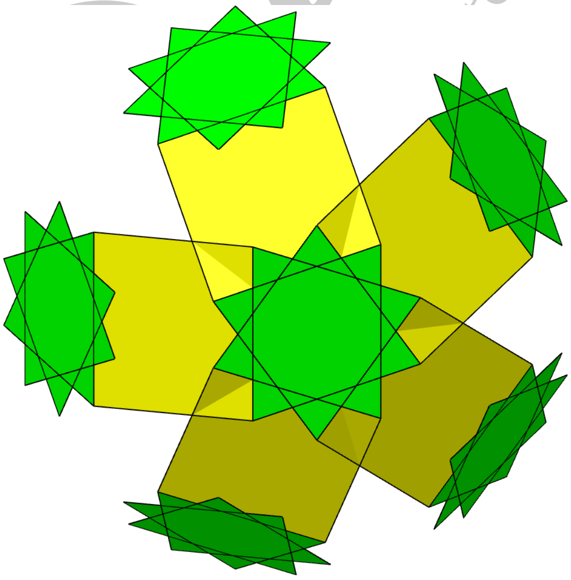


Figura 3.94: *U59: schema costruttivo del dodecadodecaedro troncato - 2*

3.2.38 U60: dodecadodecaedro camuso inverso

Il *dodecadodecaedro camuso inverso* è un poliedro con 60 facce quadrate 12 facce pentagonali e 12 facce a forma di pentagono stellato, 150 spigoli e 60 vertici. Poliedro scoperto da Coxeter e Miller.

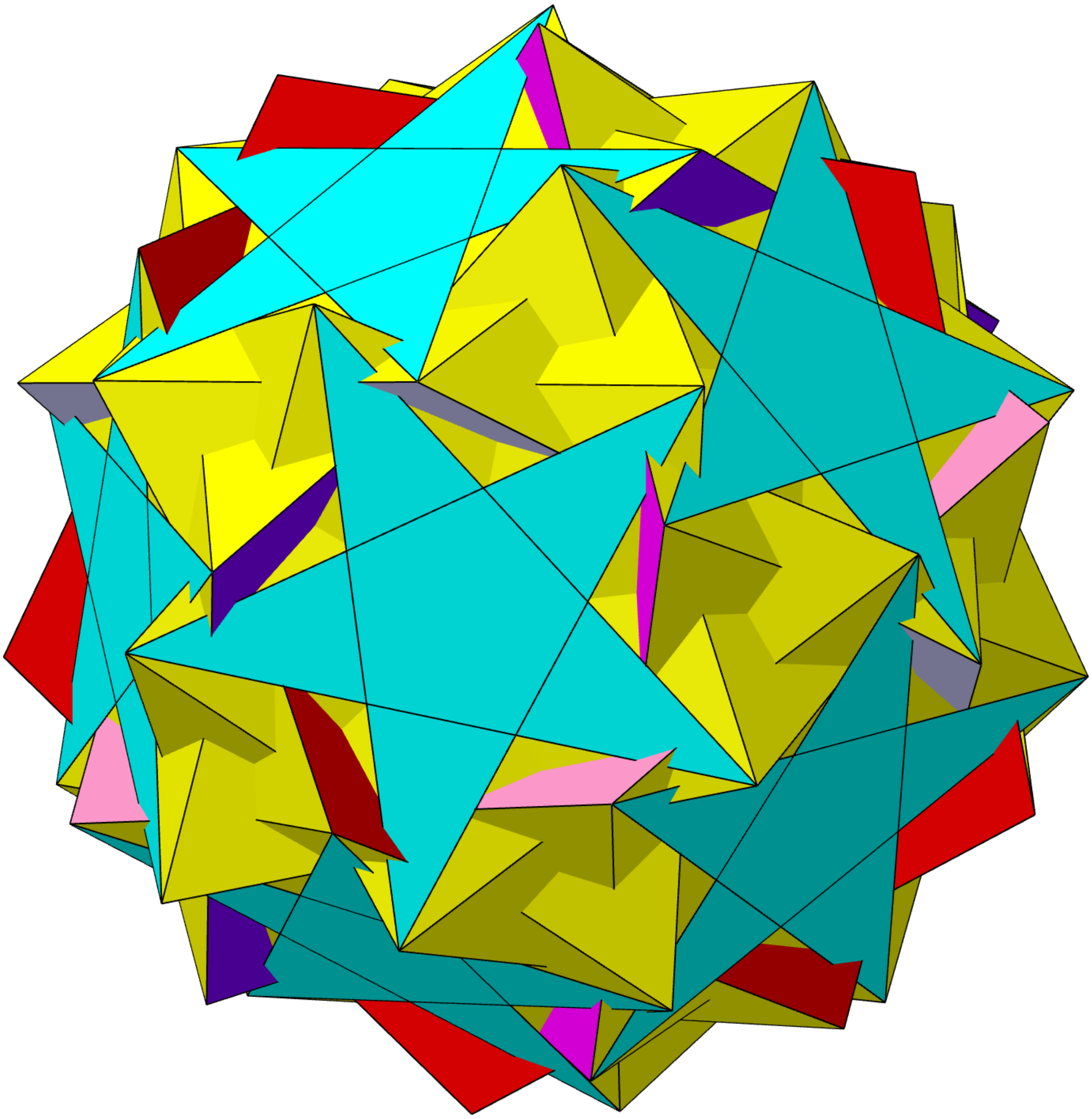


Figura 3.95: *U60: dodecadodecaedro camuso inverso*

La figura 3.96 mostra cinque dei triangoli equilateri utilizzati per costruire il poliedro in esame, mostrando come essi hanno un lato du un pentagono stellato e un vertice su un altro pentagono stellato.

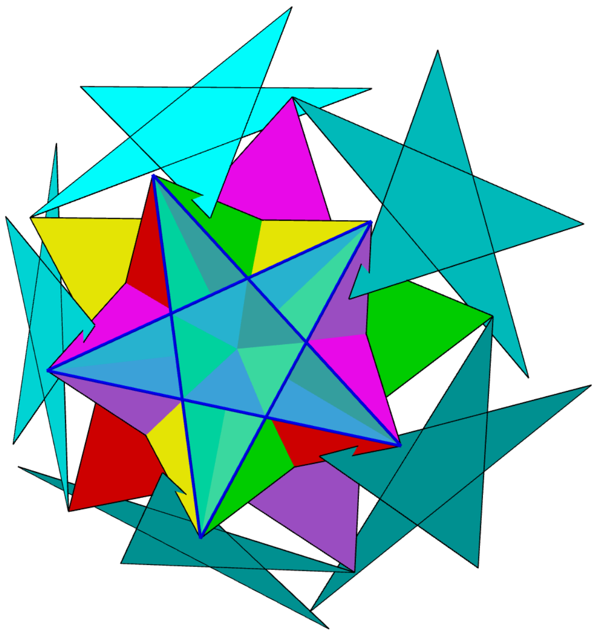


Figura 3.96: *U60: schema costruttivo del dodecadodecaedro camuso inverso - 1*

La figura 3.97 mostra uno dei pentagoni regolari, evidenziando il fatto che i suoi vertici appartengono a cinque pentagoni stellati diversi: i due “anteriori” con perimetro in blu e i tre “posteriori” in grigio.

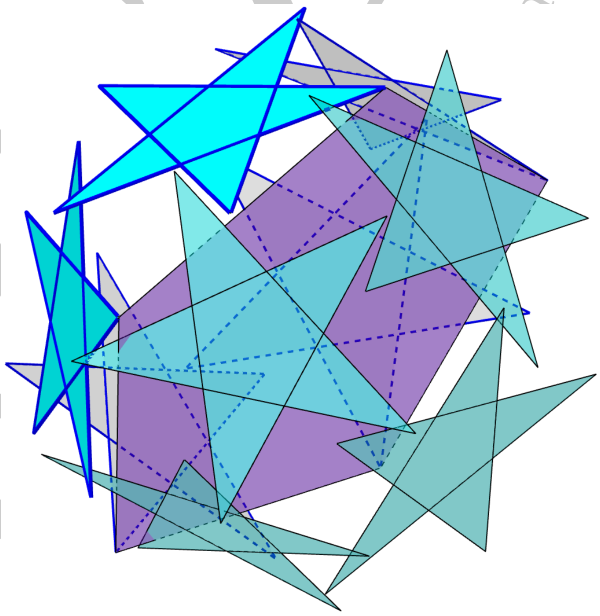


Figura 3.97: *U60: schema costruttivo del dodecdodecaedro camuso inverso - 2*

3.2.39 U61: grande dodecicosidodecaedro

Il *grande dodecicosidodecaedro* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui "icosi"), 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodec") e 12 facce a forma di decagono stellato (da cui "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici, che condivide con il grande dodecaedro troncato (3.2.17), con il grande rombicosidodecaedro (3.2.45) e con il grande rombidodecaedro (3.2.51). Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

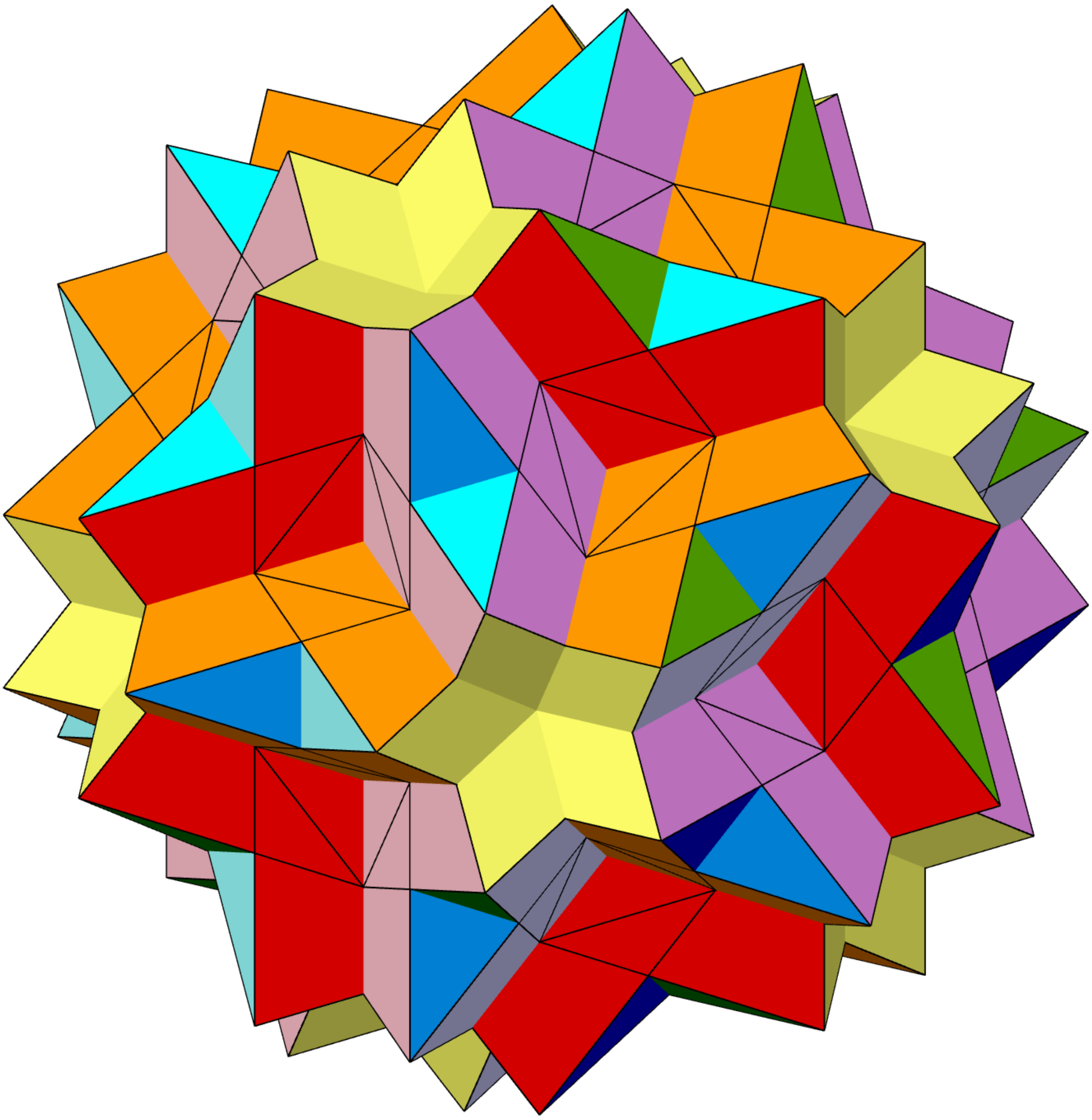


Figura 3.98: *U61: grande dodecicosidodecaedro*

La struttura di questo poliedro è decisamente complessa. Nelle figure che seguono ne mostriamo alcuni particolari. La figura 3.99 mostra tre decagoni stellati intersecantesi.

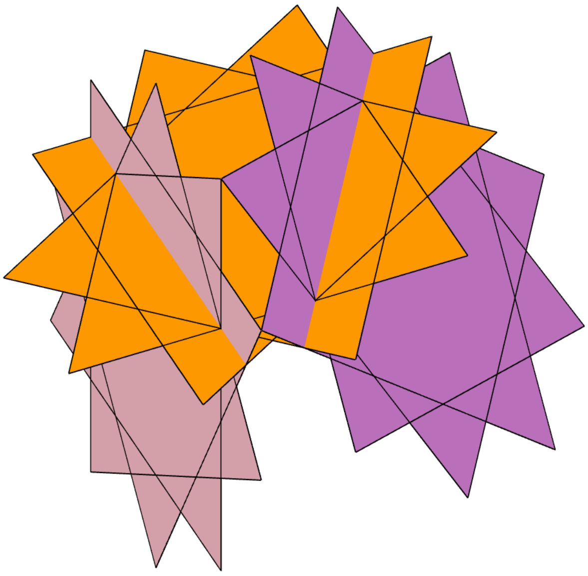


Figura 3.99: *U61: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro - 1*

La figura 3.100 mostra sei pentagoni stellati intersecantesi.

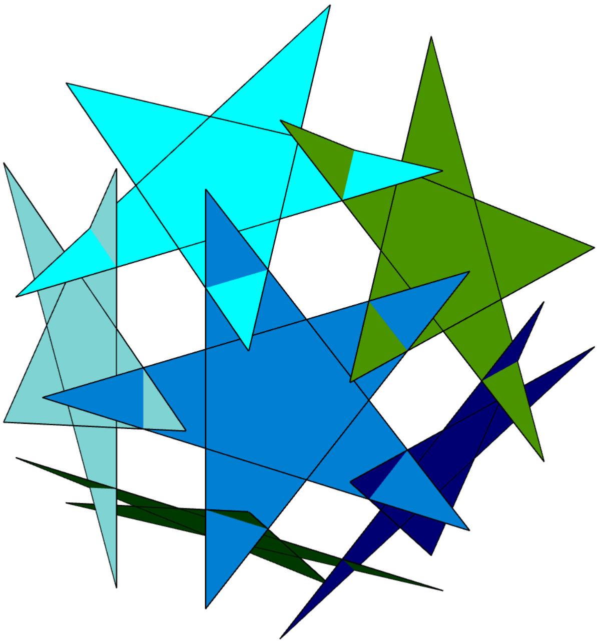


Figura 3.100: *U61: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro - 2*

La figura 3.101 mostra cinque triangoli intersecantesi e un pentagono stellato collegato ad essi.

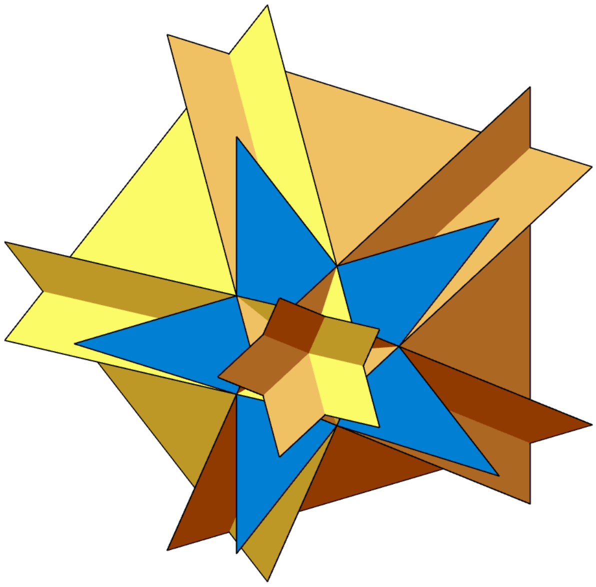


Figura 3.101: *U61: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro - 3*

La figura 3.102 mostra gli stessi cinque triangoli intersecantesi della figura 3.101 e un decagono stellato collegato ad essi.

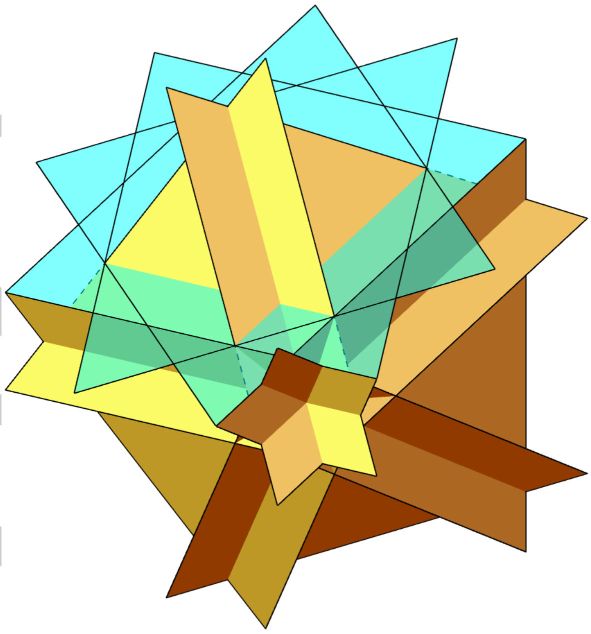


Figura 3.102: *U61: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro - 4*

3.2.40 U62: piccolo dodecaemicosaedro

Il *piccolo dodecaemicosaedro* è un poliedro con 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodeca") e 10 facce esagonali (da cui "emicosa"), 60 spigoli e 30 vertici. Condivide vertici e spigoli con il dodecadodecaedro (3.2.16) e con il grande dodecaemicosaedro (3.2.43). Poliedro scoperto da Badoureau.

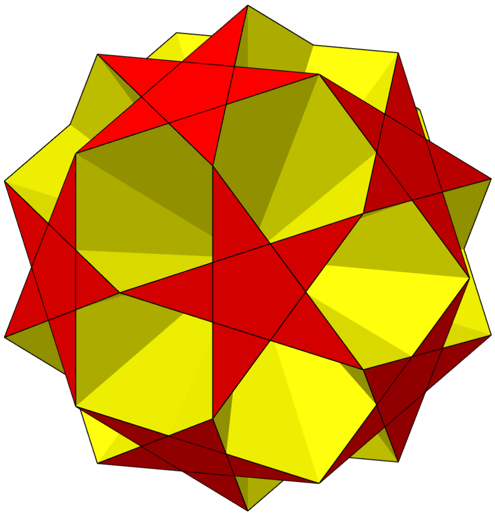


Figura 3.103: *U62: piccolo dodecaemicosaedro*

La figura 3.104 mostra un esagono e i sei pentagoni stellati con cui condivide uno spigolo. Per la struttura degli esagoni si può fare riferimento all figura 3.112, relativa al grande dodecaemicosaedro.

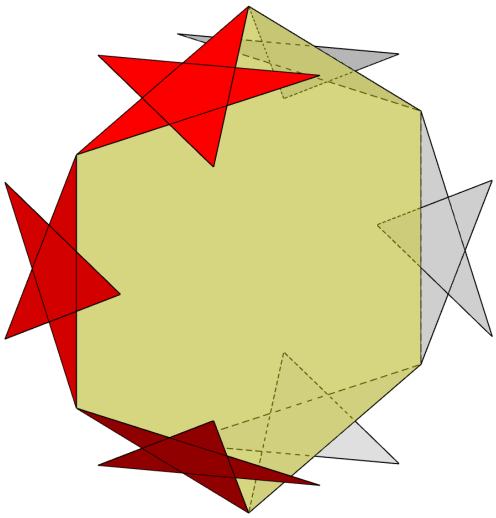


Figura 3.104: *U62: schema costruttivo del piccolo dodecaemicosaedro*

3.2.41 U63: grande dodecicosaedro

Il *grande dodecicosaedro* è un poliedro con 12 facce a forma di decagono stellato (da cui "dodec") e 20 facce esagonali (da cui "icosi"), 120 spigoli e 60 vertici, che sono quelli del dodecaedro troncato. Condivide vertici e spigoli con il grande dodecicosidodecaedro ditrigonale (3.2.22) e con il grande icosicosidodecaedro (3.2.28). Poliedro scoperto da Badoureau.

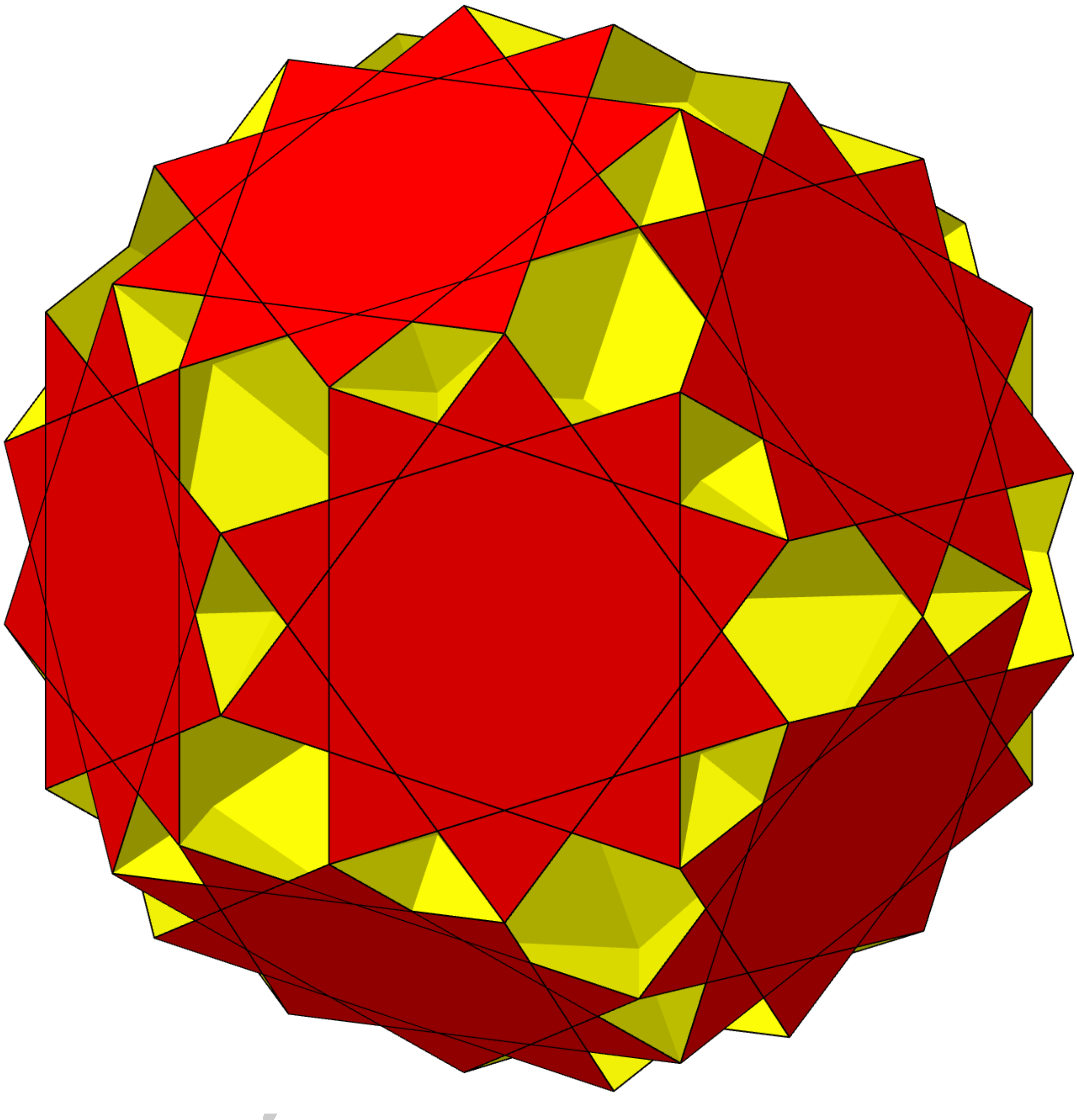


Figura 3.105: *U63: piccolo dodecaemicosaedro*

La figura 3.106 mostra il dodecaedro troncato, involucro convesso del grande dodecicosaedro, con evidenziati i perimetri dei decagoni stellati.

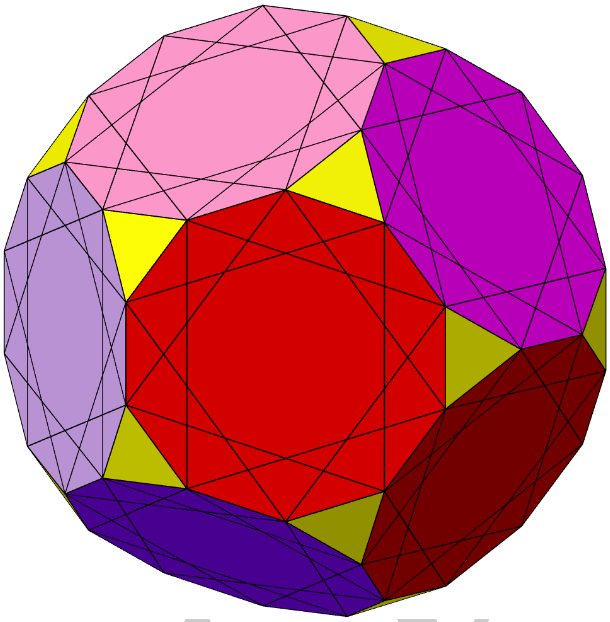


Figura 3.106: *U63: il dodecaedro troncato, involucro convesso del grande dodecicosaedro*

La figura 3.107 mostra cinque degli esagoni intersecantesi del grande dodecicosaedro e come i loro vertici sono scelti tra quelli del dodecaedro troncato.

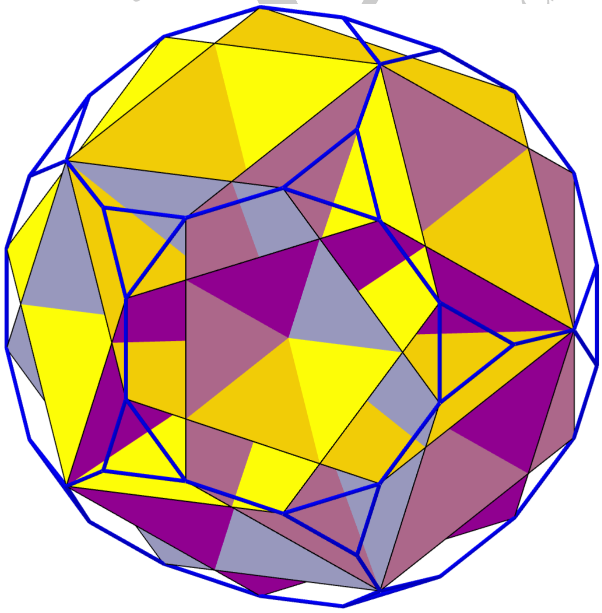


Figura 3.107: *U63: schema costruttivo di cinque esagoni del grande dodecicosaedro*

3.2.42 U64: grande dodecicosidodecaedro camuso

Il *grande dodecicosidodecaedro camuso* è un poliedro con 24 facce a forma di pentagono stellato e 80 facce triangolari, 180 spigoli e 60 vertici. Il nome deriva dal grande dodecicosidodecaedro di cui è la forma camusa. Poliedro scoperto da Coxeter e Miller.

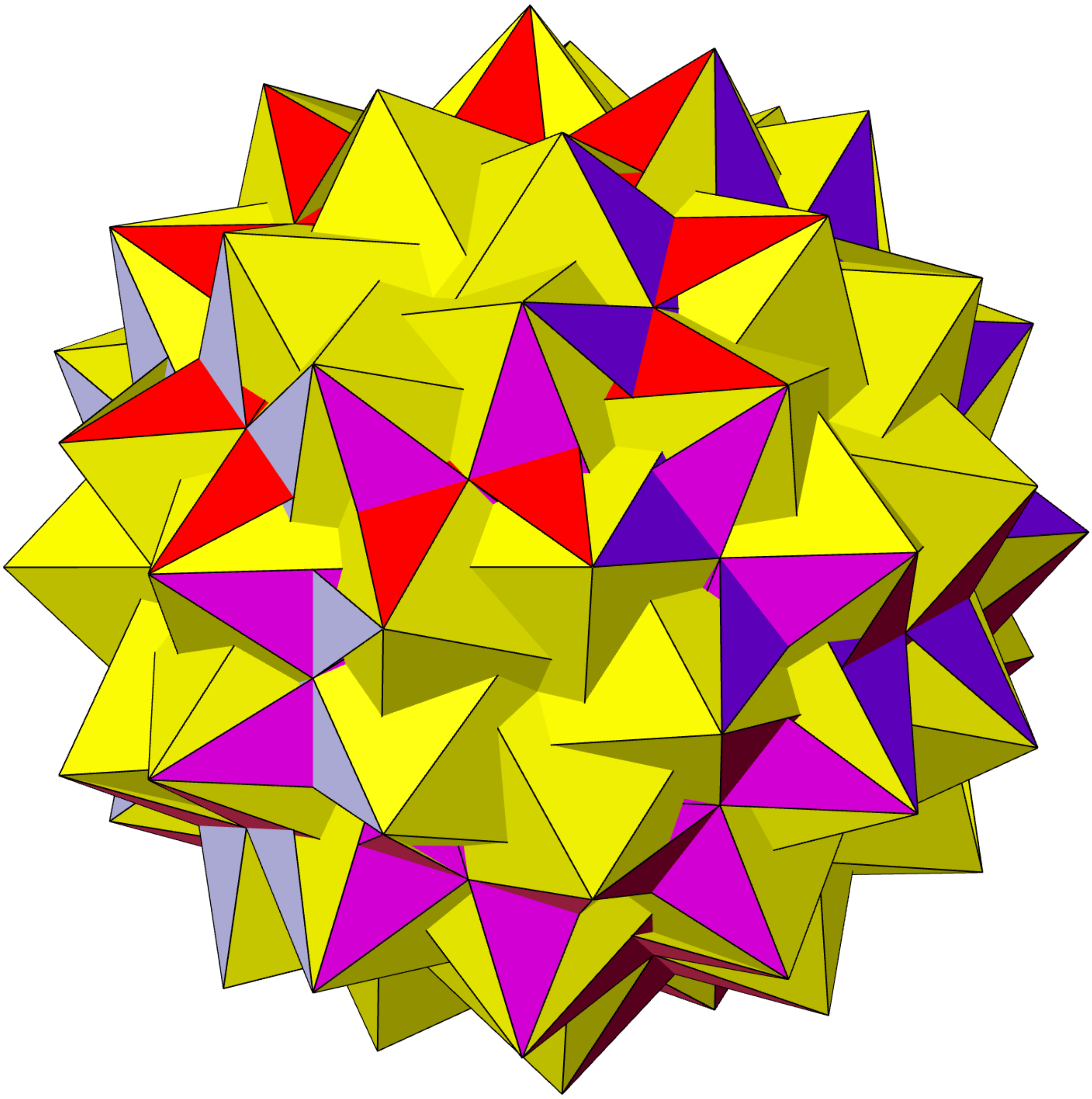


Figura 3.108: *U64: grande dodecicosidodecaedro camuso*

La figura 3.109 evidenzia una particolarità di questo poliedro: i 24 pentagoni stellati sono a due a due complanari, a formare una specie di decagono stellato, non però regolare.

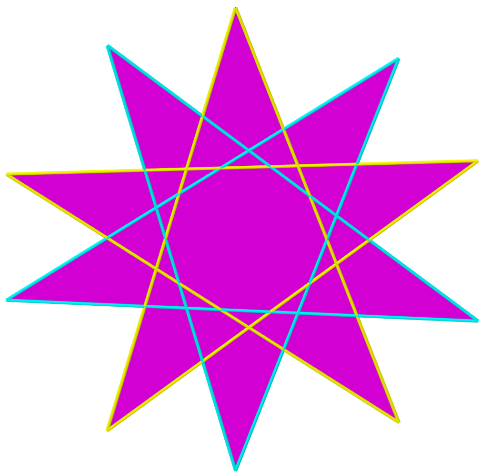


Figura 3.109: *U64: due pentagoni stellati complanari del grande dodecicosidodecaedro camuso*

La figura 3.110 mostra cinque gruppi di due pentagoni stellati complanari, circondanti uno stesso gruppo di due pentagoni stellati complanari (in rosso nella figura).

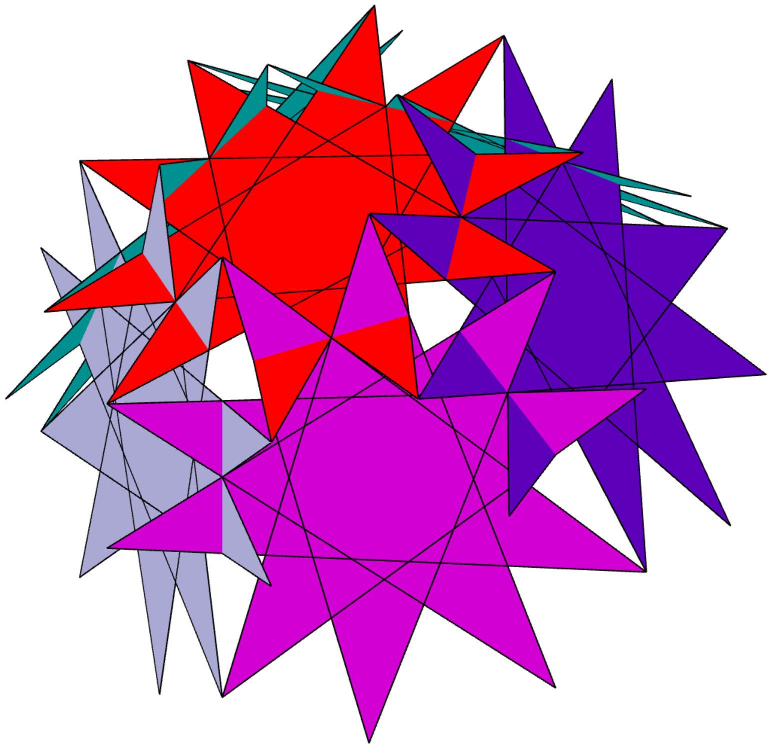


Figura 3.110: *U64: schema costruttivo del grande dodecicosidodecaedro camuso*

3.2.43 U65: grande dodecaemicosaedro

Il *grande dodecaemicosaedro* è un poliedro con 12 facce pentagonali (da cui "dodeca") e 10 facce esagonali (da cui "emicosa"), 60 spigoli e 30 vertici. Condivide vertici e spigoli con il dodecadodecaedro (3.2.16) e con il piccolo dodecaemicosaedro (3.2.40). Poliedro scoperto da Badoureau.

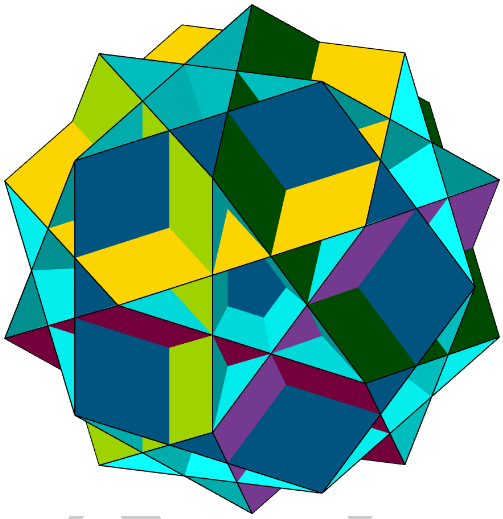


Figura 3.111: *U65: grande dodecaemicosaedro*

La figura 3.112 mostra cinque esagoni intersecantesi utilizzati per costruire il grande dodecaemicosaedro. Per la struttura dei pentagoni si può fare riferimento alla figura 3.34, relativa al dodecadodecaedro.

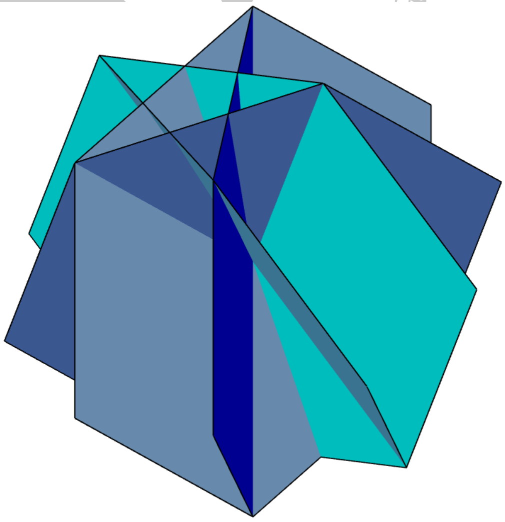


Figura 3.112: *U65: evidenziazione di cinque esagoni intersecantesi del grande dodecaemicosaedro*

3.2.44 U66: grande dodecaedro troncato stellato

Il *grande dodecaedro troncato stellato* è un poliedro con 20 facce triangolari e 12 facce a forma di decagono stellato, 90 spigoli e 60 vertici. Poliedro scoperto da Pitsch.

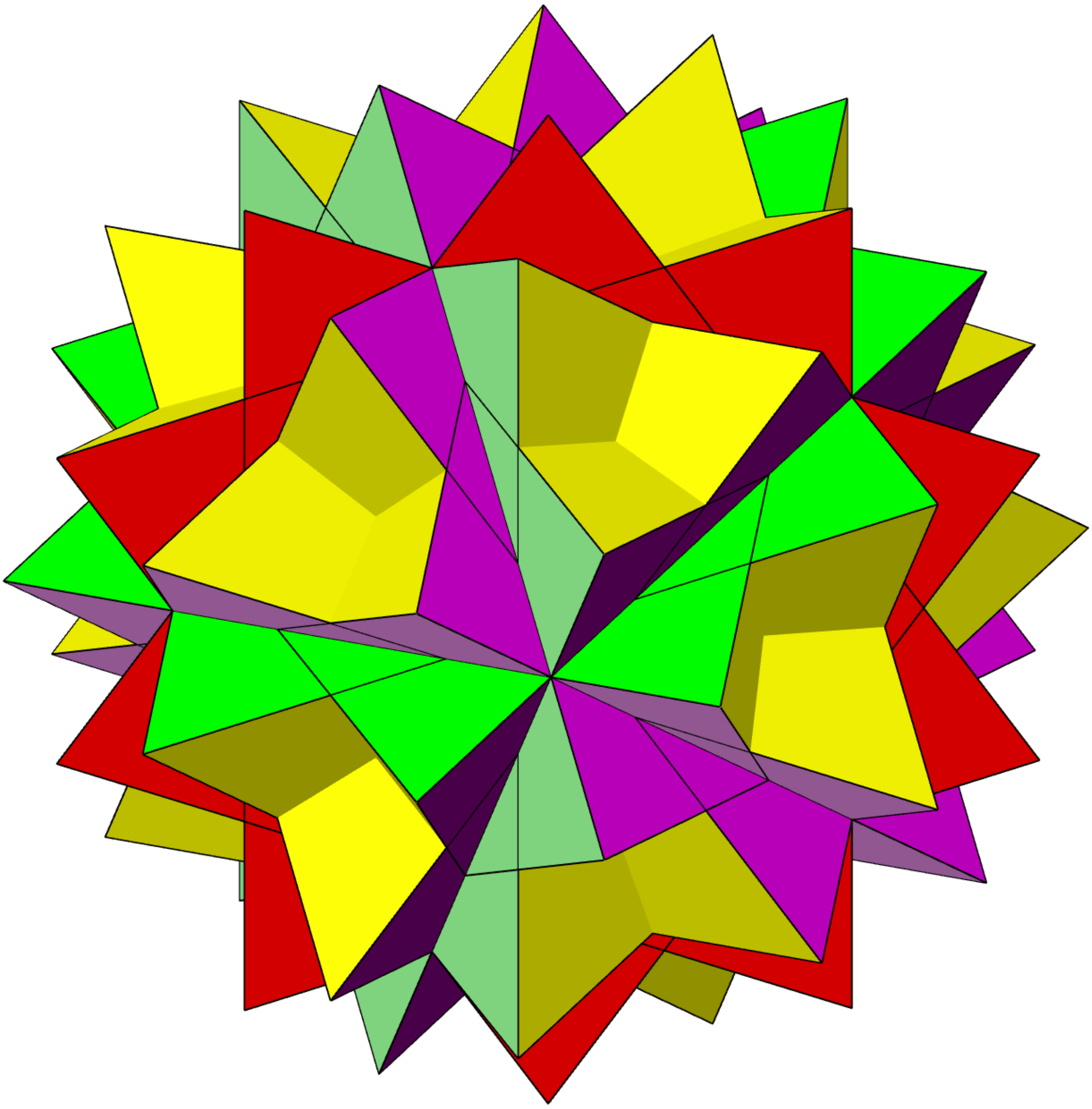


Figura 3.113: *U66: grande dodecaedro troncato stellato*

I decagoni stellati e i triangoli che servono a costruire questo poliedro sono abbastanza facilmente evidenziabili nella precedente figura 3.113.

3.2.45 U67: grande rombicosidodecaedro uniforme

Il *grande rombicosidodecaedro uniforme* è un poliedro con 30 facce quadrate (da cui “romb”), 20 facce triangolari (da cui “icosi”) e 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui “dodeca”), 120 spigoli e 60 vertici, che condivide con il grande dodecaedro troncato (3.2.17), con il grande dodecicosidodecaedro (3.2.39) e con il grande rombidodecaedro (3.2.51). Un’idea della sua struttura si può ricavare dalle figure 3.100 e 3.101.

Poliedro scoperto da Badoureau.

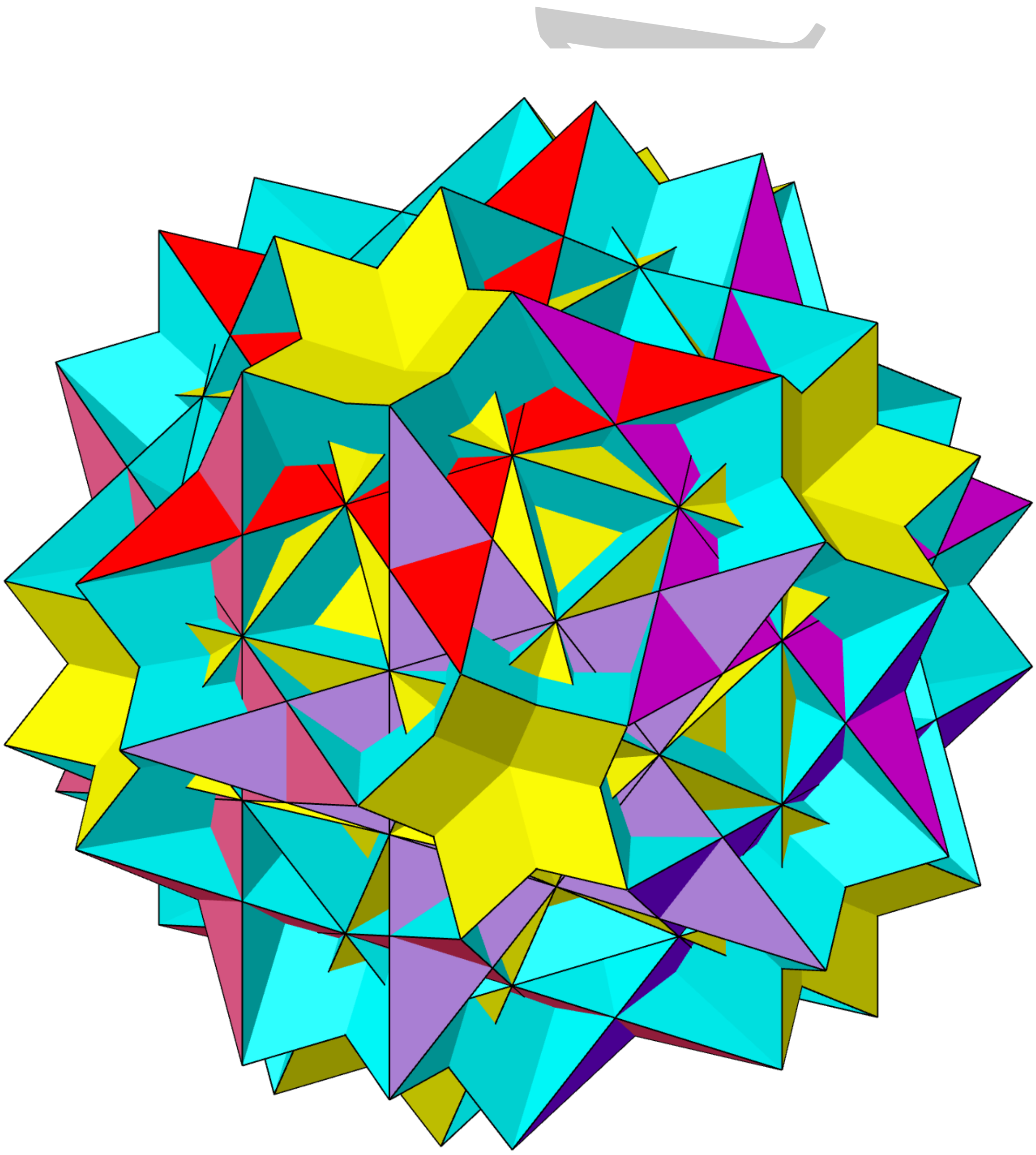


Figura 3.114: *U67: grande rombicosidodecaedro uniforme*

3.2.46 U68: grande icosidodecaedro troncato

Il *grande icosidodecaedro troncato* è un poliedro con 30 facce quadrate, 20 facce esagonali e 12 facce a forma di decagono stellato, 180 spigoli e 120 vertici. Il nome deriva dal fatto che il suo involucro convesso ha la stessa struttura dell'icosidodecaedro troncato, ma con facce non tutte regolari. Poliedro scoperto da Badoureau e Pitsch.

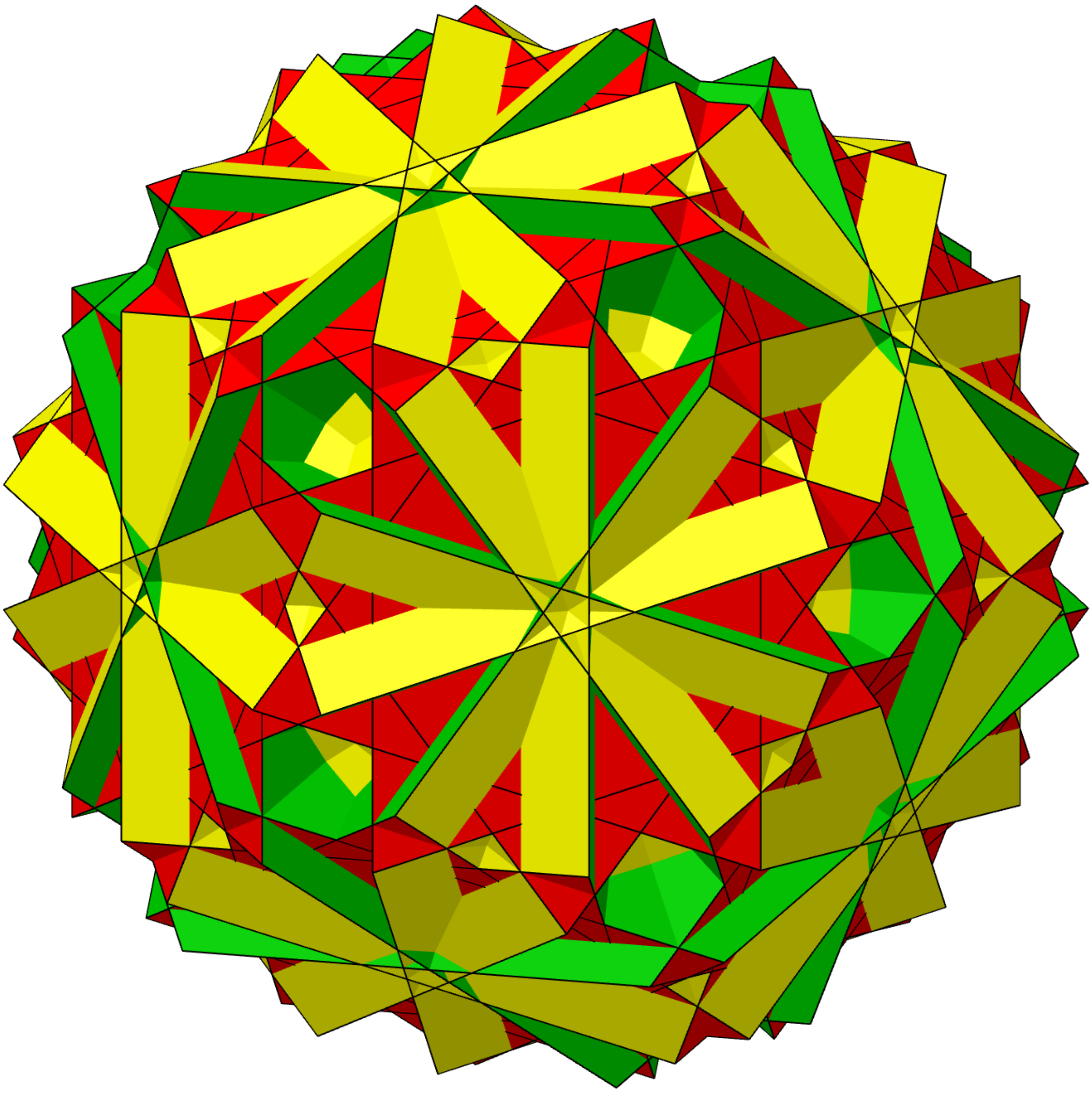


Figura 3.115: *U68: grande icosidodecaedro troncato*

La figura 3.116 mostra un decagono stellato e cinque esagoni ad esso collegati.

Figura 3.116: *U68: un decagono stellato e cinque esagoni del grande icosidodecaedro troncato*

La figura 3.117 mostra mostra un decagono stellato e cinque quadrati ad esso collegati. Il confronto delle figure 3.116 e 3.117 con la figura del poliedro completo, 3.115, aiuta a comprendere il motivo dello strano aspetto di questo poliedro.

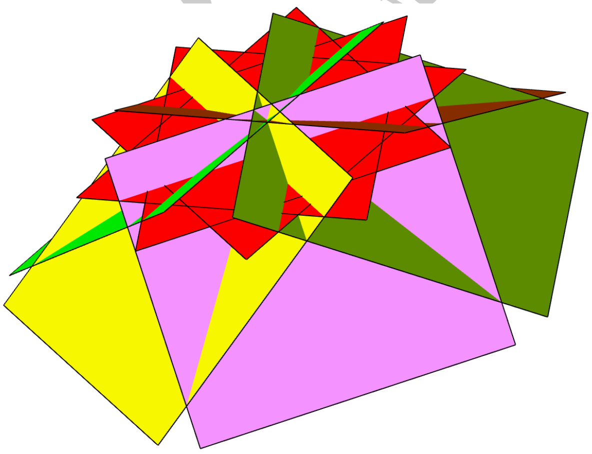


Figura 3.117: *U68: un decagono stellato e cinque quadrati del grande icosidodecaedro troncato*

3.2.47 U69: grande icosidodecaedro camuso inverso

Il *grande icosidodecaedro camuso inverso* è un poliedro con 80 facce triangolari e 12 facce a forma di pentagono stellato, 150 spigoli e 60 vertici. Poliedro scoperto da Coxeter e Miller

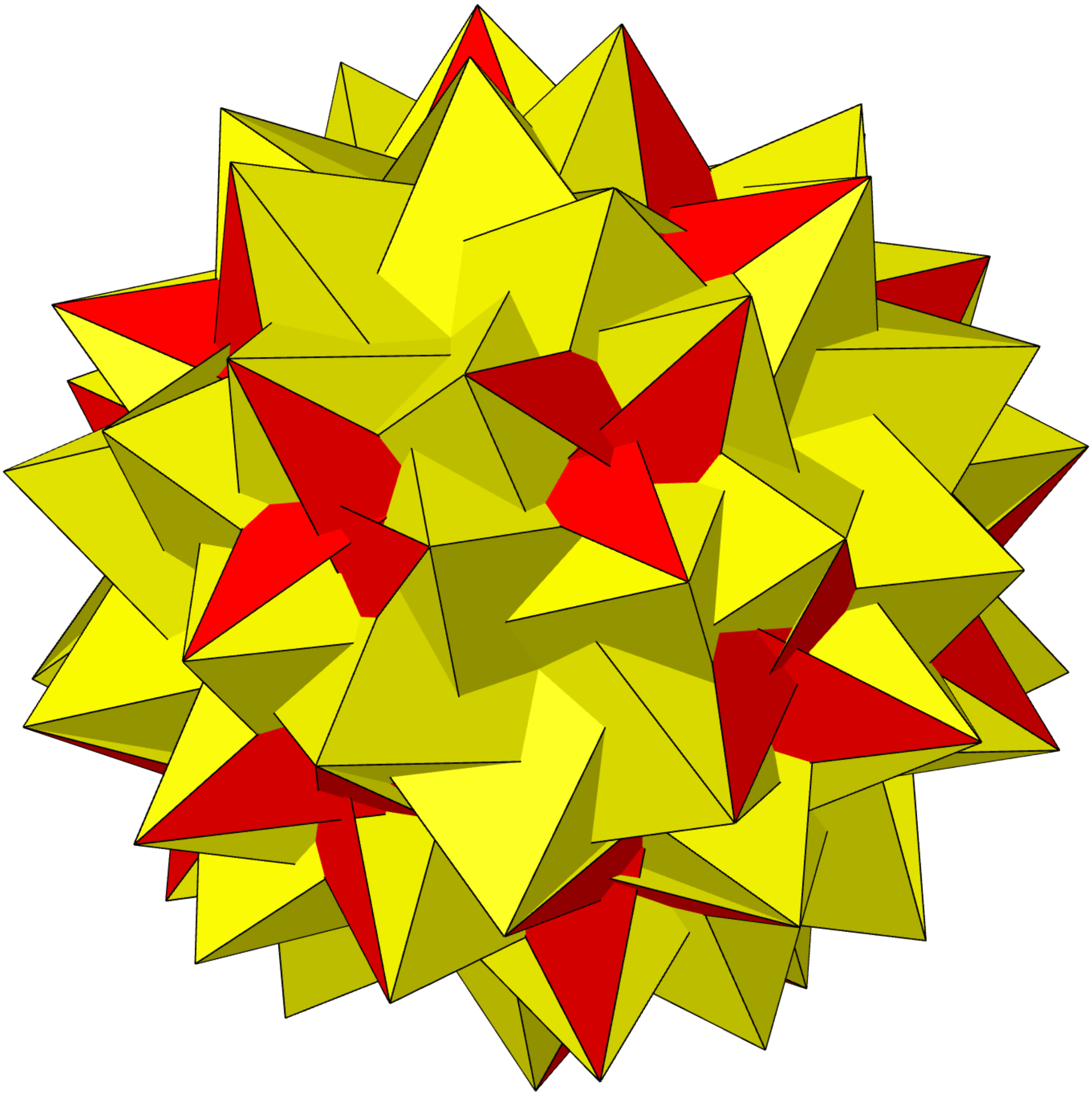


Figura 3.118: *U69: grande icosidodecaedro troncato*

Solo per evidenziare la complessa struttura di questo poliedro mostriamo nelle figure 3.119 e 3.120 tre pentagoni stellati intrecciati e cinque triangoli intrecciati rispettivamente.

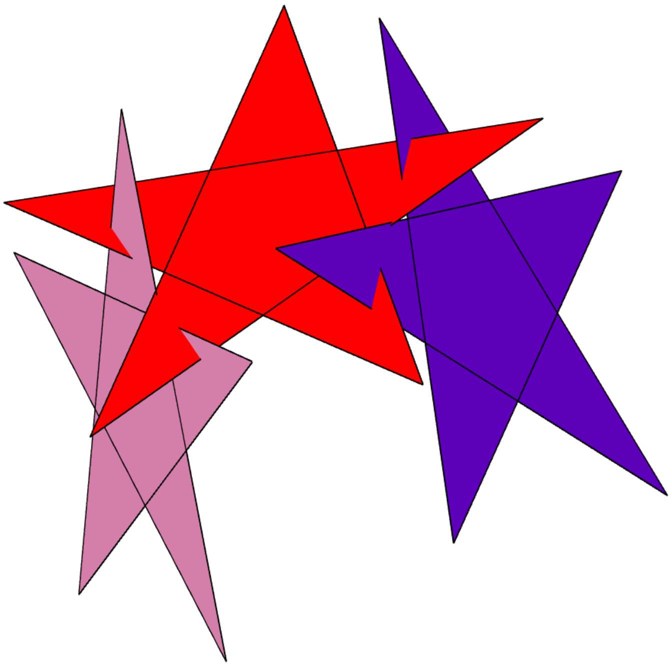


Figura 3.119: *U69: tre pentagoni stellati intrecciati del grande icosidodecaedro camuso inverso*

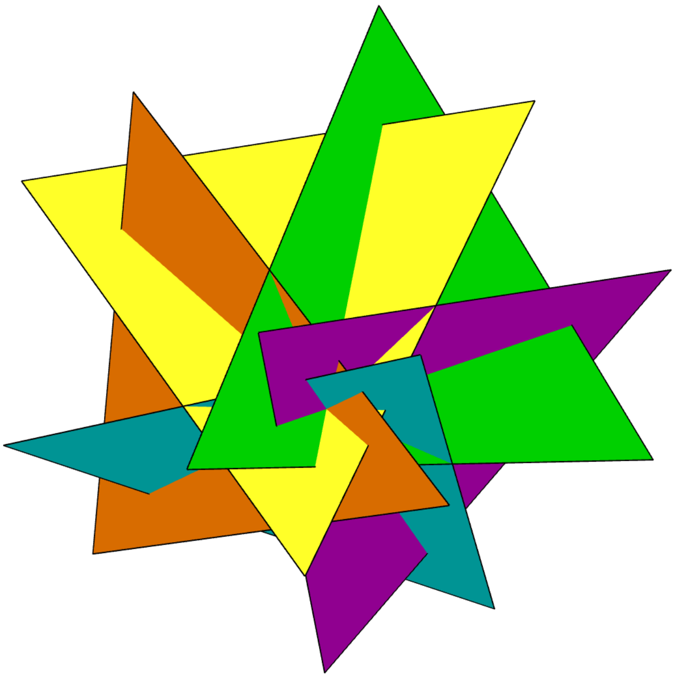


Figura 3.120: *U69: cinque triangoli intrecciati del grande icosidodecaedro camuso inverso*

3.2.48 U70: grande dodecaemidodecaedro

Il *grande dodecaemidodecaedro* è un poliedro con 12 facce a forma di pentagono stellato (da cui "dodeca") e 6 facce a forma di decagono stellato (da cui "emidodeca"), 60 spigoli e 30 vertici, che sono quelli dell'icosidodecaedro. I vertici e i pentagoni stellati sono gli stessi del grande icosidodecaedro (3.2.32. I vertici e i decagoni stellati sono gli stessi del grande icosiemidodecaedro (3.2.49). Poliedro scoperto da Badoureau.

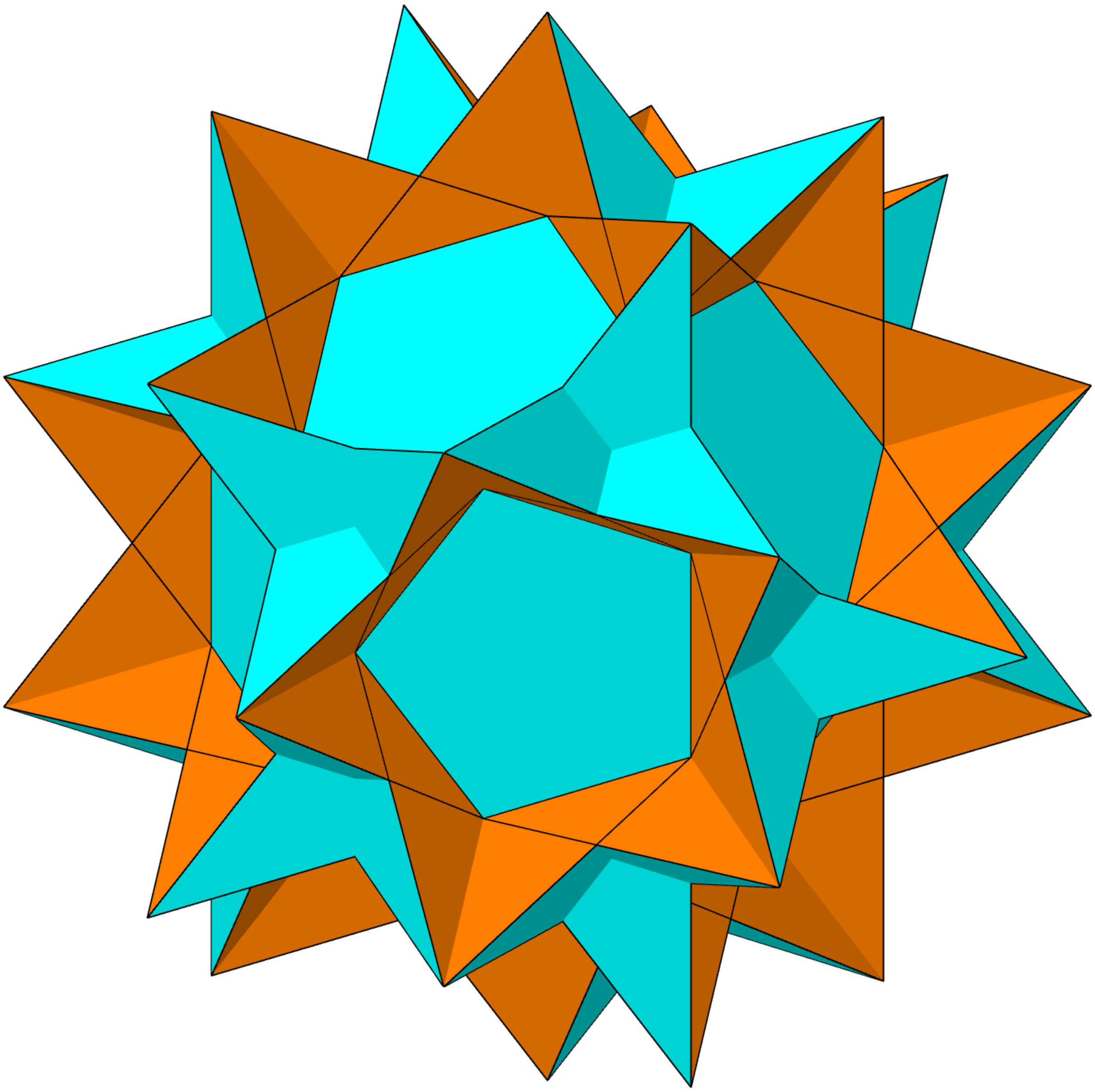


Figura 3.121: *U70: grande dodecaemidodecaedro*

La figura 3.122 mostra come uno dei decagoni stellati si costruisce a partire dall'icosidodecaedro circoscritto. Per la relazione tra i pentagoni stellati e l'icosidodecaedro circoscritto si può fare riferimento alla figura 3.80.

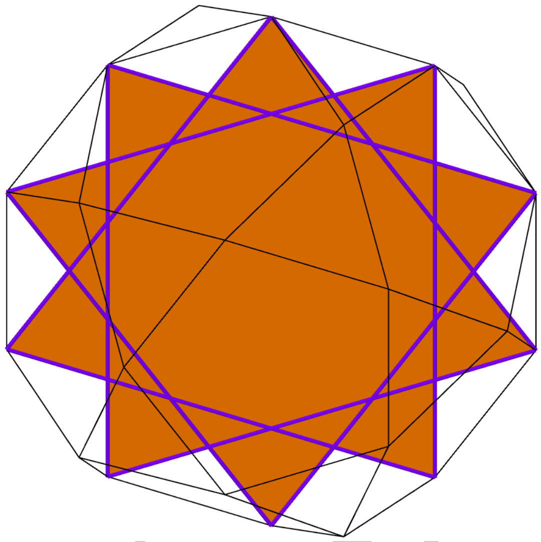


Figura 3.122: *U70: schema costruttivo del grande dodecaemidodecaedro - 1*

La figura 3.123 mostra un decagono stellato e due pentagoni stellati intersecantesi utilizzati per costruire il poliedro in esame.

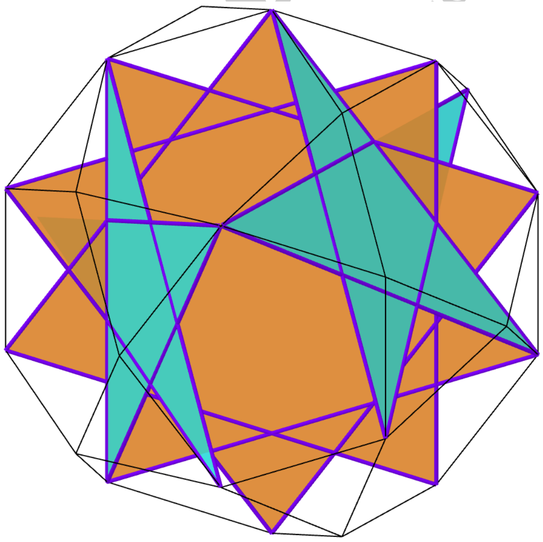


Figura 3.123: *U70: schema costruttivo del grande dodecaemidodecaedro - 2*

3.2.49 U71: grande icosiemidodecaedro

Il *grande icosiemidodecaedro* è un poliedro con 20 facce triangolari (da cui "icosi") e 6 facce a forma di decagono stellato (da cui "emidodeca"), 60 spigoli e 30 vertici, che sono quelli dell'icosidodecaedro. I vertici e i decagoni stellati sono gli stessi del grande dodecaemidodecaedro (3.2.48). I vertici e i triangoli sono gli stessi del grande icosidodecaedro (3.2.32). Poliedro scoperto da Badoureau.

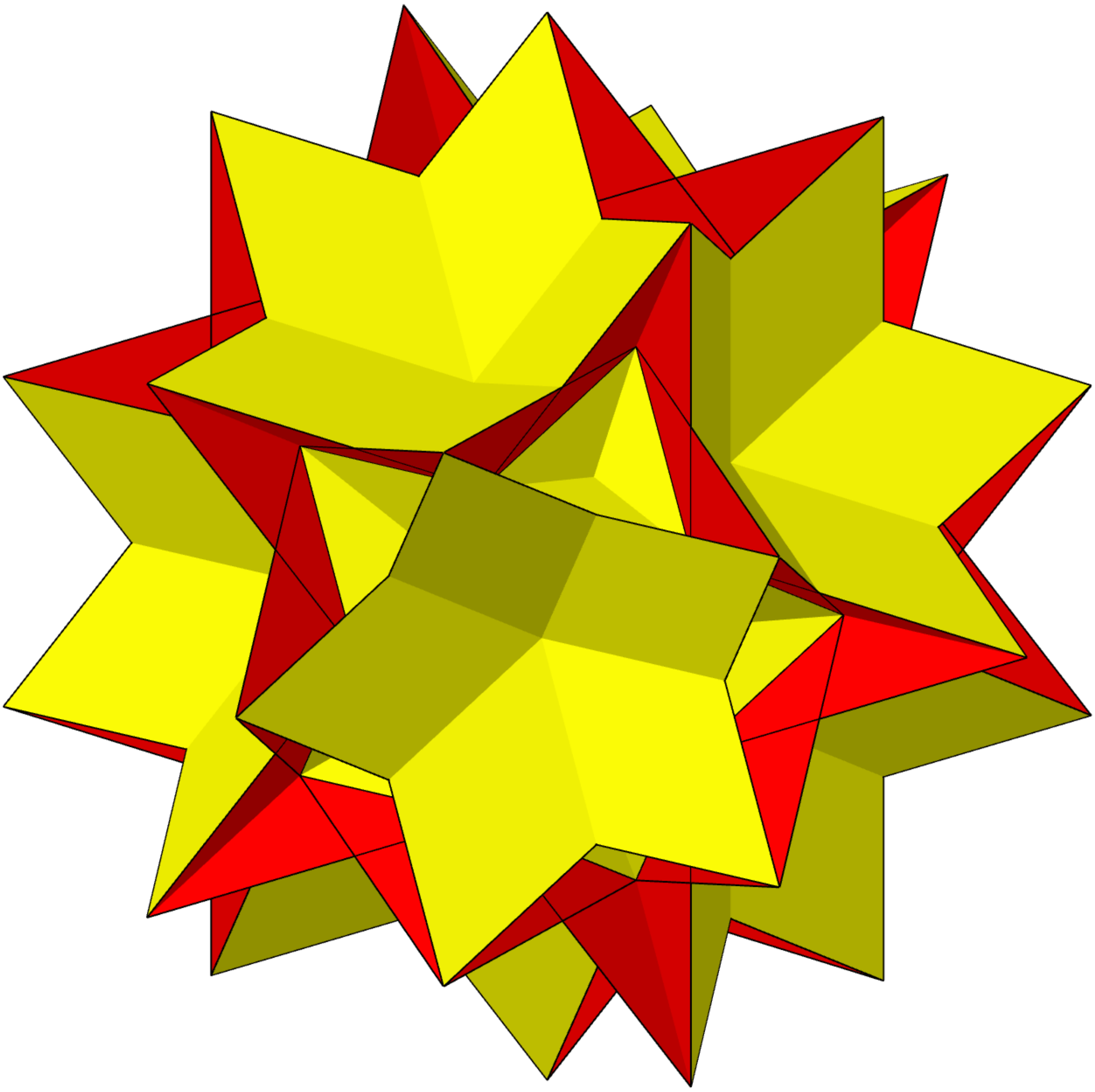


Figura 3.124: *U71: grande icosiemidodecaedro*

La figura 3.125 evidenzia cinque dei triangoli intersecantesi utilizzati per costruire il solido in esame: essi si incontrano su un punto che sta sulla perpendicolare per il centro al decagono stellato evidenziato nella stessa figura.

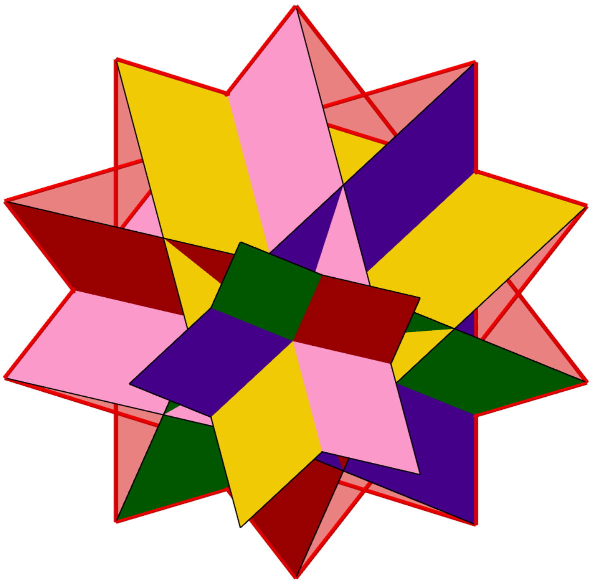


Figura 3.125: *U71: schema costruttivo del grande icosiemidodecaedro - 1*

La figura 3.126 mostra gli stessi cinque triangoli della precedente figura 3.125 evidenziando come essi sono costruiti a partire dall'icosidodecaedro circoscritto.

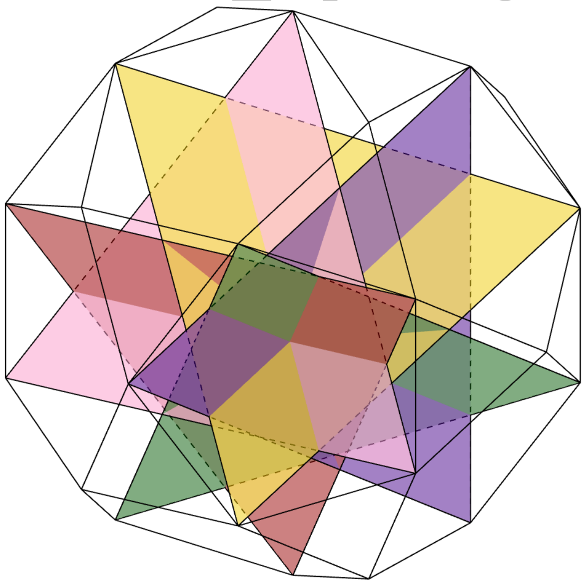


Figura 3.126: *U71: schema costruttivo del grande icosiemidodecaedro - 2*

3.2.50 U72: piccolo icosicosidodecaedro retrocamuso

Il *piccolo icosicosidodecaedro retrocamuso* è un poliedro con 100 facce triangolari e 12 facce a forma di pentagono stellato, 180 spigoli e 60 vertici. Poliedro scoperto da Coxeter e Miller

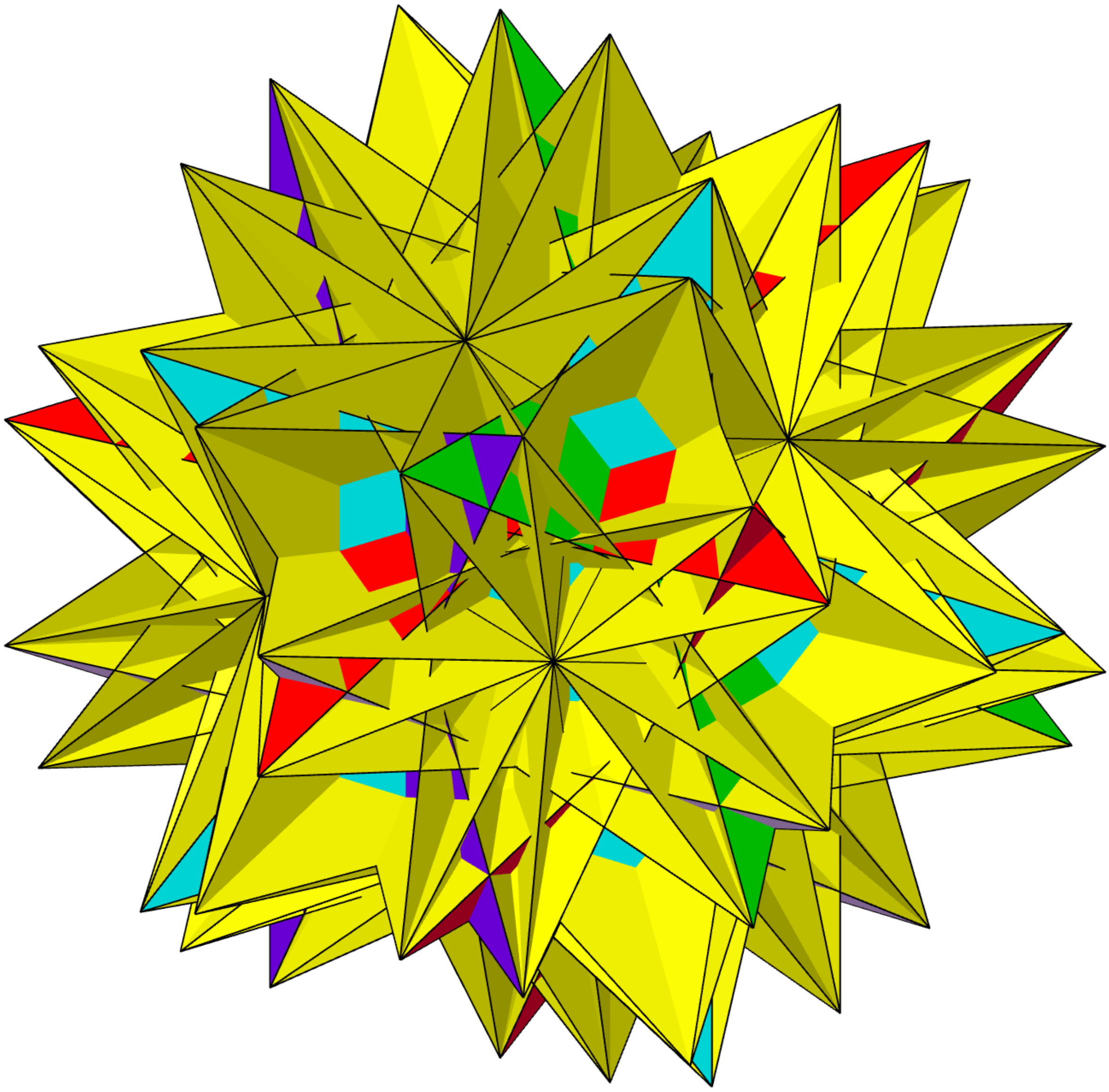


Figura 3.127: *U72: piccolo icosicosidodecaedro retrocamuso*

Solo per evidenziare la complessa struttura di questo poliedro mostriamo nelle figure 3.128 e 3.129 tre pentagoni stellati intrecciati e nove triangoli intrecciati rispettivamente.

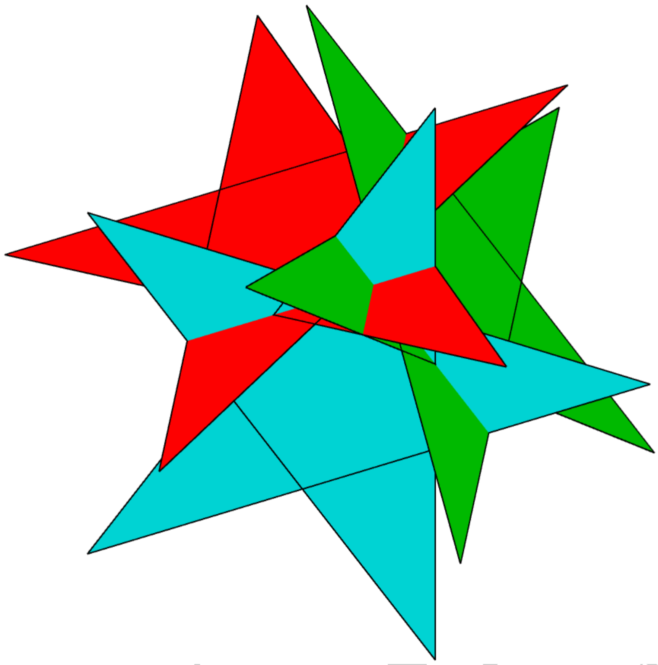


Figura 3.128: *U72: tre pentagoni stellati intrecciati del piccolo icosicosidodecaedro retrocamuso*

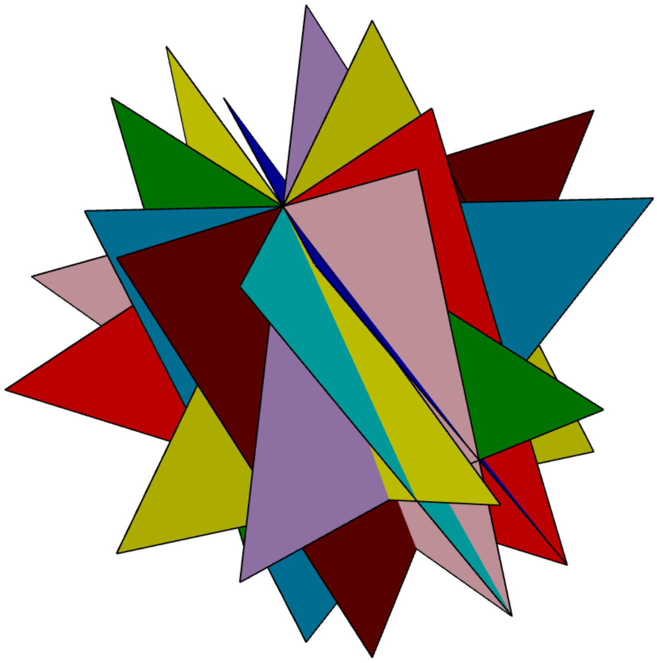


Figura 3.129: *U72: nove triangoli intrecciati del piccolo icosicosidodecaedro retrocamuso*

3.2.51 U73: grande rombidodecaedro

Il *grande rombidodecaedro* è un poliedro con 30 facce quadrate (da cui "rombi") e 12 facce a forma di decagono stellato (da cui "dodeca"), 120 spigoli e 60 vertici che condivide con il grande dodecaedro troncato (3.2.17), con il grande dodecicosidodecaedro (3.2.39) e con il grande rombicosidodecaedro (3.2.45). I decagoni stellati sono gli stessi del grande dodecicosidodecaedro (3.2.39) e alla figura 3.99 si può fare riferimento per avere un'idea della struttura di questo poliedro. Poliedro scoperto da Badoureau.

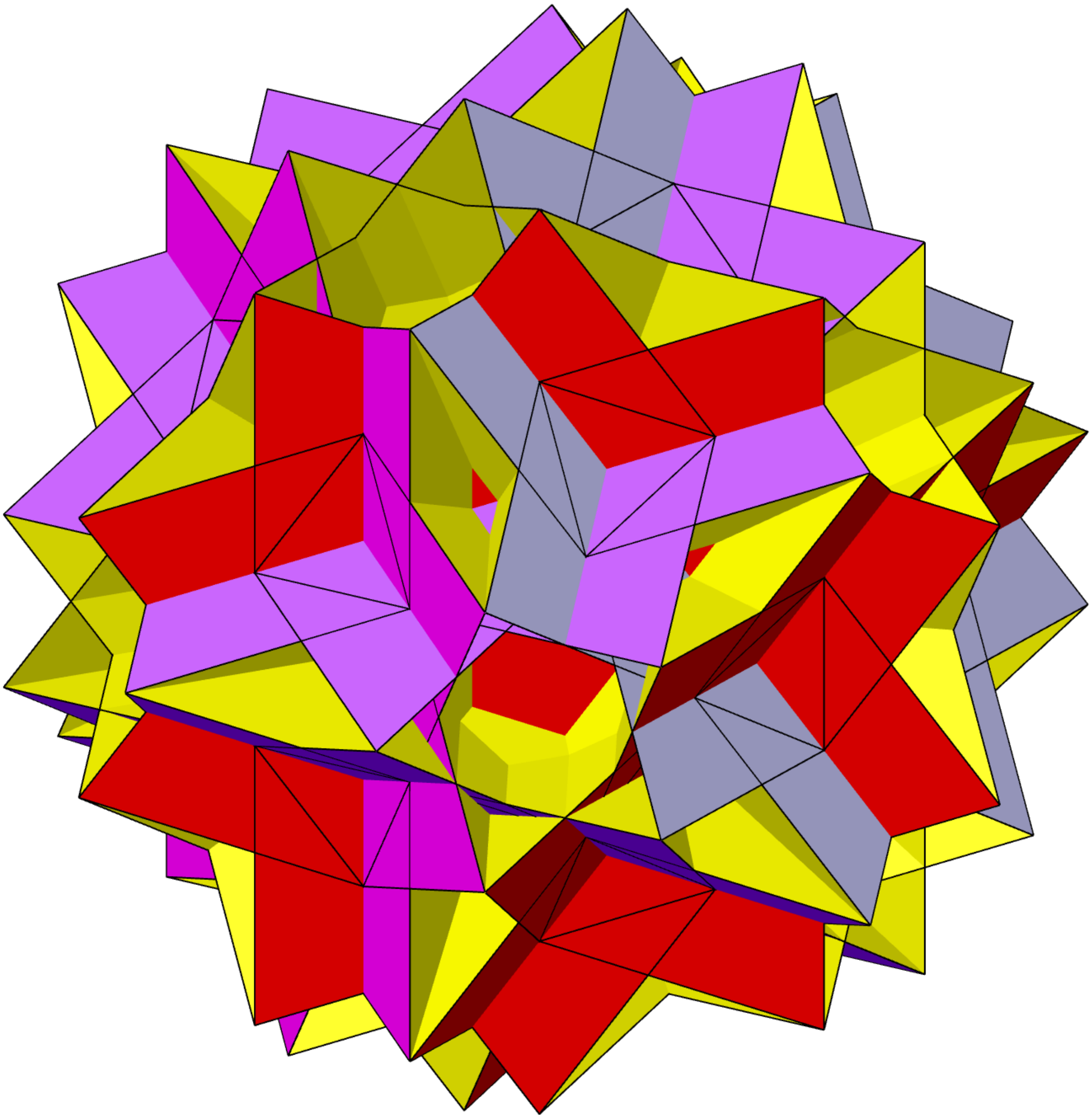


Figura 3.130: *U73: grande rombidodecaedro*

3.2.52 U74: grande icosidodecaedro retrocamuso

Il *grande icosidodecaedro retrocamuso* è un poliedro con 80 triangolari e 12 facce a forma di pentagono stellato, 150 spigoli e 60 vertici. Poliedro scoperto da Coxeter e Miller.

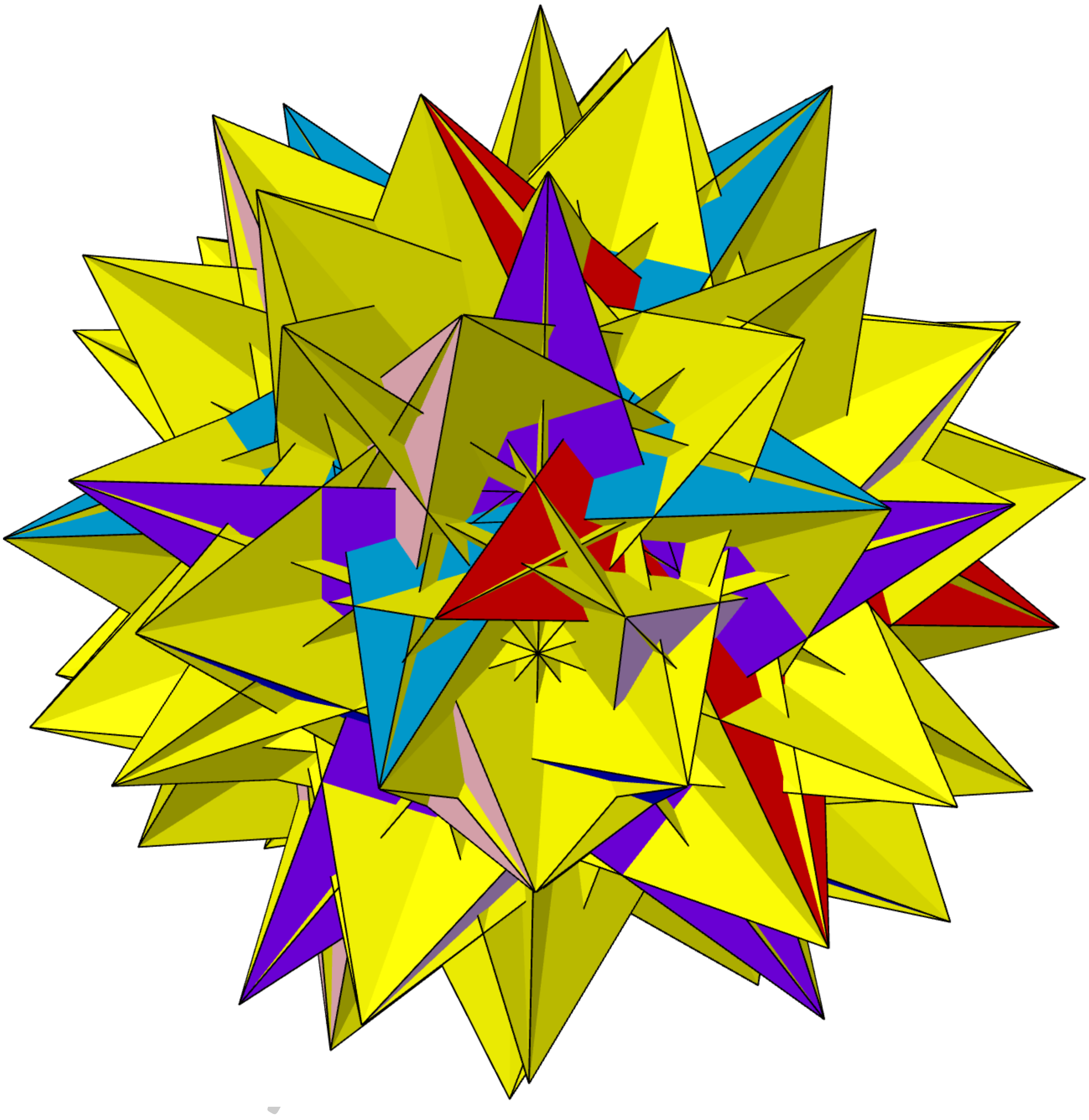


Figura 3.131: *U74: grande icosidodecaedro retrocamuso*

3.2.53 U75: grande dirombicosidodecaedro

Il *grande dirombicosidodecaedro* è un poliedro con 60 facce quadrate (da cui "rombi"), 40 facce triangolari (da cui "di+icosa") e 24 facce a forma di pentagono stellato (da cui "di+dodeca"), 240 spigoli e 60 vertici, che sono quelli di un pseudo rombicosidodecaedro (le facce quadrate del rombicosidodecaedro sono deformate in rettangoli). Ha la proprietà che tutte le facce quadrate passano per il centro di simmetria del poliedro.

Poliedro scoperto da Coxeter e Miller.

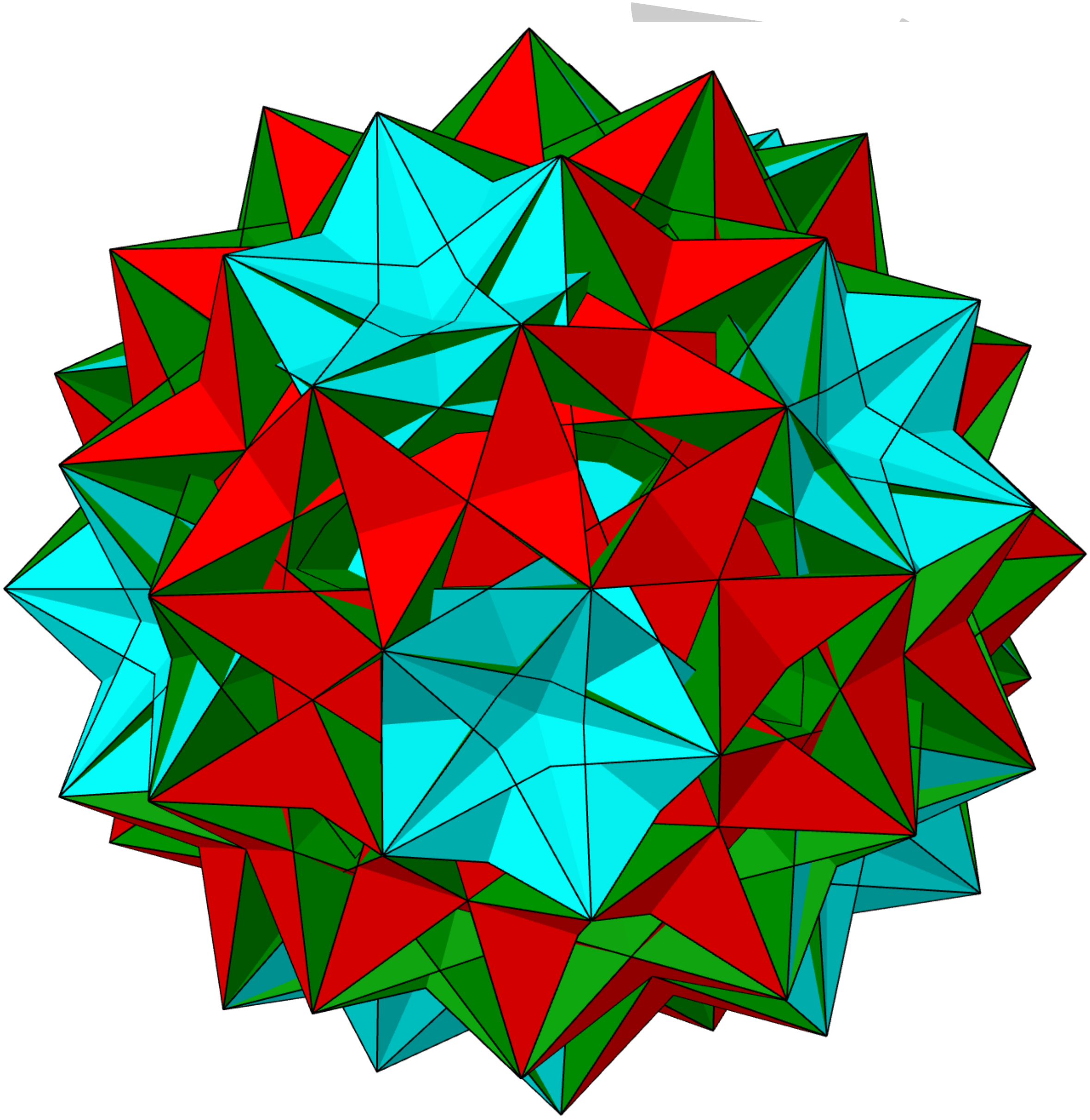


Figura 3.132: *U75: grande dirombicosidodecaedro*

Il grande dirombicosidodecaedro, ultimo poliedro uniforme dell'elenco ufficiale, ha caratteristiche uniche nell'insieme dei poliedri uniformi. Infatti tutte le sue facce si suddividono in coppie di facce complanari: due pentagoni stellati, due quadrati e due triangoli, come mostrato nella figura 3.133.

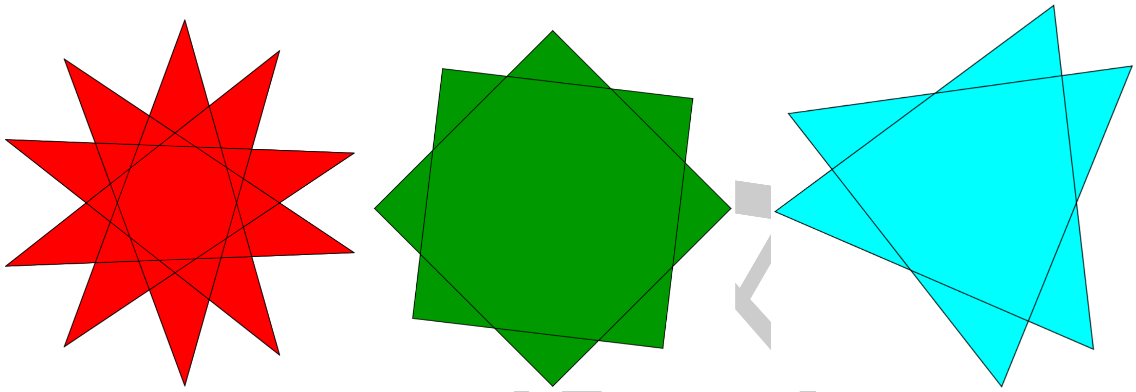


Figura 3.133: *U75: grande dirombicosidodecaedro*

Inoltre il poliedro ha la proprietà singolare di avere ben otto facce diverse che concorrono in ogni vertice: due pentagoni stellati, due triangoli e quattro quadrati, come mostrato nella figura 3.134.

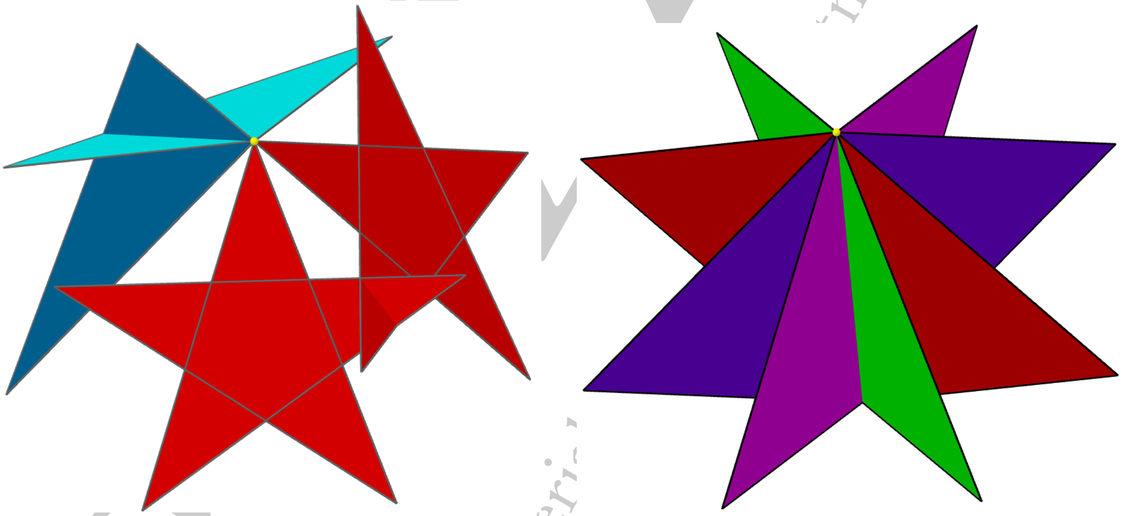


Figura 3.134: *U75: grande dirombicosidodecaedro*

Per la sua complessità il poliedro è anche noto con l'appellativo di *Mostro di Miller*.

È da segnalare che esiste un ulteriore figura con tutte le caratteristiche dei poliedri uniformi, tranne la condizione che solo due facce si incontrino in ogni spigolo, condizione che è di solito ritenuta fondamentale per il concetto stesso di poliedro. Se si rinuncia a questa richiesta, mantenendo tutte le restanti condizioni, si può appunto costruire un ulteriore "poliedro uniforme", il *grande dirombidodecaedro dicamuso*, con 120 facce triangolari, 40 facce quadrate e 24 facce a forma di pentagono stellato. Condivide i vertici e gli spigoli con il grande dirombicosidodecaedro, di cui ha gli stessi quadrati (dunque complanari a coppie e passanti per il centro) e gli stessi pentagrammi (dunque ancora complanari a coppie), ma diversi triangoli. In 120 dei suoi spigoli convergono due facce (come succede di norma per i poliedri), negli altri 120 convergono quattro facce. Sui vertici convergono 12 facce, ma solo otto spigoli. In ragione di queste particolarità non è normalmente considerato un poliedro. La sua costruzione è dovuta a Skilling (1975) per cui è spesso citato come *poliedro di Skilling*.

4 I duali dei poliedri di Badoureau-Coxeter

4.1 Introduzione

La costruzione dei duali dei poliedri di Badoureau e Coxeter è abbastanza delicata e non possiamo addentrarci nei dettagli. Proporremo solo le immagini relativi ai 43 duali, rimandando a quanto già detto nel paragrafo 3.2 relativamente ai restanti poliedri.

Poiché la nomenclatura italiana è quasi assente, proponiamo anche il nome inglese di questi solidi, per eventuali necessità di approfondimenti.

La nomenclatura utilizzata per questi poliedri è quella proposta da Wenninger in [55] e tiene conto, tra l'altro, del numero di facce, del tipo di facce, del numero di "punte", del nome poliedro di cui è il duale. Tutti i nomi sono basati su prefissi di etimologia greca: per esempio *tridiacisicosaedro* ($DU45$), si riferisce al fatto che ci sono "tre volte due" (tridiacis) "volte venti" (icosa) facce (edro), per un totale, appunto, di 120 facce.

Segnaliamo che alcuni di questi duali sono anche stellazioni di altri poliedri. Per esempio il *piccolo icosaedro triambico*, $DU30$, è anche, come già visto nella pagina 5, la prima stellazione dell'icosaedro.

La cosa più complessa comunque relativamente a questi poliedri è il fatto che in molti casi i vertici sono interni al solido stesso e l'intreccio delle facce fa si che l'aspetto esterno di diversi poliedri sia lo stesso. In particolare ci sono cinque coppie di poliedri che sono identici nell'aspetto esterno. Rimandando alle pagine specifiche per i dettagli, proponiamo qui le immagini affiancate di queste coppie di poliedri, con l'evidenziazione di una faccia per ciascuno, per un utile confronto.

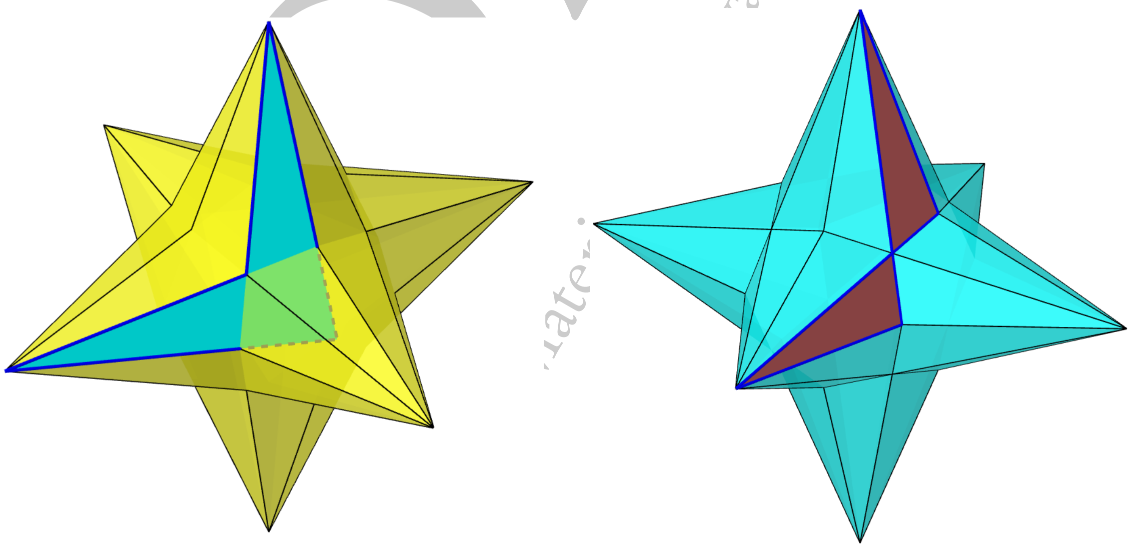


Figura 4.1: *DU13 e DU18 a confronto*

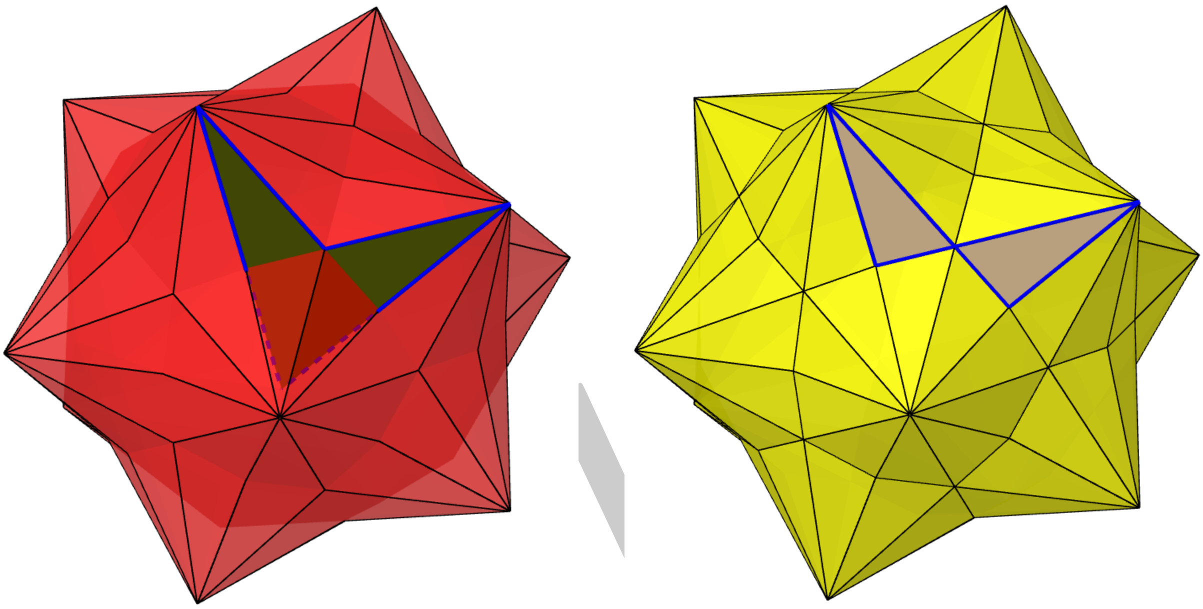


Figura 4.2: *DU33 e DU39 a confronto*

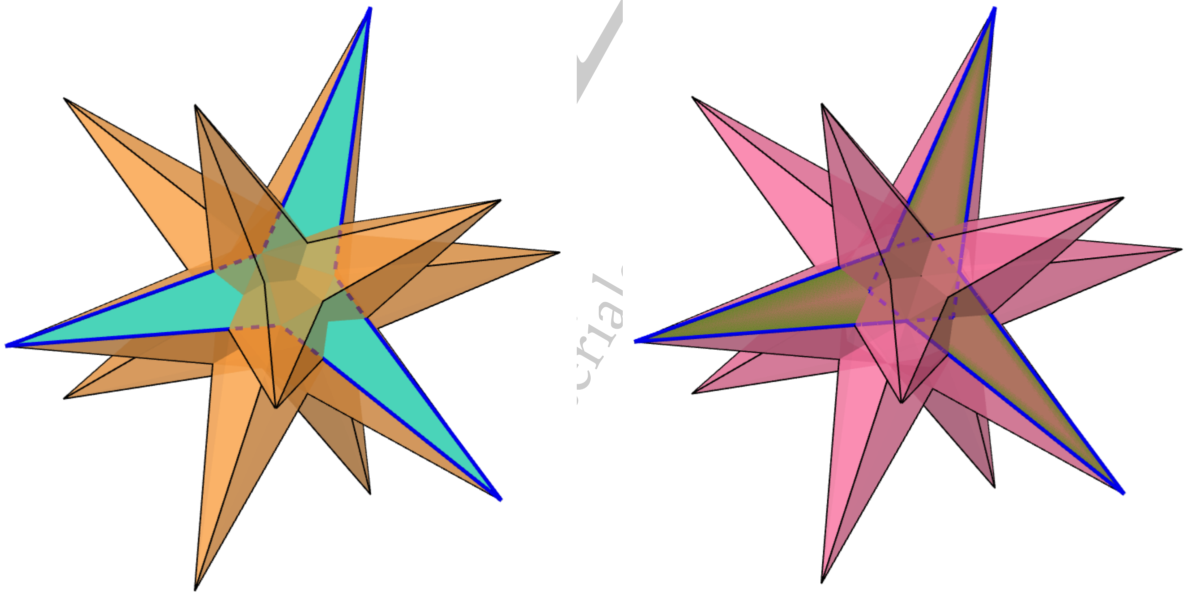


Figura 4.3: *DU41 e DU47 a confronto*

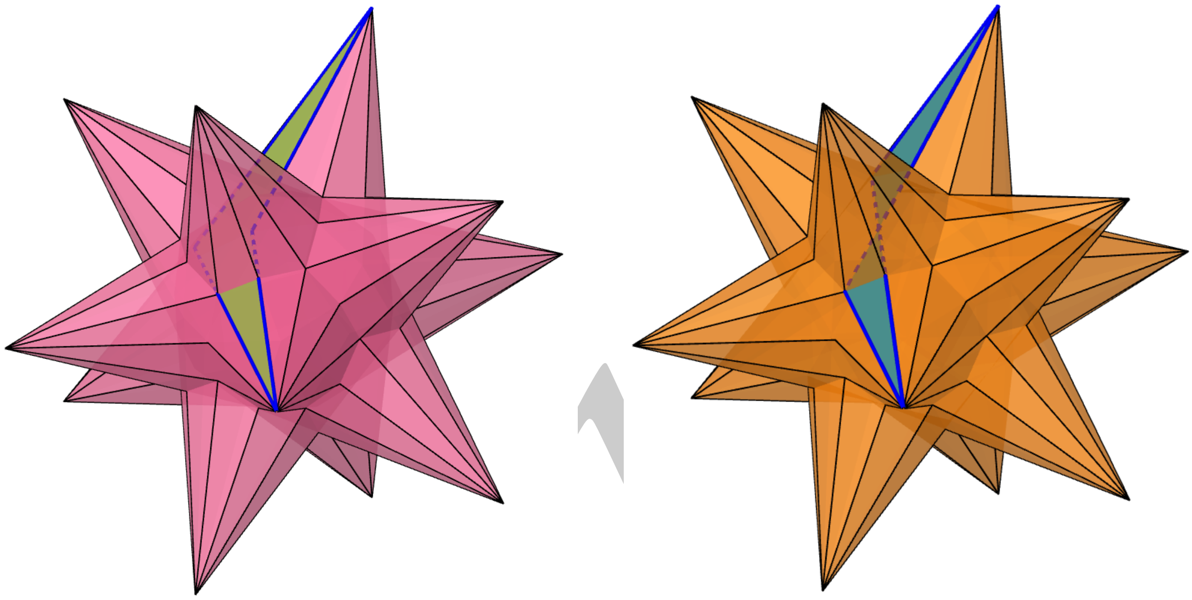


Figura 4.4: *DU43 e DU50 a confronto*

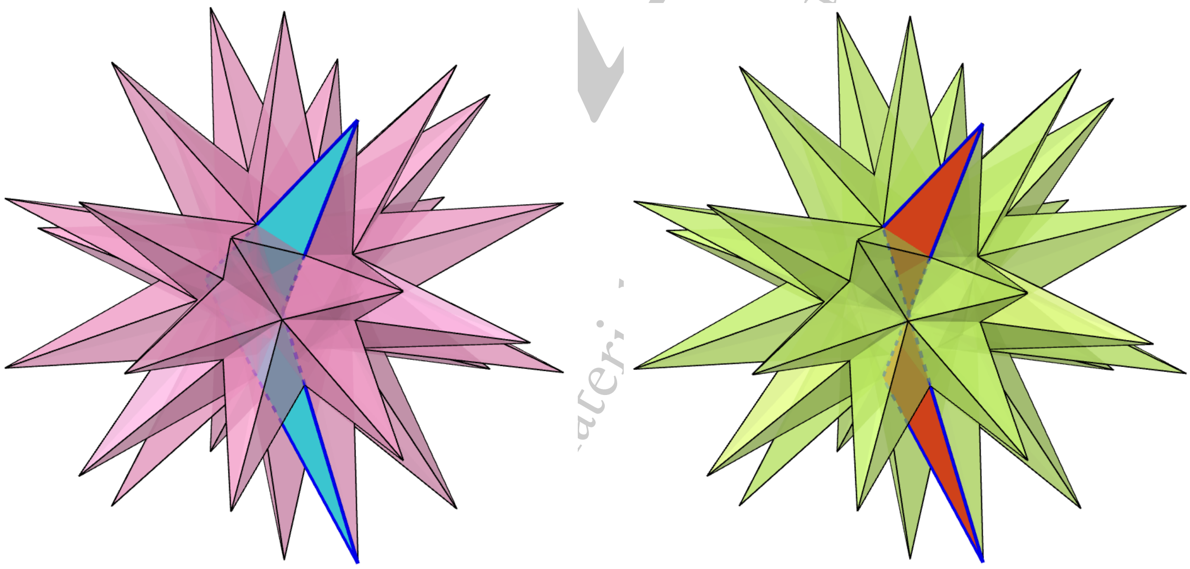


Figura 4.5: *DU67 e DU73 a confronto*

4.2 I 43 duali

4.2.1 DU13: piccolo icositetraedro esacronico

Nome inglese: Small Hexacronic Icositetrahedron. Poliedro con 24 facce, 48 spigoli e 20 vertici.

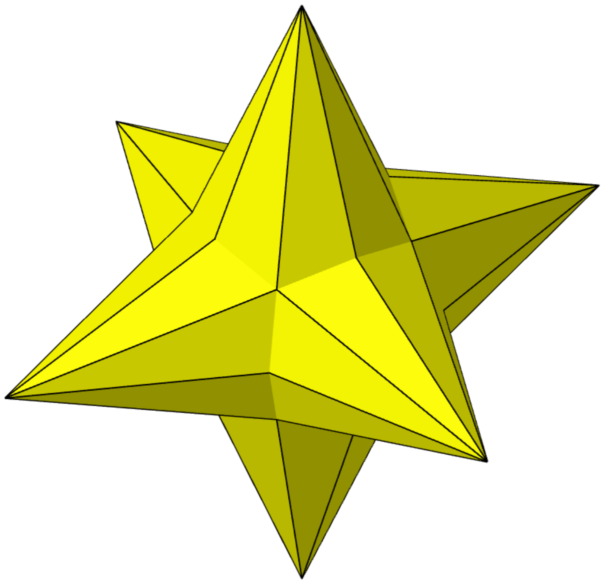


Figura 4.6: *DU13: piccolo icositetraedro esacronico*

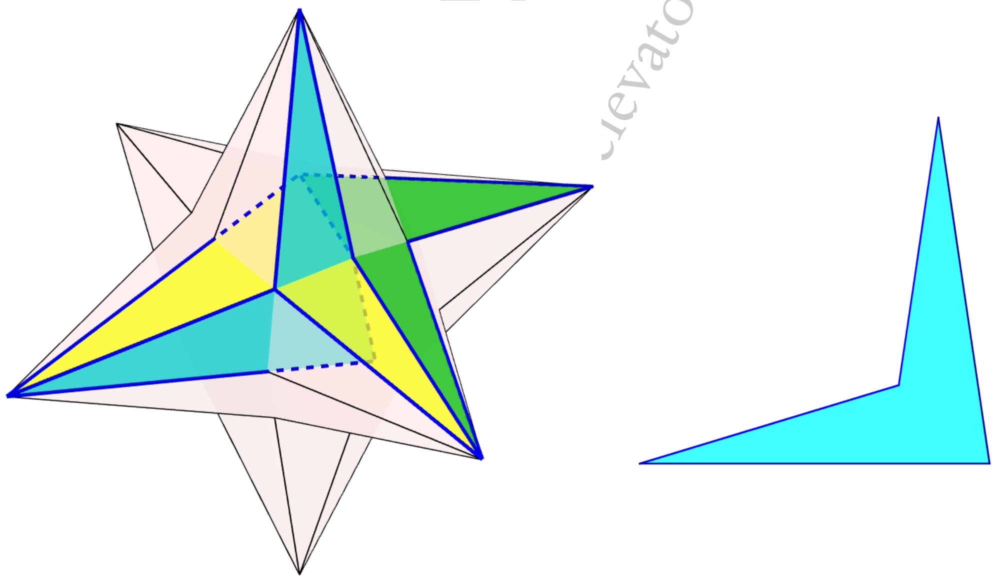


Figura 4.7: *DU13: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.2 DU14: grande icositetraedro esacronico

Nome inglese: Great Hexacronic Icositetrahedron. Poliedro con 24 facce, 48 spigoli e 20 vertici.

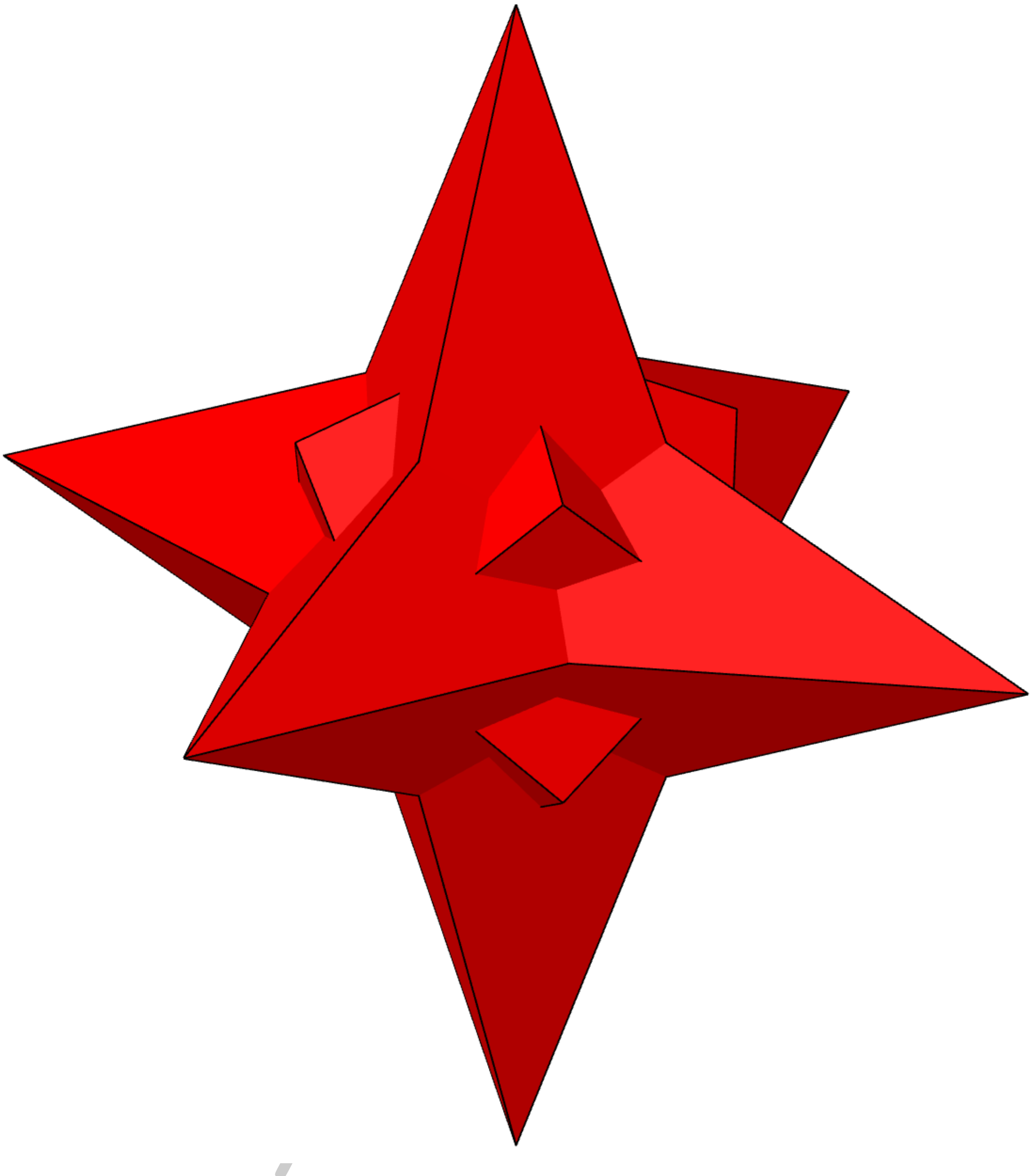


Figura 4.8: *DU14: grande icositetraedro esacronico*

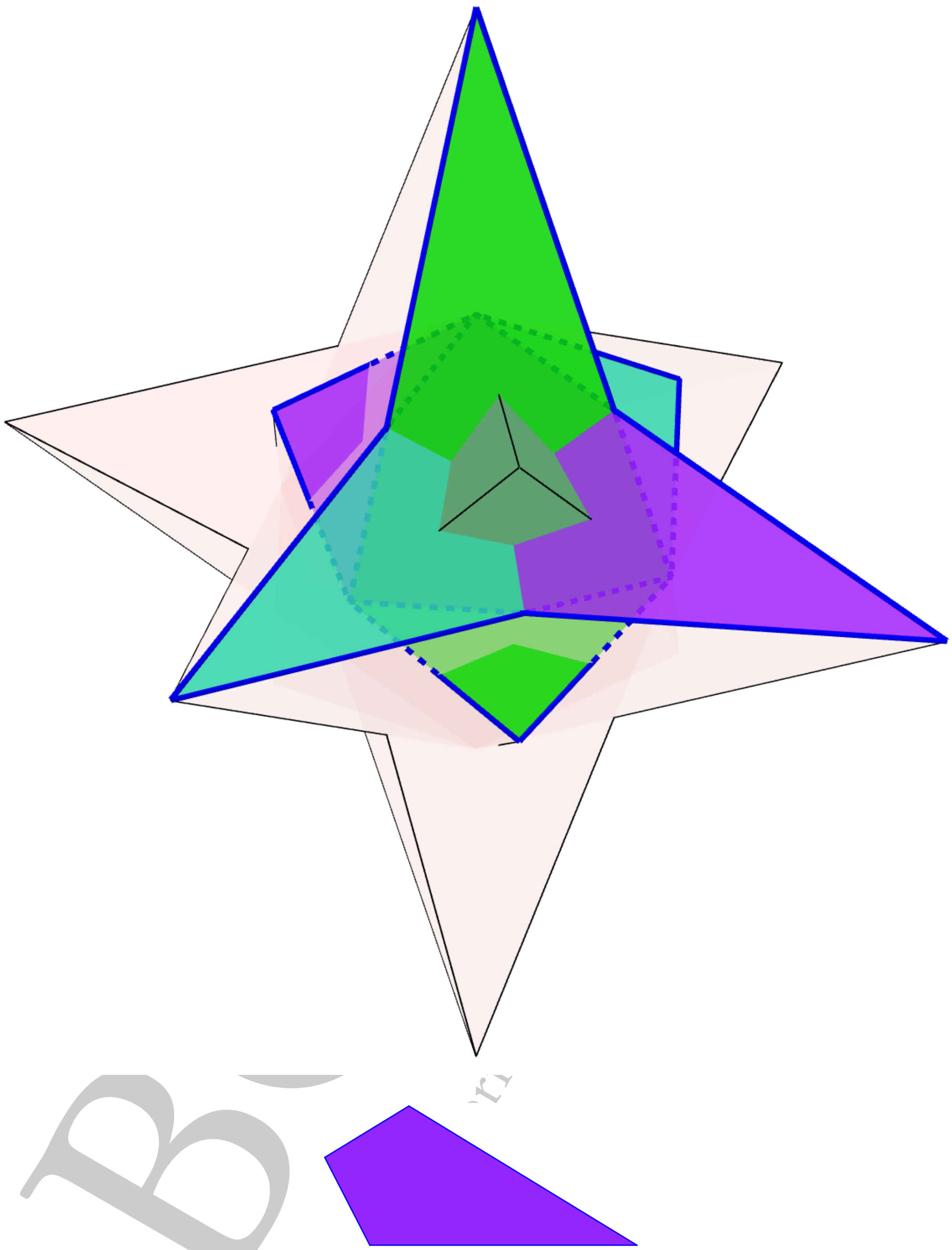


Figura 4.9: *DU14: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.3 DU16: tetradiacisesaedro

Nome inglese: Tetradyakis Hexahedron. Poliedro con 48 facce, 72 spigoli e 20 vertici.

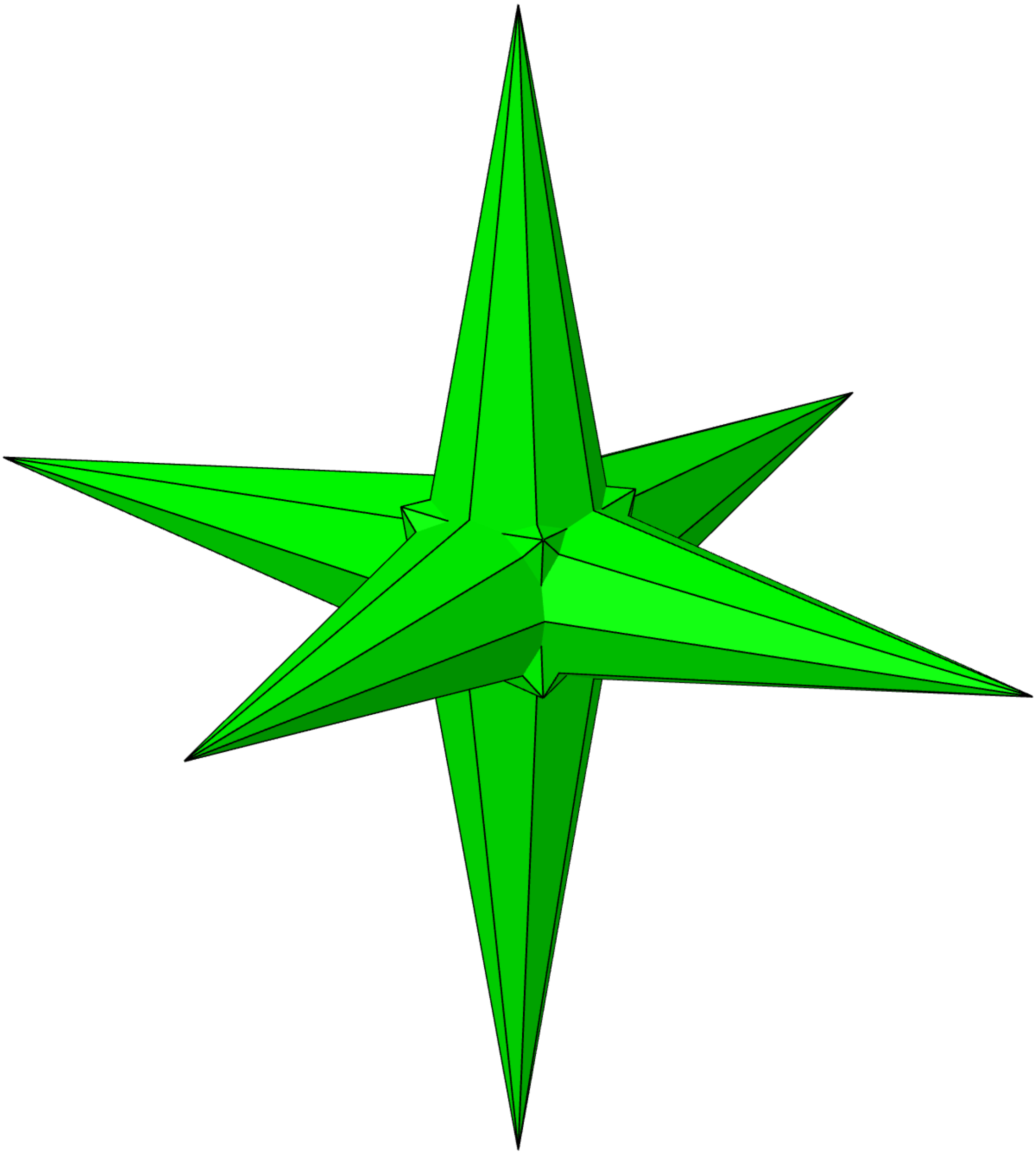


Figura 4.10: *DU16: tetradiacisesaedro*

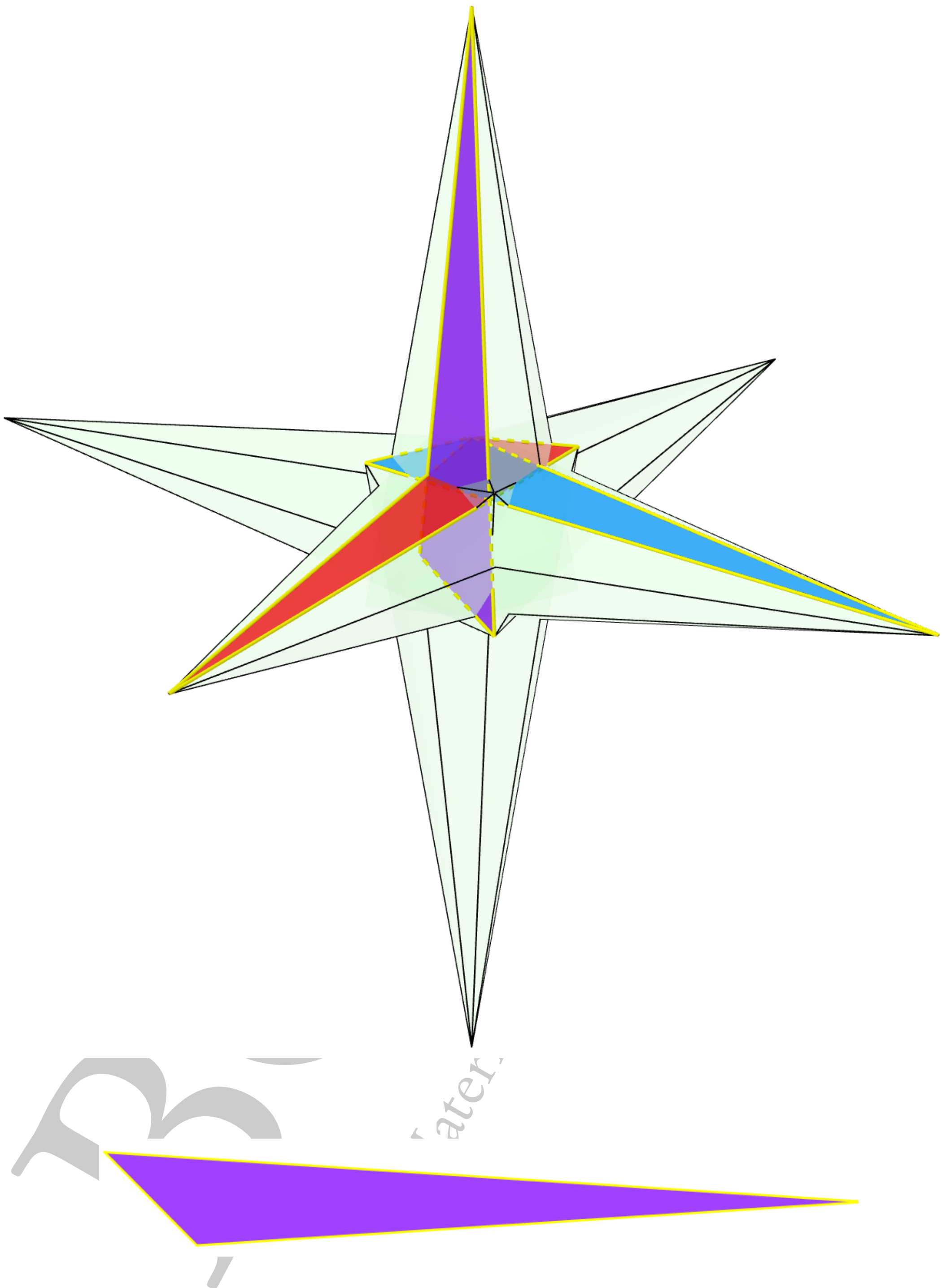


Figura 4.11: *DU16: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.4 DU17: grande icositetraedro deltoidale

Nome inglese: Great Deltoidal Icositetrahedron. Poliedro con 24 facce, 48 spigoli e 26 vertici.

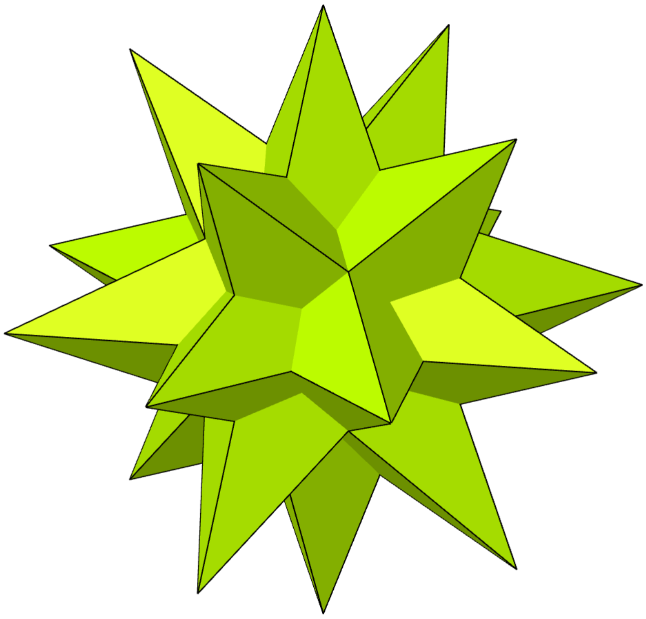


Figura 4.12: *DU17: grande icositetraedro deltoidale*

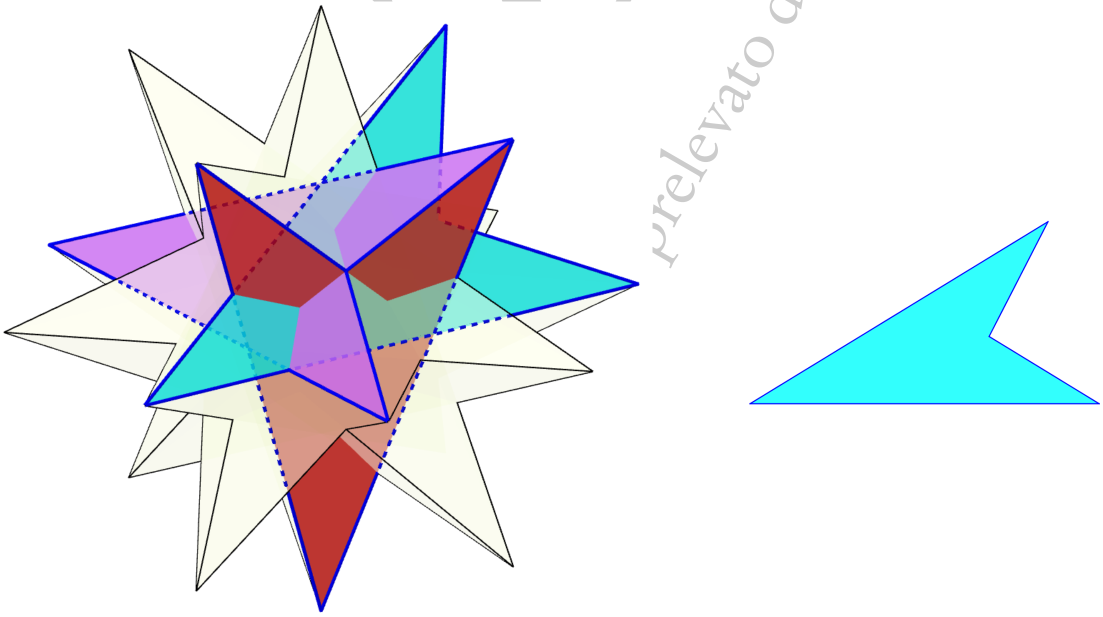


Figura 4.13: *DU17: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.5 DU18: piccolo rombiesacrono

Nome inglese: Small Rhombihexacron. Poliedro con 24 facce, 14 spigoli e 18 vertici.

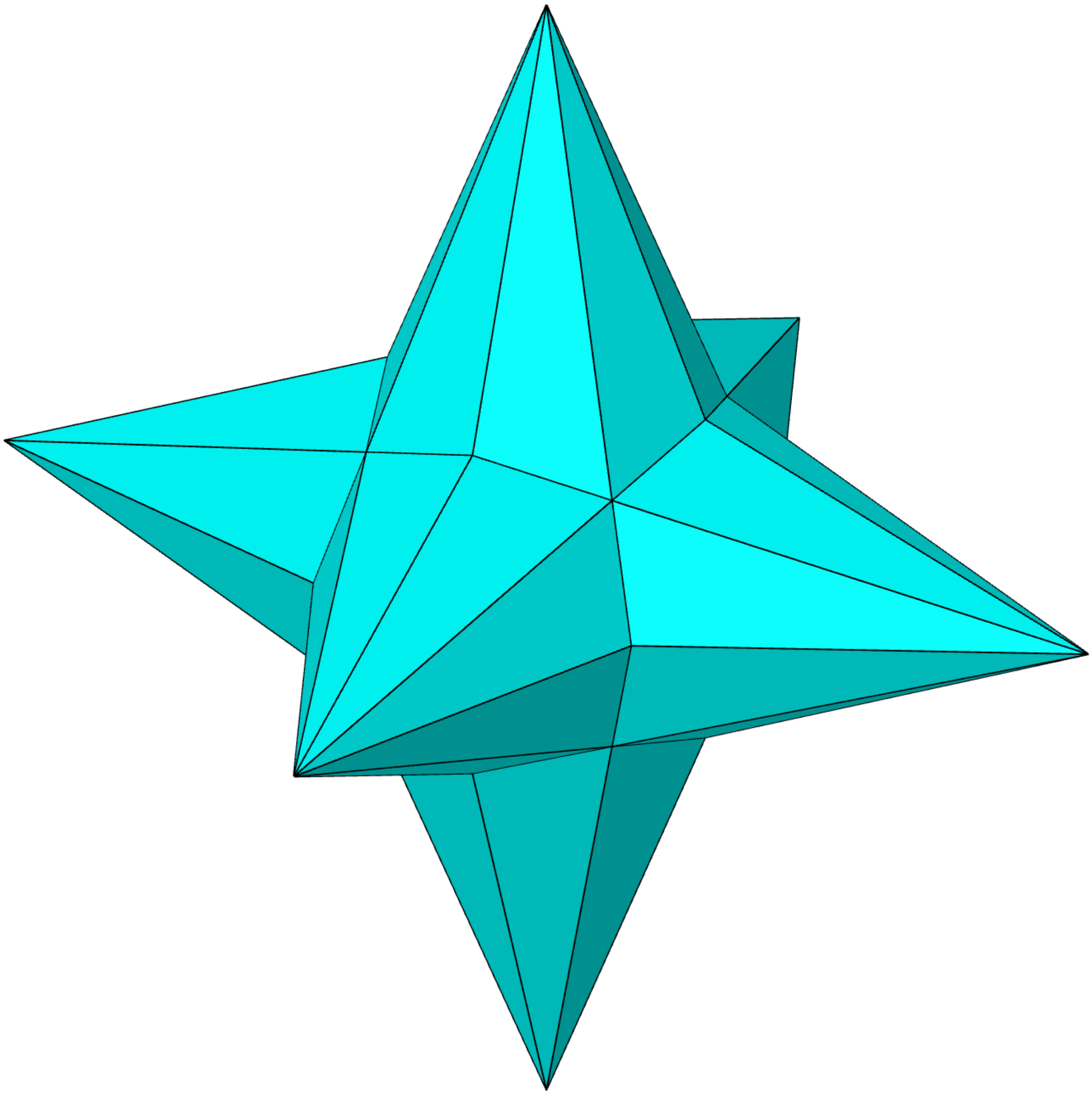


Figura 4.14: *DU18: piccolo rombiesacrono*

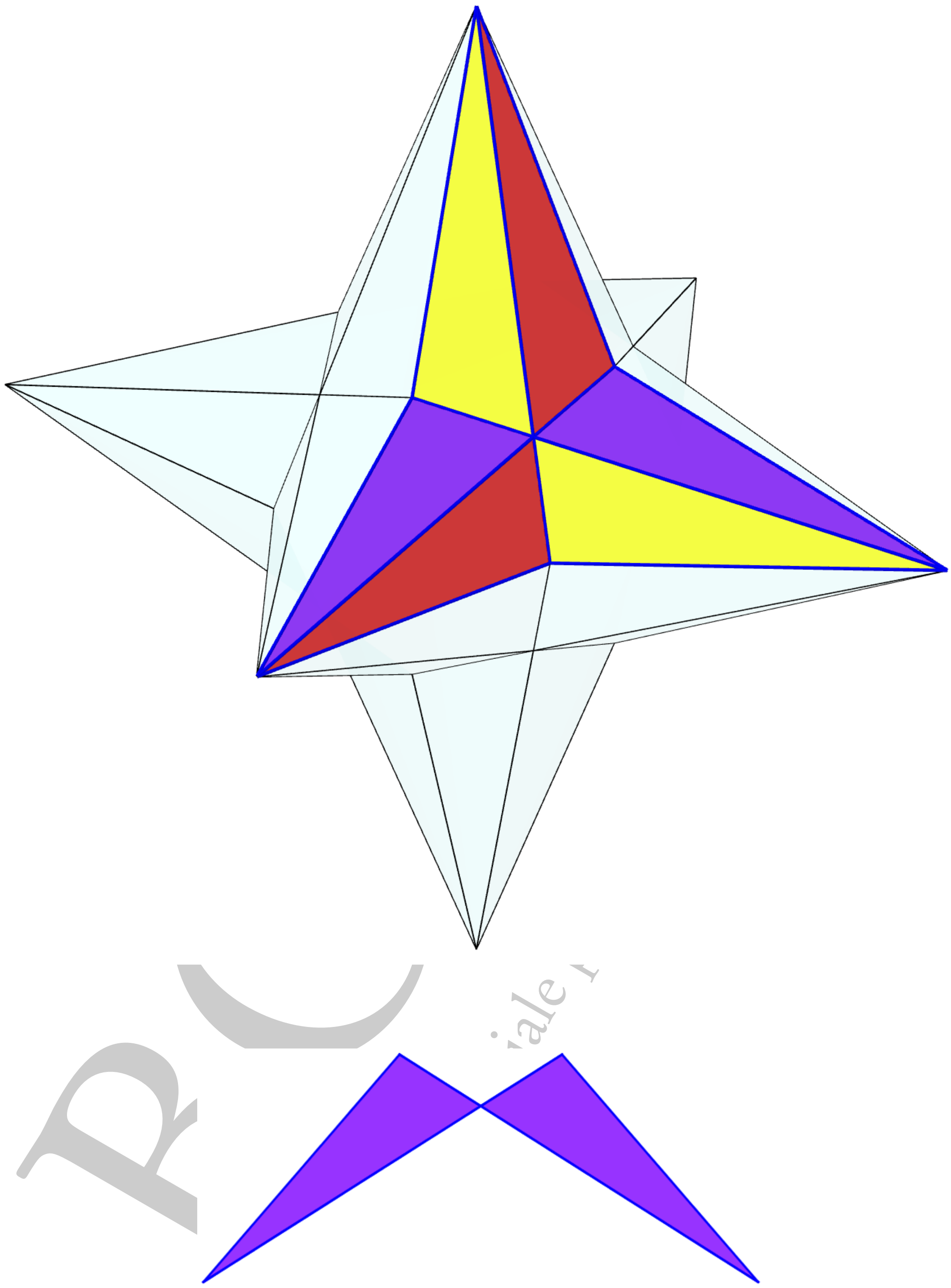


Figura 4.15: *DU18: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.6 DU19: grande triacisottaedro

Nome inglese: Great Triakis Octahedron. Poliedro con 24 facce, 36 spigoli e 14 vertici.

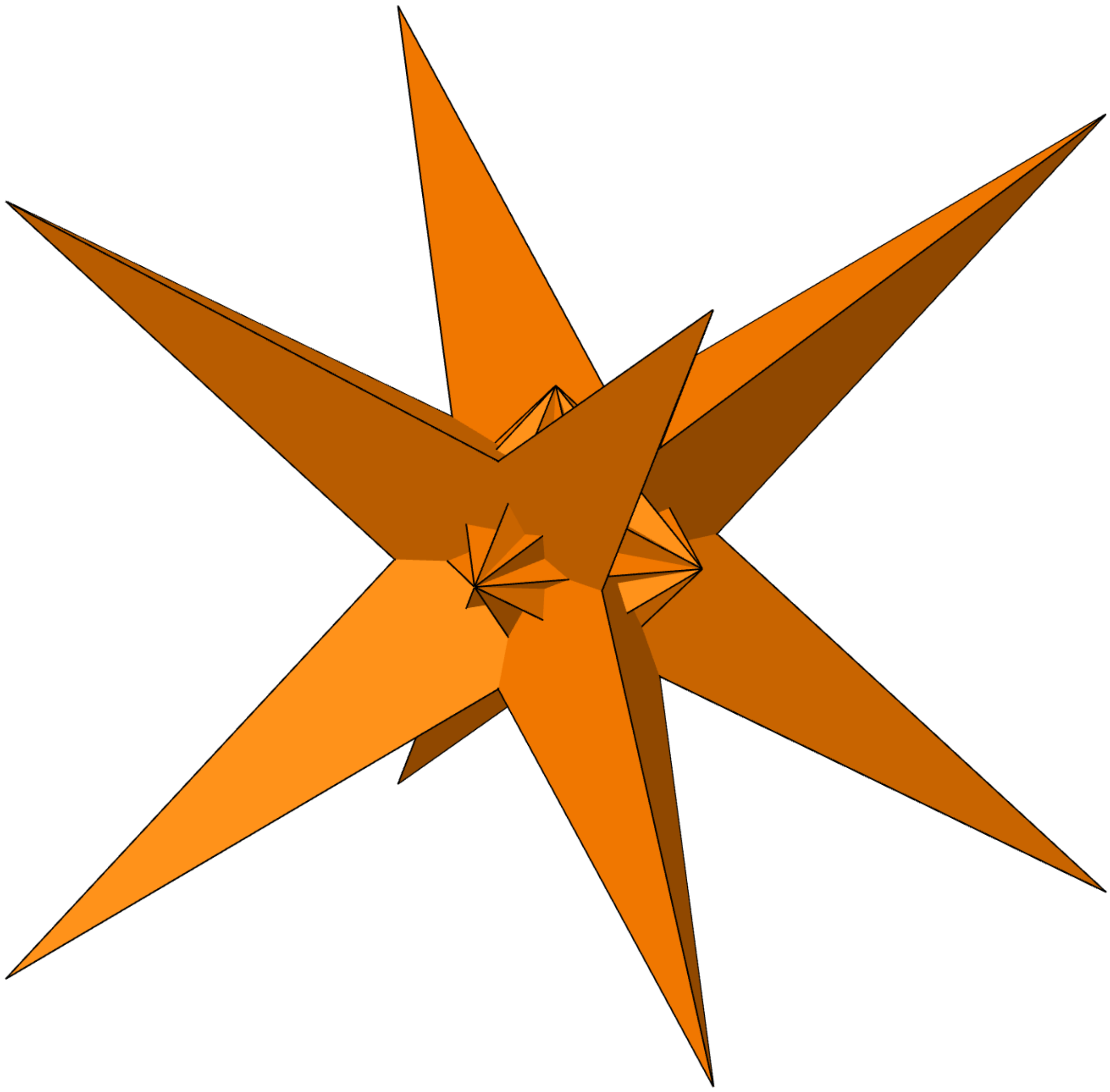


Figura 4.16: *DU19: grande triacisottaedro*

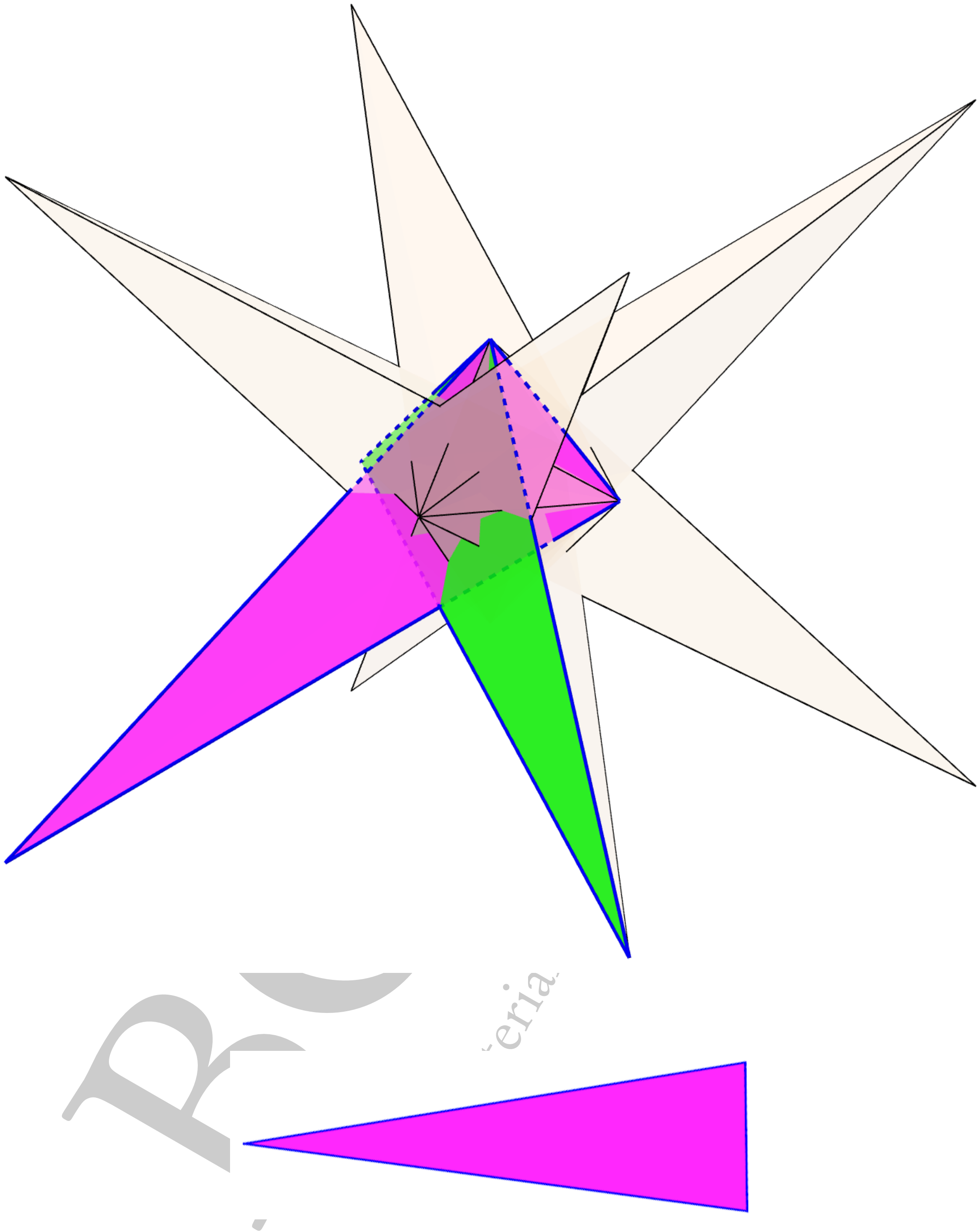


Figura 4.17: *DU19: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.7 DU20: grande disdiacisdodecaedro

Nome inglese: Great Disdyakis Dodecahedron. Poliedro con 48 facce, 72 spigoli e 26 vertici.

Figura 4.18: *DU20: grande disdiacisdodecaedro*

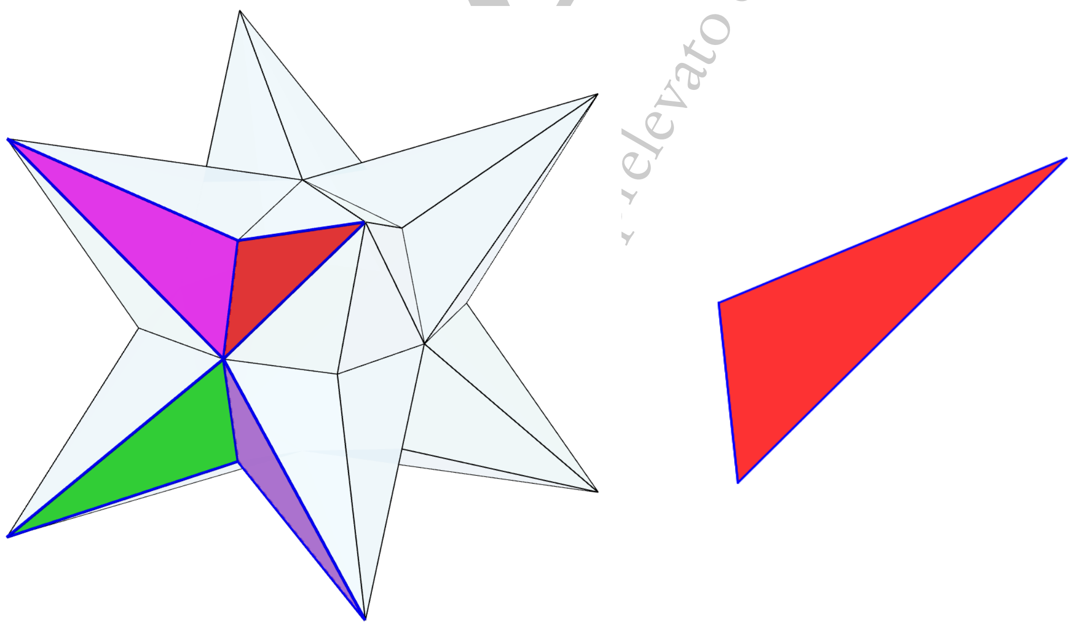


Figura 4.19: *DU20: particolare di quattro facce e tipo di faccia*

4.2.8 DU21: grande rombiesacrono

Nome inglese: Great Rhombihexacron. Poliedro con 24 facce, 48 spigoli e 18 vertici.

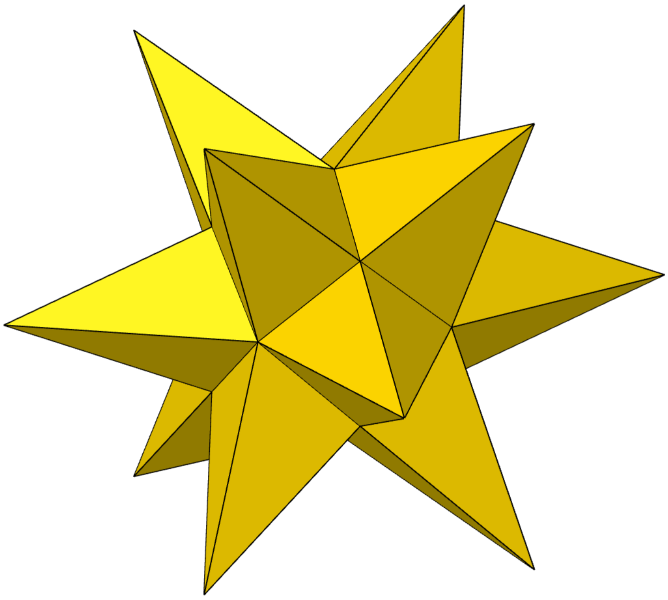


Figura 4.20: *DU21: grande rombiesacrono*

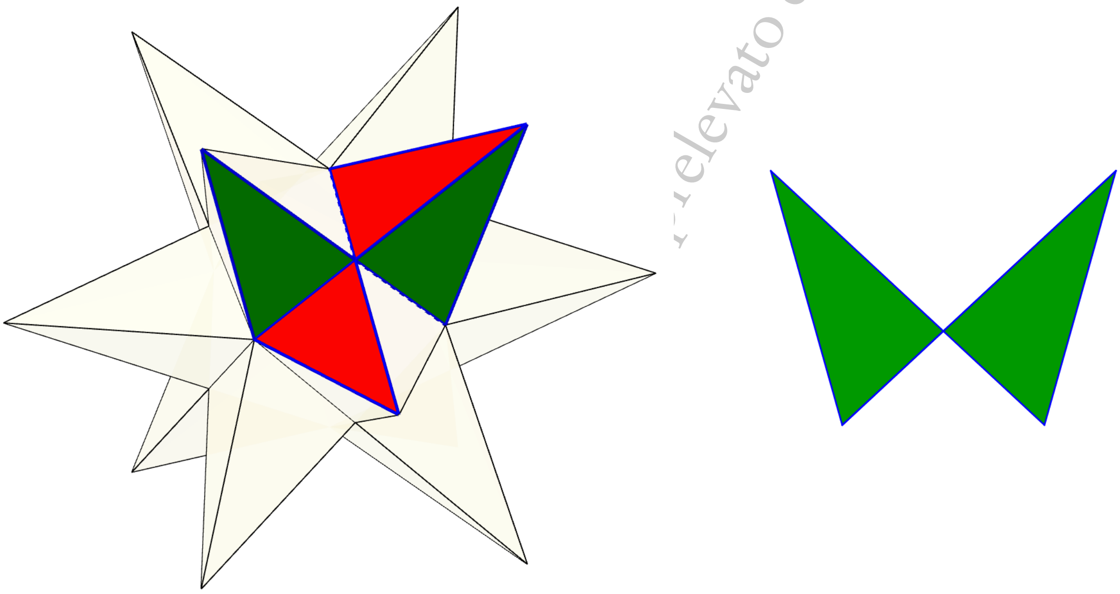


Figura 4.21: *DU21: particolare di due facce e tipo di faccia*

4.2.9 DU30: piccolo icosaedro triambico

Nome inglese: Small Triambic Icosahedron. Poliedro con 20 facce, 60 spigoli e 32 vertici.

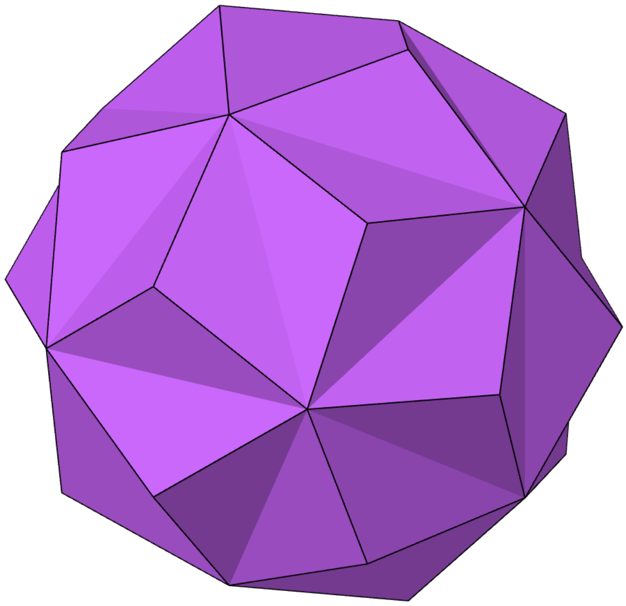


Figura 4.22: *DU30: piccolo icosaedro triambico*

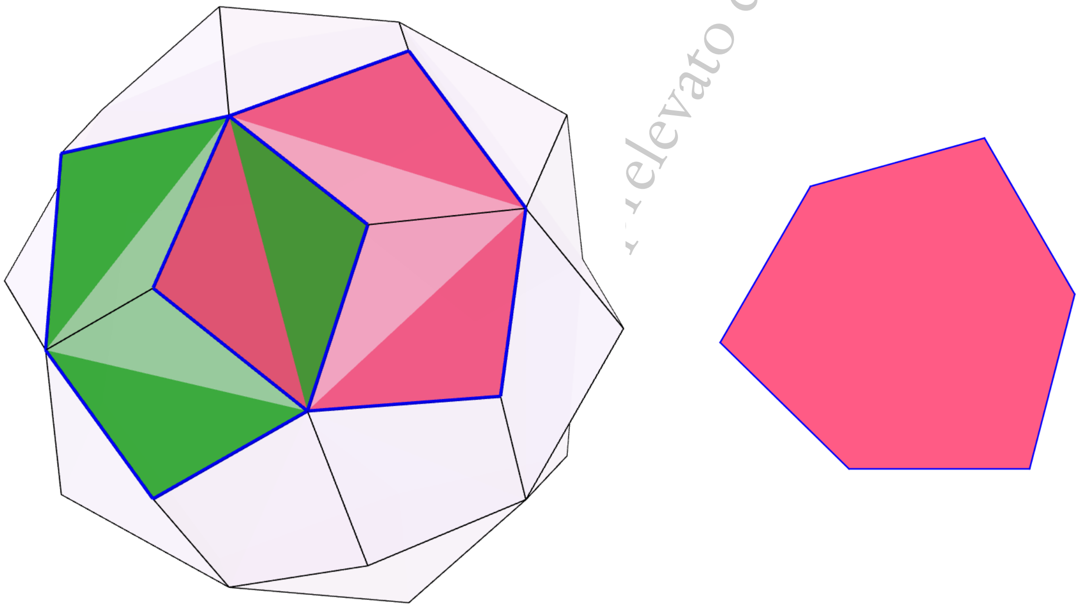


Figura 4.23: *DU30: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.10 DU31: piccolo esacontaedro icosacronico

Nome inglese: Small Icosacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 52 vertici.

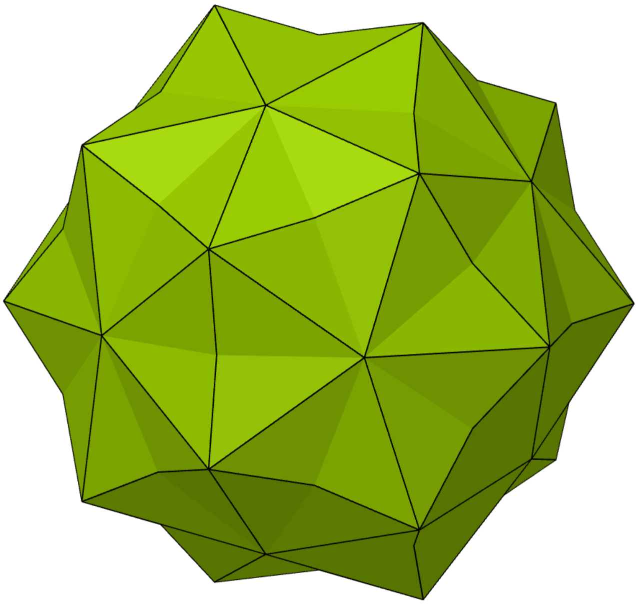


Figura 4.24: *DU31: piccolo esacontaedro icosacronico*

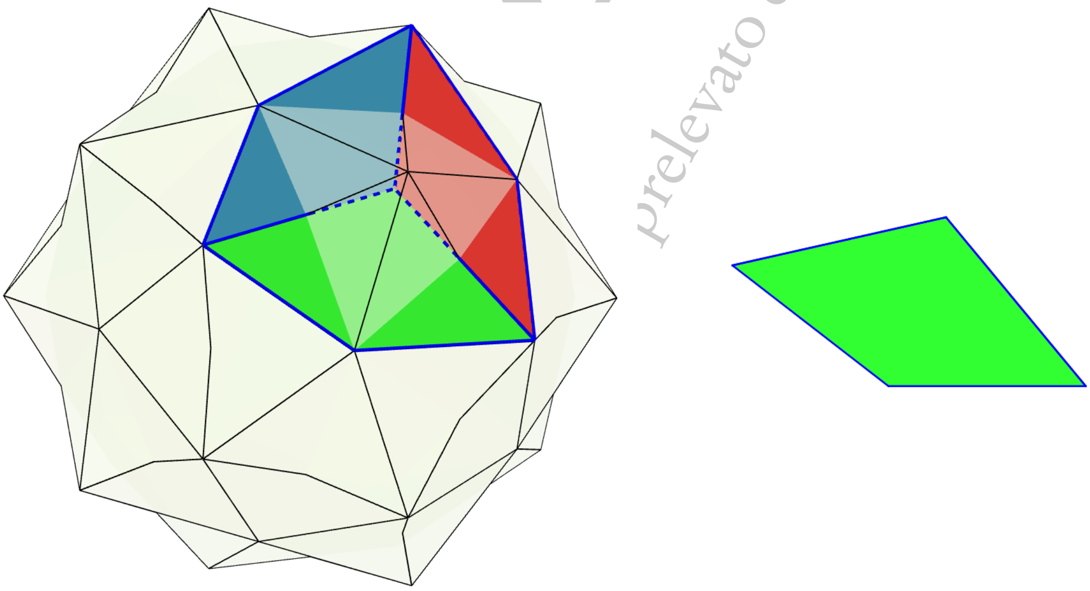


Figura 4.25: *DU31: particolare di tre facce e tipo di faccia*

4.2.11 DU32: piccolo esacontaedro esagonale

Nome inglese: Small Hexagonal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 180 spigoli e 112 vertici.

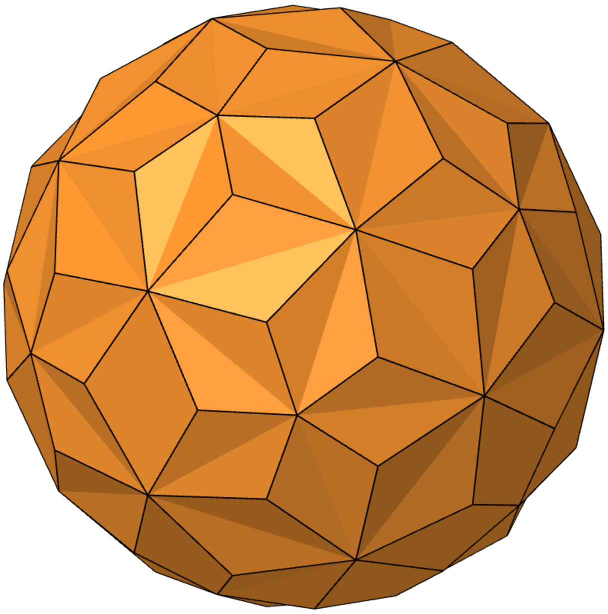


Figura 4.26: *DU32: piccolo esacontaedro esagonale*

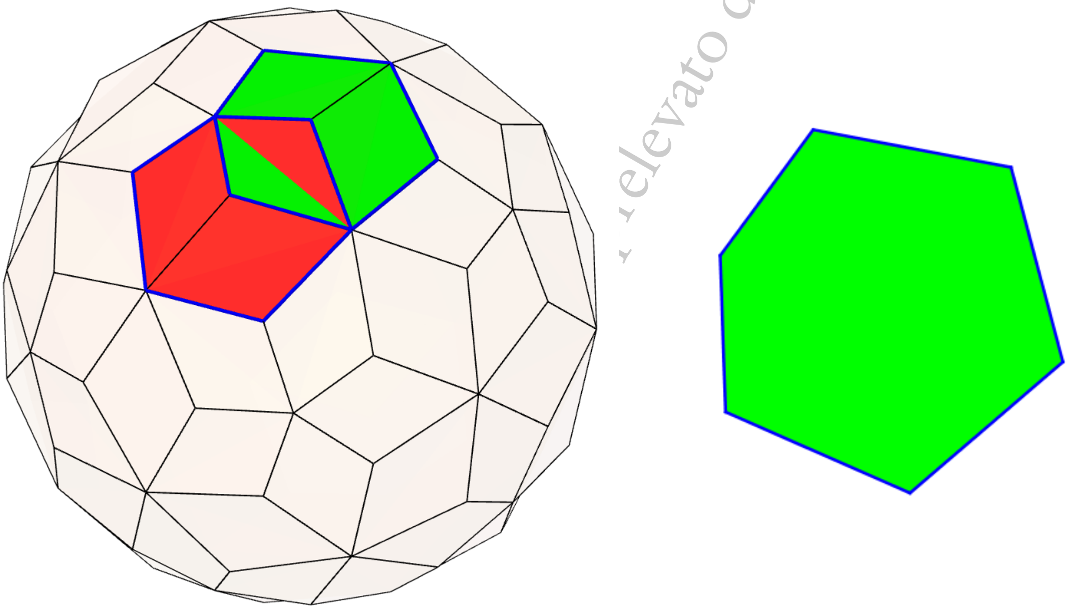


Figura 4.27: *DU32: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.12 DU33: piccolo esacontaedro dodecacronico

Nome inglese: Small Dodecacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 44 vertici.

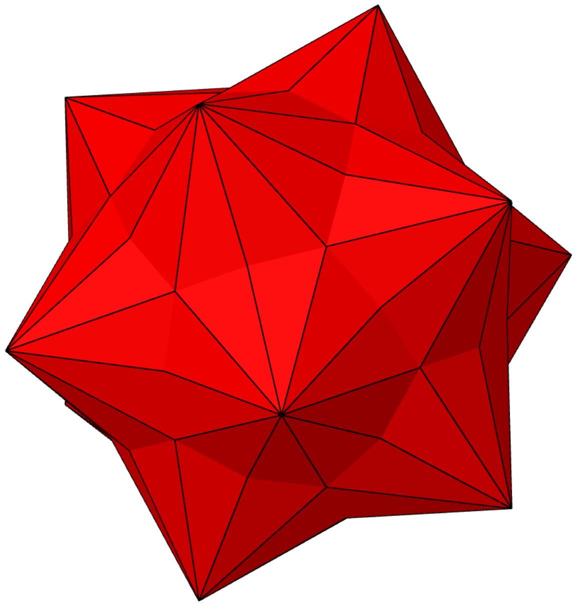


Figura 4.28: *DU33: piccolo esacontaedro dodecacronico*

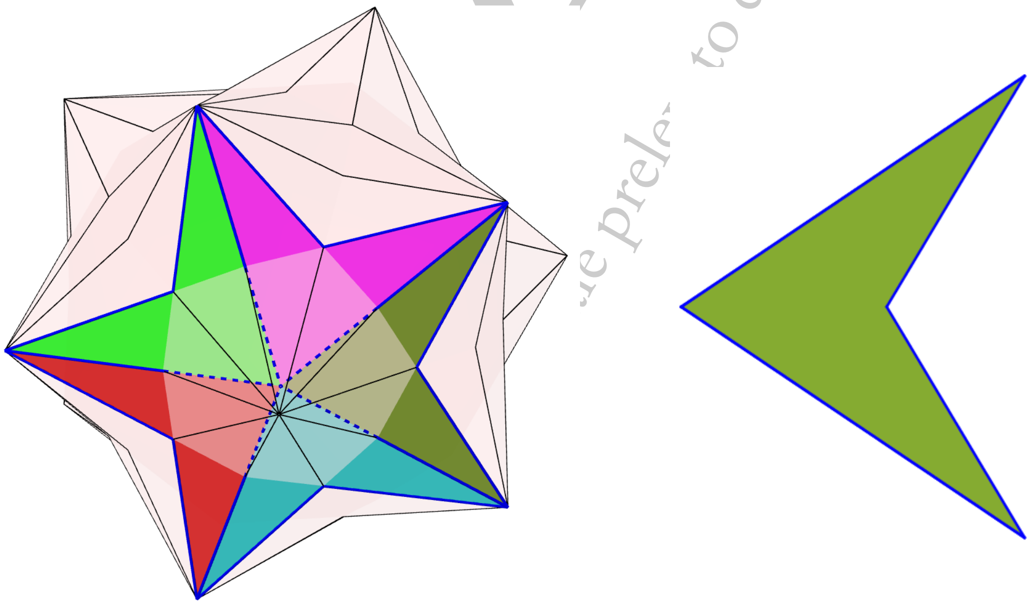


Figura 4.29: *DU33: particolare di cinque facce e tipo di faccia*

4.2.13 DU36: triacontadedro rombico medio

Nome inglese: Medial Rhombic Triacontahedron. Poliedro con 30 facce, 60 spigoli e 24 vertici.

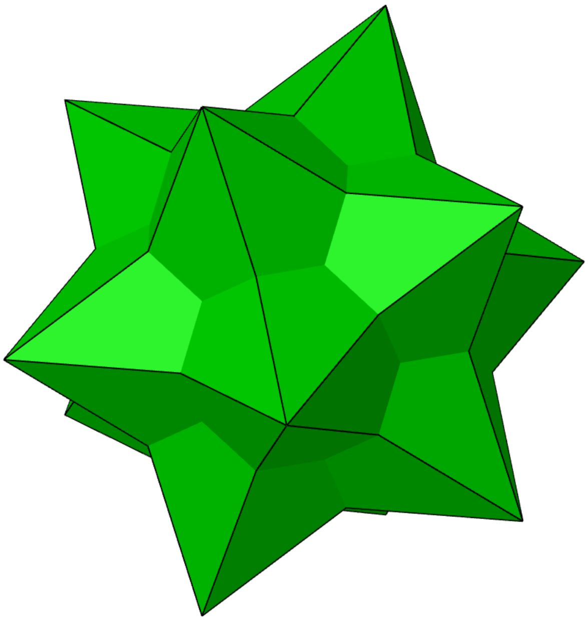


Figura 4.30: *DU36: triacontadedro rombico medio*

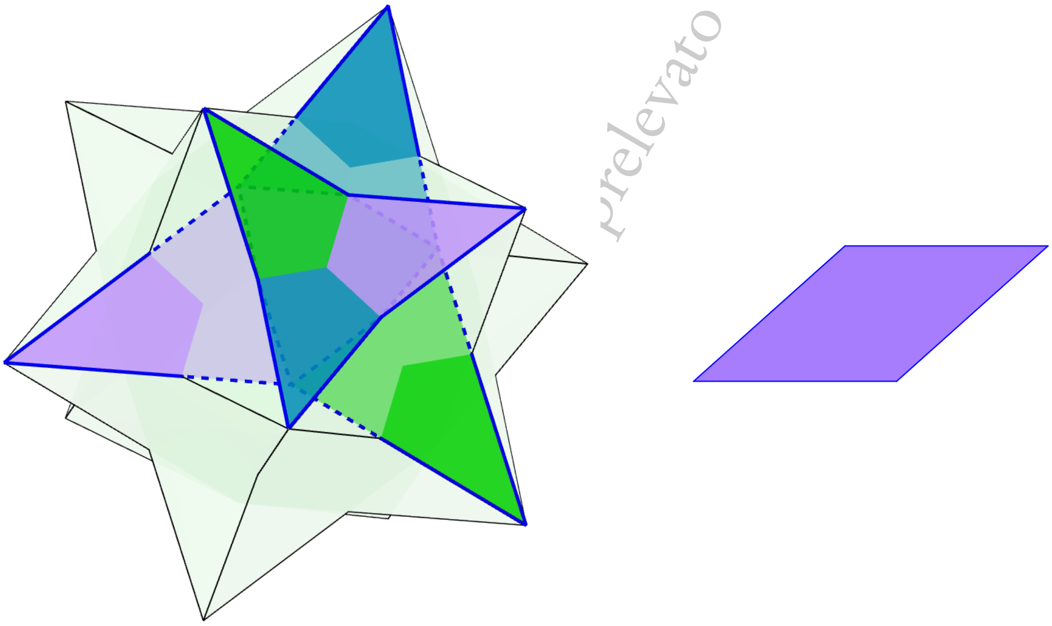


Figura 4.31: *DU36: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.14 DU37: piccolo stellapentacisdodecaedro

Nome inglese: Small Stellapentakis Dodecahedron. Poliedro con 60 facce, 90 spigoli e 24 vertici.

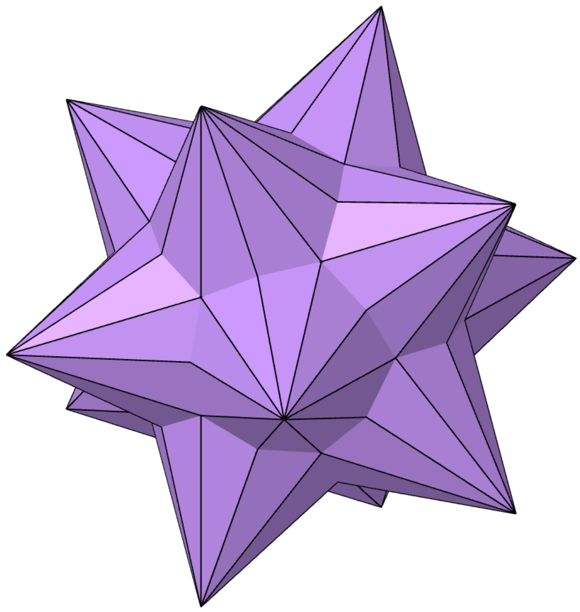


Figura 4.32: *DU37: piccolo stellapentacisdodecaedro*

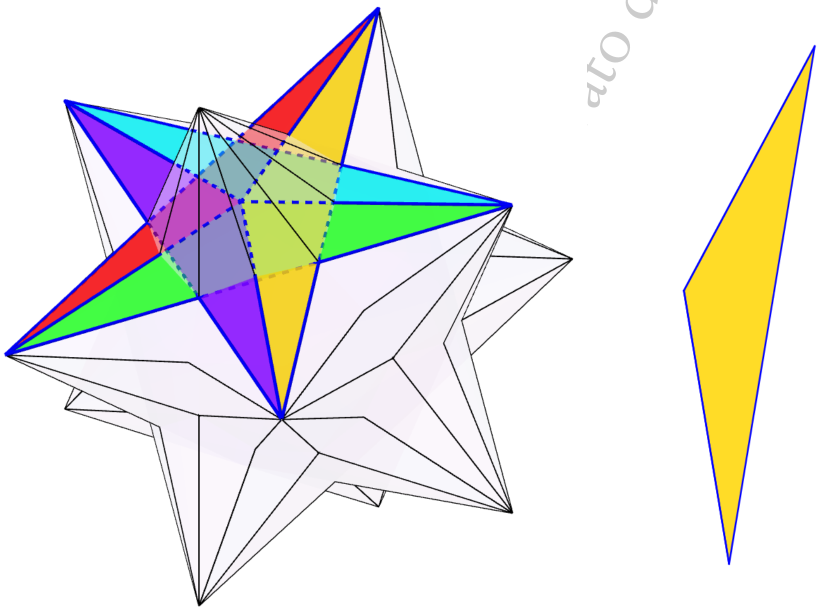


Figura 4.33: *DU37: particolare di cinque facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.15 DU38: esacontaedro deltoidale medio

Nome inglese: Medial Deltoidal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 54 vertici.

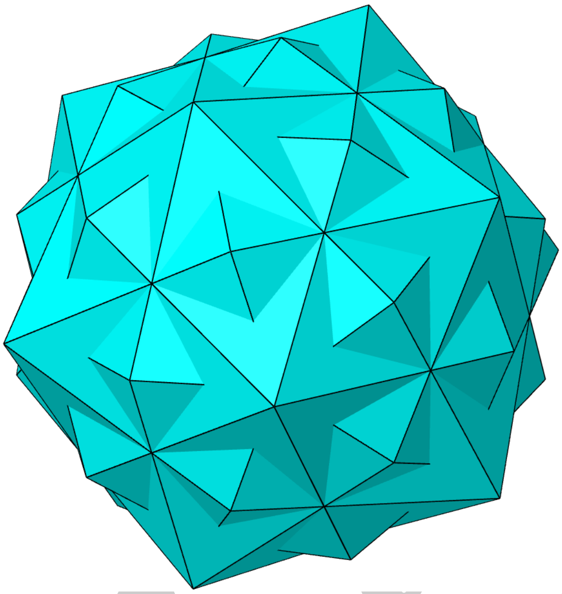


Figura 4.34: *DU38: esacontaedro deltoidale medio*

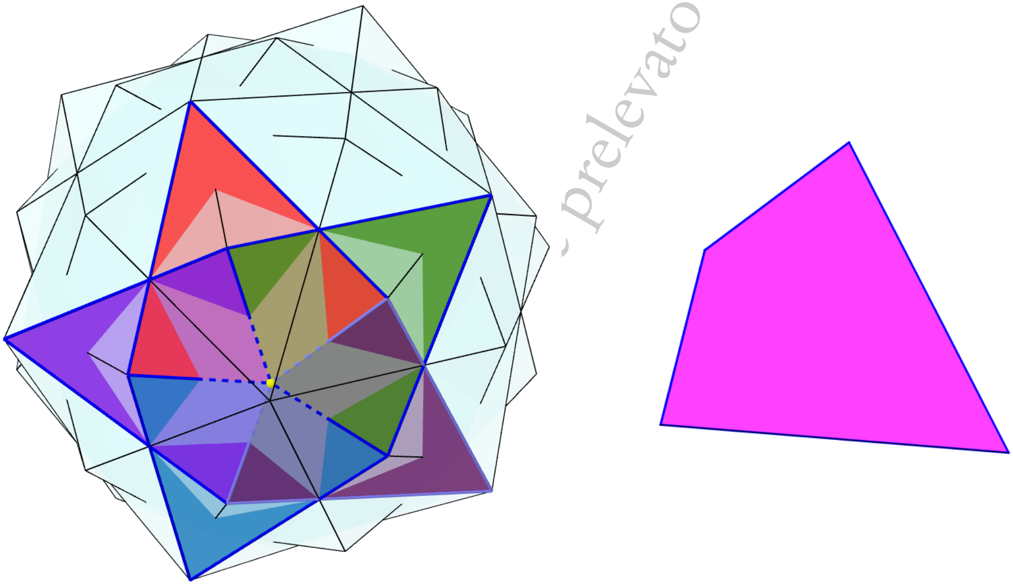


Figura 4.35: *DU38: particolare di cinque facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.16 DU39: piccolo rombidodecacrono

Nome inglese: Small Rhombidodecacron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 42 vertici.

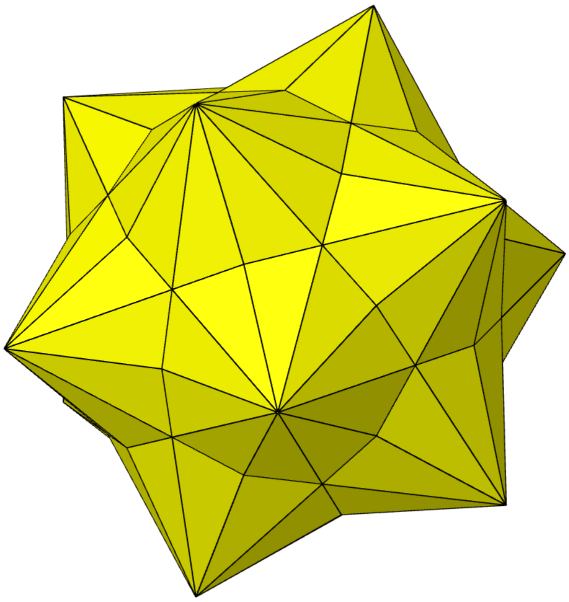


Figura 4.36: *DU39: piccolo rombidodecacrono*

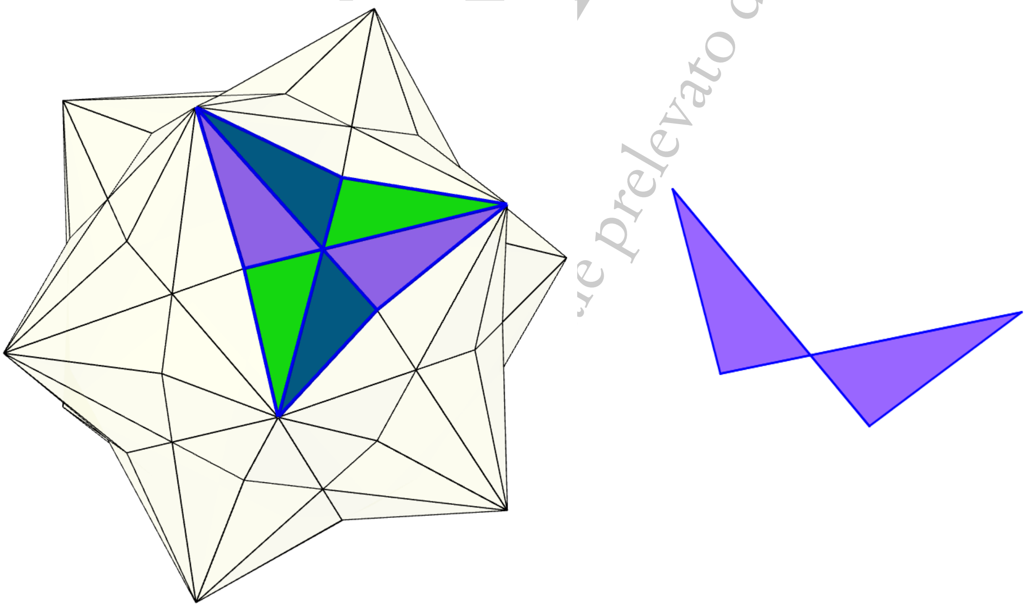


Figura 4.37: *DU39: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.17 DU40: esacontaedro pentagonale medio

Nome inglese: Medial Pentagonal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 154 spigoli e 84 vertici.

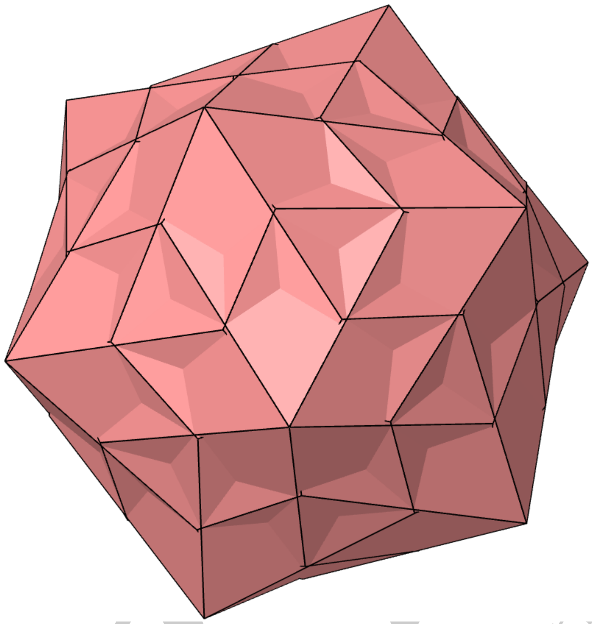


Figura 4.38: *DU40: esacontaedro pentagonale medio*

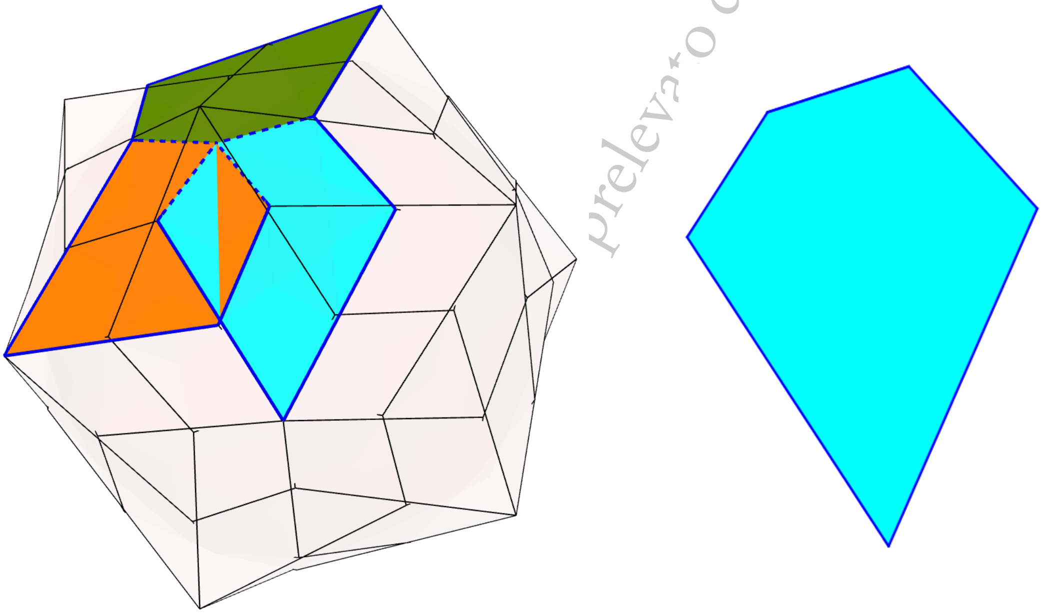


Figura 4.39: *DU40: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.18 DU41: icosaedro triambico medio

Nome inglese: Medial Triambic Icosahedron. Poliedro con 20 facce, 60 spigoli e 24 vertici.

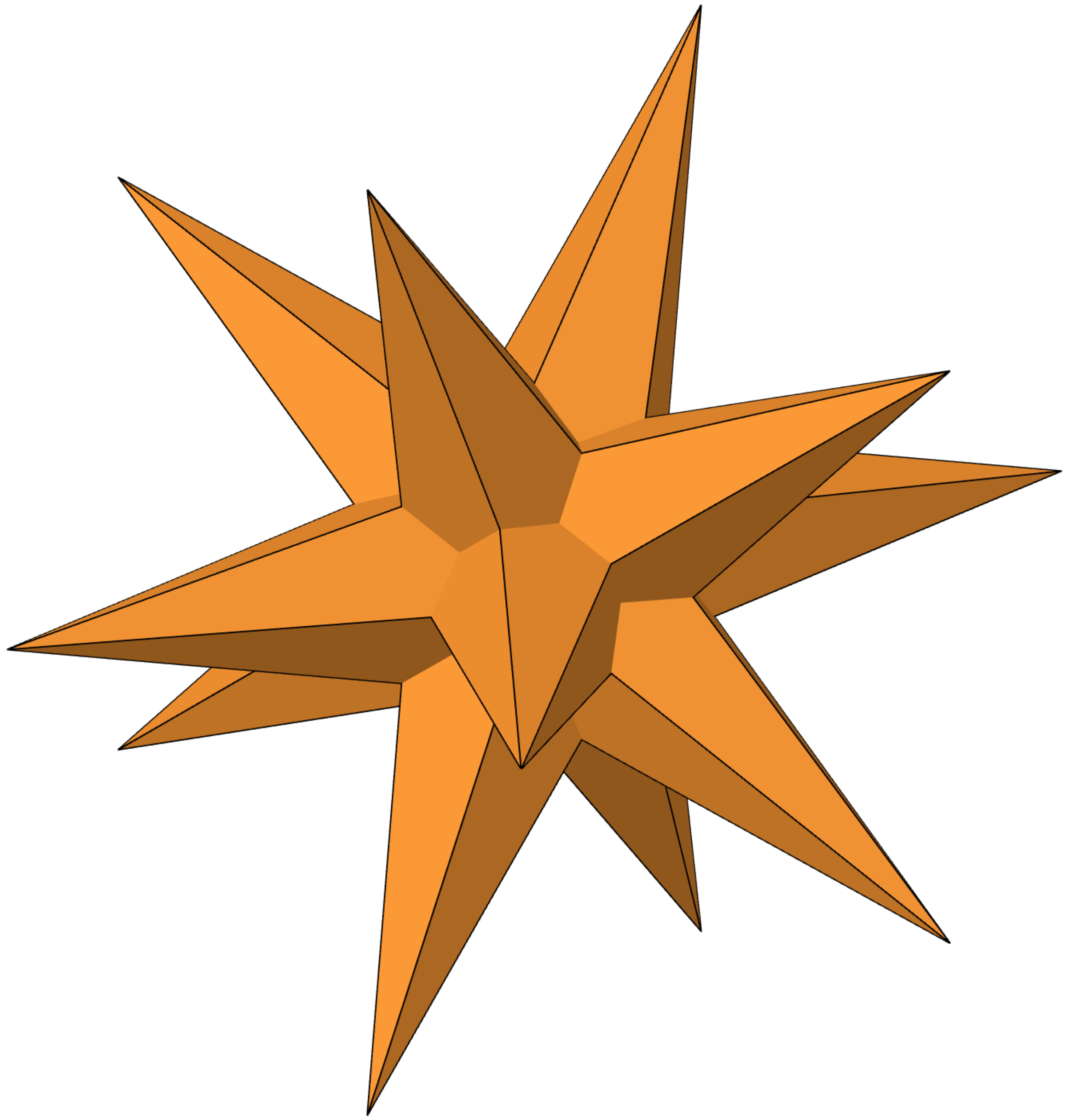


Figura 4.40: *DU41: icosaedro triambico medio*

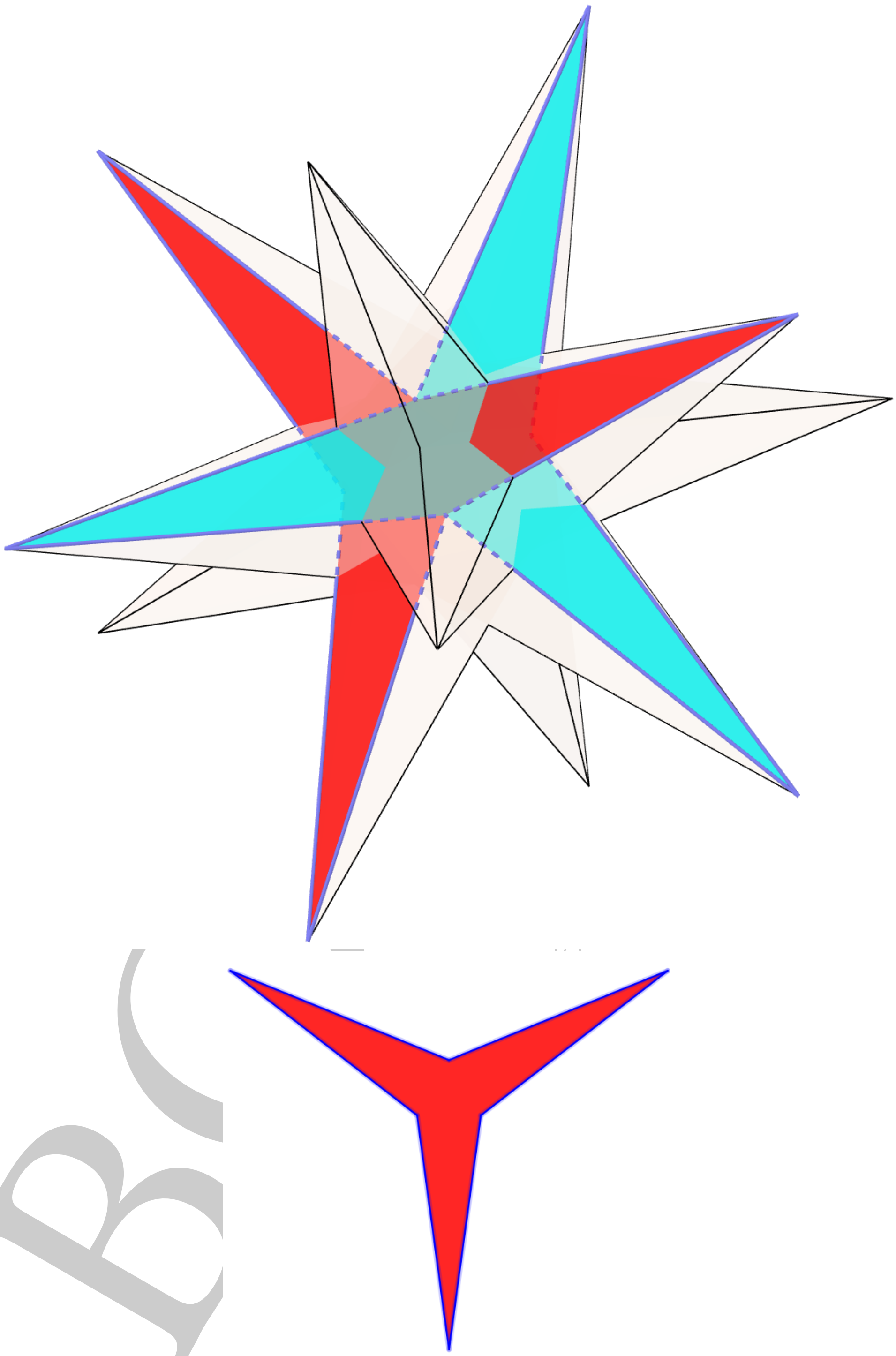


Figura 4.41: *DU41: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.19 DU42: grande esacontaedro ditrigonale dodecacronico

Nome inglese: Great Ditrigonal Dodecacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 44 vertici.

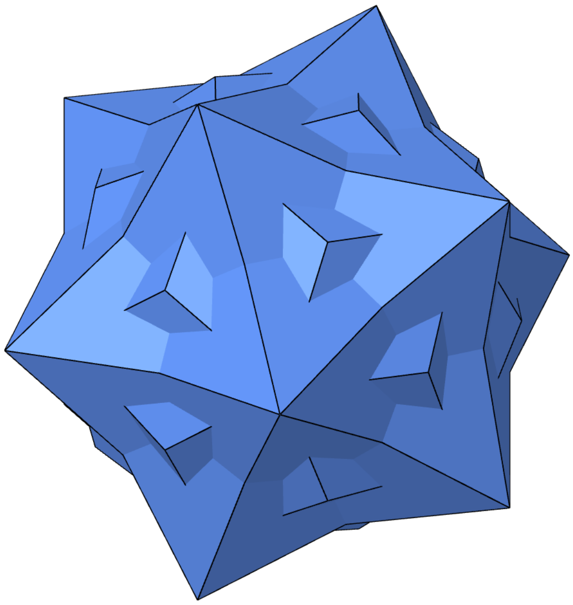


Figura 4.42: *DU42: grande esacontaedro ditrigonale dodecacronico*

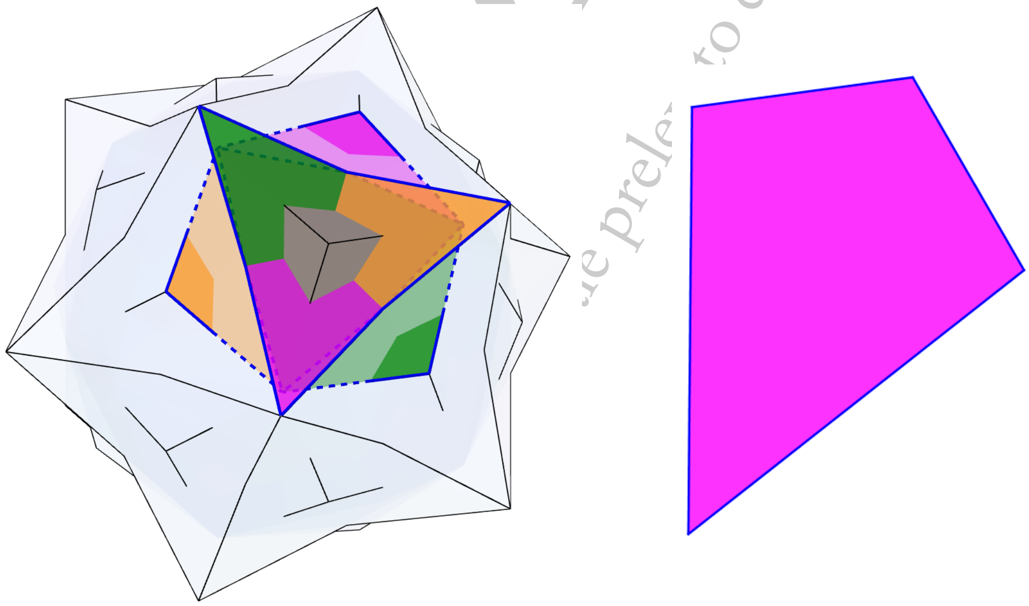


Figura 4.43: *DU42: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.20 DU43: piccolo esacontaedro ditrigonale dodecacronico

Nome inglese: Small Ditrigonal Dodecacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 44 vertici.

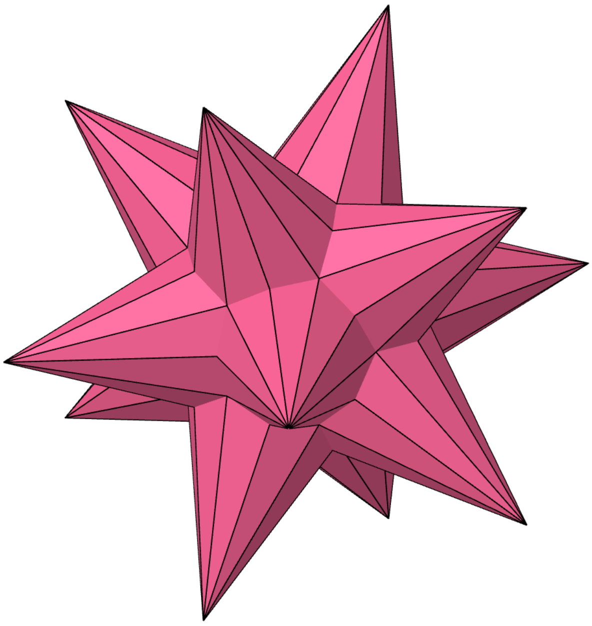


Figura 4.44: *DU43: piccolo esacontaedro ditrigonale dodecacronico*

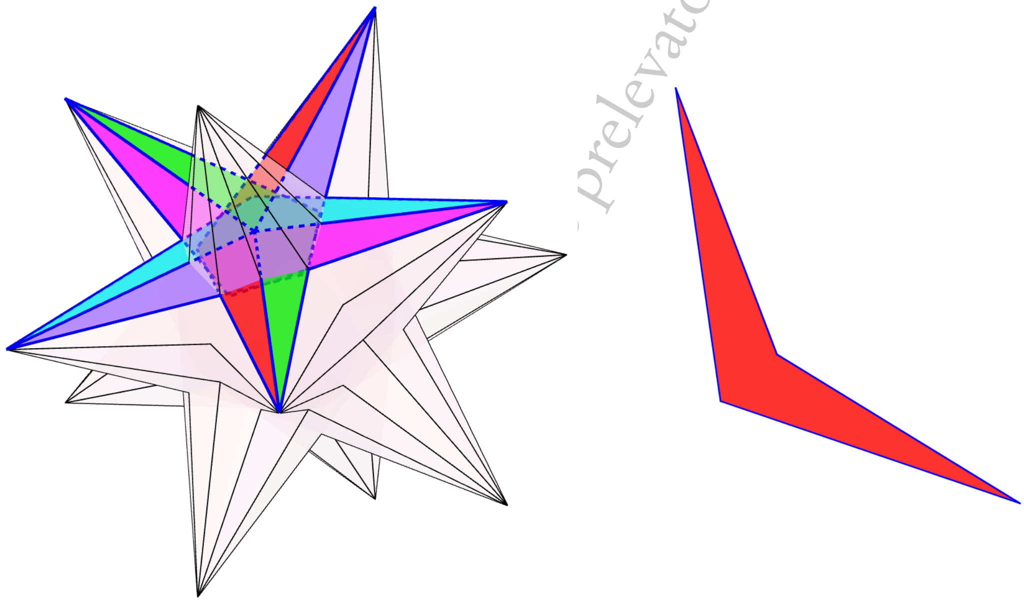


Figura 4.45: *DU43: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.21 DU44: esacontaedro icosacronico medio

Nome inglese: Medial Icosacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 54 vertici.

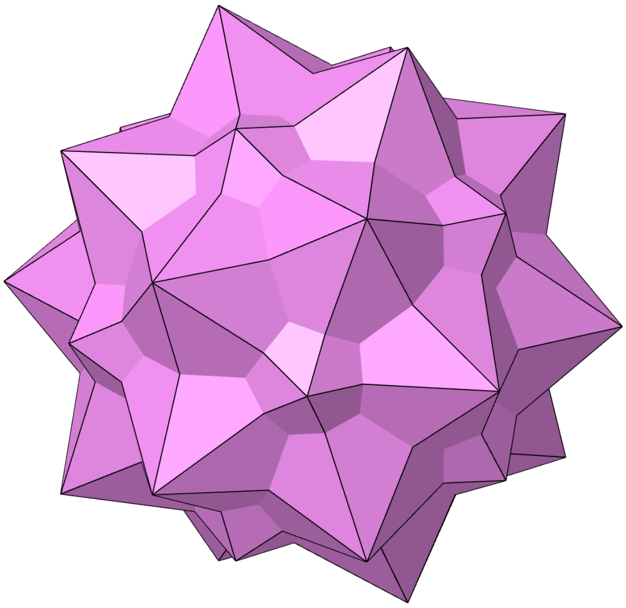


Figura 4.46: *DU44: esacontaedro icosacronico medio*

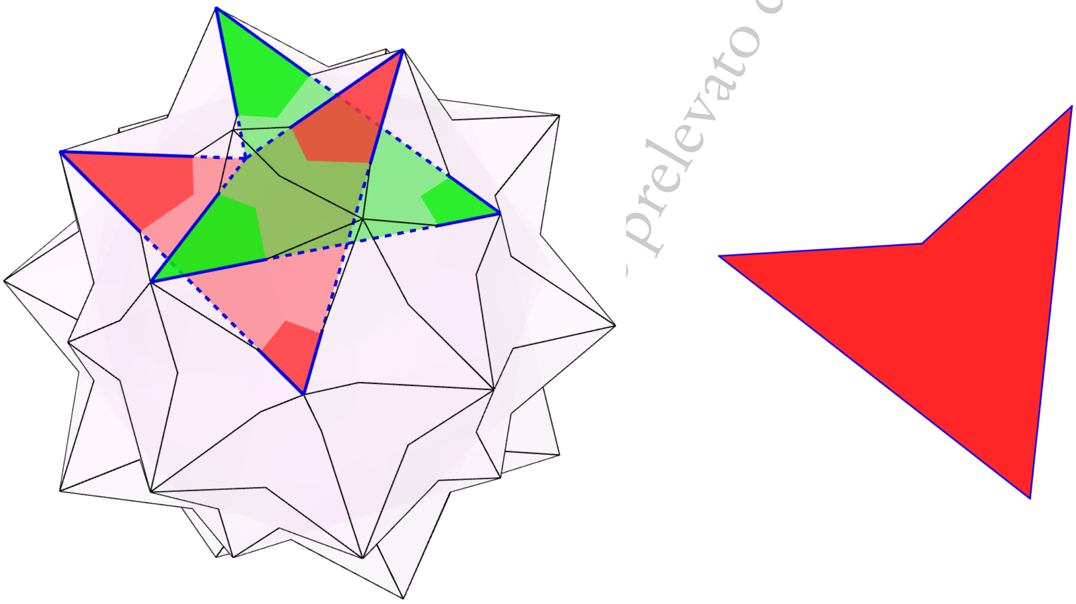


Figura 4.47: *DU44: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.22 DU45: tridiacisicosaedro

Nome inglese: Tridyakis Icosahedron. Poliedro con 120 facce, 180 spigoli e 44 vertici.

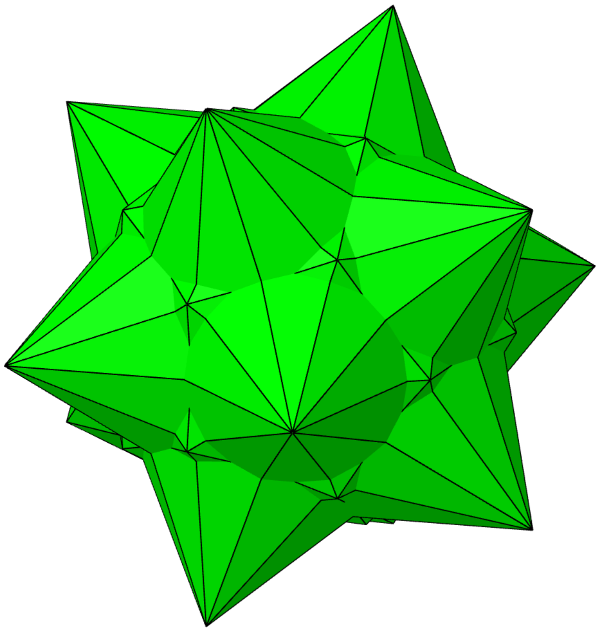


Figura 4.48: *DU45: tridiacisicosaedro*

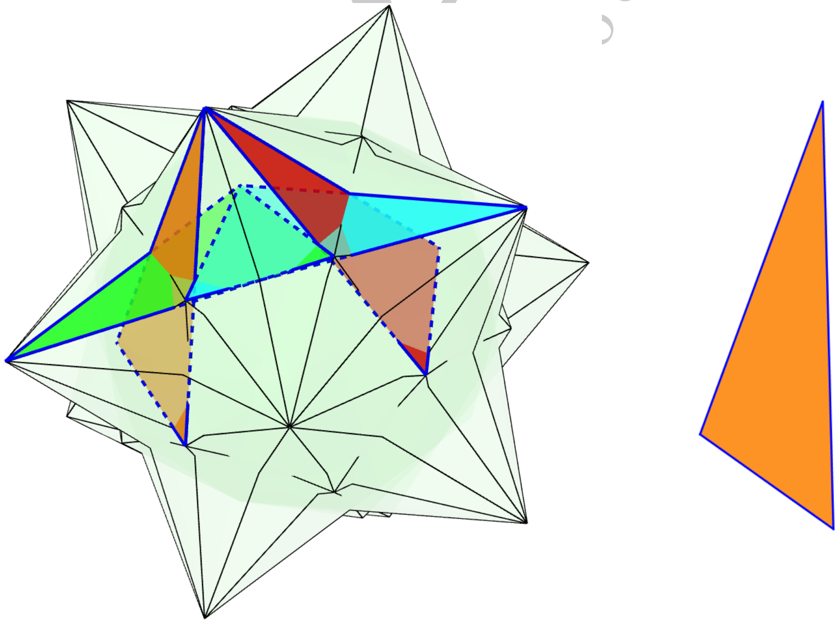


Figura 4.49: *DU45: particolare di quattro facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.23 DU46: esacontaedro esagonale medio

Nome inglese: Medial Hexagonal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 180 spigoli e 104 vertici.

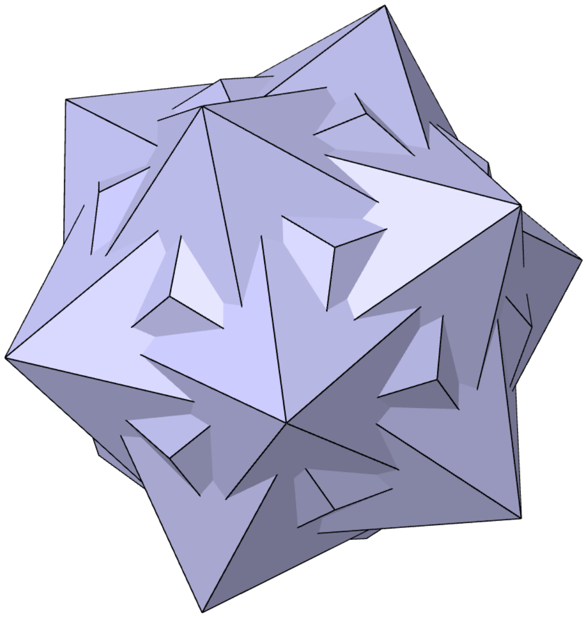


Figura 4.50: *DU46: esacontaedro esagonale medio*

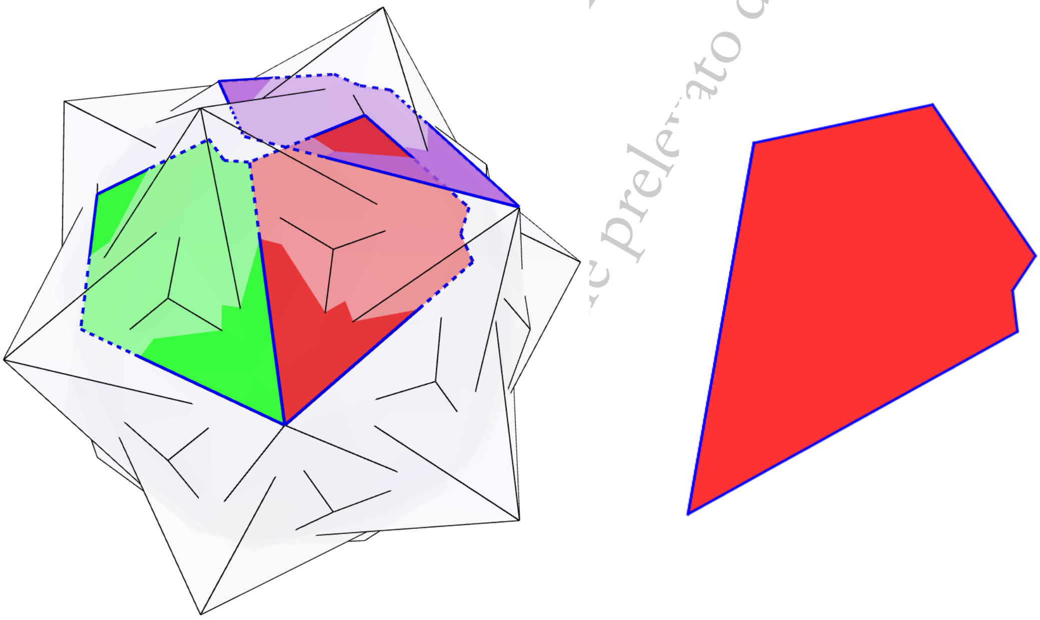


Figura 4.51: *DU46: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.24 DU47: grande icosaedro triambico

Nome inglese: Great Triambic Icosahedron. Poliedro con 20 facce, 60 spigoli e 32 vertici.

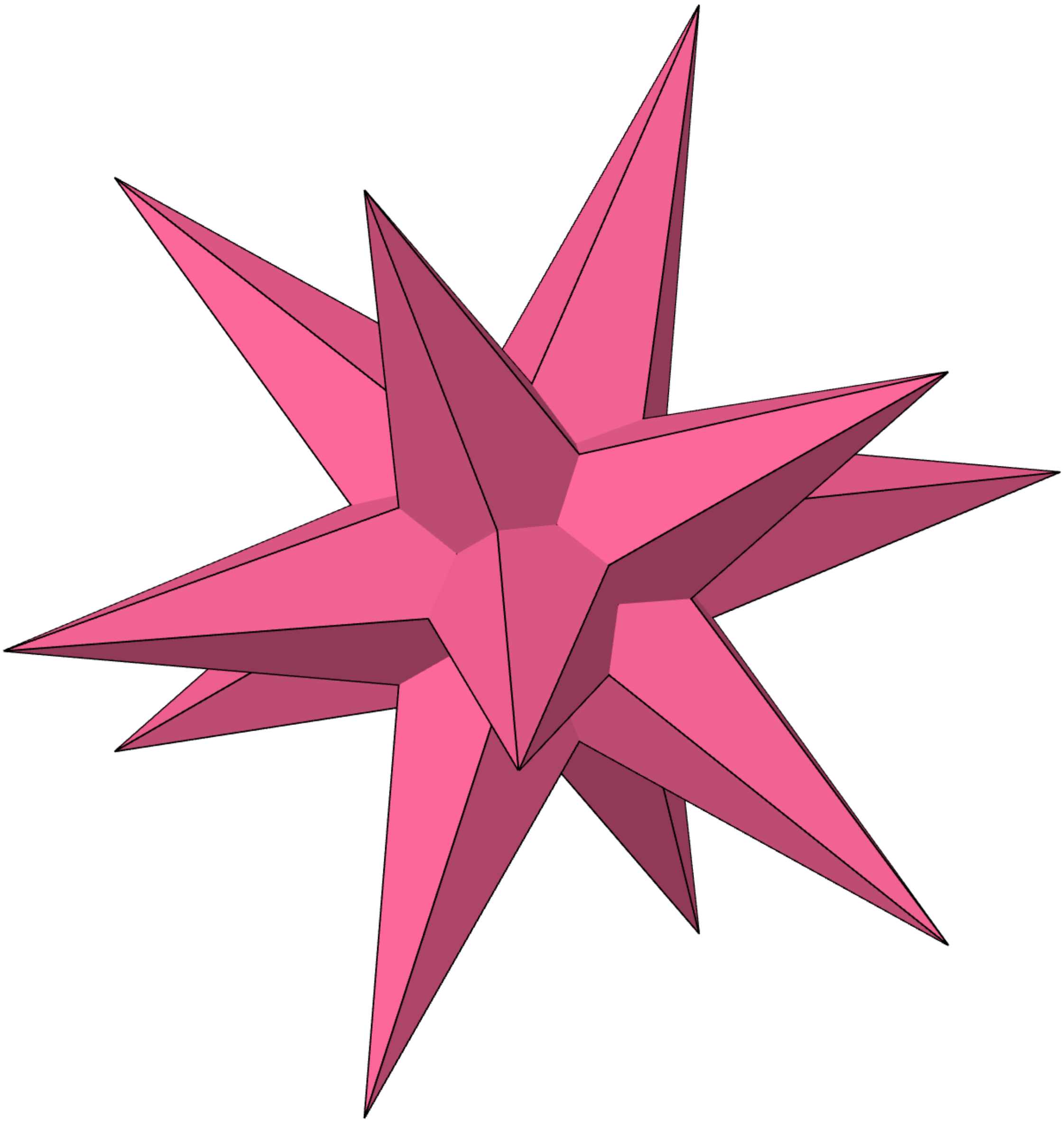


Figura 4.52: *DU47: grande icosaedro triambico*

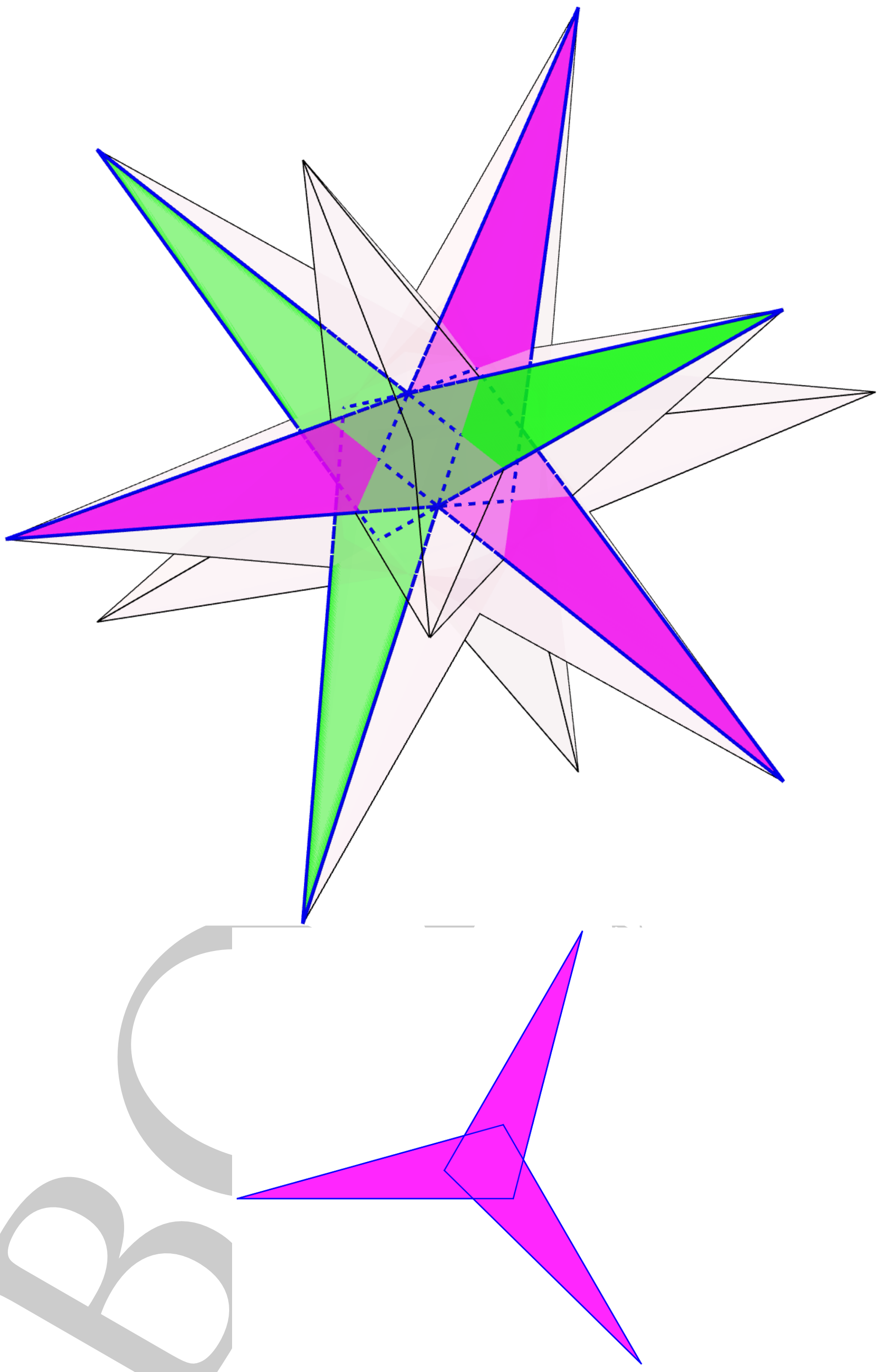


Figura 4.53: *DU47: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.25 DU48: grande esacontaedro icosacronico

Nome inglese: Great Icosacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 52 vertici.

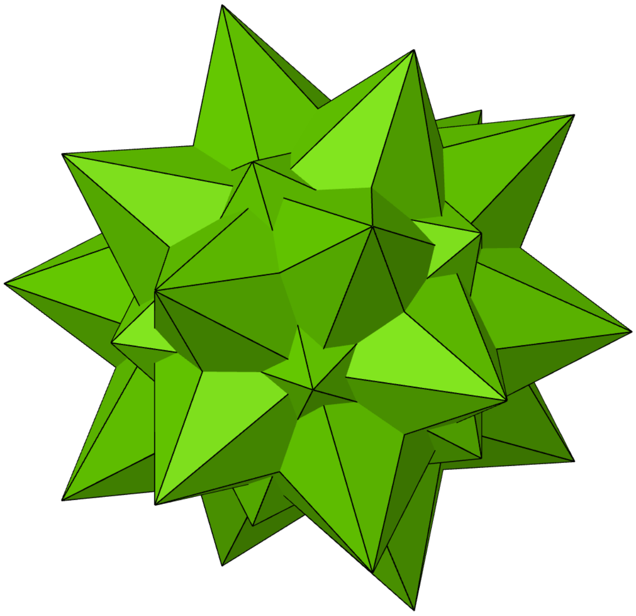


Figura 4.54: *DU48: grande esacontaedro icosacronico*

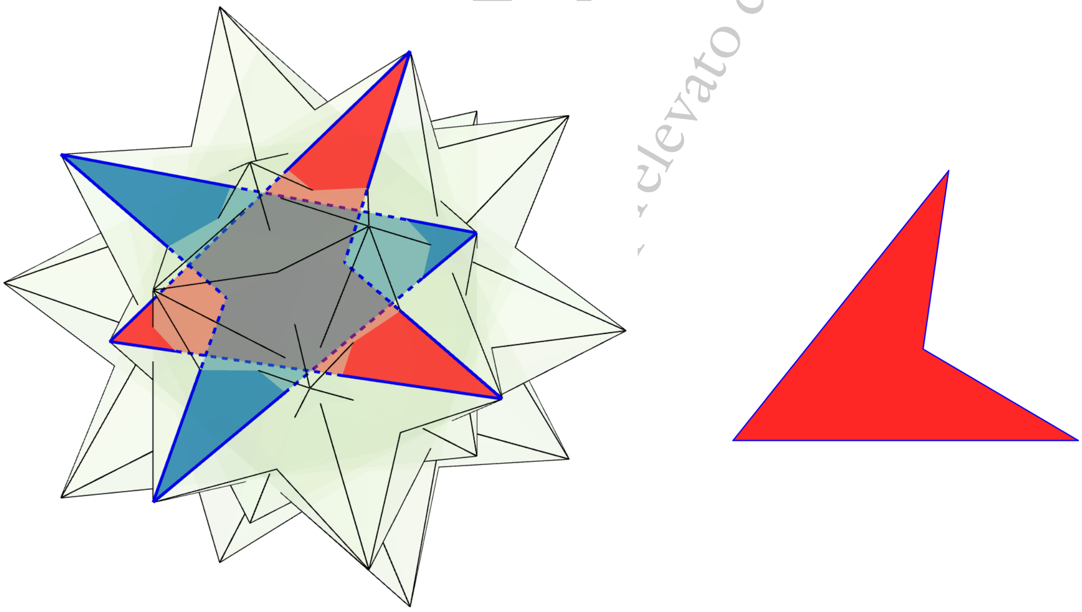


Figura 4.55: *DU48: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.26 DU50: piccolo dodecicosacrono

Nome inglese: Small Dodecicosacron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 32 vertici.

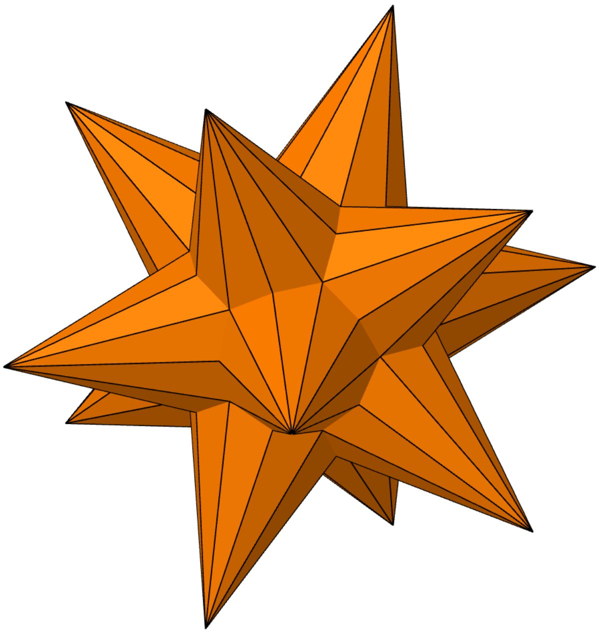


Figura 4.56: *DU50: piccolo dodecicosacrono*

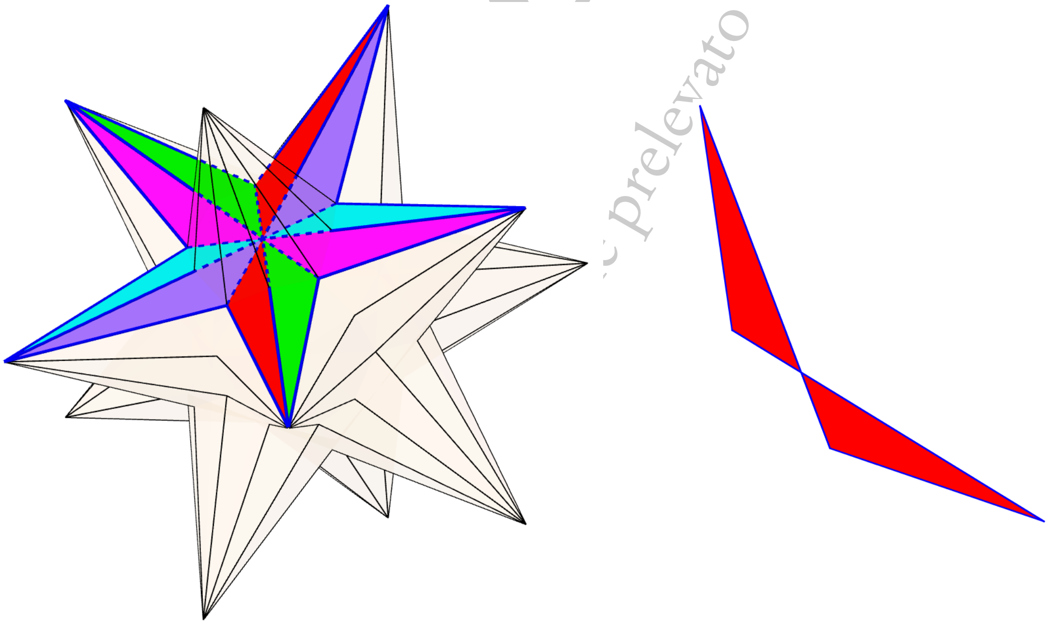


Figura 4.57: *DU50: particolare di cinque facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.27 DU54: grande triacontaedro rombico

Nome inglese: Great Rhombic Triacontahedron. Poliedro con 30 facce, 60 spigoli e 32 vertici.

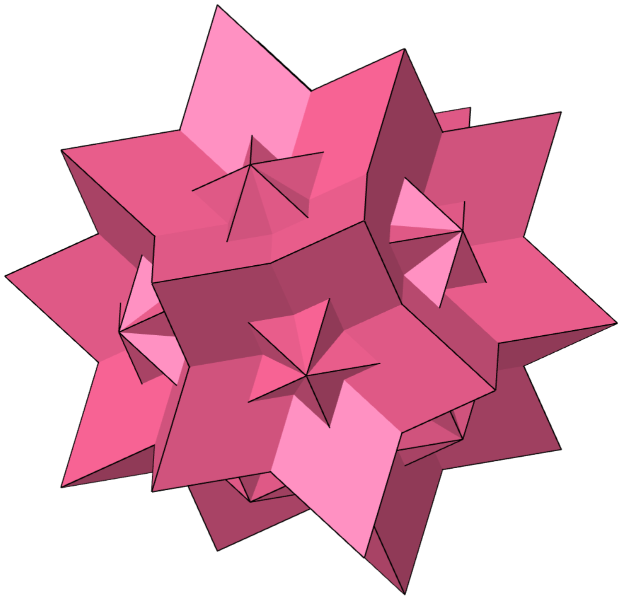


Figura 4.58: *DU54: grande triacontaedro rombico*

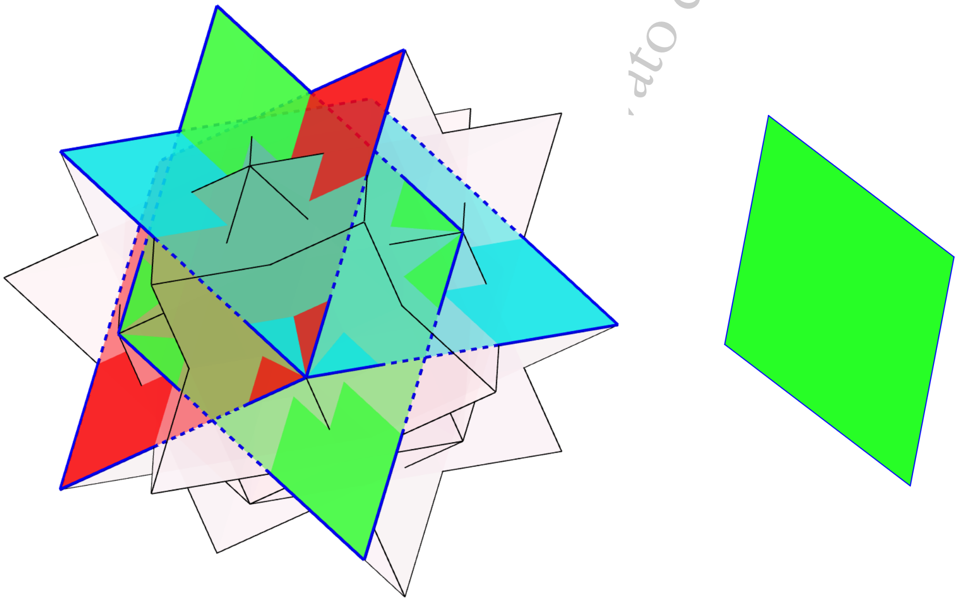


Figura 4.59: *DU54: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.28 DU55: grande stellapentacisdodecaedro

Nome inglese: Great Stellapentakis Dodecahedron. Poliedro con 60 facce, 90 spigoli e 32 vertici.

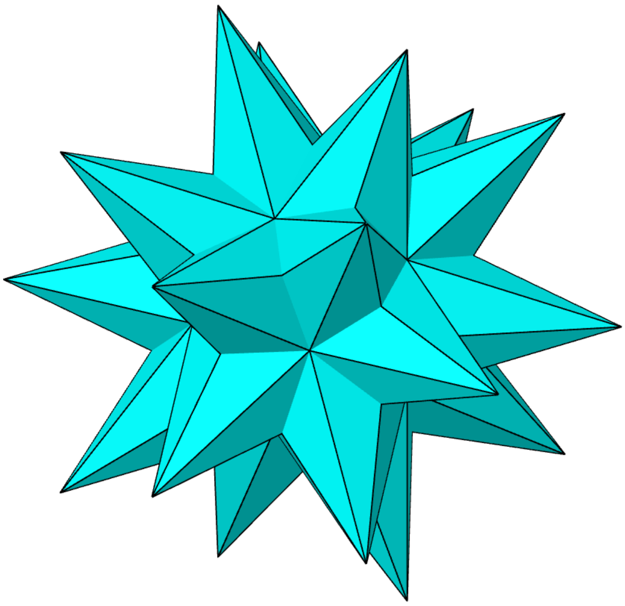


Figura 4.60: *DU55: grande stellapentacisdodecaedro*

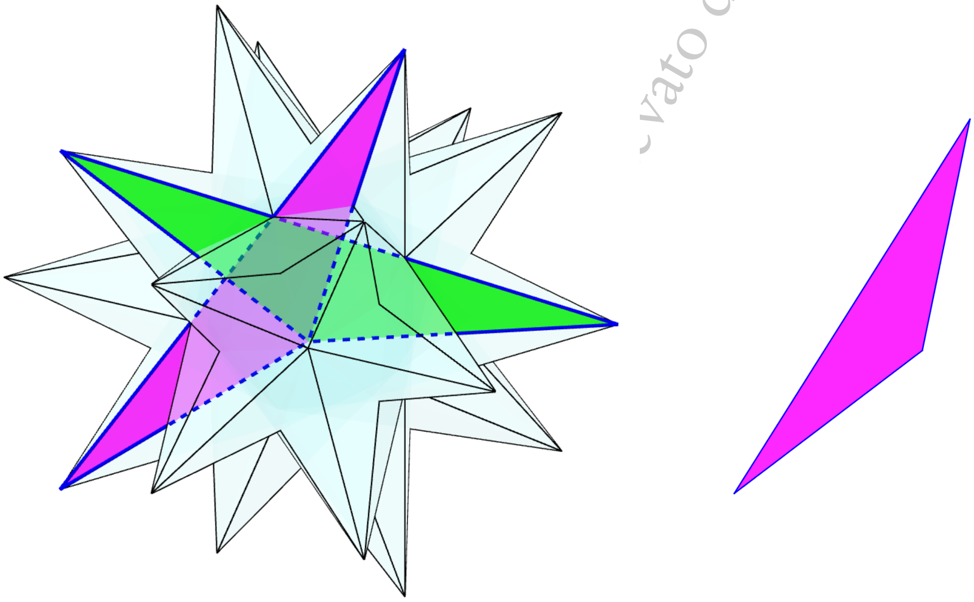


Figura 4.61: *DU55: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.29 DU56: rombicosacrono

Nome inglese: Rhombicosacron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 50 vertici.

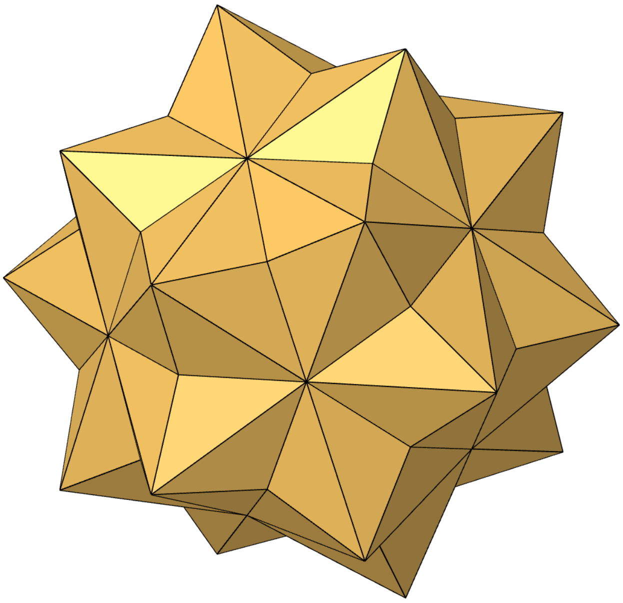


Figura 4.62: *DU56: rombicosacrono*

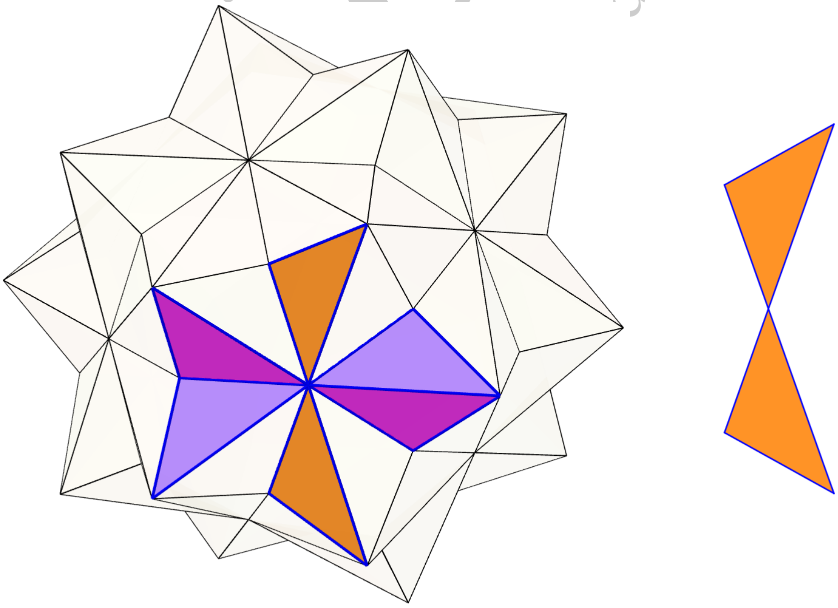


Figura 4.63: *DU56: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.30 DU57: grande esacontaedro pentagonale

Nome inglese: Great Pentagonal Hexecontahedron. Poliedro con 50 facce, 150 spigoli e 92 vertici.

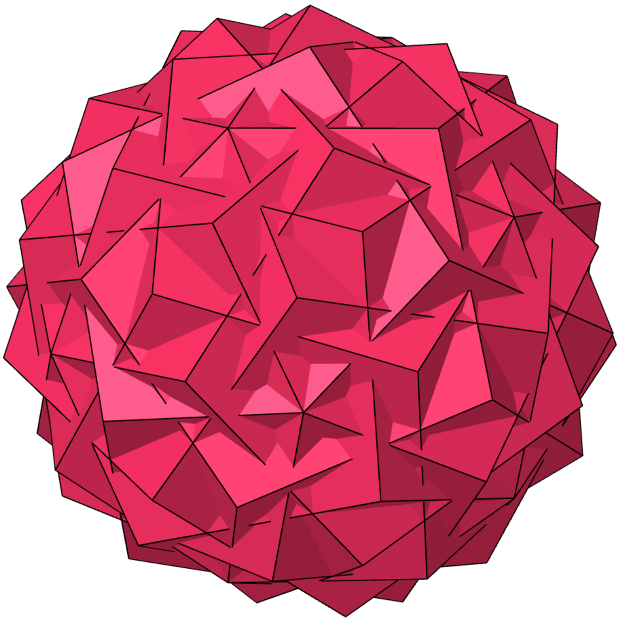


Figura 4.64: *DU57: Great Pentagonal Hexecontahedron*

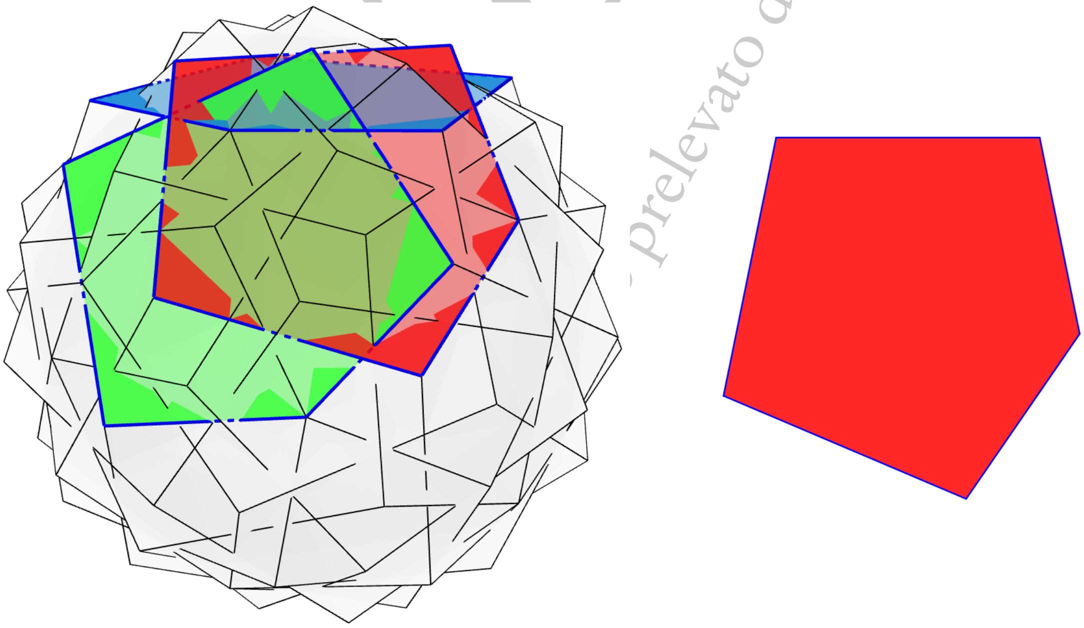


Figura 4.65: *DU57: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.31 DU58: grande pentacisdodecaedro

Nome inglese: Great Pentakis Dodecahedron. Poliedro con 60 facce, 90 spigoli e 24 vertici.

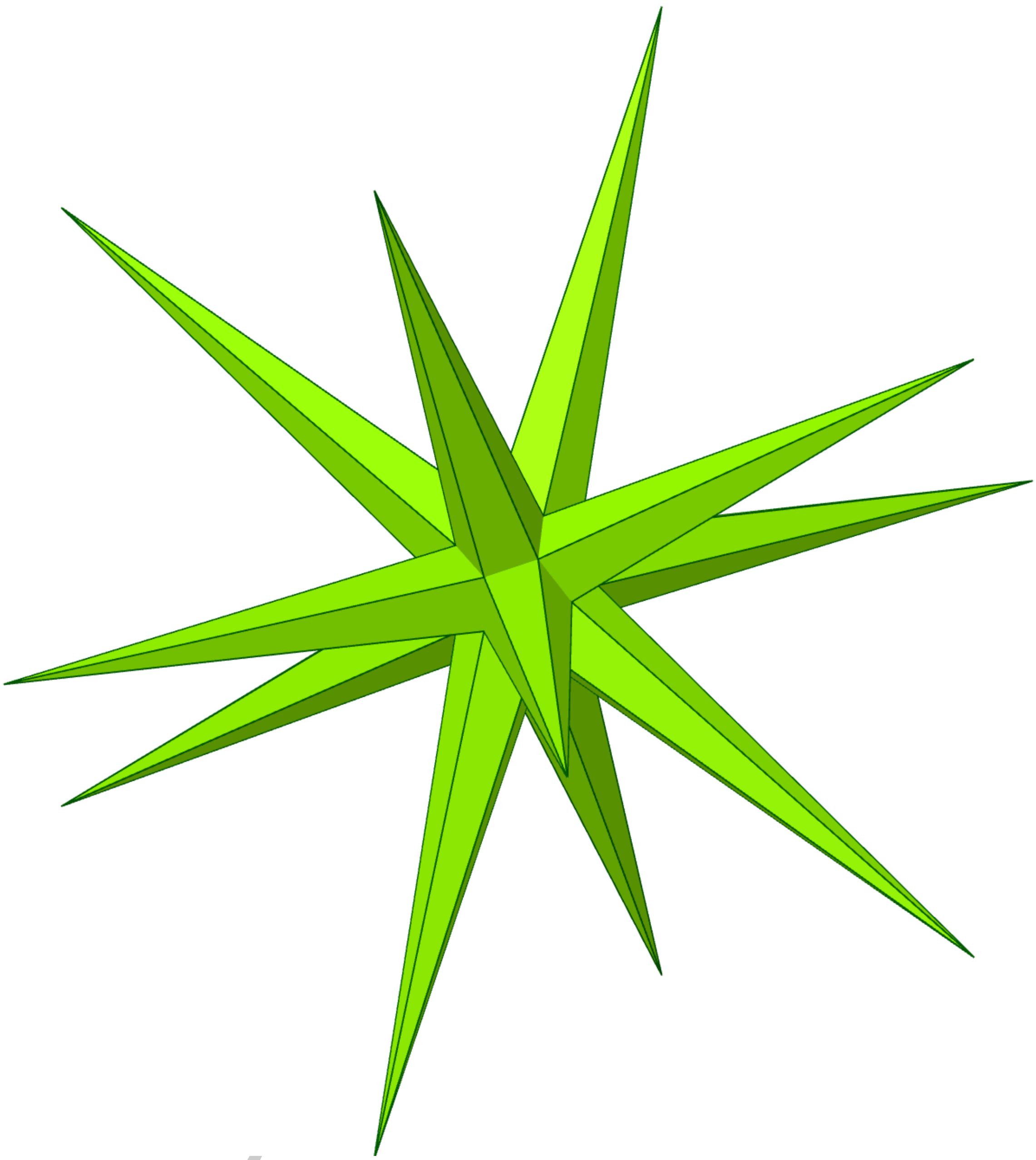


Figura 4.66: *DU58: grande pentacisdodecaedro*

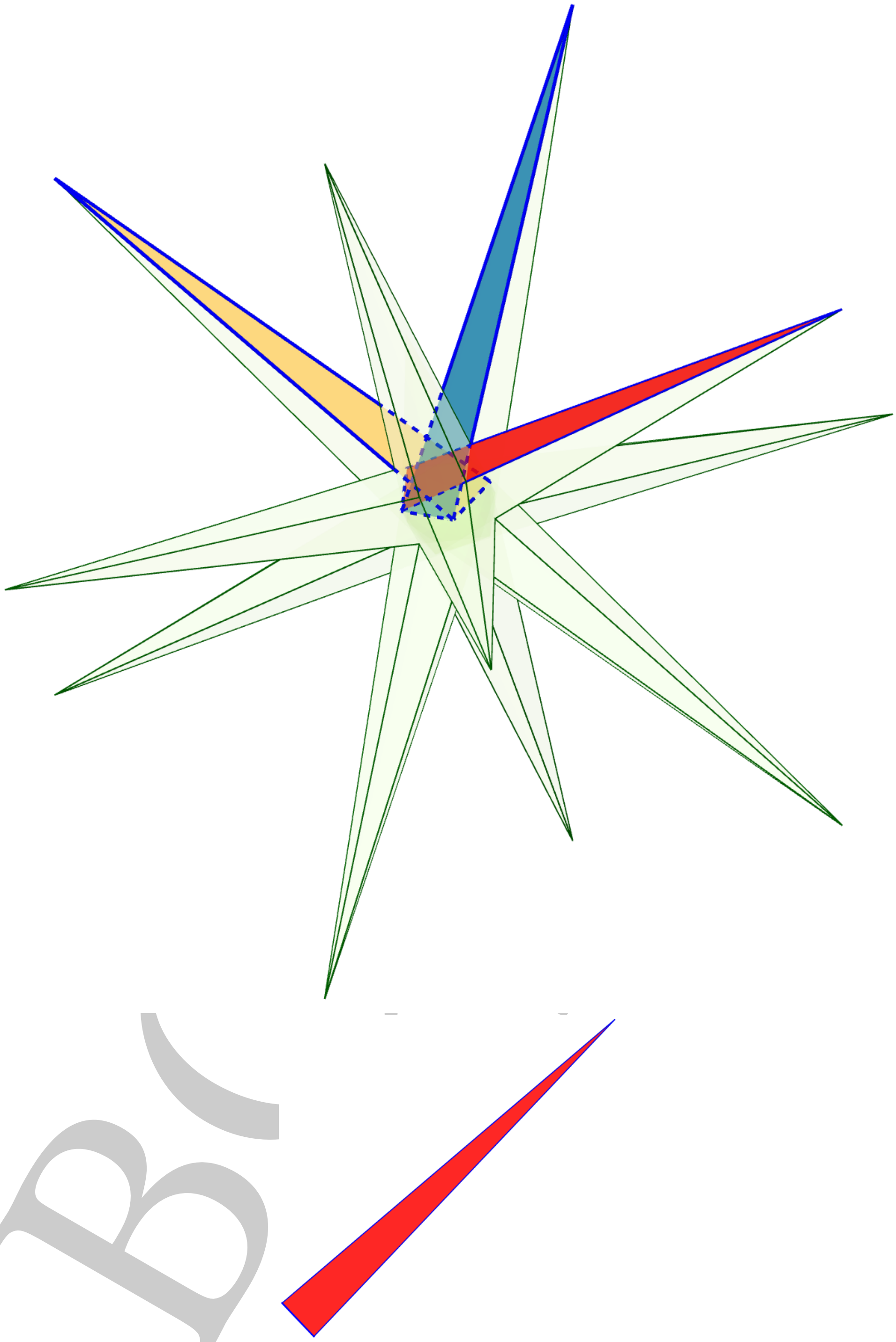


Figura 4.67: *DU58: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.32 DU59: disdiacistriacontaedro medio

Nome inglese: Medial Disdyakis Triacontahedron. Poliedro con 120 facce, 180 spigoli e 54 vertici.

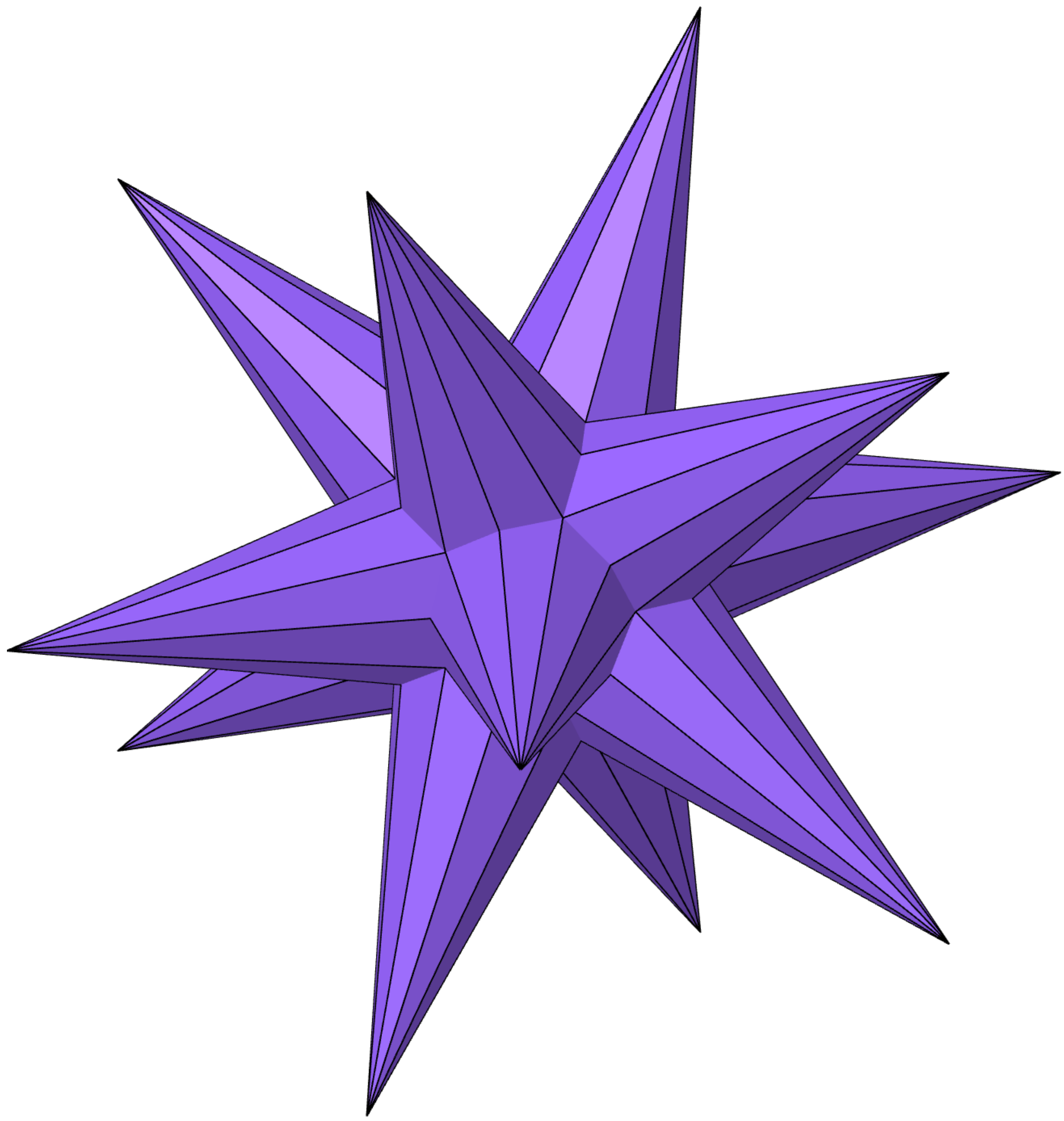


Figura 4.68: *DU59: disdiacistriacontaedro medio*

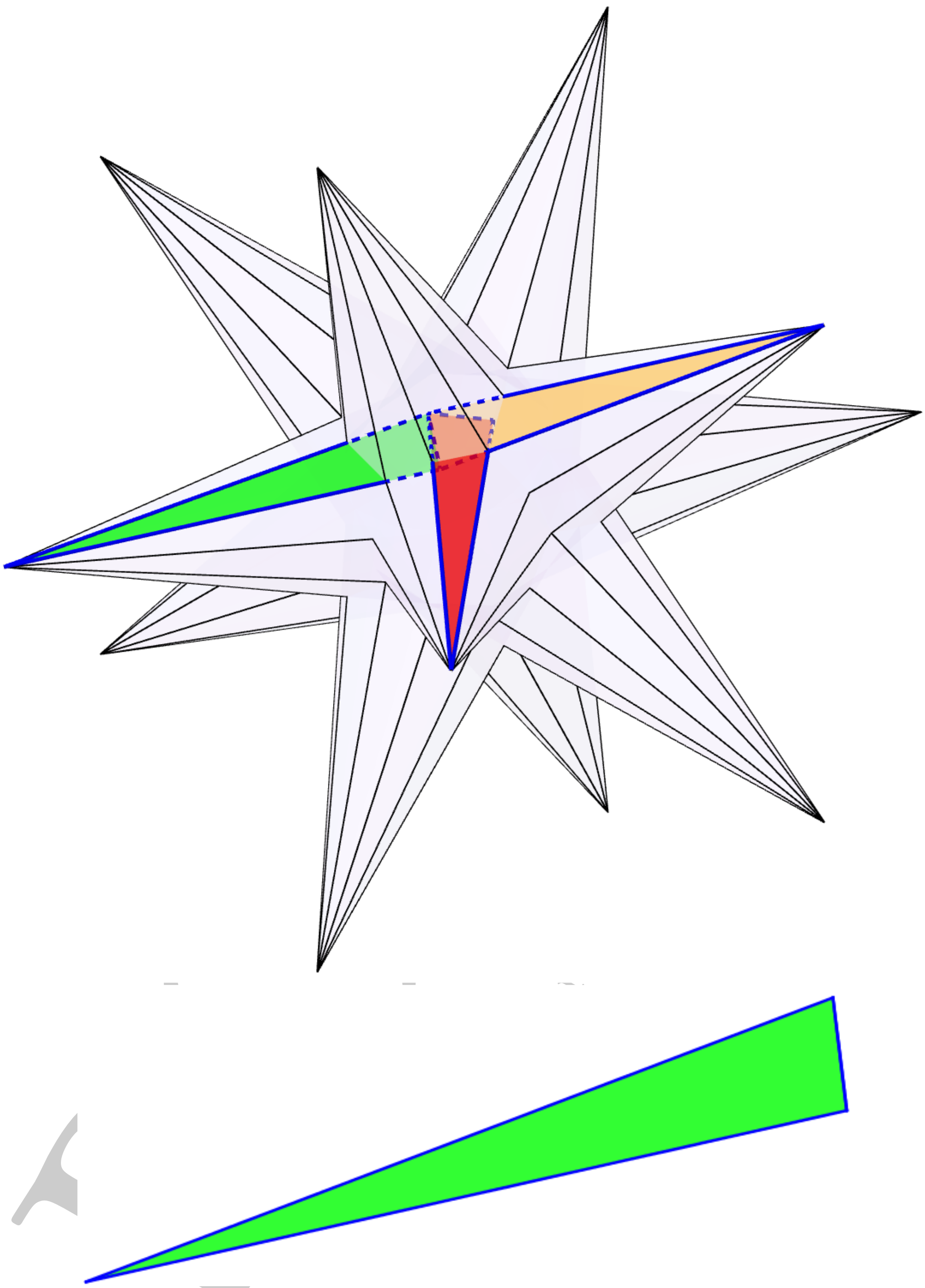


Figura 4.69: *DU59: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.33 DU60: esacontaedro pentagonale inverso medio

Nome inglese: Medial Inverted Pentagonal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 150 spigoli e 84 vertici.

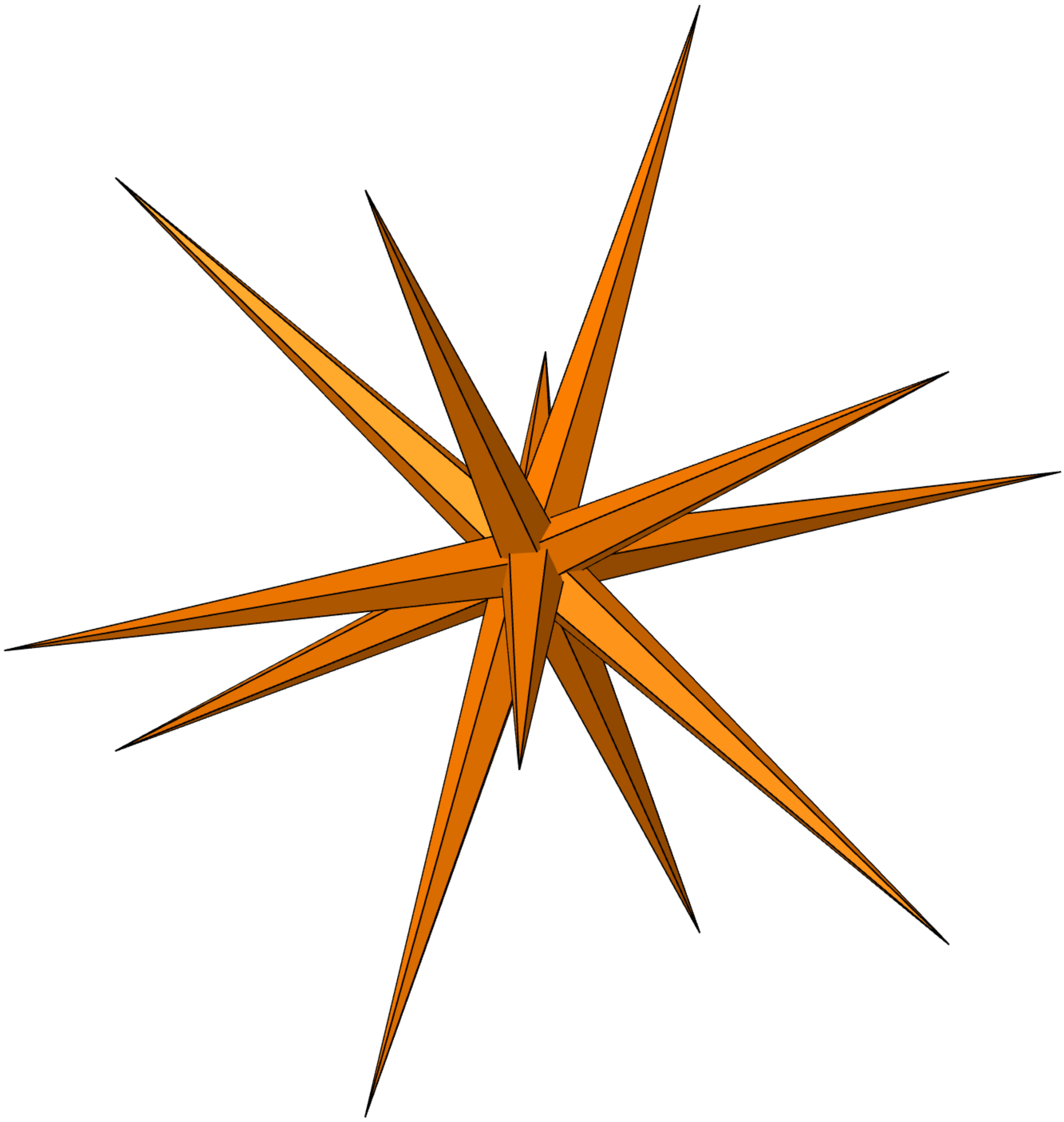


Figura 4.70: *DU60: esacontaedro pentagonale inverso medio*

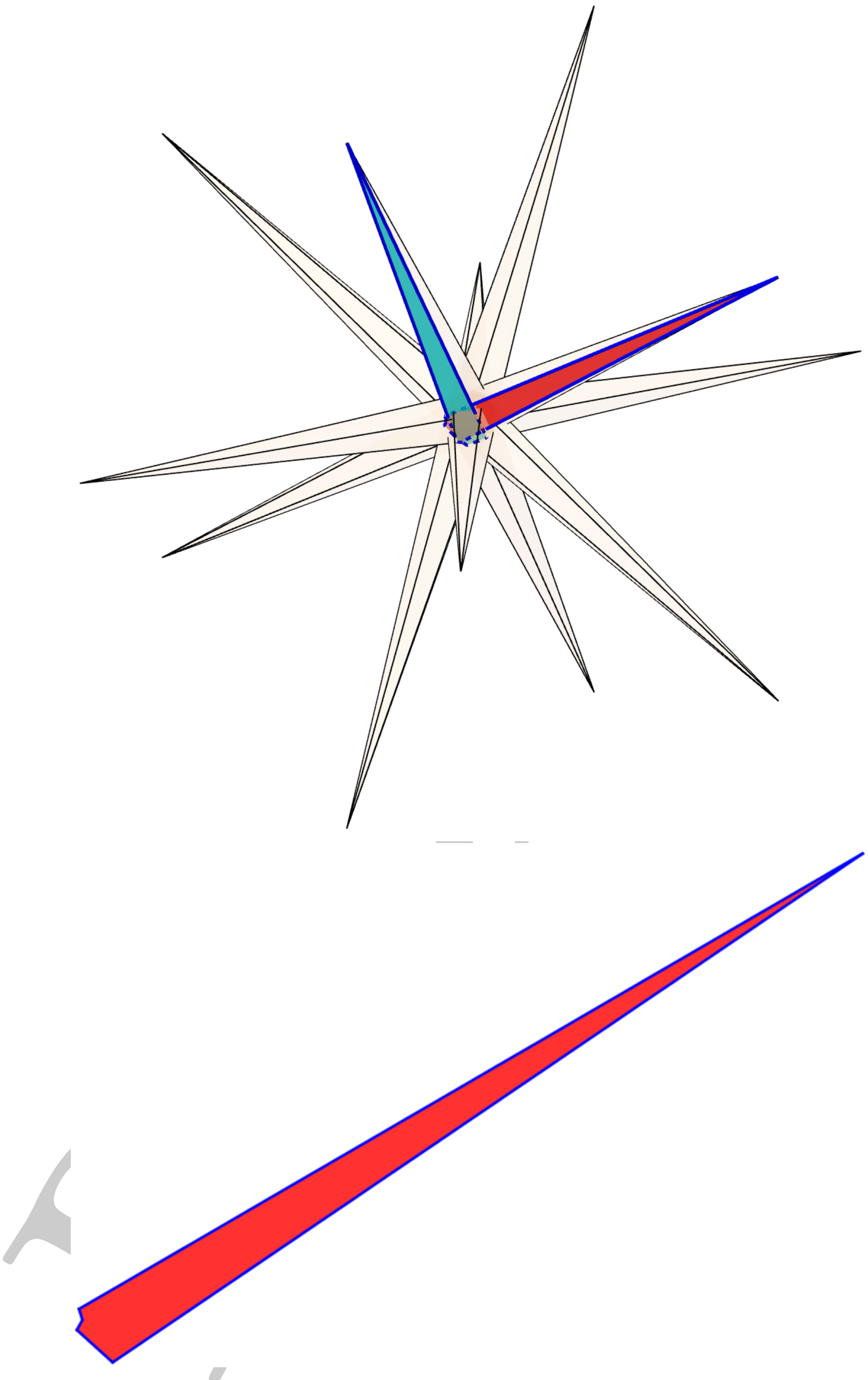


Figura 4.71: *DU60: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.34 DU61: grande esacontaedro dodecacronico

Nome inglese: Great Dodecacronic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 44 vertici.

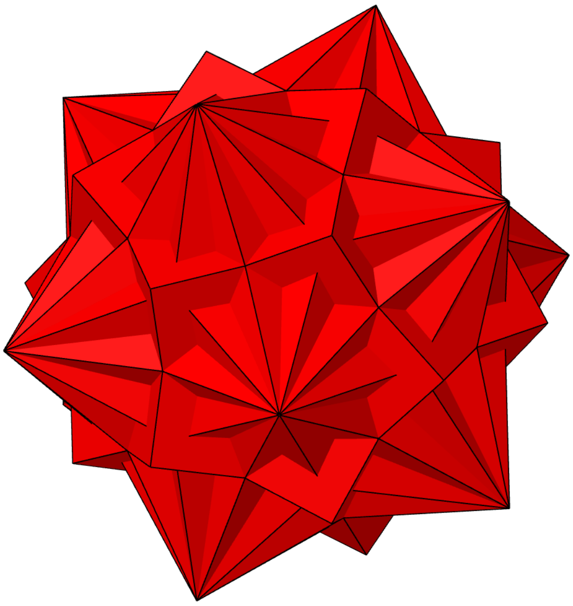


Figura 4.72: *DU61: grande esacontaedro dodecacronico*

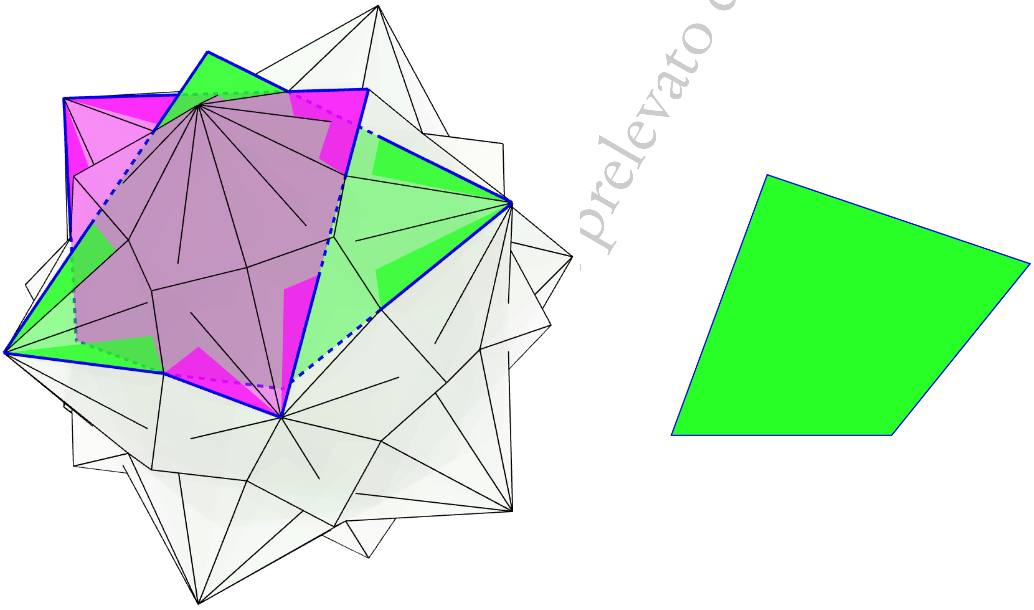


Figura 4.73: *DU61: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.35 DU63: grande dodecicosacrono

Nome inglese: Great Dodecicosacron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 32 vertici.

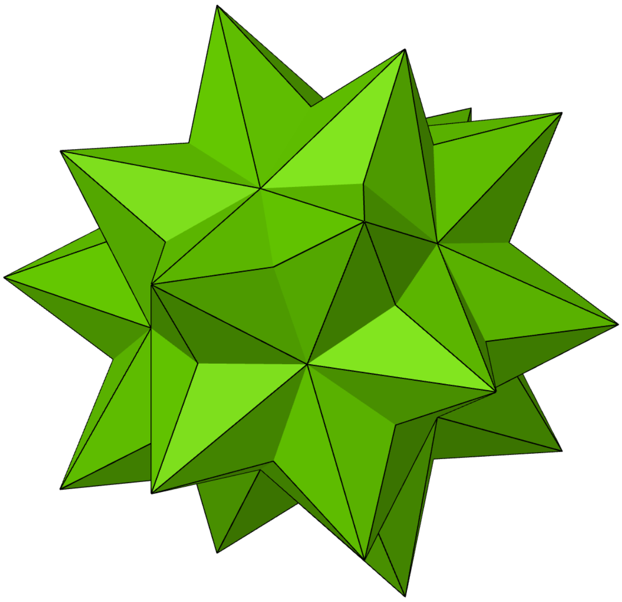


Figura 4.74: *DU63: grande dodecicosacrono*

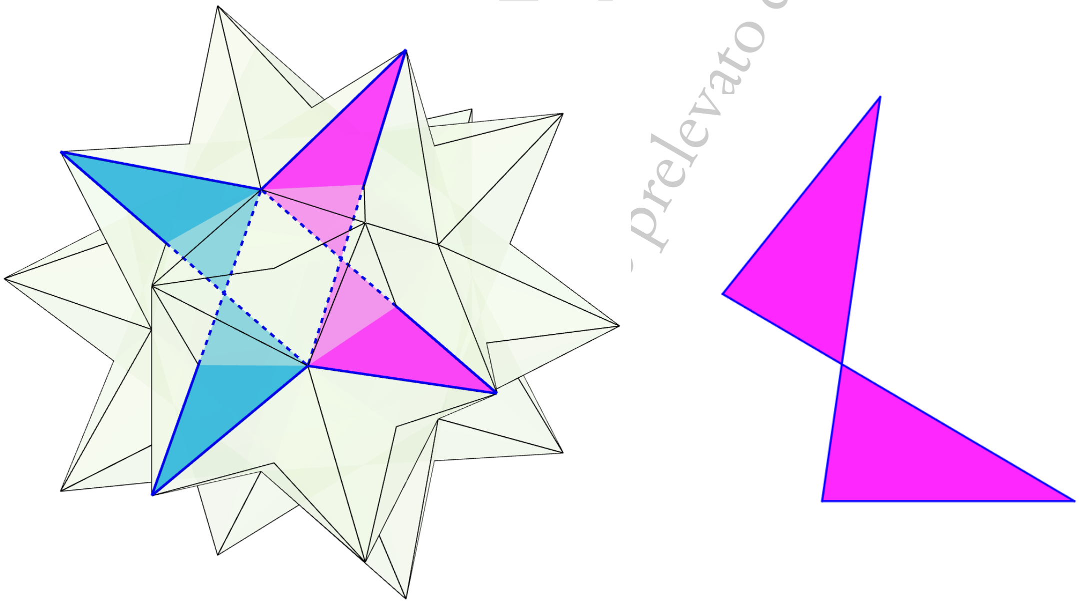


Figura 4.75: *DU63: particolare di due facce e tipo di faccia*

4.2.36 DU64: grande esacontaedro esagonale

Nome inglese: Great Hexagonal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 180 spigoli e 104 vertici.

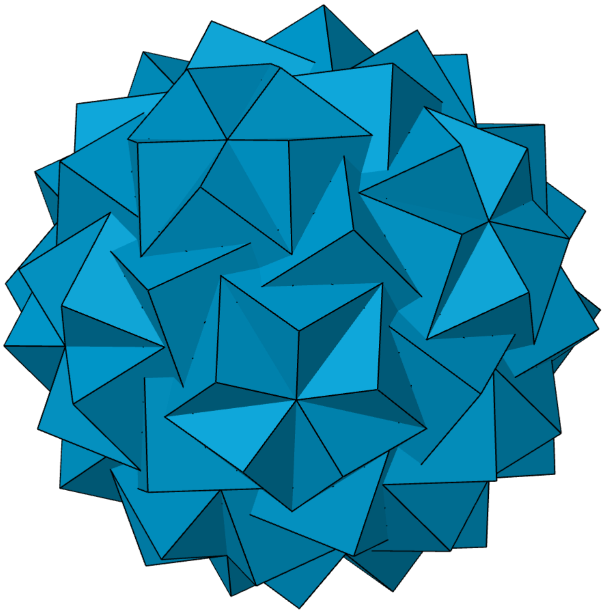


Figura 4.76: *DU64: grande esacontaedro esagonale*

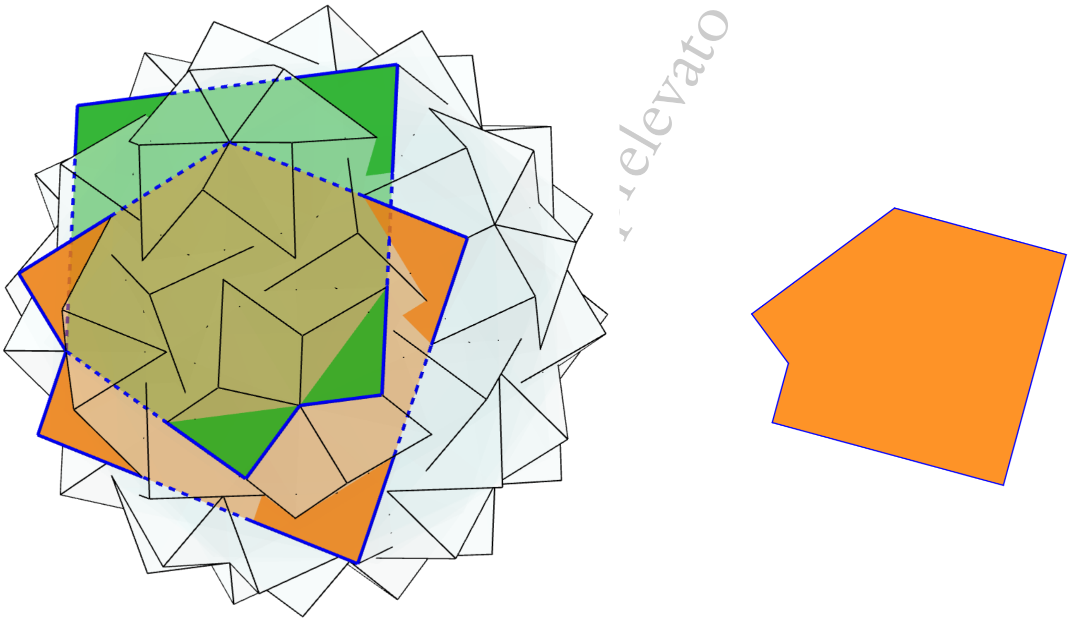


Figura 4.77: *DU64: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.37 DU66: grande triacisicosaedro

Nome inglese: Great Triakis Icosahedron. Poliedro con 60 facce, 90 spigoli e 32 vertici.

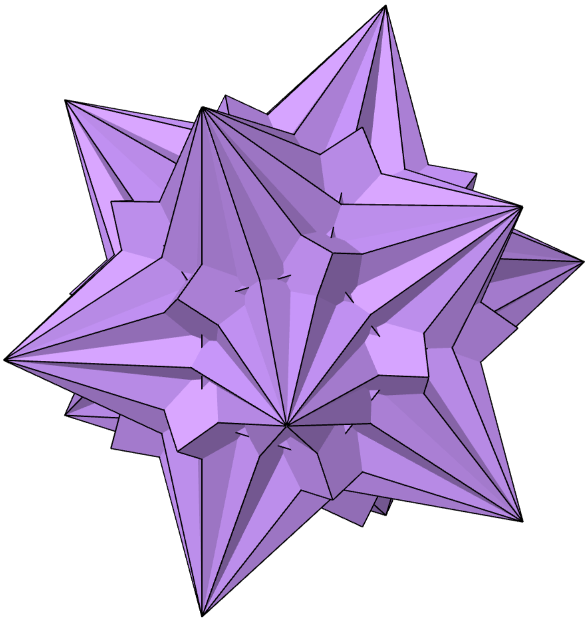


Figura 4.78: *DU66: grande triacisicosaedro*

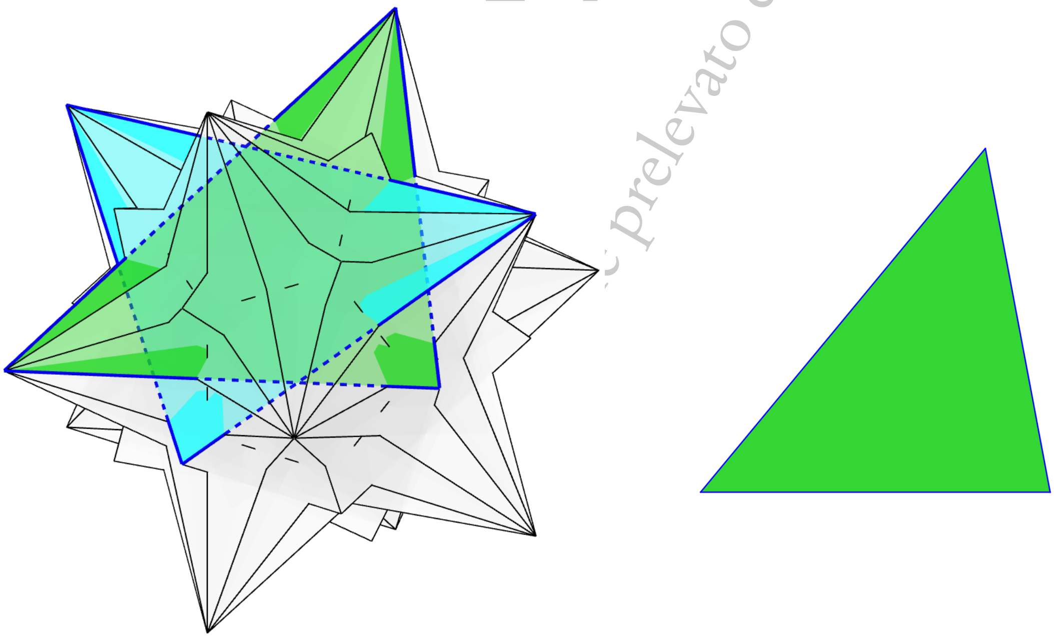


Figura 4.79: *DU66: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.38 DU67: grande esacontaedro deltoidale

Nome inglese: Great Deltoidal Hexecontahedron. Poliedro con 50 facce, 120 spigoli e 62 vertici.

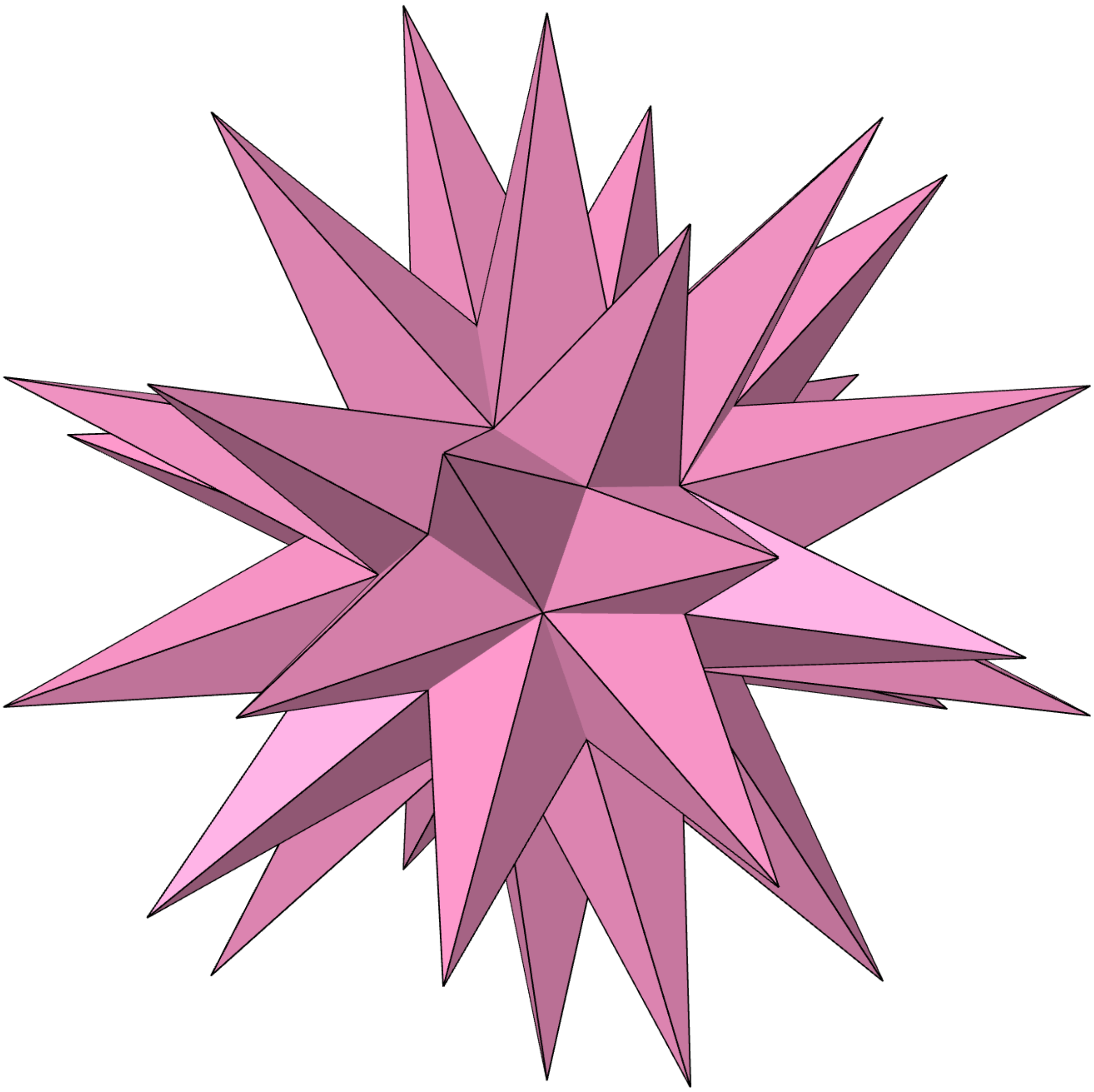


Figura 4.80: *DU67: grande esacontaedro deltoidale*

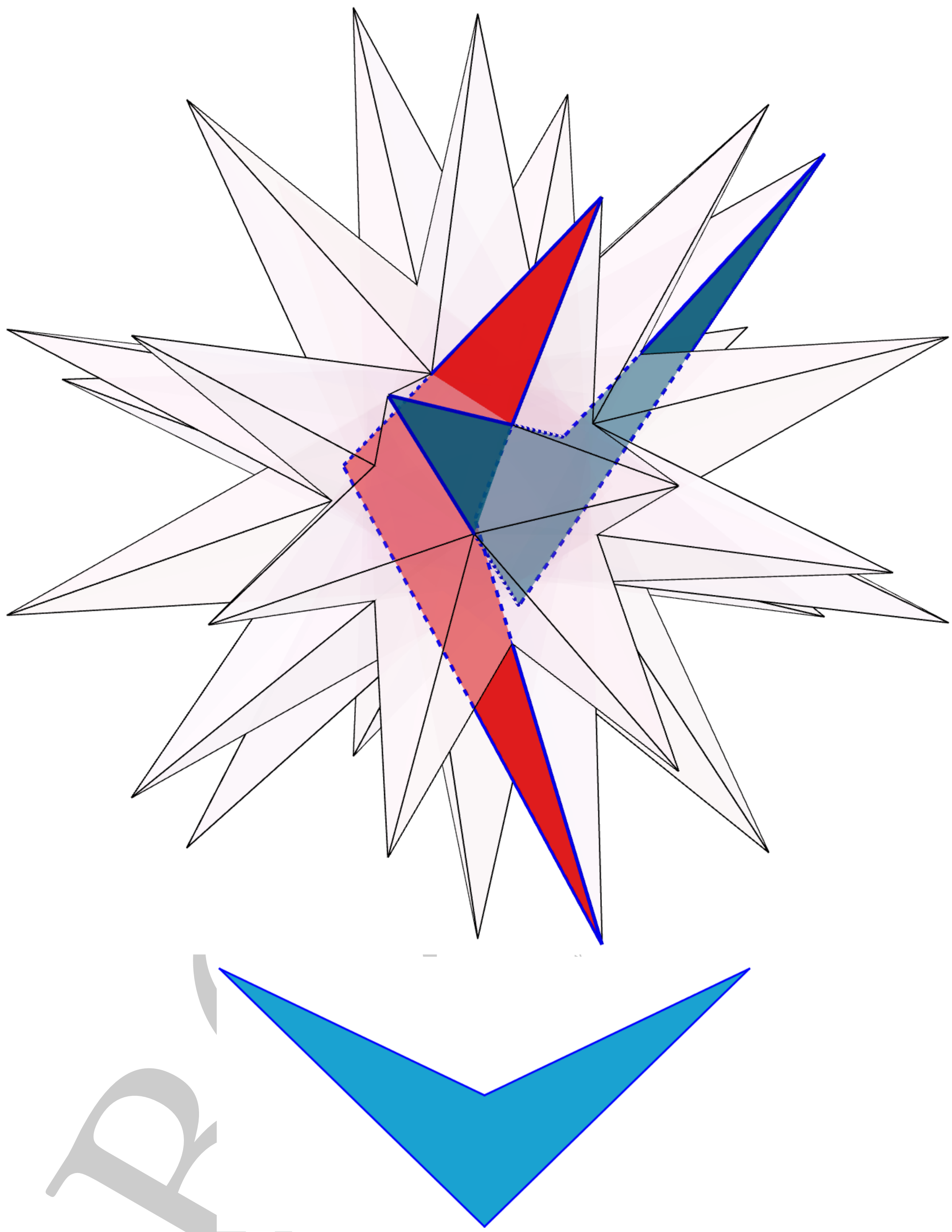


Figura 4.81: *DU67: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.39 DU68: grande disdiacistriacontaedro

Nome inglese: Great Disdyakis Triacontahedron. Poliedro con 120 facce, 180 spigoli e 62 vertici.

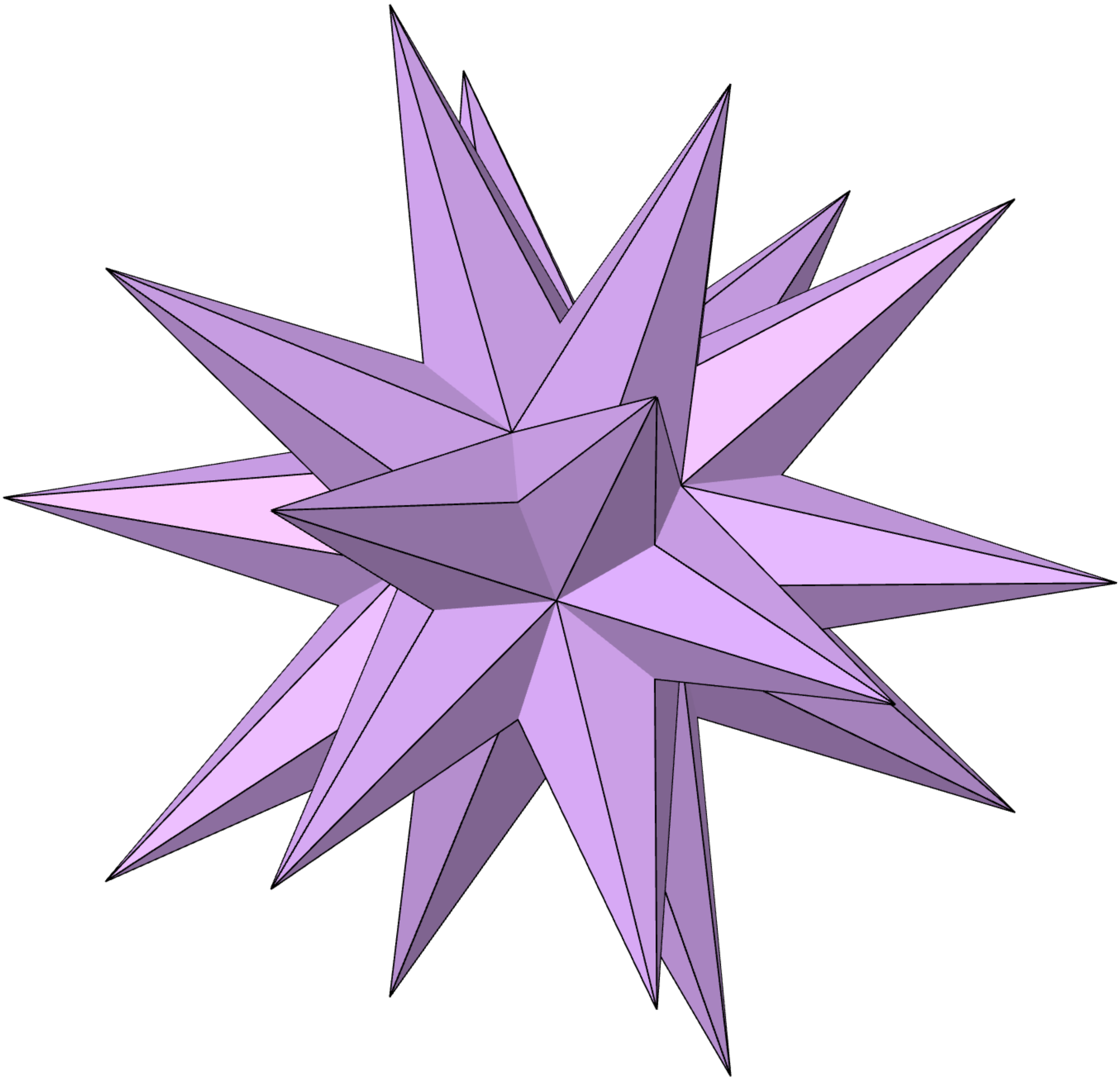


Figura 4.82: *DU68: grande disdiacistriacontaedro*

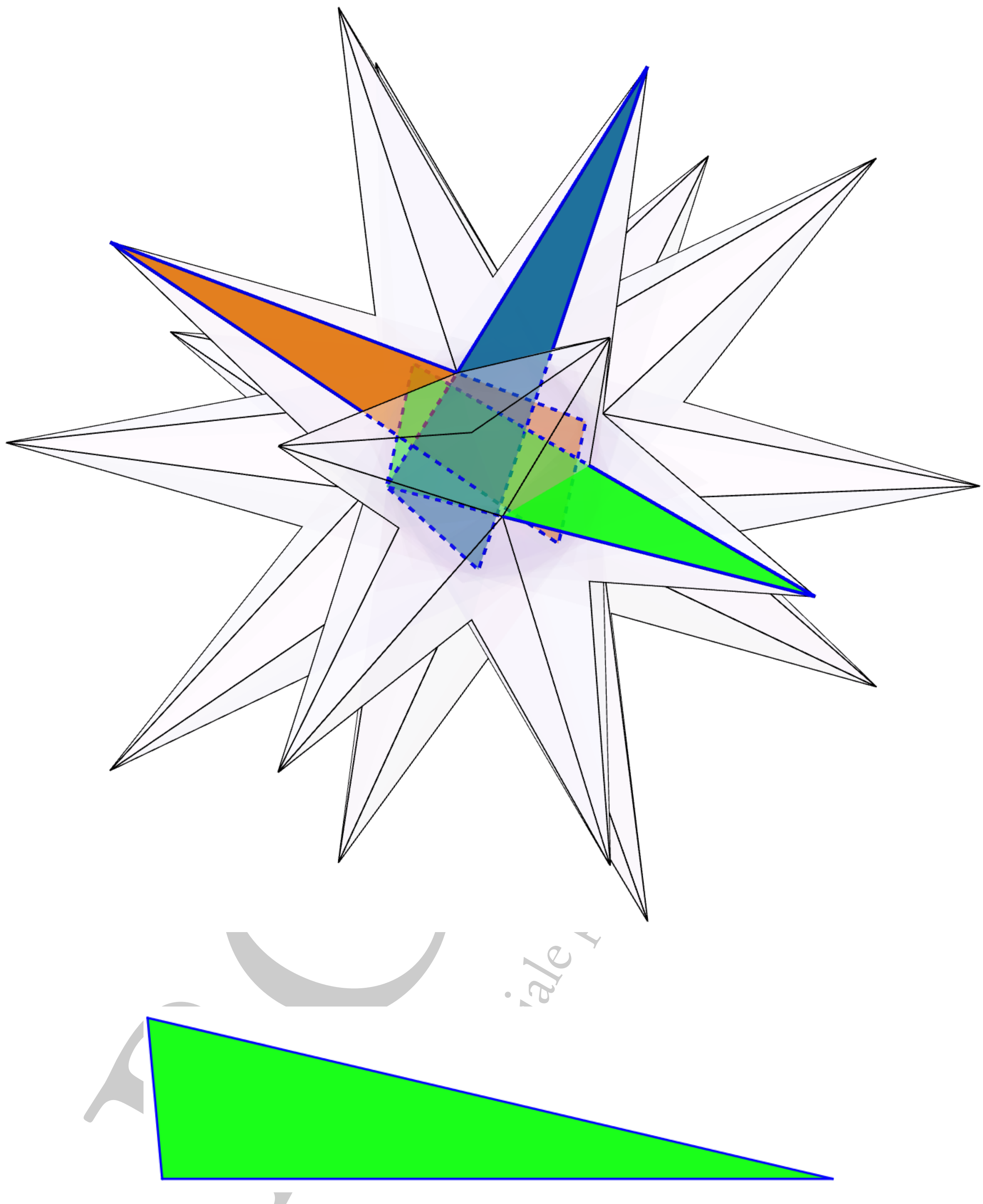


Figura 4.83: *DU68: particolare di tre facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.40 DU69: grande esacontaedro pentagonale inverso

Nome inglese: Great Inverted Pentagonal Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 150 spigoli e 92 vertici.

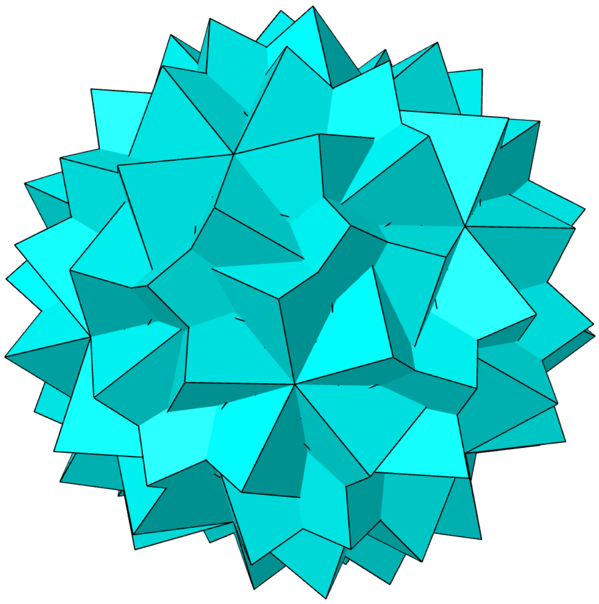


Figura 4.84: *DU69: grande esacontaedro pentagonale inverso*

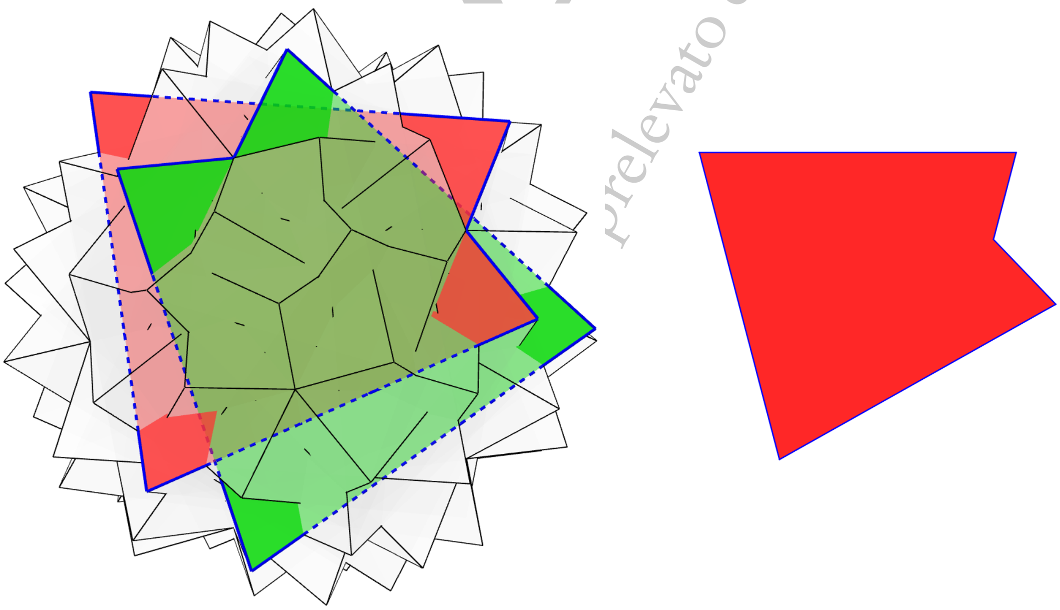


Figura 4.85: *DU69: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.41 DU72: piccolo esacontaedro esagrammico

Nome inglese: Small Hexagrammic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 180 spigoli e 112 vertici.

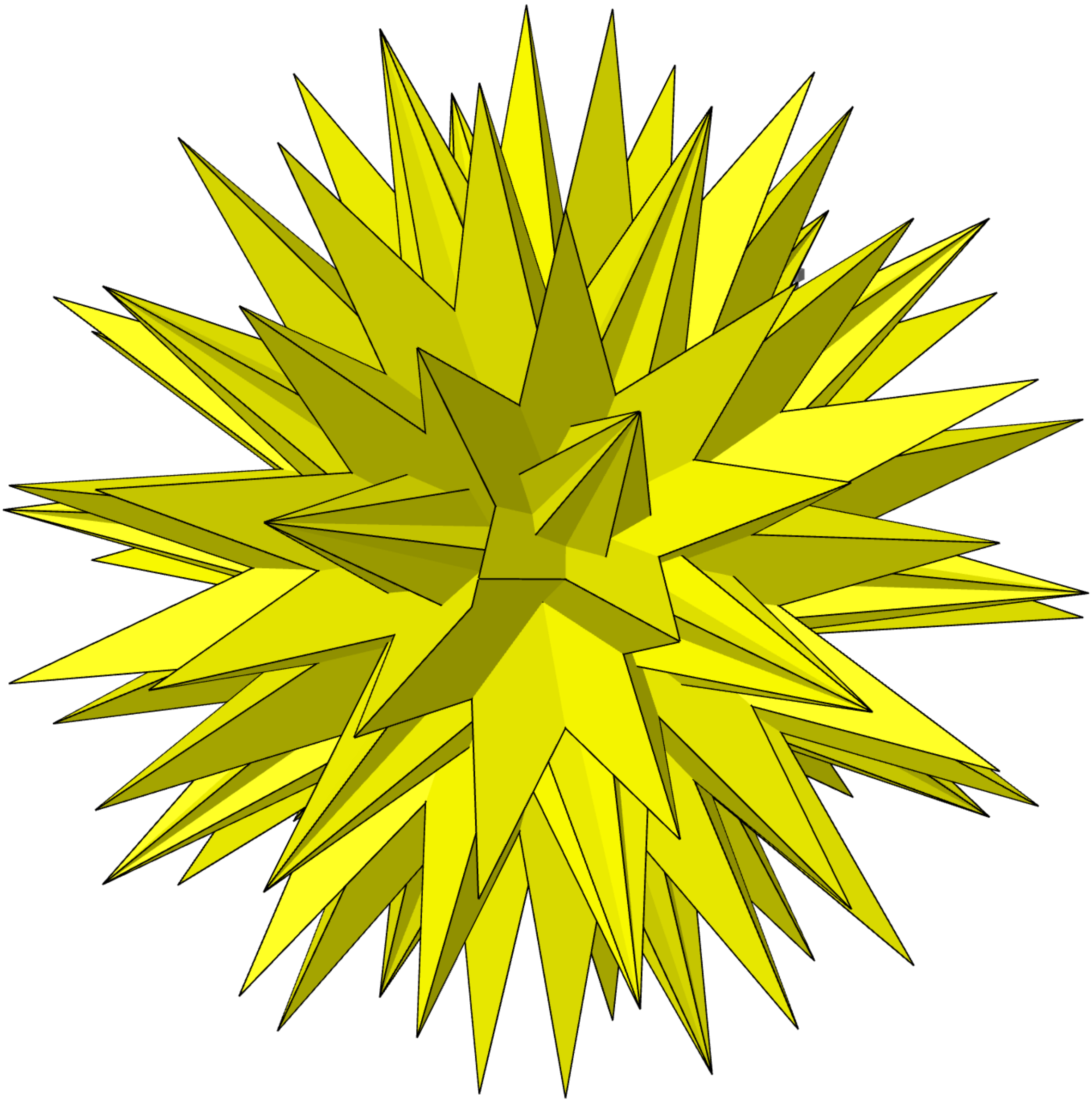


Figura 4.86: *DU72 : piccolo esacontaedro esagrammico*

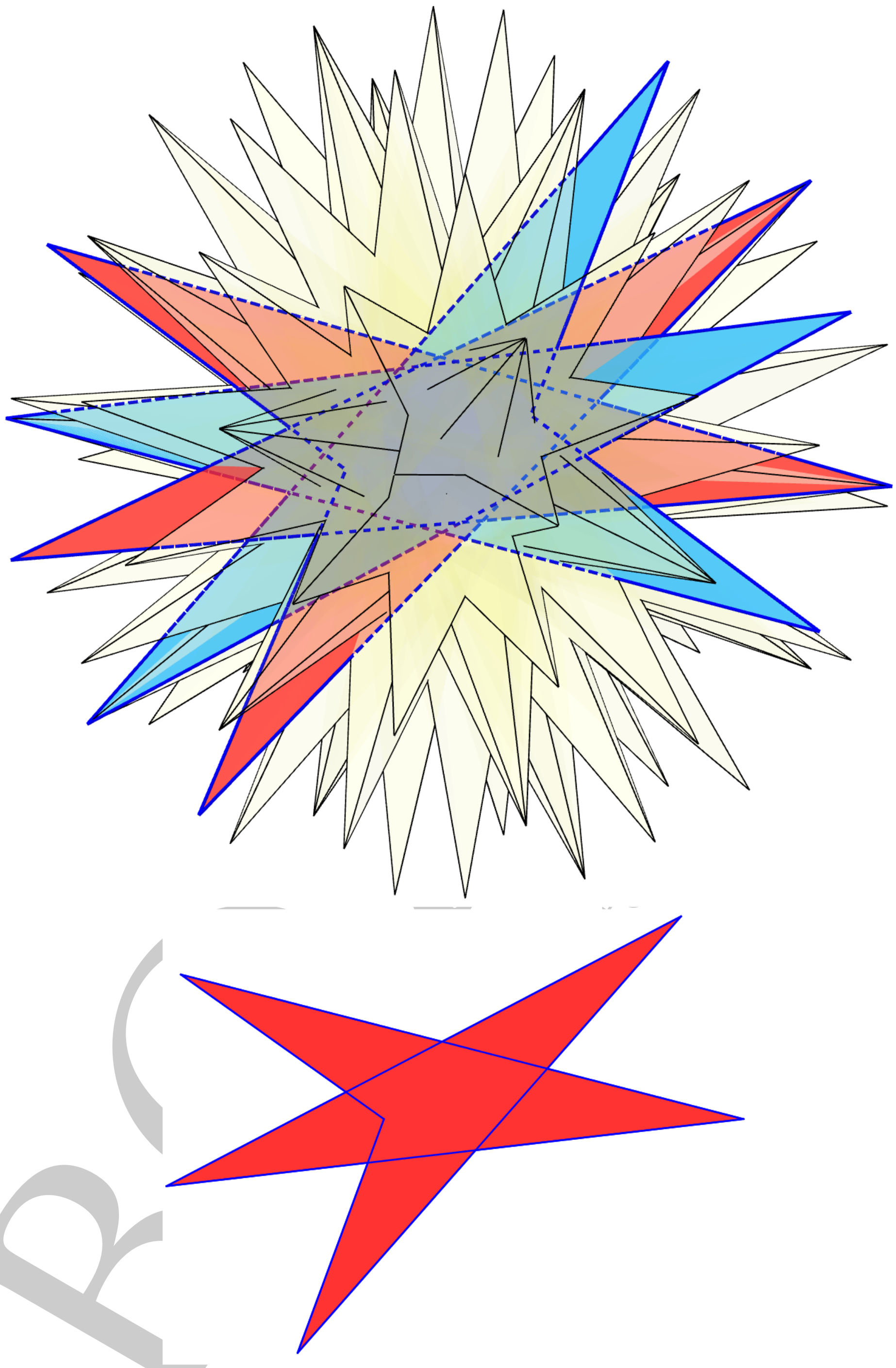


Figura 4.87: *DU72: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.42 DU73: grande rombidodecacrono

Nome inglese: Great Rhombidodecacron. Poliedro con 60 facce, 120 spigoli e 42 vertici.

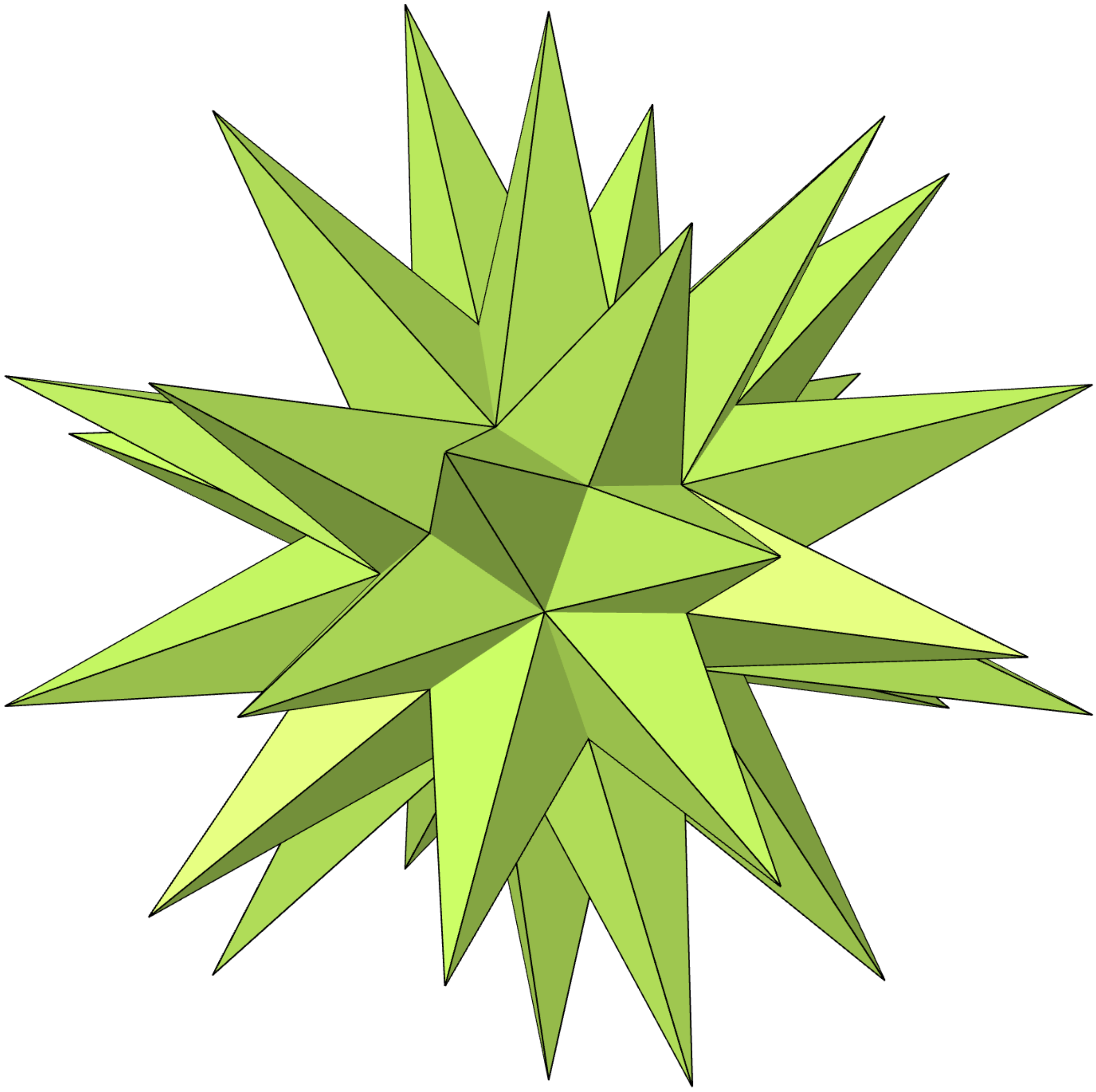


Figura 4.88: *DU73: grande rombidodecacrono*

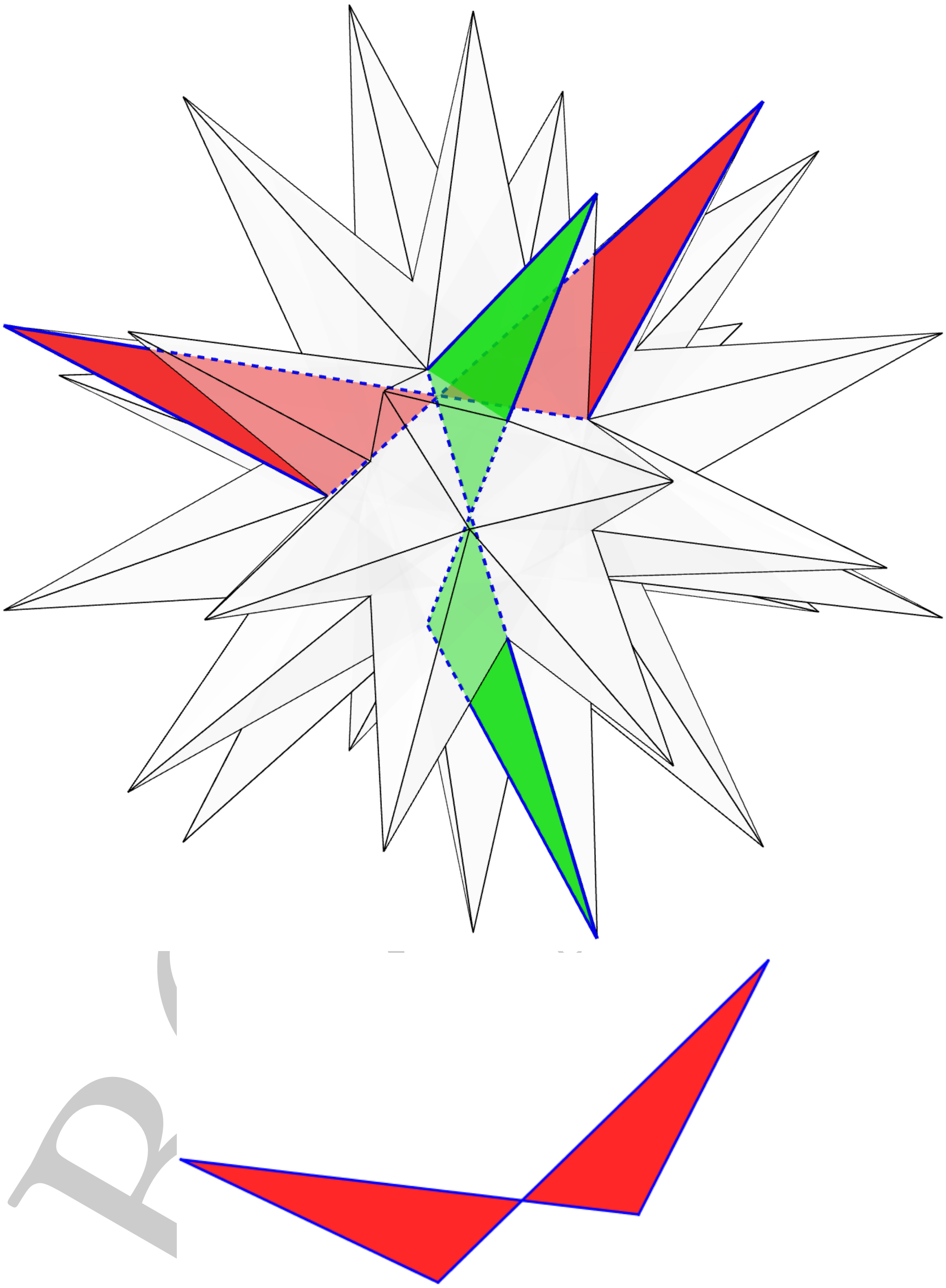


Figura 4.89: *DU73: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

4.2.43 DU74: grande esacontaedro pentagrammico

Nome inglese: Great Pentagrammic Hexecontahedron. Poliedro con 60 facce, 150 spigoli e 92 vertici.

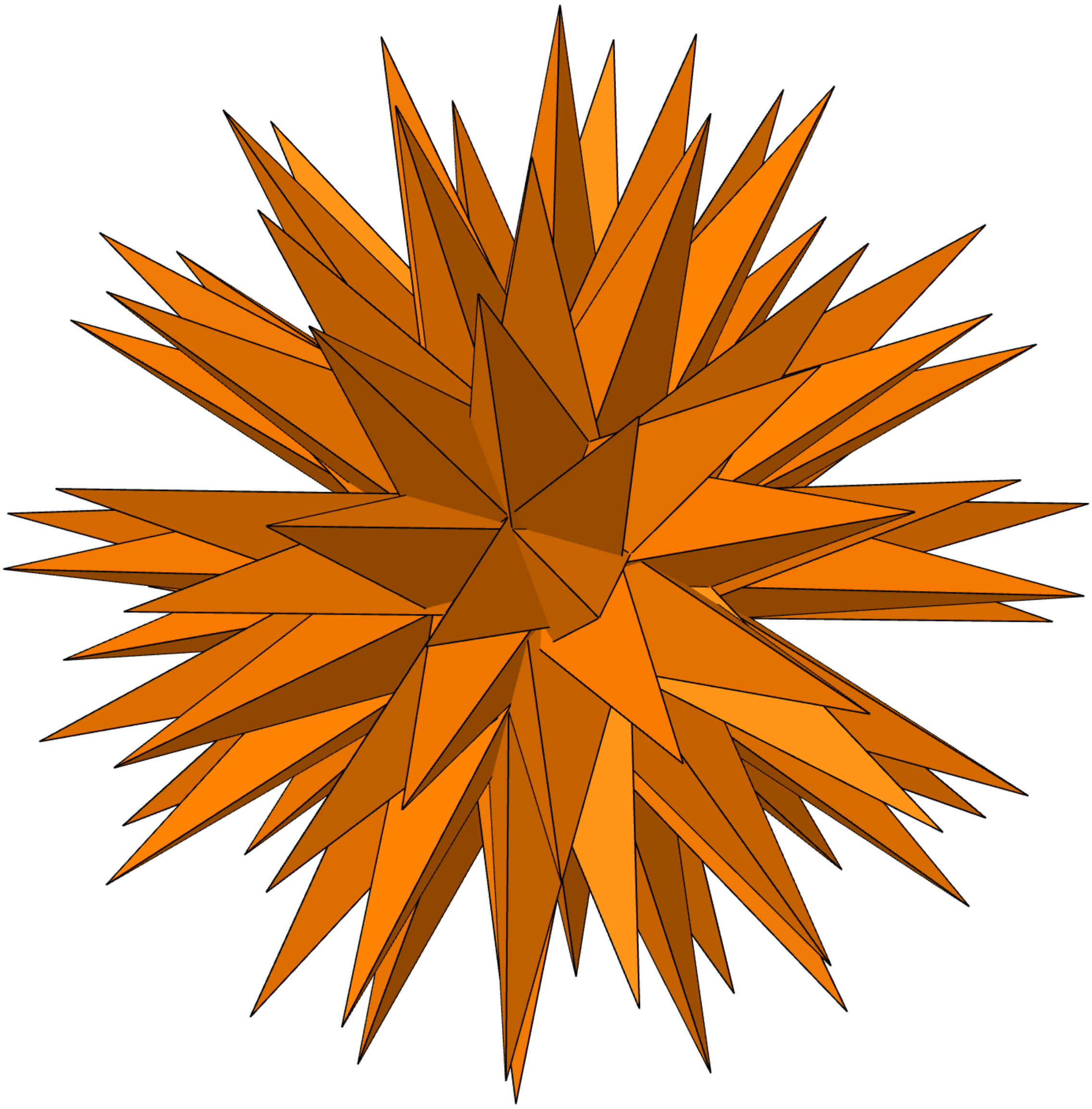


Figura 4.90: *DU74: grande esacontaedro pentagrammico*

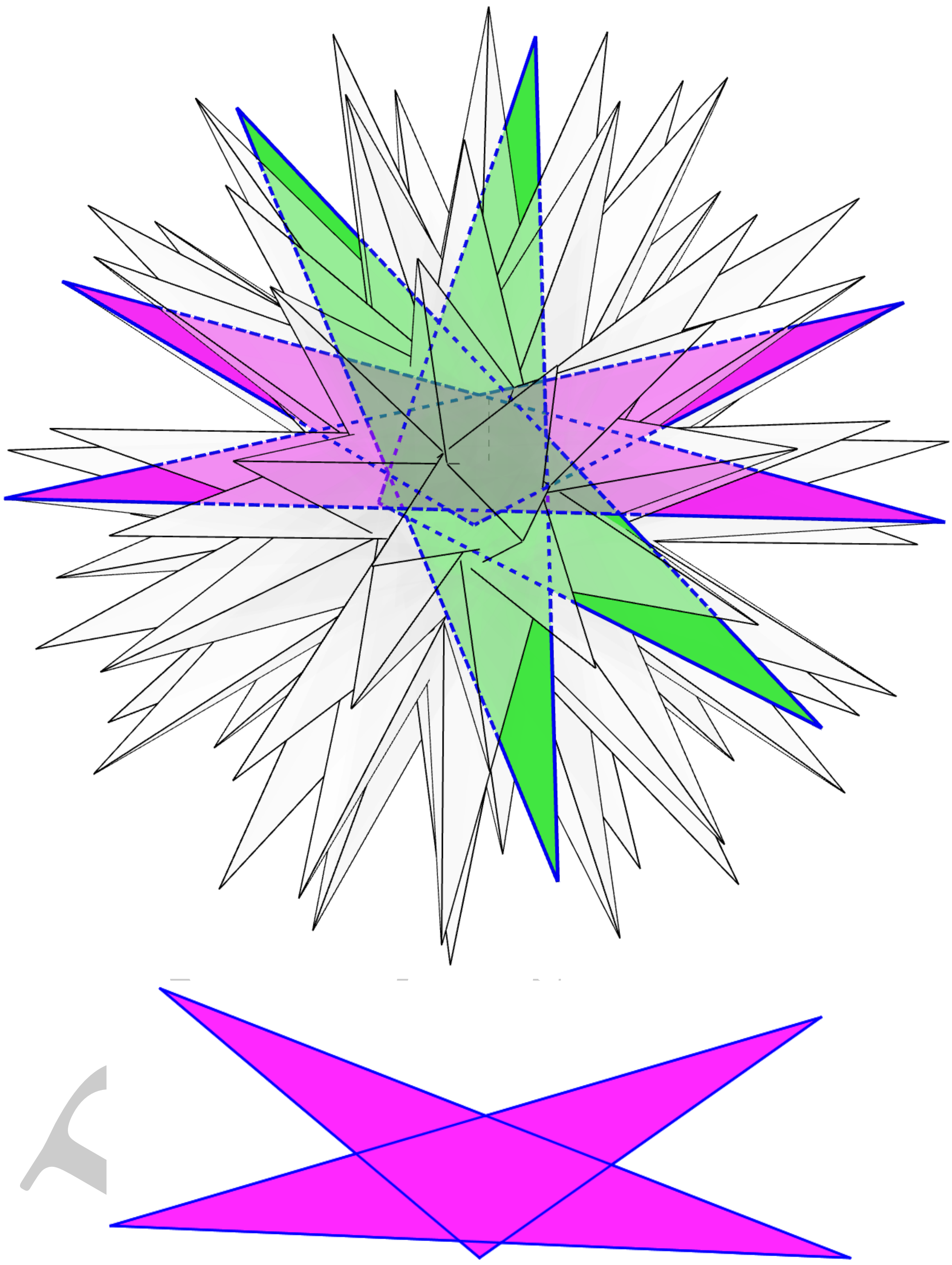


Figura 4.91: *DU74: particolare di due facce intersecantesi e tipo di faccia*

5 Prismi e antiprismi

5.1 Introduzione

Abbiamo già trattato, nel fascicolo sui poliedri semiregolari, i prismi e gli antiprismi: come allora evidenziato, si tratta di due famiglie infinite di solidi con le stesse caratteristiche dei poliedri semiregolari di Archimede. I prismi hanno come duali le bipiramidi (note anche come diamanti), gli antiprismi i trapezoedri (noti anche come antidiamanti).

Ci vogliamo ora brevemente occupare di altre tre famiglie infinite, che hanno le caratteristiche generali dei poliedri uniformi e che dunque, rispetto ai prismi e antiprismi possono avere come basi poligoni stellati e facce intersecantesi. Si tratta delle seguenti tre famiglie:

— prismi con basi un poligono stellato;
— antiprismi con basi un poligono stellato;
— antiprismi incrociati con basi un poligono stellato.

Abitualmente nell'elenco dei poliedri uniformi si aggiunge un rappresentante (precisamente quello con basi poligoni di cinque lati) per ciascuna di queste famiglie infinite, con i numeri da $U76$ a $U80$:

— $U76$: prisma pentagonale;
— $U77$: antiprisma pentagonale;
— $U78$: prisma pentagrammico;
— $U79$: antiprisma pentagrammico;
— $U80$: antiprisma pentagrammico incrociato.

Nelle pagine che seguono proponiamo le immagini di questi cinque poliedri e dei loro duali, rimandando, per una trattazione dettagliata delle caratteristiche e delle tecniche costruttive, alla discussione svolta nel capitolo 2 del fascicolo sui poliedri semiregolari.

La scelta dei poliedri con basi poligonali a cinque lati come rappresentanti è dettata dal fatto che essi possono essere considerati, in un certo senso, "capostipiti". Infatti i casi di basi triangolari e quadrate sono molto speciali:

— per le basi triangolari il prisma e il suo duale sono due poliedri diversi rispetto agli altri poliedri uniformi (*prisma triangolare* e *bipiramide triangolare*), mentre l'antiprisma triangolare e il suo duale sono semplicemente l'ottaedro e il cubo;
— per le basi quadrate il prisma e il suo duale sono semplicemente il cubo e l'ottaedro e solo l'*antiprisma quadrato* e il suo duale, il *trapezoedro tetragonale*, sono poliedri diversi rispetti agli altri poliedri uniformi.

Bisogna infine ricordare che per basi triangolari e quadrate non esiste la possibilità di costruire poligoni stellati regolari: come ben sappiamo il primo di tali poligoni è il pentagramma.

5.2 I poliedri da U76 a U80

5.2.1 U76 e DU76: prisma e bipiramide pentagonali

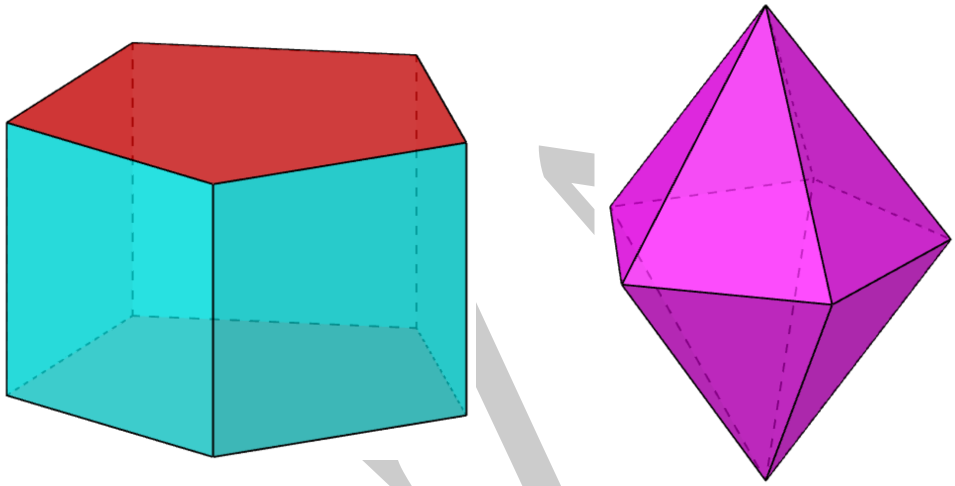


Figura 5.1: *U76 e DU76: prisma e bipiramide pentagonali*

5.2.2 U77 e DU77: antiprisma e trapezoedro pentagonali

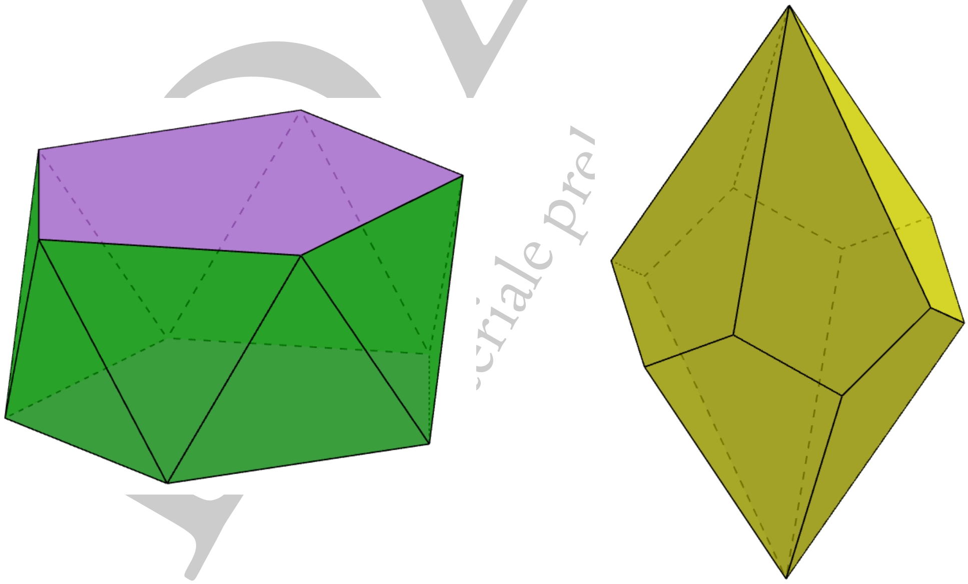


Figura 5.2: *U77 e DU77: antiprisma e trapezoedro pentagonali*

5.2.3 U78 e DU78: prisma e bipiramide pentagrammici

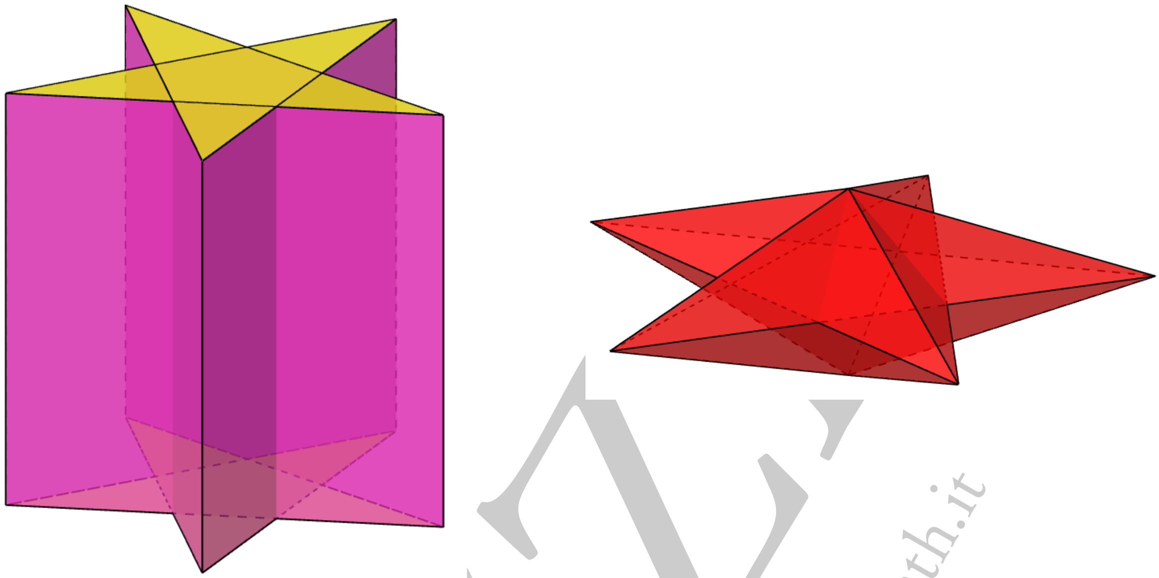


Figura 5.3: *U78 e DU78: prisma e bipiramide pentagrammici*

5.2.4 U79 e DU79: antiprisma e deltoedro pentagrammici

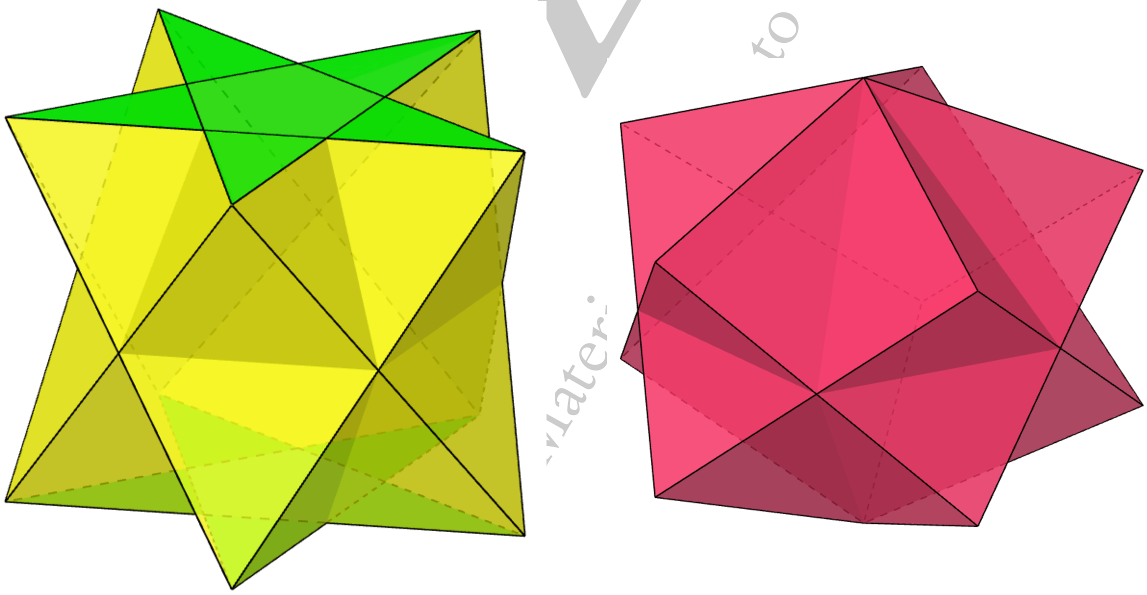


Figura 5.4: *U79 e DU79: antiprisma e trapezoedro pentagrammici*

5.2.5 U80 e DU80: antiprisma pentagrammico incrociato e deltoedro pentagrammico concavo

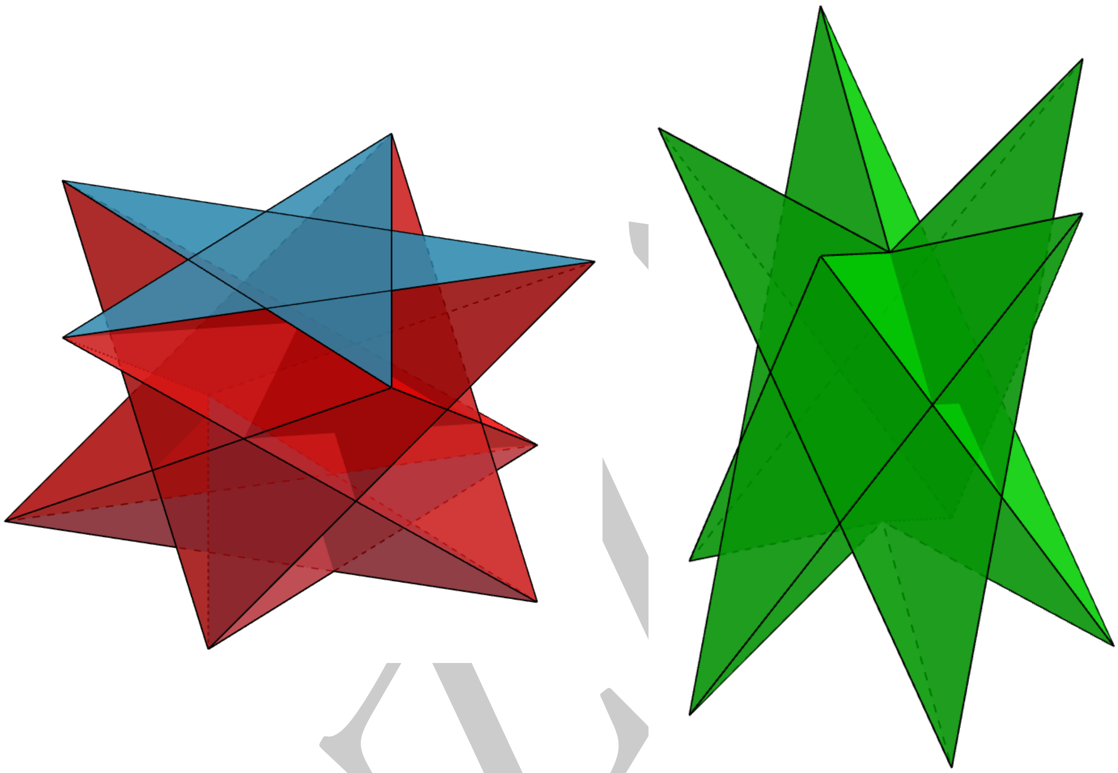


Figura 5.5: *U80 e DU80: antiprisma pentagrammico incrociato e deltoedro pentagrammico concavo*

Bibliografia

[1] Fabio Acerbi. *EUCLIDE Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007.

[2] Eric Aiton, Judith V. Field e A.M. Duncan. *The Harmony of the World by Johannes Kepler*. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.

[3] Tomaso Aste e Weaire Denis. *The Ppursuit of perfect Packing*. New York: Taylor & Francis Group, 2008.

[4] Jean Paul Albert Badoureau. «Mémoire sur les figures isoscèles». In: *Journal de l'École polytechnique* 49 (1881), pp. 47–172 (cit. a p. 33).

[5] Daniel Barbaro. *La pratica della Perspectiva*. Venezia: Camillo e Rutilio Borgominieri, 1669.

[6] Marcel Berger. *Géométrie vivante ou L'échelle de Jacob*. Paris: Cassini, 2009.

[7] Max Bruckner. *Vielecke und Vielflache*. Leipzig: Teubner, 1900 (cit. a p. 27).

[8] Richard Buckminster Fuller. *Synergetics - Explorations in the Geometry of Thinking*. London: Macmillan Publishing, 1975.

[9] Francis Buekenhout e Monique Parker. «The number of nets of the regular polytopes in dimension ≤ 4». In: *Discrete Mathematics* 186 (1998).

[10] Federico Commandino. *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*. Bologna: Ex Typographia HH. de Duccijs, 1660.

[11] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Introduction to Geometry - Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.

[12] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Regular Polytopes*. London: Methuen & Co. Ltd., 1948.

[13] Harold Scott MacDonald Coxeter e Rouse Ball. *Matematical Recreations and Essays*. New York: The Macmillan Company, 1947.

[14] Harold Scott MacDonald Coxeter e Patrick Du Val. *The Fifty-Nine Icosahedra*. New York: Springer, 1982 (cit. alle pp. 1, 5, 20).

[15] Harold Scott MacDonald Coxeter e Samuel Greitzer. *Geometry Revisited*. New York: The Mathematical Association of America, 1967.

[16] Harold Scott MacDonald Coxeter, Michael Selwyn Longuet-Higgins e Jeffrey Charles Percy Miller. «Uniform Polyhedra». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. A 246.916 (1954), pp. 401–450 (cit. a p. 34).

[17] Keith Critchlow. *Order in space, a design source book*. New York: Thames e Hudson Inc., 1987.

[18] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer e Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. New York: Springer, 1991.

[19] Peter R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997 (cit. a p. 21).

[20] Henry Martin Cundy e A.P. Rollett. *Mathematical Models*. Oxford: Oxford University Press, 1961 (cit. a p. 18).

[21] Maria Dedó. *Forme, simmetria e topologia*. Bologna: Zanichelli, 1999.

[22] Albrecht Dürer. *Underweisung der Messung*. Nuremberg: Hieronymus Formschneyder, 1538.

[23] Robert Ferréol. *Encyclopédie des formes remarquables, Courbes, Surfaces, Fractals, Polyèdres*. 2017. URL: http:\\www.mathcurve.com.

[24] Judith V. Field. «Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler». In: *Archive for History of Exact Sciences* 50 (1997).

[25] Martin Gardner. «On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving». In: *Scientific American* 232.5 (1975).

[26] Francesco Giovannetti. *Le tassellazioni dello spazio*. Capitolo 8 del laboratorio didattico-scientifico *Poliedri in pezzi*. 2012. URL: http://www.labfrancoconti.it/public/lab_conti/LAB/DOCUMENTAZIONE/08-Letassellazionidellospazio.pdf.

[27] Michael Goldberg. «A class of Multi-Symmetric Polyhedra». In: *Tohoku Mathematical Journal* 42 (1937).

[28] Michael Goldberg. «Unstable Polyhedral Structures». In: *Mathematics Magazine* 51 (1978).

[29] Branko Grümbaum. *Convex Polytopes*. New York: Springer, 2003.

[30] Adolf Edmund Hess. «Über vier Archimedeische Polyeder höherer Art». In: *Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg* 11.4 (1878), pp. 261–271 (cit. a p. 33).

[31] Wenzel Jamnitzer. *Perspectiva Corporium Regularium*. Nuremberg: Jost Amman, 1568 (cit. a p. 11).

[32] Normann Johnson. «Convex Solids with Regular Faces». In: *Canadian Journal of Mathematics* 18 (1966).

[33] Jay Kappraf. *Connections - The Geometric Bridge Between Art and Science*. Singapore: World Scientific, 2001.

[34] Miyuki Kawamura. *Polyhedron Origami for Beginners*. Tokyo: Nihon Vogue Company, 2001.

[35] Giovanni Keplero. *Harmonices Mundi*. Linz, Austria: Johannes Planck, 1619.

[36] Lazar Aronovich Lyusternik. *Convex Figures and Polyhedra*. Boston: D.C.Heath e Company, 1966.

[37] John Montroll. *A Constellation of Origami Polyhedra*. New York: Dover Publications, 2004.

[38] John Montroll. *A Pletora of Polyhedra in Origami*. New York: Dover Publications, 2002.

[39] Edith Mooers. *Tammes's Problem*. 1994. URL: http://www.uvm.edu/pdodds/files/papers/others/1994/mooers1994a.pdf.

[40] Luca Pacioli. *Divina proportione*. Venezia: Paganio Paganino, 1509.

[41] Clifford Alan Pickover. *The Mαth βook*. New York: Sterling Publishing, 2009.

[42] Johann Pitsch. «Über Halbreguläre Sternpolyeder». In: *Zeitschrift für das Realschulwesen* 6 (1881), pp. 9–24, 64–65, 72–89, 216 (cit. a p. 33).

[43] Edward S. Popko. *Divided Shperes*. New York: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2012.

[44] Anthony Pugh. *Polyhedra, a visual approach*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1976.

[45] David S. Richeson. *Euler's Gem - The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2008.

[46] Jean Francois Rotgé. «Rotating Polyhedra with Congruent Plane Pentagonal Faces». In: *Structural Topology* 9 (1984).

[47] Marjorie Senechal. *Shaping Space*. New York: Springer, 2013.

[48] John Skilling. «The complete Set of Uniform Polyhedra». In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. A 278.1278 (1975), pp. 111–135 (cit. a p. 34).

[49] S.P. Sopov. «A proof of the completeness of the list of elementary homogeneous polyhedra». In: *Ukrainskii geometricheskii sbornik* 8 (1970), pp. 139–156 (cit. a p. 34).

[50] Walter Steurer e Sofia Deloudi. *Crystallography of Quasicrystals - Concepts, Methods and Structures*. Berlin: Springer, 2009.

[51] Alicia Boole Stott. «Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings». In: *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* XL.1 (1910).

[52] Geneviève Tulloue. *Figures animées pour la Physique*. 2017. URL: http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/.

[53] Eric W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, 2003.

[54] David Wells. *The Penguin Dictionary of curious and interesting Geometry*. London: Penguin Books, 1991.

[55] Magnus Joseph Wenninger. *Dual Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983 (cit. alle pp. 34, 127).

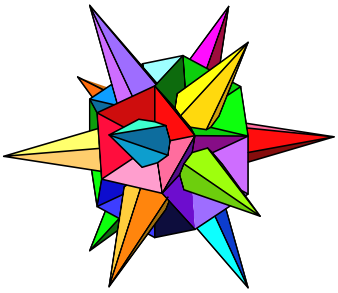
[56] Magnus Joseph Wenninger. *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971 (cit. a p. 1).

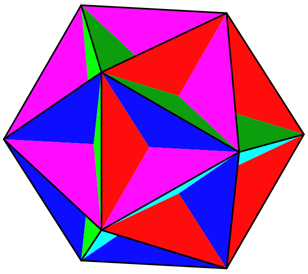
[57] Magnus Joseph Wenninger. *Spherical Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

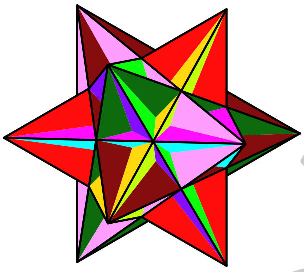
[58] Robert Williams. *The Geometrical Foundation of Natural Structure - A Source Book of Design*. New York: Dover Publications, 1972.

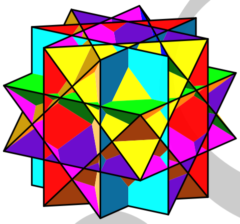
Indice analitico

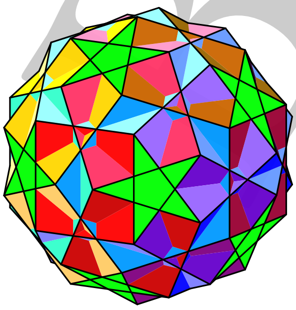
In ultima di copertina: *la "sesta stellazione" dell'icosaedro, il grande dodecaedro, il grande icosaedro, il grande rombicubottaedro (non convesso), il rombidodecaedro*.











Fantastici Poliedri

4 - Solidi di Keplero-Poinsot - Stellazioni

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 22 maggio 2019

Questo fascicolo fa parte di una serie dedicata ai poliedri. Non si tratta di una pubblicazione teorica, quanto piuttosto di una raccolta di immagini e di indicazioni grafiche sulle tecniche costruttive. La maggior parte delle immagini sono realizzate esclusivamente con LaTeX e il pacchetto grafico Tikz.

Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.